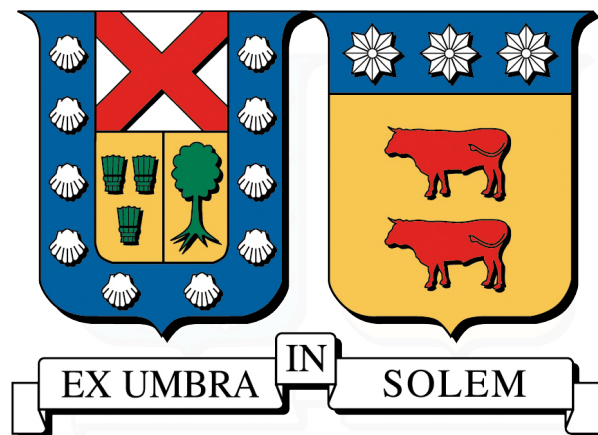


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
VALPARAÍSO - CHILE



**OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIO MEDIANTE ESTRATEGIA DE
MARKOWITZ APLICANDO MODELOS GARCH, TEORÍA DE VALOR
EXTREMO Y CÓPULAS MULTIVARIADAS EN PRONÓSTICO DE
SERIES**

FELIPE IGNACIO TORREALBA MUÑOZ

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA : SR. WERNER KRISTJANPOLLER -
PROFESOR CORREFERENTE : SR. KEVIN MICHELL -

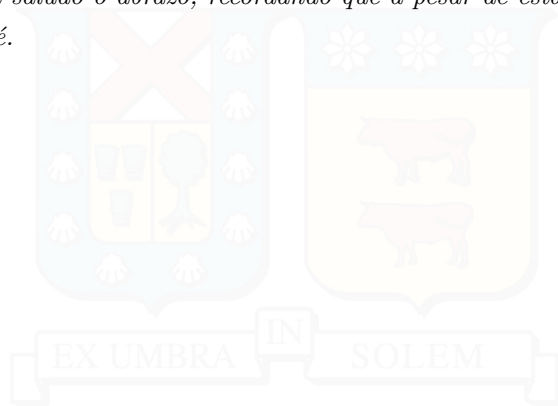
2019



Dedicado a Patricio y Marcela.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia y amigos que me acompañaron, guiaron, apoyaron e inspiraron en este largo proceso. Quienes estuvieron conmigo en los buenos y malos momentos, dando apoyo de alguna u otra forma, con un saludo o abrazo, recordando que a pesar de estar tan lejos de casa nunca estuve solo y nunca lo estaré.



RESUMEN EJECUTIVO

El siguiente trabajo versa sobre una metodología propuesta para la optimización de cartera de acciones compuesta por modelos ARMA GARCH, aplicando la Teoría de Valor Extremo (EVT) y cópulas multivariadas para el pronóstico de un valor representativo de cada serie de tiempo para utilizarlo en lugar de la media en la optimización de la cartera. Las acciones utilizadas fueron extraídas de una muestra de 49 acciones del mercado chileno con mayor volumen de transacción, utilizándose finalmente 40 de ellas. Tras comparar los distintos modelos propuestos, ARMA GARCH y GARCH, ambos con EVT, cópulas multivariadas y el uso de Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) para los distintos criterios de optimización, se concluye según las funciones de pérdida MAPE, sMAPE y RMSE que el modelo propuesto que genera menor error según el benchmark con data histórica, son los GARCH EVT cópula, es decir con ecuación de la media constante, dando elección al inversionista sobre que tipo de cópula a utilizar según su postura frente al riesgo y retorno esperado.

Palabras Clave. ARMA, GARCH, Cartera de Activos, EVT, Cópula, Serie de Tiempo, Acción, Mercado Chileno, EWMA, Función de Pérdida, Riesgo, Retorno Esperado.



Índice de Contenidos

1. Problema de Investigación	1
1.1. Objetivos	4
1.1.1. Objetivos Generales	4
1.1.2. Objetivos Específicos	4
2. Marco Teórico	5
2.1. Mercado Bursátil Chileno	5
2.2. Volatilidad Histórica	6
2.2.1. Series de Tiempo	6
2.3. Modelos	7
2.3.1. Modelo ARIMA	7
2.3.2. Modelo Integrado	8
2.3.2.1. Prueba de Dickey-Fuller Aumentada	8
2.3.3. Modelo GARCH	9
2.4. Teoría de Valor Extremo	10
2.5. Cópulas Multivariadas	10
2.6. Estrategia de Portafolio de Markowitz	11
2.6.1. Índice de Sharpe	13
2.6.2. Mínima Varianza Global	14
2.6.3. Máximo Retorno	14
2.7. EWMA	15
3. Data	17
3.1. Selección de Acciones	17
4. Metodología	19
4.1. Procesamiento de Datos	19
4.1.1. Caracterización de Series	19
4.1.2. Estimación de Modelo ARMA-GARCH	21
4.1.3. Teoría de Valor Extremo	22
4.1.4. Calibración de Cópulas	25
4.1.5. Pronóstico	25
4.1.6. Estimación de Rentabilidad	26
5. Benchmark	27
5.1. Data Histórica	27
5.2. Rentabilidad Acumulada	27
5.3. Funciones de Pérdida	31
5.3.1. RMSE	31
5.3.2. MAPE	31
5.3.3. sMAPE	32
6. Resultados	33
6.1. Benchmark Máximo Retorno	34
6.2. Benchmark Máximo Retorno EWMA	35
6.3. Benchmark Mínima Varianza Global	36
6.4. Benchmark Mínima Varianza Global EWMA	37
6.5. Benchmark Índice de Sharpe	38

6.6. Benchmark Índice de Sharpe EWMA	39
7. Conclusiones	41
7.1. Recomendaciones	42
Bibliografía	43
A. Anexo	47



Índice de Tablas

3.1. Resumen Estadístico, Fuente: Elaboración Propia.	17
4.1. Resumen Estadístico, Fuente: Elaboración Propia.	19
4.2. Parámetros de modelos GARCH y ARMA-GARCH para los retornos logarítmicos de las series de acciones, Fuente: Elaboración Propia.	21
4.3. Parámetros EVT estimados para errores estandarizados de modelo GARCH y ARMA-GARCH, Fuente: Elaboración Propia.	23
5.1. Rentabilidad Acumulada, Fuente: Elaboración Propia.	27
6.1. Funciones de pérdida para optimización según Máximo Retorno, Fuente: Elaboración Propia.	34
6.2. Funciones de pérdida para optimización según Máximo Retorno y Varianza EWMA, Fuente: Elaboración Propia.	35
6.3. Funciones de pérdida para optimización según Mínima Varianza Global, Fuente: Elaboración Propia.	36
6.4. Funciones de pérdida para optimización según Mínima Varianza Global y Varianza EWMA, Fuente: Elaboración Propia.	37
6.5. Funciones de pérdida para optimización según Índice de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.	38
6.6. Funciones de pérdida para optimización según Índice de Sharpe y Varianza EWMA, Fuente: Elaboración Propia.	39
A.1. Resumen de memotecnia y reseña de empresas utilizadas en estudio.	47



Índice de Figuras

4.1. CDF empírica para serie de retornos de HABITAT	24
4.2. Evaluación del ajuste de la GPD	25
5.1. Comportamiento de retorno esperado a través del tiempo para portafolio según Índice de Sharpe.	28
5.2. Comportamiento del riesgo a través del tiempo para portafolio según Índice de Sharpe. .	28
5.3. Comportamiento de retorno esperado a través del tiempo para portafolio según Mínima Varianza Global.	29
5.4. Comportamiento del riesgo a través del tiempo para portafolio según Mínima Varianza Global.	29
5.5. Comportamiento de retorno esperado a través del tiempo para portafolio según Máximo Retorno.	30
5.6. Comportamiento del riesgo a través del tiempo para portafolio según Máximo Retorno. .	30
5.7. Ejemplo de comportamiento de MAPE y sMAPE para valor teórico constante de 100. .	32



1 | Problema de Investigación

El saber qué acontecerá en el futuro siempre ha sido uno de los anhelos más grandes del ser humano. En su búsqueda ha incursionado por diversas áreas, con el fin de anteponerse a eventos desfavorables y sacar provecho de los favorables.

De esta forma se introduce la Estrategia de Markowitz, que busca optimizar los pesos de la cartera con el fin de obtener el mayor retorno posible sujeto al menor riesgo, en esta materia se han llevado a cabo diversos estudios alrededor del mundo, pero lo que acontece en este trabajo, junto con la propuesta a realizar es lo que se ha hecho en Chile y Latinoamérica respecto a estrategias de portafolio.

[Dueñas Ortiz et al. \(2017\)](#) buscan analizar el rendimiento y riesgo de un portafolio de inversión compuesto por los activos financieros que se transan en la Bolsa de Valores de Colombia, para un período de cinco años desde junio de 2012 hasta julio de 2017. En este trabajo se aplicó la teoría de Harry Markowitz ([Markowitz \(1952\)](#)) que busca conformar un portafolio de inversiones diversificado que permite obtener la máxima rentabilidad controlando el riesgo, se tomaron ocho acciones de diferentes sectores de la economía colombiana que se negocian en la bolsa. Los resultados del trabajo no fueron los esperados puesto que los activos seleccionados para el análisis eran de comportamiento similar, es decir, poseían una correlación positiva cercana a uno, junto con esto, la época de análisis se encontraba marcada por un bajo rendimiento de los activos financieros por la caída del crudo, esto evidencia que a pesar de tener un buen modelo propuesto, existen variables externas que merman un óptimo rendimiento de la cartera.

Presentando métodos alternativos en la evaluación del riesgo para portafolios de inversión, [Johnson \(2005\)](#), académico de la Universidad Adolfo Ibáñez presenta su trabajo cuyo objetivo era como se acaba de mencionar presentar de manera clara métodos alternativos de evaluación de riesgo para portafolios con múltiples activos. Aplicando simulaciones de Monte Carlo, tracking error, teoría de valores extremos (EVT), valor al riesgo (Value at Risk, VaR) y análisis de retorno total a portafolios ficticios. En este trabajo dedicado principalmente al comportamiento del riesgo, se encontraron diversos métodos, cada uno con ventajas y desventajas. En la medida que el portafolio no contenga activos no lineales como opciones, se recomienda usar métodos simples como la simulación con data histórica, las cuales generan una matriz de riesgos con base en los retornos históricos. Sin embargo si el portafolio contiene activos no lineales, es recomendable utilizar el método de simulación Monte Carlo, el cual tiene la desventaja de demandar alto recurso computacional.

En 2007 hubo un giro inesperado e innovador en la optimización de portafolios, [Urzúa et al. \(2014\)](#) propone optimizar un portafolio a través de un micro algoritmo genético utilizando acciones

que se transan en la bolsa de valores de Santiago de Chile entre 1996 y 2005. La investigación muestra que mediante el micro algoritmo genético se puede abordar la optimización como una de carácter de multi-objeto, en donde se maximiza la rentabilidad y se minimiza el riesgo, lo que implica realizar una negociación entre ambos objetivos y buscar soluciones óptimas. La resolución de este problema requiere de un algoritmo genético para la optimización multi-objeto basado en óptimos de Pareto. Los resultados obtenidos señalan que la aplicación es más eficiente que otros procesos de similares características (Non-dominated Sorting y Archive Evolution Strategy(PAES)), lamentablemente en el mercado chileno la información histórica era escasa para los requerimientos del modelo.

[Kristjanpoller Rodríguez y Liberona Maturana \(2010\)](#) se enfocan en el análisis de modelos de predicción de retornos financieros. En particular se estudian el modelo CAPM, el modelo Reward Beta y el modelo de tres factores de Fama French. El objetivo es poder determinar mediante el análisis qué modelo explica de mejor manera los resultados accionarios chilenos. Las pruebas son realizadas bajo el procedimiento de formación de portafolios, bajo la metodología de [Fama y French \(1992, 1995, 1996\)](#) y en la regresión de dos pasos utilizada por [Fama y MacBeth \(1973\)](#) y adaptada en el desarrollo del modelo Beta Reward por [Bornholt \(2007\)](#). Se concluye que el mejor modelo de predicción de retornos para el mercado accionario chileno es el modelo de tres factores de Fama y French.

Los mercados accionarios representan un enorme desafío para los inversionistas, ya que la dinámica que presentan los precios de estos mercados está gobernada por múltiples factores. [Urzúa et al. \(2012\)](#) analizan en su artículo portafolios de inversión con títulos de accionarios del mercado chileno usando el modelo de media varianza propuesto por [Markowitz \(1952\)](#), particularmente, mediante la utilización de la matriz de varianza-covarianza no condicional y condicional, donde esta última es estimada a través de modelos GARCH. Posteriormente se evalúa el desempeño de estas carteras usando como referente un portafolio de mercado representado por el índice general de precio de acciones (IGPA) de la bolsa de comercio de Santiago de Chile. Se obtuvieron carteras de inversión que proporcionaron cierto grado de cobertura frente al riesgo, evitando pérdidas mayores a las que tiene el mercado.

Por otro lado la información acerca del modelo a implementar, cómo se desarrolló y quiénes fueron los principales responsables de su implementación, el ARMA GARCH EVT cópula.

La aplicación de modelos GARCH EVT cópula para la gestión de riesgo ha sido foco de varios estudios previos. Por ejemplo, un estudio hecho por [Wang et al. \(2010\)](#) usando tres modelos de cópulas para estimar el riesgo de invertir en moneda extranjera. De esas cópulas, dos Clayton y la t -student presentan una mejor estimación de correlación entre los tipos de cambio de la moneda extranjera, superando en este ámbito a la cópula gaussiana.

[Berger \(2013\)](#) trabajó en el pronóstico de un portafolio de riesgo medido mediante VaR empleando una cópula dinámica con correlación condicional (DCC) variable en el tiempo en combinación con EVT, lo que lleva a una mejor estimación que la cópula estática. Además un modelo semi paramétrico GARCH EVT cópula propuesto por [Koliai \(2016\)](#), quien realizó pruebas de estrés en portafolios y descubrió que diferentes modelos afectan los escenarios de estrés de diferentes maneras.

En otro estudio, basado en DCCGARCH con cópulas pero sin EVT, dos métodos de optimización de portafolios dinámicos y robustos son considerados y comparados con portafolios no robustos (Han et al. (2017)). Varios modelos con cópulas más complejos, incluyendo la *regular vine* (R-vine) *canonical vine* (C-vine) y *drawable vine* (D-vine), son examinadas por Zhang et al. (2014) quien usa estas cópulas para el pronóstico de VaR y CVaR. El autor concluye que la D-vine es mejor que las otras cópulas en termino de pronóstico de CVaR. Bhatti y Nguyen (2012) sugiere el uso de EVT condicional y cópulas dinámicas para modelar la dependencia de las colas entre los mercados. Wang et al. (2010) usa los modelos GARCH EVT cópula para evaluar el riesgo en el tipo de cambio. Ellos se concentran en las cópulas *t*-student, gaussiana y las Clayton, y, en correspondencia con Huang et al. (2009), quien implementó el modelo GARCH cópula y el GJRGARCH cópula para estimar el VaR de un portafolio de índices de mercado, ante los resultados obtenidos, se evidencia que la cópula *t*-student provee una mejor estimación del VaR comparado con los otros modelos con cópulas.

Otros estudios de los modelos GARCH EVT cópula se enfocan en pronosticar y analizar resultados del riesgo a la baja (riesgo asociado a las pérdidas). Sin embargo, algunos estudios se han usado no sólo para modelar riesgo, si no también para la optimización de portafolio y el back-testing. Por ejemplo, Huang y Hsu (2015) consideró dos modelos GARCH EVT cópula con cópula gaussiana y *t*-student para la simulación retornos futuros de las acciones dentro de un mercado, y usó una ventana rodante para calcular los pesos óptimos de la optimización según Min- CVaR para un período hacia adelante. Además también realizó cuatro estrategias de balance (diaria, semanal, bisemanal y mensual) y evaluó la performance de cada modelo durante los períodos de crisis y después de la crisis. Sus resultados indicaron que las estrategias diarias y semanales basadas en los modelos GARCH EVT cópula superaron a los demás modelos tanto en rentabilidad media anual como en Índice de Sharpe. Otro estudio realizado por Low et al. (2013) empleó la cópula Clayton C-vine para testear la performance de un portafolio basado en minimizar el CVaR.

Siguiendo a Huang y Hsu (2015) y Wang et al. (2010), quienes usaron el modelo GARCH EVT cópula y ARMA GARCH EVT cópula para la realización de un pronóstico fuera de la muestra y asignación de cartera es que se desarrolló la metodología propuesta, en base a estos autores, su trabajo respecto al modelo ARMA GARCH EVT cópula y estudio de asignación de pesos en carteras de activos es que se abordará la problemática expuesta en el siguiente trabajo.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivos Generales

Construir un portafolio para acciones del mercado bursátil chileno según índice de sharpe, mínima varianza global y máximo retorno con modelo de pronóstico garch-evt-cópula, buscando la mejor performance según el modelo con data histórica.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Presentar de forma clara las temáticas y conceptos del mercado accionarios chileno, teoría de portafolio, modelos garch, teoría del valor extremo y cópulas.
- Caracterizar series de tiempo de activos utilizados para validar uso de modelos garch.
- Realizar un adecuado uso de modelos y herramientas computacionales para evaluar de forma consistente los datos obtenidos.
- Comparar desempeño de los modelos de pronóstico garch-evt-cópula propuestos con caso base de estrategia de markowitz y datos históricos.

2 | Marco Teórico

2.1. Mercado Bursátil Chileno

El 27 de noviembre de 1893 se funda la Bolsa de Santiago, dando un paso trascendental para inyectar vitalidad y dinamismo a la economía nacional. En 1958 Se crea el Índice General de Precios de Acciones (IGPA) que considera a casi la totalidad de las acciones inscritas y posteriormente en 1977 el Índice de Precios Selectivo de Acciones (IPSA), cuya cartera considera a las 40 acciones con mayor presencia bursátil.

En 1991 La Bolsa se incorpora como miembro a la World Federation of Exchanges (WFE) organismo al que pertenecen las 33 bolsas más importantes del mundo.

En el 2000 La Bolsa de Santiago inaugura el Mercado de Valores Extranjeros para la oferta pública, cotización y negociación de valores extranjeros. Así mismo, se inaugura el Depósito Central de Valores (DCV), nueva administradora de los registros de accionistas de las sociedades anónimas. En 2005 La Bolsa de Santiago, la Bolsa Electrónica y la Bolsa de Corredores de Valparaíso firman acuerdos sobre Intercambio de Información en Línea y Operaciones Interbolsas (OIB). En 2011 Entra en funcionamiento el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA) con Chile, Colombia y Perú como participantes.

En 2014 La Bolsa de Santiago y TSX Venture Exchange (bolsa de valores canadiense) suscriben un acuerdo que conducirá a la creación de un nuevo segmento de Capital de Riesgo, operará bajo el nombre de Bolsa de Santiago. La Bolsa Mexicana de Valores se une al Mercado Integrado Latinoamericano (MILA) con más de 700 valores cotizados entre los cuatro países, MILA es de acuerdo a la WFE, el primer mercado por número de compañías listadas en América Latina y el primero en tamaño de capitalización bursátil.

Finalmente en 2018 Con el objetivo de acceder a una nueva forma de financiamiento de proyectos que buscan generar un impacto positivo en el medio ambiente y en la sociedad, la Bolsa lanzó el nuevo segmento de Bonos Verdes y Sociales, realizándose tres emisiones de bonos en dicho mercado durante el año 2018 ([Bolsa de Santiago](#)).

La Bolsa de Santiago cuenta con diversos mercados, los que en la actualidad transan más de 2.000 millones de dólares diarios en acciones, instrumentos de renta fija, valores de intermediación financiera, cuotas de fondos y títulos extranjeros.

Las acciones son instrumentos de Renta Variable emitidos por sociedades anónimas, que representan un título de propiedad sobre una fracción del patrimonio de la empresa, es decir, el comprador de una acción o accionista pasa a ser propietario de una parte de la empresa emisora. El mercado accionario chileno es un sistema dinámico altamente no lineal, que puede verse afectado por una diversidad de factores, como por ejemplo las tasas de interés, la inflación, el entorno económico y factores políticos ([Romero-Meza et al. \(2007\)](#)), constituyendo el tercer mercado latinoamericano con mayor volumen de transacciones ([Kristjanpoller y Caballero \(2012\)](#)).

La Bolsa de Santiago está inserta en el mercado de valores de Chile y está regulada de forma directa por

la Comisión para el Mercado Financiero. De acuerdo a las características de este mercado, interactúa con diferentes entidades, tales como emisores de valores, bancos, compañías de seguros, AFP, fondos mutuos y de inversión, las cuales, son a su vez, reguladas y normados por distintos organismos, como la Superintendencia de Bancos, la Superintendencia de valores y seguros, la misma Bolsa de Santiago, entre otros.

La superintendencia de la bancos e instituciones financieras es una institución autónoma y una entidad legal conectada al gobierno por el ministerio de hacienda, entre sus responsabilidades está la inspección de compañías bancarias y entidades financieras cuyo control no esté asignado por ley a otra institución, el banco está exento de esta inspección.

La Superintendencia de Valores y Seguros (SVS) es una institución autónoma, con personalidad jurídica y patrimonio propio, que se relaciona con el Gobierno a través del Ministerio de Hacienda. Tiene por objeto la fiscalización de las actividades y entidades que participan de los mercados de valores y de seguros en Chile. Así, a la SVS le corresponde velar porque las personas o instituciones supervisadas, desde su iniciación hasta el término de su liquidación, cumplan con las leyes, reglamentos, estatutos y otras disposiciones que rijan el funcionamiento de estos mercados.

Finalmente los principales objetivos de la bolsa Santiago son, facilitar el flujo de hora e inversión en el mercado de capitales, promover la libre determinación de precios y la transparencia de las operaciones, regular y supervisar las operaciones de mercado y proveer servicio, sistema e infraestructura para los corredores de bolsa y participantes del mercado bursátil (de Comercio (2010)).

2.2. Volatilidad Histórica

El comportamiento volátil de los mercados financieros está referido como volatilidad. La volatilidad se ha convertido en un concepto importante en diferentes áreas de ingeniería financiera, como la teoría del portafolio, la gestión del riesgo y el precio de los derivados. Además, en el modelamiento de precios de activos se utiliza la volatilidad como una estimación simple de medida de riesgo. En estadística, la volatilidad usualmente es medida como la desviación estándar o varianza Daly (2008).

2.2.1. Series de Tiempo

Una serie de tiempo es una colección de datos tomada a lo largo del tiempo, es decir datos de corte longitudinal. El objetivo principal del uso de series de tiempo es controlar, predecir y analizar el comportamiento de algún proceso. Los pronósticos de los métodos de series de tiempo se basan en patrones históricos de los datos, sin ser explicados por una variable exógena además del tiempo. Las mediciones son tomadas en puntos sucesivos o períodos sucesivos (cada hora, día, mes, año o cualquier intervalo regular o irregular).

La econometría ha generado una gama muy amplia de modelos que permiten predecir el valor de una variable utilizando modelos regresivos con muchas variables. Sin embargo, esta misma ha creado modelos que trabajan con los datos como series de tiempo como los modelos, las 3 categorías más amplias entre las que se clasifican estos modelos son:

- Modelos Autorregresivos (AR)
- Modelos Inegrados (I)
- Modelos de Medias Móviles (MA)

El análisis o los pronósticos obtenidos mediante los métodos anteriores por separado pueden ser buenos en etapas exploratorias con el fin de más o menos tener una noción del comportamiento de la variable que se quiere analizar. Sin embargo, existen métodos más precisos para pronósticos de series de tiempo, estos modelos integran o mezclan a los modelos por separado explicitados anteriormente, como por ejemplo los modelos ARMA, ARIMA [Rojas et al. \(2008\)](#).

2.3. Modelos

2.3.1. Modelo ARIMA

El modelo ARIMA(p,d,q) (Autoregressive Integrated Moving Average) es una generalización del modelo ARMA (Autoregressive Moving Average) que fue propuesto por primera vez en la tesis de [Whittle \(1951\)](#) y popularizado por [Box et al. \(1970\)](#). El modelo ARMA(p,q) es utilizado para el análisis y modelamiento de series de tiempo estacionarias, es decir, que la distribución de probabilidad no cambie en el largo plazo. Dicho lo anterior, tampoco debe variar su media y varianza si es que existen. El modelo ARMA (2.3) consiste en la sumatoria de dos polinomios, el primero (AR(p)) que posee los rezagos de la variable (auto-regresores) hasta algún tiempo p en el pasado (2.1). El segundo polinomio (MA(q)) corresponde a las medias móviles que corresponde a ruidos blancos o “shocks” hasta algún tiempo q en el pasado (2.2). Si bien es [Box et al. \(2015\)](#) los modelos se expresan de manera distinta (sin término constante), se utilizará la nomenclatura de Eviews 8 (añade el término constante):

$$y_t = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i \cdot y_{t-i} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

$$y_t = \mu_0 + \sum_{j=1}^q \mu_j \cdot \epsilon_{t-j} + \epsilon_t \quad (2.2)$$

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \omega_i \cdot y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \mu_j \cdot \epsilon_{t-j} + \epsilon_t \quad (2.3)$$

Donde y_t corresponde al valor de la serie en el tiempo t , y_{t-i} al valor de la serie en un tiempo $t - i$, ω_0 corresponde a la constante, ω_i a parámetros a estimar por el método de mínimos cuadrados ordinarios, mientras que ϵ_t corresponde al error (ruido blanco) en el tiempo t , μ_0 y c corresponde a una constante, μ_j corresponde a los parámetros a estimar por mínimos cuadrados y ϵ_{t-j} a error (ruido blanco) en el tiempo $t - j$.

2.3.2. Modelo Integrado

Algunas series pueden ser no estacionarias en su variable nivel, este es el caso del uso del modelo ARIMA, la I en ARIMA sugiere que el serie debe diferenciarse d veces para que la serie fuera estacionaria. Luego de hacer la serie estacionaria, se trabaja con el modelo ARMA. La manera de calcular la primera diferencia (2.4) la segunda diferencia (2.5) y la d -ésima diferencia (2.6).

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \quad (2.4)$$

$$\Delta^2 y_t = y_t - y_{t-1} \quad (2.5)$$

$$\Delta^d y_t = (1 - L)^d y_t \quad (2.6)$$

Donde Δy_t corresponde a la primera diferencia de la serie, $\Delta^2 y_t$ la segunda diferencia de la serie y $\Delta^d y_t$ a la d -ésima de diferencia de la serie. Por otro lado, L corresponde al operador "lag", por lo que $Ly_t = y_{t-1}$, $L^2 y_t = y_{t-2}$, y así sucesivamente.

2.3.2.1. Prueba de Dickey-Fuller Aumentada

Para determinar si una serie es estacionaria o no en su nivel, es necesario realizar una prueba de raíz unitaria, las que de existir indicarían que la serie no es estacionaria. De esta manera, la cantidad de raíces unitarias será la cantidad de veces que será necesario diferenciar la serie para obtener una serie estacionaria.

La prueba o test propuesto por [Dickey y Fuller \(1979\)](#) permite determinar la presencia de raíces unitarias. El caso más básico de modelo para determinar la presencia de raíces unitarias es con un modelo AR(1). Donde se comienza con el modelo:

$$y_t = \rho y_{t-1} + x_t' \delta + \epsilon_t \quad (2.7)$$

Donde y_t es el valor de la serie en el tiempo t . ρ parámetro, x_t' pueden ser variables exógenas opcionales, ω parámetros opcionales dependiendo de x_t' y ϵ se asume ruido blanco. Luego el modelo (2.7) se le resta a ambos lados y_{t-1} obteniéndose:

$$\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + x_t' \delta + \epsilon_t \quad (2.8)$$

Donde la Prueba de Dickey-Fuller aumentada consiste en probar la significancia del parámetro α . La prueba posee hipótesis nula (2.9) e hipótesis alternativa (2.10):

$$H_0 : \alpha = 0 \quad (2.9)$$

$$H_1 : \alpha < 0 \quad (2.10)$$

Cuyo estadístico que distribuye t-Student es de la forma:

$$t_\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{se(\hat{\alpha})} \quad (2.11)$$

Donde $\hat{\alpha}$ es el valor estimado de α , y $se(\hat{\alpha})$ corresponde al error estándar del coeficiente. Al ser significativa la prueba se rechazaría la hipótesis nula, por ende, la serie no tendría raíz unitaria y se consideraría estacionaria. De manera análoga, al no ser significativa la prueba llevaría a inferir que la serie no es estacionaria. Ante esta problemática es como [Engle \(1982\)](#) desarrolla y presenta los modelos ARCH (Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity) para estimar volatilidad en series de tiempo.

2.3.3. Modelo GARCH

Desde el desarrollo del modelo ARCH original se han generado diversas extensiones de este, como el modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) correspondiente a la generalización propuesta por [Bollerslev \(1986\)](#), donde es posible hacer la analogía del modelo AR al ARMA.

Este modelo busca mayor precisión en la predicción del error, como en el modelo ARCH este sólo depende del último valor de σ_t , el modelo GARCH propone considerar los valores pasados de σ_t con menos ponderación los más distantes, introduciendo el parámetro p (orden de modelo GARCH) para los retrasos de la varianza condicional. De esta forma se puede expresar la varianza condicional como:

$$\epsilon_t = z_t \cdot \sigma_t \quad (2.12)$$

$$z_t \approx (i.i.d.)$$

Donde el modelo GARCH(p,q) (2.14) agrega al modelo ARCH (q) (2.13).

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot \epsilon_{t-i}^2 \quad (2.13)$$

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \cdot \sigma_{t-j}^2 \quad (2.14)$$

Donde z_t son los errores estandarizados, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$ parámetros. Mientras que ϵ_{t-i}^2 y σ_{t-j}^2 son el error en un rezago i y la varianza del error en un rezago j .

2.4. Teoría de Valor Extremo

La Teoría del Valor Extremo (EVT) es la rama de la estadística que estudia los eventos asociados a las colas de la distribución, los eventos que producen estos valores pueden ser de alto impacto y muchas veces son desechados al modelar. Dentro del estudio de las series de tiempo relativo a los retornos de activos, la EVT proporciona estimaciones más precisas del riesgo, junto con disminuir la dependencia de las colas al utilizar modelos GARCH para estimar la varianza condicional de las series [Fernández et al. \(2003\)](#). La idea principal tras esta combinación es que la EVT modela de buena forma datos idéntica e independientemente distribuidos, como los residuos que se obtienen mediante modelos GARCH.

El comportamiento de las colas de los retornos de activos pueden ser modeladas por medio de la EVT. El método es conocido como "peak over threshold" (POT), este se basa en extraer los valores de observaciones alcanzados en un período t que excedan un valor límite, de esta forma se involucran dos distribuciones: Distribución de Poisson para el número de observaciones en un período t que excedan ese límite y la Distribución Generalizada de Pareto (GPD) para modelar dichos valores que exceden el límite ([Leadbetter \(1991\)](#)).

De esta forma, la función de distribución marginal para el activo j -ésimo $G_j(z_j)$ (2.15) puede ser obtenida en base a dos distribuciones, la antes mencionada GPD para las colas superior e inferior y Distribución de Kernel Gaussiano para el centro.

$$G_j(z_j) = \begin{cases} \frac{N_{u^L}}{N} \{1 + \xi^L \frac{u^L - z_j}{\beta^L}\}^{-\frac{1}{\xi^L}} & , z_j < -u^L \\ \phi(z_j) & , u^L < z_j < u^R \\ 1 + \frac{N_{u^R}}{N} \{1 + \xi^R \frac{u^R - z_j}{\beta^R}\}^{-\frac{1}{\xi^R}} & , z_j > u^R \end{cases} \quad (2.15)$$

Donde ξ , β , u^R y u^L denotan los parámetros de forma, escala y límites superior e inferior respectivamente.

2.5. Cópulas Multivariadas

Un problema abordado por los estadísticos en el pasado fue el de establecer la relación existente entre una función de distribución multidimensional y sus marginales de cualquier dimensión inferior. Este problema fue desarrollado por varios autores en los años 50, obteniéndose resultados importantes. Varios autores, M. Fréchet, Abe Sklar, entre otros, contribuyeron a la solución del problema. La relación de una función de distribución multidimensional con sus marginales unidimensionales viene dada mediante una función con ciertas características determinadas y a la que Sklar llamó cópula.

Una cópula describe la estructura de dependencia de una variable aleatoria multivariante, mediante las cópulas es posible transformar las variables aleatorias, a través de su distribución acumulada,

en variables uniformemente distribuidas. Resulta por tanto, un instrumento magnífico para simular variables aleatorias con distribuciones marginales dadas, mediante la simulación de variables uniformes con estructuras de correlaciones determinadas. La estructura de dependencia vendrá determinada por las relaciones establecidas entre las distribuciones uniformes.

Sklar (1959) dice que para cualquier función de distribución d -dimensional F con sus distribuciones marginales $F_1, \dots, F_d$, existe una cópula d -dimensional C tal que:

$$\forall z \in \mathbb{R}^d : F(z_1, z_2, \dots, z_d) = C(F_1(z_1), F_2(z_2), \dots, F_d(z_d)) = C(u_1, u_2, \dots, u_d). \quad (2.16)$$

Si todas las distribuciones marginales son continuas, C es única, el inverso también se cumple. En otras palabras, si C es una cópula d -dimensional con $F_1, F_2, \dots, F_d$ funciones de distribución, F es una función de distribución multivariable con distribuciones marginales $F_1, F_2, \dots, F_d$ a lo anterior se le conoce como el Teorema de Sklar. De esta forma y tras las siguientes igualdades $z_j = F_j^{-1}(u_j)$, $u_j \in [0, 1]$, $\forall j$ la cópula C se puede reescribir de la siguiente forma:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_d^{-1}(u_d)) = F(z_1, z_2, \dots, z_d). \quad (2.17)$$

Tras la ecuación (2.17) y la notación $F = \phi_{\sum}$ para la distribución normal estándar multivariable y $F_j(u_j) = \phi(u_j)$, $j = 1, 2, \dots, d$ para la distribución normal estándar univariable, se puede escribir la Cópula Gaussiana de la siguiente forma:

$$C^{Gaussian}(u_1, u_2, \dots, u_d) = \phi_{\sum}(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2), \dots, \phi^{-1}(u_d)) = \phi_{\sum}(z_1, z_2, \dots, z_d). \quad (2.18)$$

Donde $\phi_{\sum}$ denota la distribución normal estándar multivariable, con $\sum$ y ϕ^{-1} matriz de correlación y el inverso de la función de distribución normal acumulada respectivamente.

Si se considera $t_v_{\sum}$ como la distribución t -Student estándar multivariable con matriz de correlación $\sum$, la Cópula t -Student se puede escribir de la siguiente forma:

$$C^t(u_1, u_2, \dots, u_d) = t_v_{\sum}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2), \dots, t_v^{-1}(u_d)) = t_v_{\sum}(z_1, z_2, \dots, z_d). \quad (2.19)$$

Donde v y t_v^{-1} son los grados de libertad y el inverso de la función de distribución t -Student acumulada respectivamente.

2.6. Estrategia de Portafolio de Markowitz

La teoría de portafolio fue desarrollada por Markowitz en la década de los 60's y posteriormente perfeccionada por Sharpe, Lintner, Fama entre otros. Esta teoría explica que el riesgo de un activo individual no deber ser calificado en base a las posibles desviaciones de la rentabilidad esperada, sino en relación a su aporte marginal al riesgo global de la cartera. Según el grado de correlación de este

activo con los demás que componen la cartera, el activo será más o menos riesgoso.

En la Estrategia de Portafolio de Markowitz se consideran dos características en la optimización de portafolio, llamado el retorno esperado y riesgo asociado, el cual se mide a través de la varianza. Esta postula que parte del riesgo de un activo de la cartera no tiene mayor importancia para los inversionistas, ya que se pierde dentro de la cartera en si. Esta teoría postula que dada la existencia de una correlación entre el comportamiento de las acciones de la cartera, el riesgo total de esta puede llegar a ser menor que la suma ponderada de los riesgos de cada acción (Markowitz (1952)).

De esta forma, para n activos en una cartera se establece que el retorno esperado y la varianza se definen de la siguiente manera:

$$E[r] = \sum_{i=1}^n r_i \cdot w_i \quad (2.20)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{i,j} \quad (2.21)$$

Donde r_i representa la rentabilidad del activo i , w_i el peso asignado a dicho activo dentro de la cartera y $\sigma_{i,j}$ la covarianza entre los activos i y j . La varianza puede ser reescrita en dos términos, el primero para el riesgo propio y el segundo para el cruzado.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{i,j} \quad (2.22)$$

El término diversificación nace a partir de esto, reducir el riesgo de la cartera por medio de la inversion en diversos instrumentos financieros (en este caso acciones), en términos simples se refiere a no invertir todo en un mismo activo o industria, de esta forma ante fluctuaciones del mercado, la cartera se verá protegida por la inversion diversificada y la reducción del retorno no será tan grande. En este punto es donde toma gran importancia la correlación entre los activos, cuando la correlación entre los activos es imperfecta (positiva o negativa) la diversificación cumple su propósito. Es importante y efectiva la estrategia de reducción de riesgo cuando esta no compromete el retorno de la cartera (Hight (2010)).

A pesar de esto la diversificación no puede eliminar todo el riesgo de la cartera, en este sentido los inversionistas se enfrentan a dos tipos de riesgo, riesgo sistemático y no sistemático más conocido como riesgo diversificable (Frantz y Payne (2011)). Este tipo de riesgo es el que puede ser eliminado con la diversificación. Por otra parte el riesgo sistemático no puede ser eliminado producto de la diversificación ya que depende de factores externos a la cartera como recesiones, altas tasas de interés, guerras, inflación, factores que afectan de manera transversal al Mercado.

La frontera eficiente o “Frontera Eficiente de Markowitz” es un concepto clave de la “Teoría de Portafolio Moderna” (MPT) esta representa a la mejor combinación de activos que maximiza el retorno para un nivel de riesgo dado. Describe la relación entre el retorno esperado y el riesgo o volatilidad de la cartera. Usualmente se describe mediante una curva o gráfico (McClure (2010)) compuesto por todas las posibles carteras eficientes desde la cartera de minima varianza para un nivel de retorno esperado

hasta de máximo retorno, pasando de esta forma por el punto tangente de la curva donde se obtiene el mayor retorno esperado con el menor riesgo, a este punto se le conoce como Índice de Sharpe.

Finalmente cabe mencionar las limitaciones teóricas que tiene este modelo tales como:

- Inversionistas irracionales – el modelo asume que los inversionistas operan y actúan de manera racional, buscando maximizar el retorno esperado minimizando el riesgo, un ejemplo es el exceso de especulación de los inversionistas, producto de corazonadas o emocionalidades, causando anomalías de Mercado.
- Alto riesgo implica alto retorno - los inversionistas esperan que esta igualdad se cumpla, los más temerarios incurren en inversiones riesgosas para obtener mayores retornos, pero llega un punto en la frontera eficiente donde aumentar el riesgo no implica un aumento de rentabilidad.
- Información perfecta – MPT asume que existe información total y simétrica en el mercado, lo que en la realidad no se cumple, el nivel de información es asimétrico para los inversionistas.
- Ilimitado acceso a capital – se asume que los inversionistas tienen capacidad de préstamos ilimitada y libre de intereses, la realidad es que los inversionistas tienen límites de crédito.
- Sin costo de transacción e impuestos – la teoría de Markowitz no incluye impuestos o costos de transacción, por el contrario, las inversiones reales están sujetas a impuestos y costos transaccionales.
- Libre inversión – se asume que los inversionistas pueden invertir la cantidad deseada según se estime conveniente, la realidad es que el número de acciones que se pueden comprar son números enteros y no fraccionales.
- Independencia de inversión – MPT asume que es posible seleccionar valores cuyo rendimiento no depende de otras carteras, sin embargo se ha demostrado que tales instrumentos no existe, ya que durante períodos de estrés y extrema incertidumbre dichos valores presentan correlación.
- Mercado eficiente – se asume que los mercados se comportan de manera perfectamente eficiente, sin embargo, la dependencia de la MPT por los precios la hacen vulnerable a los caprichos del Mercado tales como ambientales, estratégicos, personales entre otros. Adicionalmente no se considera el hecho de que los mercados pueden fallar sujetos factores externos.

Cabe mencionar que si bien la cantidad de ineficiencias del modelo son varias el método de Markowitz ayuda en la optimización de cartera otorgando información fidedigna cercana a la realidad, también se puede ir mejorando agregando restricciones que consideren las ineficiencias mencionadas para obtener una asignación de recursos óptima. En esta materia hay una infinidad de material dedicado al mejoramiento del proceso de asignación de pesos, en busca de los óptimos según cada cartera.

2.6.1. Índice de Sharpe

Uno de los importantes aportes en esta materia es la maximización del índice de Sharpe, propuesto por [Sharpe \(1963\)](#), este busca el mayor retorno sujeto a un mínimo riesgo. El índice de Sharpe, es definido como el retorno esperado sobre la desviación estándar. Para un portafolio d -dimensional con

retorno de activos $r_t = (r_{t1}, r_{t2}, \dots, r_{td})$, $j = 1, \dots, d$, pesos de activos $w_t = (w_{t1}, w_{t2}, \dots, w_{td})$ y matriz multidimensional $d \times d$ de covarianza Σ al tiempo t , de esta forma se puede escribir el retorno esperado de portafolio y la varianza asociada como $w_t^T r_t$ y $w_t^T \Sigma w_t$ respectivamente. Así es como el portafolio optimizado según índice de Sharpe se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \max_{w_t} \quad & \frac{w_t^T r_t}{\sqrt{w_t^T \Sigma w_t}} && \text{Índice de Sharpe} \\
 \text{s.a.} \quad & w_t^T 1 = 1, && \text{todo se invierte} \\
 & \forall j \in \{1, 2, \dots, d\} : && \\
 & w_{t,j} \geq 0, && \text{sólo posición larga.}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

La optimización según índice de Sharpe entrega el máximo retorno esperado dado un mínimo riesgo, por este motivo es que se considera como el criterio idóneo para la selección de cartera, sin embargo, en la construcción de la línea de mercado de capitales, como punto mayor y menor también se encuentran los portafolios de mínima varianza como cota inferior y máximo retorno como cota superior, es por este motivo que también se realizará la optimización del modelo de markowitz según estos criterios, para comparar estos resultados longitudinalmente y a pesar que no sean los mejores criterios para la selección de pesos óptimos, sí pueden satisfacer las necesidades de inversionistas adversos al riesgo o de los cuales independientes del riesgo busquen sólo la mayor rentabilidad.

2.6.2. Mínima Varianza Global

Otro método de optimización de portafolio es el de Mínima Varianza Global (GMV) propuesto por [Merton \(1980\)](#), quien mostró que la varianza y covarianza estimada del retorno de los activos son fiables y útiles al momento de considerarlos en la optimización. El portafolio de GMV se basa en la minimización de la varianza del portafolio, $w_t^T \Sigma w_t$, la cual es ideal para inversionistas adversos al riesgo quienes no están interesados en maximizar su retorno esperado en la inversión ([Bodnar et al. \(2017\)](#)) si no que mantener un bajo riesgo. En este caso, la optimización de portafolio GMV se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \min_{w_t} \quad & w_t^T \Sigma w_t && \text{Varianza} \\
 \text{s.a.} \quad & w_t^T 1 = 1, && \text{todo se invierte} \\
 & \forall j \in \{1, 2, \dots, d\} : && \\
 & w_{t,j} \geq 0, && \text{sólo posición larga.}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

2.6.3. Máximo Retorno

Para predecir los rendimientos futuros de una cartera de activos, deben ser examinados los retornos pasados de las series, El retorno esperado de la cartera puede ser definido como 'el promedio de la distribución de probabilidad de los posibles retornos'. El cálculo del retorno esperado es el

primer paso en el modelo de portafolio de Markowitz. El retorno esperado más conocido como media o promedio de los retornos, puede simplemente definirse como el promedio histórico de la serie dado un período de tiempo (Benninga et al. (2010)). El calculo para el retorno de una cartera de activos (dos o más) es simplemente el retorno esperado para cada serie de activo por su peso asignado (Ross et al. (2002)).

$$\begin{array}{ll}
 \max_{w_t} & w_t^T r_t \\
 \text{s.a.} & w_t^T \mathbf{1} = 1, \\
 & \forall j \in \{1, 2, \dots, d\} : \\
 & w_{t,j} \geq 0,
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Retorno} \\
 \text{todo se invierte} \\
 \text{sólo posición larga.}
 \end{array}
 \quad (2.25)$$

2.7. EWMA

Como aporte a la metodología tradicional de esta teoría, el riesgo del portafolio será calculado teniendo en cuenta que en general, las series financieras presentan en su comportamiento períodos de relativa tranquilidad, seguidos por períodos de alta volatilidad, donde se deduce que la varianza de dichas series no es constante en el tiempo, por el contrario, en estas series es muy frecuente la heterocedasticidad, es por este motivo que en las series se han caracterizado mediante modelos GARCH. Sin embargo dicha caracterización tuvo como propósito el pronóstico de un valor que representa la media de las series, por este motivo es que para el cálculo del riesgo del portafolio se introduce esta metodología. La metodología EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), permite asignar un mayor peso a los datos más recientes, este enfoque tiene dos ventajas importantes sobre el modelo igualmente ponderado. Primero, la volatilidad reacciona más rápido fuertes cambios en el mercado ya que los datos recientes tienen más peso que los datos más lejanos. Segundo y tras esta misma situación la volatilidad disminuye exponencialmente a medida que el peso de la observación cae. Lo que hace que el modelo, posiblemente se ajuste más al comportamiento real de las series. El cálculo del estimador es de la forma (2.26), una característica atractiva del estimador es que, bajo el supuesto de que se tienen infinitos datos, se puede escribir por recursividad de la forma (2.27) la varianza y matriz de covarianza (2.28). Lo que se utiliza como base para hacer pronósticos de volatilidad.

$$\sigma = \sqrt{(1 - \lambda) \sum_{t=1}^T \lambda^{t-1} (r_t - \bar{r})^2} \quad (2.26)$$

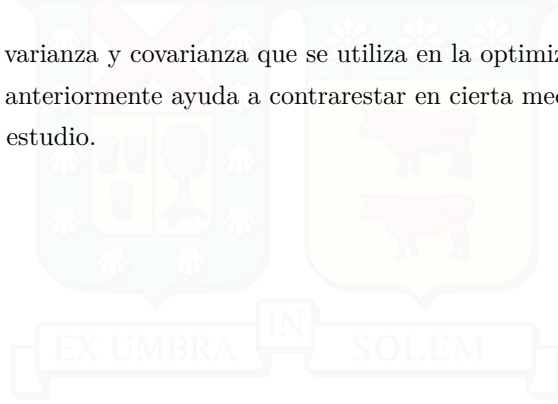
$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \quad (2.27)$$

Con lo anterior se verifica que la "varianza es igual a lambda veces la volatilidad del día anterior, más uno menos lambda veces el cuadrado de la rentabilidad del día anterior", es decir, que si en el día la volatilidad es alta, esto lleva a que haya un incremento en la volatilidad que se estima para el día siguiente. En la anterior formula, se debe elegir una constante de suavizamiento (λ) entre cero y uno,

según el material bibliográfico [Longerstaey y Spencer \(1996\)](#) se utiliza $\lambda = 0,94$ para datos diarios y $\lambda = 0,97$ para datos mensuales. Por otro lado la matriz de covarianza se calcula de la misma forma que la normal salvo que utiliza las desviaciones calculadas por el método EWMA.

$$\sigma_{ij(t)} = \lambda \sigma_{ij(t-1)} + (1 - \lambda) r_{i(t-1)} r_{j(t-1)} \quad (2.28)$$

Finalmente esta es la nueva varianza y covarianza que se utiliza en la optimización de portafolio de Markowitz, que como se explico anteriormente ayuda a contrarestar en cierta medida la heterocedasticidad de las series temporales en estudio.



3 | Data

3.1. Selección de Acciones

La data histórica utilizada para las pruebas y benchmark de los modelos fueron obtenidas de la base de datos económica del departamentos de industrias de la UTFSM. Las acciones seleccionadas fueron las de mayor volumen de transacción entre el año 2013 y 2017 del mercado bursátil chileno, de esta selección se extrajeron los últimos 10 años de 49 acciones, producto de falta de datos por días que no se transó en la bolsa u otros motivos y la cantidad mínima de observaciones requerida para que el programa funcionara correctamente, es que se terminaron considerando 40 acciones, con un máximo de 2496 observaciones por acción, las cuales corresponden al precio de cierre diario.

A continuación, la tabla 3.1 muestra un resumen estadístico para las series de precios de cada acción, para información de memotecnia revisar tabla A.1 del Anexo.

Tabla 3.1: Resumen Estadístico, Fuente: Elaboración Propia.

Series	Media	Desv. Est.	Asimetría	Curtosis	JB	ADF
HAB	0,84539	0,33929	-0,626	2,181	216,315***	-1,330*
PRO	2,67365	1,37997	-0,168	1,613	174,956***	-0,817*
AES	0,35592	0,08498	-0,399	2,418	101,388***	-2,12*
AGA	0,40963	0,12815	-0,454	2,000	185,55***	-0,905*
ANT	12,88588	2,84113	0,153	2,234	69,954***	-2,505*
CHI	0,08421	0,02811	-0,401	2,831	69,691***	-0,137*
BCI	37,95654	13,06333	-0,484	2,429	131,168***	-0,755*
ITA	0,00736	0,00253	-1,019	2,524	455,338***	-1,818*
SAN	0,04694	0,0124	-0,253	2,673	37,713***	-1,198*
BAN	1,52901	0,57534	0,516	3,746	156,517***	0,734*
BES	0,88464	0,4999	0,485	1,790	233,456***	-1,567*
CAP	18,04127	11,41049	0,260	1,878	158,998***	-1,281*
CEN	3,46463	1,41767	0,610	2,220	217,774***	-1,214*
EMB	1,59802	0,53464	-0,085	2,449	27,293***	-0,787*
COL	0,21723	0,0334	-0,881	3,446	343,65***	-2,892**
CCU	9,45652	2,83085	-0,443	2,240	141,727***	-1,316*
VAP	0,33341	0,39212	1,072	2,903	478,868***	-2,616*
ANA	2,84385	0,84754	0,065	2,122	67,989***	-1,400*
ANB	3,39778	1,03793	0,262	2,424	63,017***	-1,605*
ENT	11,90007	3,10364	0,720	2,390	254,126***	-1,618*
CMP	2,96200	0,85103	0,523	2,467	143,295***	-1,925*
COP	11,91409	2,45907	-0,075	2,516	26,713***	-2,006*
NPO	1,58851	2,10708	1,128	2,727	535,596***	-1,145*

Series	Media	Desv. Est.	Asimetría	Curtosis	JB	ADF
ENE	0,17244	0,02514	-0,227	2,695	31,16***	-2,953**
ENG	0,54020	0,10563	0,851	3,993	403,749***	-1,858*
ECL	1,55006	0,47634	-0,064	2,108	84,400***	-1,532*
FOR	2,93518	1,42785	-0,033	2,241	57,836***	-1,490*
SEC	0,26347	0,06246	-0,173	3,674	55,62***	-1,814*
IAM	1,08699	0,35233	-0,379	2,116	140,878***	-0,701*
LTM	15,29155	7,2743	0,568	2,037	230,632***	-1,204*
PAR	1,59600	0,59627	-0,253	2,520	50,447***	-0,421*
QUI	2,04951	0,53566	-0,203	2,341	58,616***	-1,027*
RIP	0,67753	0,22138	0,223	2,182	90,137***	-1,397*
FAL	7,06693	2,16817	-0,56	2,468	159,879***	-1,469*
SAL	1,38008	0,75509	0,794	2,659	272,92***	-1,409*
SK	1,26548	0,48261	-0,116	2,348	47,716***	-1,454*
SMB	0,24173	0,10668	-0,409	2,395	106,832***	-0,429*
SQB	29,64925	11,33256	0,422	2,139	151,169***	-1,032*
SON	1,83776	0,56887	0,036	2,410	36,665***	-1,930*
CON	1,69636	0,20042	0,064	3,275	9,617***	-3,276**

Nota: JB y ADF representan las prueba de normalidad Jarque Bera y raíz unitaria Dickey Fuller Aumentada respectivamente.

* $p > 0.1$

** $p < 0.05$

*** $p < 0.01$

Además de la información de la media y desviación estándar, la tabla muestra la curtosis, sin ser estrictos se podría decir que la mayor parte de las series presentan un valor menor a 3, donde usualmente se considera una serie mesocúrtica, que indica una baja concentración de los datos en los valores centrales, tan solo 4 series presentan una curtosis mayor a 3, lo que corresponde a una serie platicúrtica, con mayor concentración de datos en los valores centrales. Respecto a la asimetría, las series presentan valores tanto negativos como positivos pero muy cercano a cero, por lo que según sea el caso de cada serie, se consideraría asimétrica positiva o negativa pero con datos muy cercanos a la media.

Por otro lado se realizó el test de normalidad Jarque Bera, el cual arrojó que las series no distribuyen normal y la prueba de Dickey Fuller Aumentada para la detección de raíz unitaria, dependiendo del nivel de confianza que se considere, este test indica que salvo las series de Colbum, Enelam y Concha y Toro, todas presentan raíz unitaria, por lo que no son estacionarias en su nivel.

4 | Metodología

En esta sección se detalla como se implementa el modelo propuesto para el trabajo, en primer lugar cabe destacar que el software utilizado para el modelamiento de series y aplicación de modelos fue Matlab 2015a; las series utilizadas son los retornos logarítmicos (4.1) de los precios de cierre diario de cada acción, resultando así un total de 2495 observaciones.

$$r(t) = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) \quad (4.1)$$

La metodología utilizada se divide en 3 partes, la primera es pronosticar un día según el modelo GARCH EVT cópula, obtener los pesos óptimos según ese pronóstico mediante la estrategia de Markowitz y finalmente calcular la rentabilidad esperada de la cartera con los datos históricos y los pesos simulados.

Se utiliza una ventana L de 1249 datos correspondiente a 5 años para cada pronóstico donde T es el tamaño de la muestra fuera de la ventana L y t_0 es el punto inicial de la iteración, de esta forma, la primera iteración se realiza con los datos del intervalo $[t_0 - L + 1, t_0]$, la segunda con $[t_0 - L + 2, t_0 + 1]$, la tercera con $[t_0 - L + 3, t_0 + 2]$ y así sucesivamente hasta el último que corresponde al intervalo $[t_0 + 1, T]$.

De esta forma, el dato pronosticado en cada iteración pasa a representar el valor de la media que se utiliza en la metodología de Markowitz, por lo que finalmente se obtendrán 1247 valores, correspondientes a los siguientes 5 años en estudio.

4.1. Procesamiento de Datos

4.1.1. Caracterización de Series

En primer lugar se obtuvo en base a los precios de cierre de cada acción su rentabilidad logarítmica, resumido en la tabla 4.1:

Tabla 4.1: Resumen Estadístico, Fuente: Elaboración Propia.

Series	Media	Desv. Est.	Asimetría	Curtosis	JB	ADF
HAB	0,0010	0,01584	0,568	10,983	6759,865***	-46,319***
PRO	0,00054	0,01541	-0,470	18,179	24044,04***	-45,030***
AES	0,00012	0,01629	-0,096	5,592	702,542***	-43,037***
AGA	0,00039	0,01315	-0,515	15,486	16316,710***	-47,075***
ANT	0,00005	0,01646	0,196	8,223	2852,469***	-41,496***
CHI	0,00056	0,01465	-0,288	11,617	7754,427***	-35,303***

Series	Media	Desv. Est.	Asimetría	Curtosis	JB	ADF
BCI	0,00053	0,01692	-0,173	6,318	1156,730***	-34,363***
ITA	0,00042	0,01693	-0,005	8,421	3055,468***	-46,202***
SAN	0,00036	0,0179	-0,218	8,293	2932,712***	-36,062***
BAN	0,00075	0,01699	0,085	48,447	214720,000***	-32,708***
BES	0,00066	0,02309	0,333	15,866	17254,37***	-41,677***
CAP	-0,00018	0,02842	0,264	8,365	3021,355***	-31,875***
CEN	-0,00006	0,01952	-0,181	8,588	3259,578***	-33,427***
EMB	0,00049	0,01405	0,092	11,265	7105,633***	-46,660***
COL	0,00010	0,01573	-0,204	6,248	1113,706***	-34,131***
CCU	0,00043	0,01633	-0,007	5,294	547,271***	-34,018***
VAP	-0,00134	0,03245	-11,097	352,567	12754626,000***	-44,751***
ANA	0,00062	0,01494	-0,173	14,901	14736,800***	-49,275***
ANB	0,00037	0,01801	0,383	6,996	1721,253***	-44,489***
ENT	0,00003	0,01549	0,120	4,878	372,573***	-43,447***
CMP	0,00002	0,01830	-0,040	5,721	770,363***	-40,962***
COP	0,00002	0,01718	-0,071	6,116	10111,497***	-30,067***
NPO	-0,00118	0,03971	0,137	27,096	60365,790***	-45,274***
ENE	0,00018	0,01655	-0,721	11,576	7861,485***	-34,176***
ENG	0,00033	0,01819	9,053	264,795	7159060,000***	-35,147***
ECL	0,00034	0,01746	0,356	7,102	1801,883***	-33,557***
FOR	0,00070	0,01889	0,223	6,992	1677,143***	-42,679***
SEC	0,00061	0,01565	0,358	10,174	5404,055***	-46,381***
IAM	0,00046	0,01458	-0,543	15,231	15673,960***	-48,928***
LTM	0,00006	0,01969	0,026	5,924	889,189***	-33,677***
PAR	0,00049	0,01774	-0,078	5,658	763,929***	-44,489***
QUI	0,00054	0,01593	0,235	8,141	2771,089***	-47,097***
RIP	0,00008	0,02088	1,545	26,615	58967,810***	-43,709***
FAL	0,00034	0,01705	-0,022	6,033	956,558***	-33,708***
SAL	0,00004	0,02249	0,119	9,241	4054,469***	-41,706***
SK	0,00069	0,01679	0,228	10,612	6044,814***	-42,459***
SMB	0,00095	0,01545	0,244	9,925	5009,776***	-45,722***
SQB	0,00061	0,02457	-0,547	10,833	6503,328***	-35,003***
SON	0,00026	0,01724	0,127	7,634	2239,139***	-42,581***
CON	0,00004	0,01587	-0,110	5,165	492,159***	-36,188***

Nota: JB y ADF representan las prueba de normalidad Jarque Bera y raíz unitaria Dickey Fuller Aumentada respectivamente.

*** $p < 0.01$

Como se puede observar, el test Jarque Bera nuevamente indica que las series no distribuyen normal y la prueba de Dickey Fuller Aumentada señala que las series de retornos son estacionarias en su nivel, por lo que ya se puede trabajar con ellas.

4.1.2. Estimación de Modelo ARMA-GARCH

Se busca modelar las series de retornos con el modelo ARMA (corrigiendo autocorrelación) para la ecuación de la media y GARCH (corrigiendo heterocedasticidad) para la varianza condicional del error, se utilizan los modelos ARMA (1,1) y GARCH (1,1) por comodidad ya que utilizar la cantidad de rezagos óptimos para cada modelo resulta impráctico desde el punto de vista de tiempo computacional considerando que son 40 series en análisis. En este punto se desprenden dos modelos, el primero es el ARMA GARCH tradicional y el segundo es sólo el GARCH con ecuación de la media constante, esto con el objetivo de vislumbrar la incidencia de la ecuación de la media en el resultado final. En esta sección se utiliza el comando *estimate* donde se agregan las características del modelo que se quiere estimar junto con los datos a utilizar, los modelos ARMA GARCH y GARCH quedaron especificados como muestra la tabla 4.2 para las 40 series.

Tabla 4.2: Parámetros de modelos GARCH y ARMA-GARCH para los retornos logarítmicos de las series de acciones, Fuente: Elaboración Propia.

Series	GARCH(1,1)				ARMA(1,1)-GARCH(1,1)					
	c	α_0	α_1	β_1	c	ω	μ	α_0	α_1	β_1
HAB	0,0003626	0,0001615	0,742	0,258	0,0002437	0,274	-0,23	0,0001609	0,741	0,259
PRO	0,0000001	0,0000002	0,389	0,611	0,0000005	0,006	0,064	0,0000002	0,389	0,611
AES	0,0002521	0,0000105	0,08	0,879	0,0002341	0,004	0,121	0,0000091	0,07	0,894
AGA	0,0004892	0,0000164	0,107	0,797	0,0005871	-0,234	0,281	0,0000177	0,112	0,783
ANT	-0,0000906	0,0000056	0,071	0,911	-0,0001139	0,107	0,021	0,0000051	0,068	0,915
CHI	0,0004297	0,0000058	0,091	0,881	0,0005352	-0,255	0,38	0,0000047	0,074	0,902
BCI	0,0006897	0,0000081	0,079	0,894	0,0006653	-0,001	0,155	0,0000078	0,076	0,896
ITA	0,0001756	0,000027	0,126	0,783	0,0001826	-0,075	0,154	0,0000273	0,127	0,78
SAN	0,0004198	0,0000035	0,074	0,915	0,0002457	-0,168	0,279	0,0000051	0,085	0,899
BAN	0,0001344	0,0002062	0,639	0,361	0,0000798	0,418	-0,368	0,0002074	0,641	0,359
BES	0,0001339	0,0000253	0,255	0,745	0,0000783	0,208	-0,054	0,0000239	0,25	0,75
CAP	-0,0001891	0,0000123	0,114	0,876	-0,0002091	0,098	0,152	0,0000104	0,109	0,881
CEN	-0,0000748	0,0000208	0,158	0,793	-0,0001079	-0,003	0,221	0,0000157	0,127	0,833
EMB	-0,0000063	0,0000002	0,552	0,448	-0,0000062	-0,044	0,115	0,0000002	0,548	0,452
COL	0,0000006	0,0000128	0,105	0,845	0,0000122	-0,096	0,208	0,0000124	0,099	0,851
CCU	0,0004364	0,0000051	0,056	0,926	0,0004507	-0,087	0,227	0,0000054	0,057	0,924
VAP	-0,0011223	0,0000606	0,182	0,736	-0,0010431	0,063	0,068	0,000057	0,169	0,749
ANA	0,0000964	0,0000762	0,648	0,352	0,0000971	-0,005	0,003	0,0000761	0,647	0,353
ANB	0,0003391	0,0000069	0,061	0,919	0,0003264	-0,023	0,124	0,0000065	0,059	0,922
ENT	-0,0001157	0,0000137	0,11	0,836	-0,0001078	0,147	-0,021	0,0000131	0,108	0,839
CMP	0,0000202	0,0000119	0,08	0,885	-0,0000197	0,074	0,086	0,0000099	0,068	0,901
COP	0,0000483	0,0000087	0,097	0,874	0,0000165	0,062	0,102	0,000007	0,086	0,89
NPO	-0,0014298	0,0000493	0,217	0,783	-0,0017126	-0,137	0,283	0,0000484	0,211	0,789
ENE	0,0003319	0,0000162	0,112	0,825	0,0003067	0,012	0,128	0,0000153	0,106	0,833
ENG	0,0000295	0,0000475	0,222	0,572	0,0000517	-0,125	0,297	0,0000447	0,202	0,595
ECL	0,000011	0,0000091	0,094	0,878	0,0000058	-0,214	0,333	0,0000101	0,1	0,867

	c	α_0	α_1	β_1	c	ω	μ	α_0	α_1	β_1
FOR	0,0003747	0,000144	0,476	0,499	0,0002794	0,205	-0,063	0,0001337	0,429	0,528
SEC	0,0000601	0,0001775	0,701	0,299	0,0000276	0,222	-0,147	0,0001849	0,71	0,29
IAM	0,0004445	0,0000214	0,169	0,734	0,0006395	-0,441	0,458	0,0000221	0,173	0,727
LTM	0,0001968	0,0000122	0,116	0,856	0,0002188	-0,024	0,24	0,0000091	0,097	0,881
PAR	0,0005625	0,0000087	0,077	0,897	0,0005239	0,029	0,043	0,000009	0,076	0,897
QUI	0,0000614	0,0001517	0,564	0,436	0,0000907	-0,44	0,487	0,000152	0,565	0,435
RIP	-0,0001084	0,0000312	0,245	0,701	-0,0001336	0,037	0,114	0,0000288	0,223	0,722
FAL	0,0004746	0,0000073	0,085	0,89	0,0003741	-0,099	0,285	0,0000321	0,195	0,691
SAL	-0,0002971	0,0000603	0,196	0,69	-0,0002952	0,207	-0,06	0,0000571	0,181	0,706
SK	0,0002429	0,0000664	0,34	0,499	0,0002368	0,006	0,115	0,0000626	0,31	0,535
SMB	0,0005906	0,000005	0,064	0,917	0,0007433	-0,321	0,372	0,0000051	0,066	0,914
SQB	0,0004801	0,0000058	0,074	0,917	0,0004979	-0,084	0,197	0,0000052	0,07	0,921
SON	0,0003774	0,0000173	0,122	0,822	0,0003519	0,021	0,111	0,0000161	0,111	0,835
CON	0,0001324	0,0000036	0,061	0,925	0,0002544	-0,689	0,732	0,0000045	0,066	0,917

Nota: c y α_0 corresponden a las constantes del modelo ARMA y GARCH respectivamente.

ω y μ corresponden a los parámetros AR y MA respectivamente.

α_1 y β_1 corresponden a los parámetros ARCH y GARCH respectivamente.

4.1.3. Teoría de Valor Extremo

Antes de poder usar EVT para modelar las colas de la distribución de las series de acciones, hay que asegurar el comportamiento aproximadamente independiente y distribuido de manera idéntica (*i.i.d.*) ya que si no, dicha condición afectará el correcto funcionamiento del EVT.

Es por esto que en el paso previo se utilizó el modelo GARCH para corregir un poco la dependencia serial de los datos. Aunque los retornos no sean independientes de un día para otro, el modelo GARCH entrega series que satisfacen mejor los requisitos del EVT.

La función de densidad del kernel funciona bien para el interior de la distribución, donde se encuentran la mayoría de los datos, pero mal en los extremos o colas superior e inferior. Para lograr una buena gestión o estimación del retorno y riesgo se deben considerar estas colas, de esta forma se introduce la GPD, distribución que se usa a menudo para estimar dichas partes de la distribución.

Con los datos ya filtrados y el comando *paretotails* (por el modelamiento de las colas mediante GDP) se ajusta una distribución de probabilidad para modelar cada serie de manera que el 10% de los residuos se reserve para cada cola, no se asume que los datos proviene de una distribución normal, por el contrario, se busca una distribución flexible.

En la tabla 4.3 se presentan los parámetros estimados de EVT para los errores estandarizados de las series tanto para el modelo GARCH y ARMA GARCH donde las constantes μ , ξ y β corresponden al valor límite, parámetro de forma y escala respectivamente de las colas superior e inferior.

Tabla 4.3: Parámetros EVT estimados para errores estandarizados de modelo GARCH y ARMA-GARCH, Fuente: Elaboración Propia.

Series	GARCH(1,1)						ARMA(1,1)-GARCH(1,1)					
	Cola Superior			Cola Inferior			Cola Superior			Cola Inferior		
	μ^R	ξ^R	β^R	μ^L	ξ^L	β^L	μ^R	ξ^R	β^R	μ^L	ξ^L	β^L
HAB	0,85	0,2	0,53	-0,76	0,14	0,52	0,85	0,19	0,54	-0,76	0,14	0,52
PRO	1,38	0,55	1,04	-1,16	0,52	0,93	1,39	0,55	1,03	-1,17	0,54	0,9
AES	1,25	-0,08	0,56	-1,19	0,11	0,55	1,24	-0,08	0,58	-1,18	0,09	0,56
AGA	1,17	0,1	0,58	-1,17	0,12	0,51	1,18	0,11	0,57	-1,17	0,12	0,51
ANT	1,22	-0,02	0,69	-1,11	-0,03	0,6	1,22	-0,02	0,68	-1,11	-0,05	0,61
CHI	1,17	0,05	0,58	-1,17	0,06	0,59	1,17	0,03	0,6	-1,16	0,06	0,59
BCI	1,21	-0,11	0,65	-1,23	-0,01	0,56	1,21	-0,11	0,66	-1,21	-0,05	0,6
ITA	1,23	0,05	0,61	-1,14	0,11	0,51	1,23	0,04	0,61	-1,13	0,10	0,52
SAN	1,25	-0,03	0,54	-1,24	-0,03	0,59	1,27	-0,03	0,54	-1,22	-0,01	0,57
BAN	0,74	0,1	0,55	-0,68	-0,01	0,48	0,74	0,11	0,54	-0,69	0,01	0,46
BES	1,14	0,08	0,64	-1,12	0,13	0,57	1,13	0,06	0,68	-1,12	0,17	0,53
CAP	1,2	0,07	0,6	-1,20	0,00	0,54	1,22	0,03	0,62	-1,19	-0,01	0,53
CEN	1,24	-0,05	0,61	-1,21	0,11	0,50	1,24	-0,07	0,64	-1,17	0,11	0,51
EMB	1,59	0,66	1,68	-1,29	0,84	1,07	1,57	0,65	1,71	-1,28	0,83	1,07
COL	1,18	-0,1	0,7	-1,19	0,09	0,52	1,20	-0,09	0,68	-1,18	0,07	0,55
CCU	1,18	-0,05	0,65	-1,16	-0,06	0,66	1,18	-0,08	0,68	-1,16	-0,07	0,67
VAP	1,12	0,15	0,59	-1,09	0,30	0,44	1,15	0,20	0,54	-1,09	0,29	0,45
ANA	0,91	0,14	0,76	-0,80	0,02	0,82	0,91	0,14	0,77	-0,80	0,02	0,82
ANB	1,16	0,12	0,58	-1,19	-0,05	0,60	1,18	0,13	0,56	-1,17	-0,08	0,64
ENT	1,23	-0,20	0,76	-1,17	-0,03	0,59	1,23	-0,21	0,77	-1,18	-0,03	0,57
CMP	1,25	0,09	0,52	-1,20	-0,06	0,59	1,23	0,04	0,58	-1,20	-0,05	0,56
COP	1,25	-0,07	0,61	-1,23	0,00	0,50	1,27	-0,08	0,6	-1,24	0,05	0,46
NPO	1,08	0,24	0,59	-1,03	0,27	0,46	1,08	0,26	0,58	-1,04	0,30	0,42
ENE	1,17	-0,13	0,67	-1,18	0,15	0,55	1,18	-0,12	0,65	-1,19	0,15	0,54
ENG	1,18	0,28	0,48	-1,15	0,04	0,54	1,16	0,27	0,5	-1,16	0,06	0,52
ECL	1,18	0,03	0,66	-1,14	0,02	0,57	1,18	0,02	0,66	-1,15	0,02	0,57
FOR	0,92	-0,05	0,61	-0,87	-0,11	0,63	0,93	-0,03	0,59	-0,87	-0,13	0,64
SEC	0,82	0,20	0,48	-0,74	0,18	0,46	0,81	0,19	0,49	-0,73	0,19	0,44
IAM	1,18	0,14	0,55	-1,10	0,16	0,53	1,18	0,15	0,55	-1,09	0,15	0,54
LTM	1,19	-0,06	0,64	-1,24	-0,02	0,57	1,16	-0,10	0,70	-1,22	-0,04	0,59
PAR	1,25	-0,10	0,65	-1,21	0,08	0,51	1,25	-0,11	0,66	-1,19	0,05	0,53
QUI	0,84	0,08	0,52	-0,76	0,06	0,51	0,83	0,07	0,52	-0,75	0,06	0,52
RIP	1,20	0,24	0,53	-1,11	0,07	0,52	1,17	0,21	0,58	-1,14	0,11	0,47
FAL	1,23	-0,17	0,68	-1,19	-0,10	0,66	1,23	-0,11	0,68	-1,18	-0,08	0,65
SAL	1,22	-0,04	0,66	-1,20	0,15	0,45	1,21	-0,06	0,68	-1,17	0,14	0,46
SK	1,15	0,15	0,57	-1,04	0,12	0,56	1,13	0,11	0,61	-1,03	0,12	0,55
SMB	1,17	0,11	0,62	-1,11	0,18	0,44	1,17	0,10	0,63	-1,11	0,18	0,45
SQB	1,17	-0,06	0,66	-1,18	0,24	0,47	1,16	-0,07	0,67	-1,19	0,28	0,43

	μ^R	ξ^R	β^R	μ^L	ξ^L	β^L	μ^R	ξ^R	β^R	μ^L	ξ^L	β^L
SON	1,14	0,1	0,59	-1,19	0,07	0,54	1,15	0,11	0,58	-1,19	0,08	0,54
CON	1,22	-0,09	0,62	-1,21	0,10	0,52	1,21	-0,09	0,61	-1,22	0,14	0,49

Nota: μ , ξ y β corresponden al valor límite, parámetro de forma y escala para las colas superior e inferior respectivamente

En la figura 4.1 se muestra la función empírica de distribución acumulada (CDF) para la primera serie, correspondiente a los retornos logarítmicos de las acciones de HABITAT, esto con el fin de ejemplificar la estimación de las colas y el centro de la distribución, el comando utilizado es el *cdf* mediante el cual se devuelve la función de densidad acumulada para una familia de distribución especificada y evaluada en los residuos estandarizados de la serie en estudio, de esta forma se obtienen 40 variables uniformes.

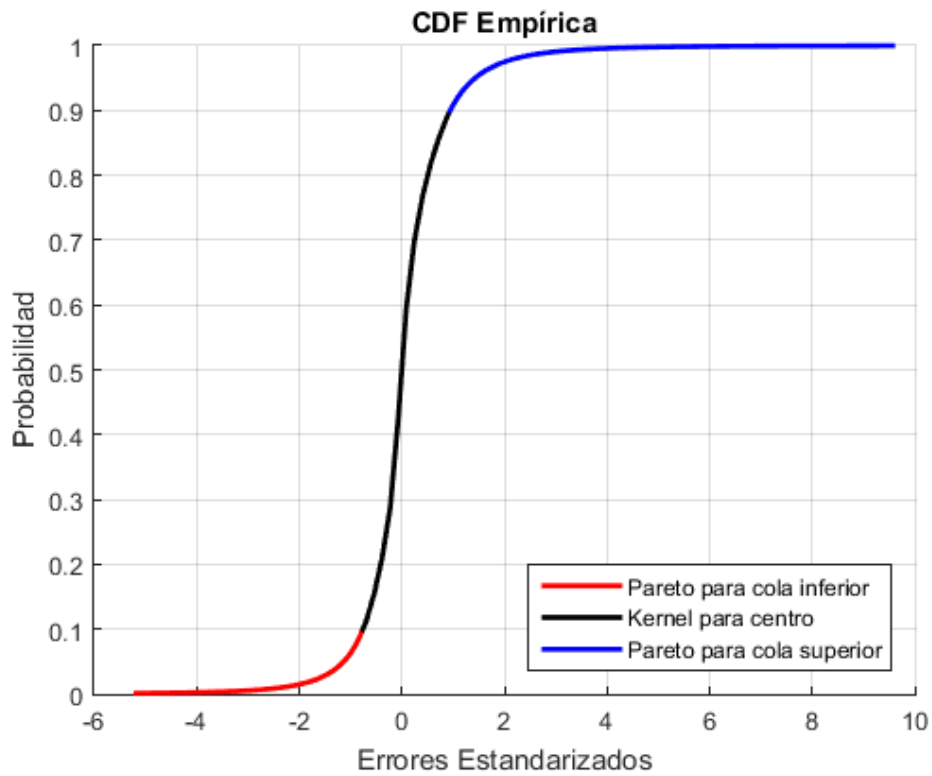


Figura 4.1: CDF empírica para serie de retornos de HABITAT

Antes de repetir estos pasos para el resto de las series de acciones se debe corroborar que los resultados sean consistentes mediante una inspección visual, comparando los datos empíricos de la función de densidad acumulada con la misma curva de función de densidad acumulada pero generada por los datos obtenidos de la GPD ajustada. Tal y como se aprecia en la figura 4.2, la curva de los datos ajustados coincide bastante bien con la empírica, lo que otorga un buen nivel de confianza en el procedimiento y los resultados, de esta forma se sigue con el resto de las series.

Al completar este paso, se obtienen 40 modelos univariados separados, correspondientes a las 40

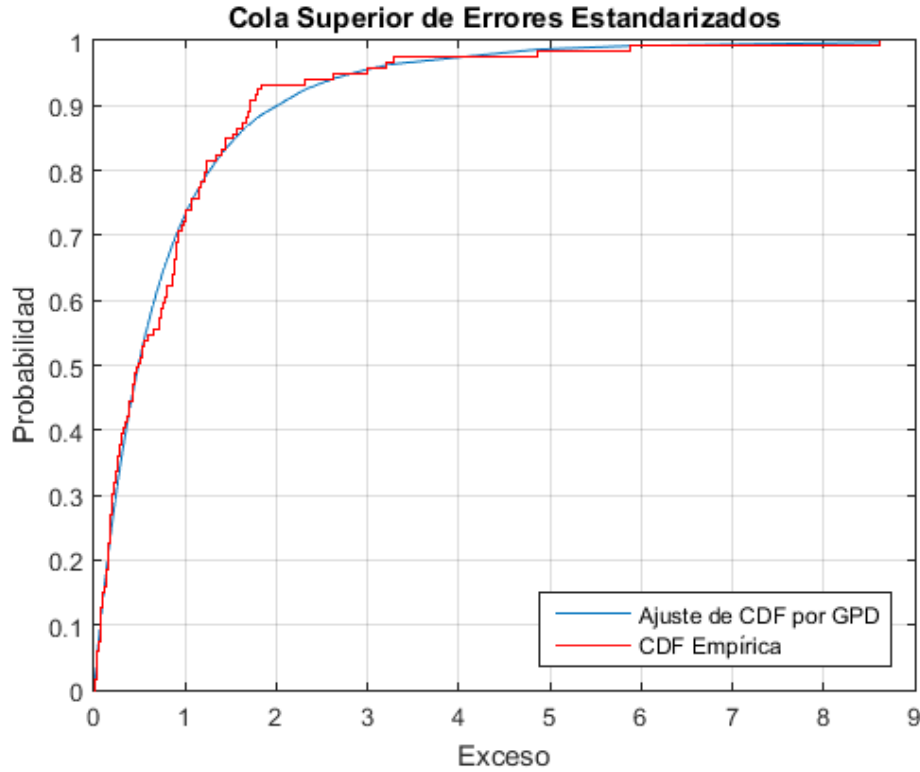


Figura 4.2: Evaluación del ajuste de la GPD

series de retornos, de esta forma se continúa con el paso multivariado introduciendo las cópulas.

4.1.4. Calibración de Cópulas

Ya que las cópulas son una distribución de probabilidad multivariable cuyas variables univariadas distribuyen uniformemente, con los 40 modelos calculados en el punto anterior se puede ajustar las cópulas.

Con los residuos estandarizados transformados en variables uniformes mediante el CDF y el comando *copulafit* se estiman los parámetros de grados de libertad (Dof) y la matriz de correlación lineal (R) de la cópula t – *student*, para el caso de la cópula *Gaussiana* sólo se calcula la matriz de correlación lineal.

4.1.5. Pronóstico

Con la cópula ajustada, se obtiene un modelo probabilístico para la descripción de las series incluido el co-movimiento entre ellas, de esta forma se pueden generar retornos diarios que serán estadísticamente equivalentes al rendimiento histórico. Para este proceso lo primero es la simulación de vectores uniformes a partir de la cópula t – *student* o *Gaussiana* utilizada, mediante el comando *copularnd*, de esta forma se simulan 1000 escenarios aleatorios independientes de residuos estandarizados para cada serie en el horizonte requerido de un día. Luego de obtener los vectores, mediante el comando

icdf (inverso de CDF) se transforman las variables uniformes en residuos estandarizados nuevamente, como los obtenidos luego del filtrado del modelo ARMA GARCH, estos residuos son independientes en el tiempo pero dependientes en cualquier momento. Cada columna de la matriz de residuos estandarizados simulados representa un proceso estocásticos univariado *i.i.d.* mientras que cada fila comparte la correlación ajustada por la cópula.

Finalmente, con el comando *filter* para introducir la autocorrelación, heterocedasticidad de las serie original y los residuos estandarizados obtenidos previamente se simulan 1000 retornos para cada serie en un día de pronóstico.

4.1.6. Estimación de Rentabilidad

Luego de obtener la simulación de retornos se calcula la media aritmética de los 1000 escenarios simulados, dicho valor pasa a representar la media histórica simulada ($\hat{X} = \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{40}$) de las series en el modelo de optimización de Markowitz. De esta optimización se rescatan los pesos óptimos simulados ($\hat{W} = \hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_{40}$) de cada serie para finalmente calcular la rentabilidad del portafolio según la ecuación 4.2.

$$E(r) = \sum_{i=1}^{40} \hat{w}_i \cdot x_i \quad (4.2)$$

Donde x_i y $\hat{w}_i$ representan el retorno promedio histórico y el peso óptimo simulado de la serie i respectivamente.

Este proceso se repite para cada iteración, obteniendo finalmente 1247 conjuntos de datos con información del riesgo y retorno esperado de la cartera.

5 | Benchmark

5.1. Data Histórica

Para realizar la comparación o medir el desempeño de los modelos se requiere un caso base sobre el cual comparar resultados y ver cuan lejos están los modelos propuestos de la realidad, el caso se base se define como el modelo de markowitz aplicado sobre los retornos logarítmicos de las series de tiempo sin filtrar, EVT ni cópulas.

Se realiza el mismo proceso detallado en la metodología pero con la data histórica, por lo que se ajusta una ventana rodante de 1249 observaciones correspondientes a cinco años, la cual se introduce al modelo de markowitz para las tres estrategias en evaluación, optimización según Índice de Sharpe, Mínima Varianza Global y Máximo Retorno, dentro de los *outputs* del modelo se seleccionan el retorno esperado y la desviación estándar como medida de riesgo, de esta forma se obtendrán 1246 conjuntos de datos con la información detallada, a continuación se presentan en las figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6 el comportamiento del retorno esperado y riesgo para los tres tipos de cartera a través del tiempo.

5.2. Rentabilidad Acumulada

Con el fin de tener otra medida de comparación entre el caso base y los modelos propuestos, se calcula la rentabilidad acumulada para cada estrategia de portafolio, esto no es más que la suma aritmética de las rentabilidades desde los cinco años simulados (5.1).

Tabla 5.1: Rentabilidad Acumulada, Fuente: Elaboración Propia.

Estrategia	Rentabilidad Acumulada
Índice de Sharpe	1.016245
Mínima Varianza Global	0.563763
Máximo Retorno	1.296997

Si bien esta información puede indicar qué estrategia presentaría la mayor rentabilidad esperada, esto no basta para elegir cuál utilizar, esto dependerá de la aversión al riesgo del inversionista y lo que el busque tras la inversión.

Por otro lado, se está analizando un horizonte de cinco años, en donde las fluctuaciones del mercado no se ven reflejadas en el simple valor de la rentabilidad acumulada, como tendencias, caídas del mercado, crisis, etc. Es por esto que el análisis previo se debe complementar con la inspección visual de los gráficos de retorno y riesgo para cada estrategia. Finalmente se introduce como medida de performance las herramientas estadísticas conocidas como funciones de pérdida.

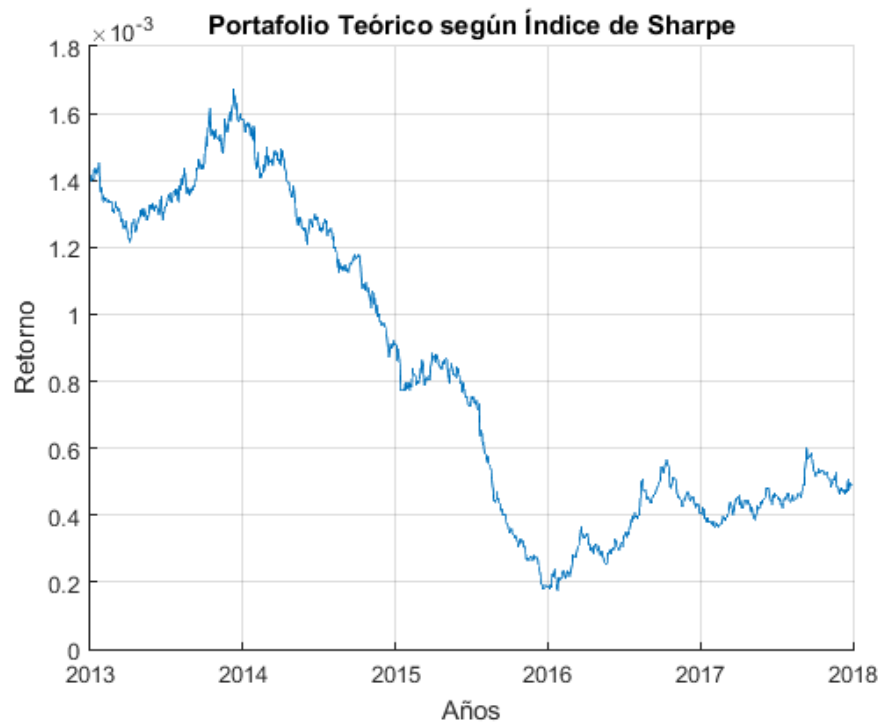


Figura 5.1: Comportamiento de retorno esperado a través del tiempo para portafolio según Índice de Sharpe.



Figura 5.2: Comportamiento del riesgo a través del tiempo para portafolio según Índice de Sharpe.



Figura 5.3: Comportamiento de retorno esperado a través del tiempo para portafolio según Mínima Varianza Global.



Figura 5.4: Comportamiento del riesgo a través del tiempo para portafolio según Mínima Varianza Global.

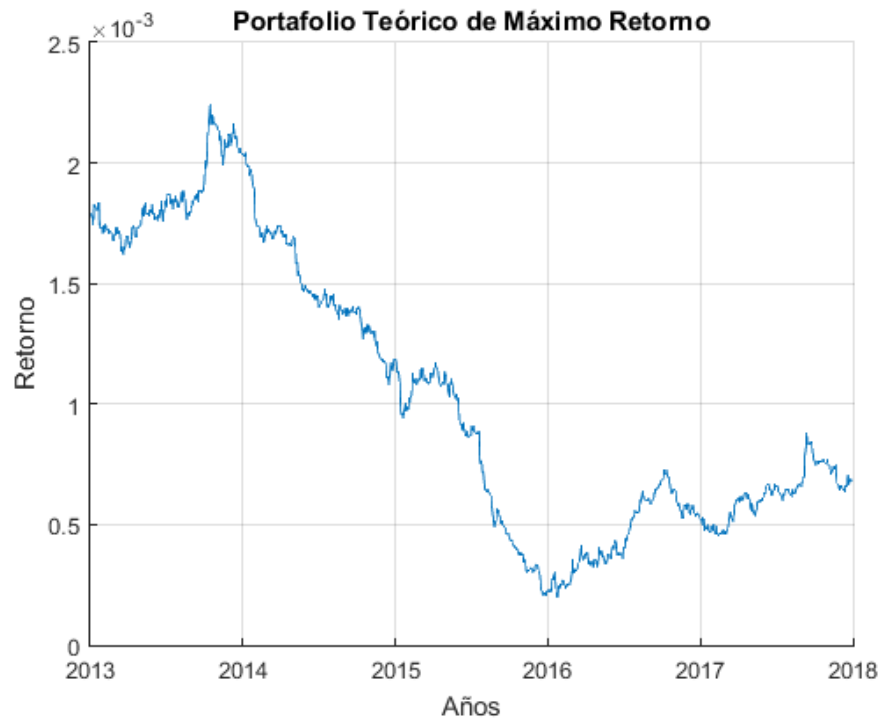


Figura 5.5: Comportamiento de retorno esperado a través del tiempo para portafolio según Máximo Retorno.

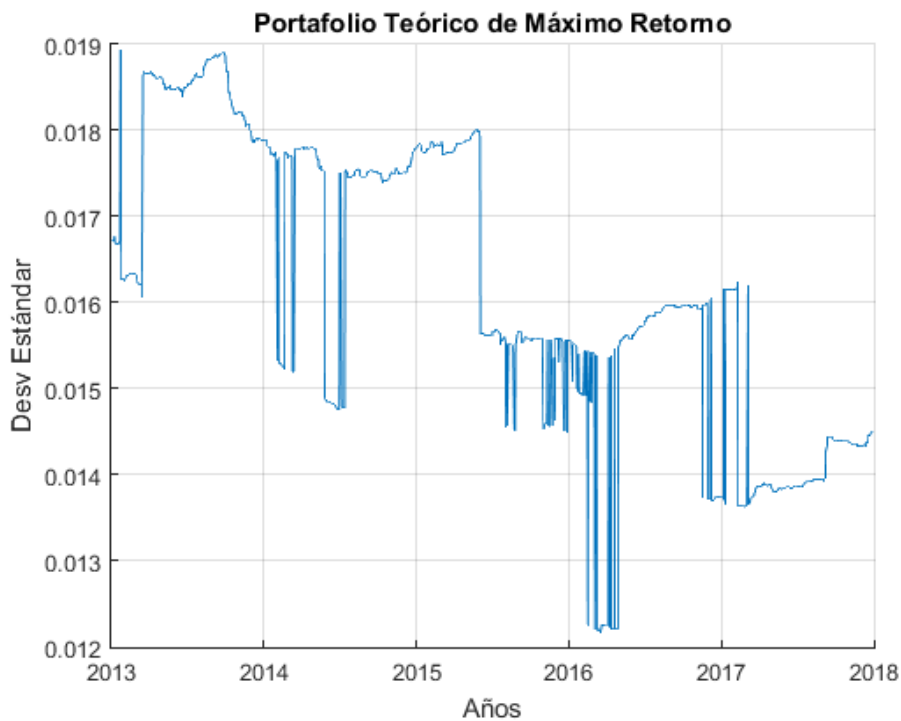


Figura 5.6: Comportamiento del riesgo a través del tiempo para portafolio según Máximo Retorno.

5.3. Funciones de Pérdida

El propósito de todo pronóstico es acercarse a la realidad, en este caso a la eperanza de retorno que se obtiene por medio del método de Markowitz con data histórica. Todo pronóstico es una estimación del valor real, por lo que genera una pérdida de información (producto de la diferencia con el dato real), por esto el nombre de función, por la información perdida. Estas funciones de pérdida buscan determinar el acumulado de información que se está perdiendo por el hecho de usar una predicción, pronóstico o estimador. En general el objetivo es minimizar la pérdida de información, por ende, el modelo que genere la menor pérdida de información será el mejor. En este tabajo se utilizarán 2 indicadores de error para comparar cual de los modelos propuestos genera una menor pérdida de información respecto al caso base.

5.3.1. RMSE

Root Mean Squared Error, es un índice de error que se utiliza principalmente para determinar el error entre los valores observados y los valores que se obtienen a través de un pronóstico. Este se obtiene a partir de la suma de observaciones (5.1), es importante recalcar que su uso es para comparar varios modelos entre si con un conjunto de datos común, por su dependencia de escala ([Hyndman y Koehler \(2006\)](#)). Se calcula de la siguiente manera:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{n}} \quad (5.1)$$

Donde y_t es el valor de retorno esperado en el tiempo t obtenido con data histórica, $\hat{y}_t$ es el pronóstico obtenido aplicando los modelos propuestos en el tiempo t y n tamaño de muestra, en este caso cinco años.

5.3.2. MAPE

Mean Absolute Percentage Error, es un indicador que permite medir la precisión de un pronóstico. Se dará mayor importancia a este índice puesto que provee una comparación de retorno esperado porcentual que junto con otras características lo convierten en una medida más completa ([Makridakis \(1993\)](#)). Se calcula de la siguiente manera:

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \quad (5.2)$$

Donde y_t es el valor de retorno esperado en el tiempo t obtenido con data histórica, $\hat{y}_t$ es el pronóstico obtenido aplicando los modelos propuestos en el tiempo t y n tamaño de muestra, en este caso cinco años.

5.3.3. sMAPE

Symetric Mean Absolute Percentage Error, es una medida que nace a partir de un inconveniente que presenta la función anterior MAPE (Goodwin y Lawton (1999)), pues presenta asimetría respecto a errores negativos como positivos, castigando los positivos ($y_t - \hat{y}_t > 0$) cuando el valor de y_t varía pero la diferencia $y_t - \hat{y}_t$ es la misma, es decir, para la misma diferencia entre valor teórico y experimental, asigna un porcentaje de error distinto para distintos valores teóricos, es en este punto donde cobra sentido el cálculo del sMAPE, el cual en estos casos asigna simétricamente un porcentaje de error un poco más elevado pero igual para ambos casos. Esto dividiendo la diferencia entre el valor teórico y el pronóstico por el promedio de los valores (5.3).

$$sMAPE = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{\left(\frac{|y_t| + |\hat{y}_t|}{2}\right)} \quad (5.3)$$

Donde y_t es el valor de retorno esperado en el tiempo t obtenido con data histórica, $\hat{y}_t$ es el pronóstico obtenido aplicando los modelos propuestos en el tiempo t y n tamaño de muestra, en este caso cinco años.

A pesar de solucionar el problema de asimetría mencionado mediante el sMAPE, surge otro producto de la diferencia $y_t - \hat{y}_t$ cuando el valor teórico se mantiene pero el pronóstico varía generando errores positivos y negativos, es ahí donde el MAPE se comporta simetricamente y el sMAPE presena problemas como muestra el gráfico 5.7 , es por este complemento entre las funciones de pérdida que se consideran ambas en la performance de los modelos.

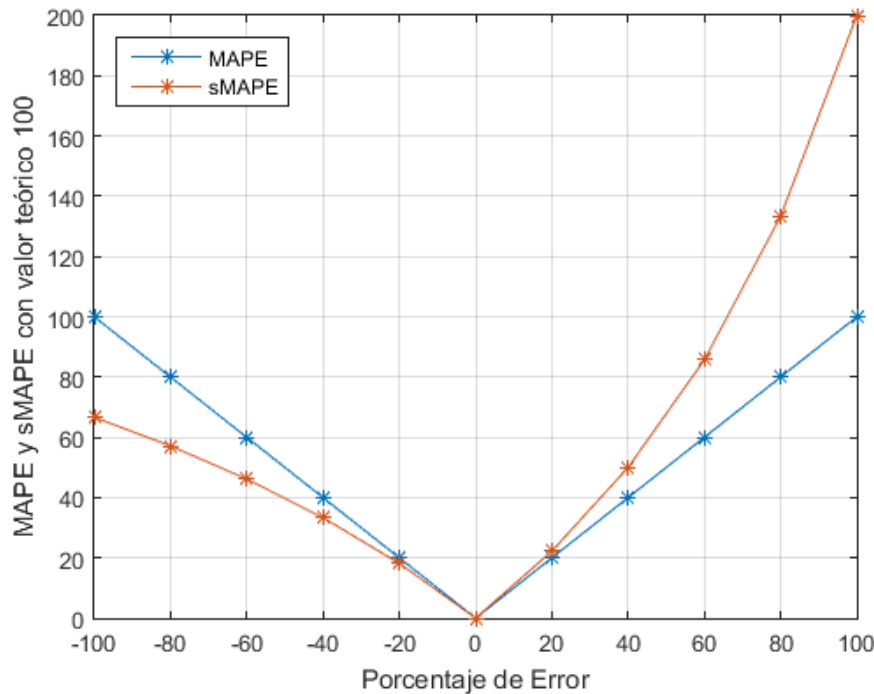


Figura 5.7: Ejemplo de comportamiento de MAPE y sMAPE para valor teórico constante de 100.

6 | Resultados

Con el fin de analizar la robustez de los resultados y buscar el modelo que entregue los mejores indicadores se analizan las funciones de pérdida de las rentabilidades esperadas y volatilidad de cada modelo propuesto con el modelo teórico con data histórica.

En primer lugar cabe mencionar que los modelos propuestos son para analizar el retorno esperado del portafolio, la estrategia de Markowitz entrega como *outputs* riesgo (volatilidad) y retorno esperado de la cartera, los modelos propuestos ven como el valor pronosticado afecta al retorno esperado de la cartera, por lo que las funciones de pérdida MAPE, sMAPE y RMSE se analizan respecto al retorno esperado y volatilidad tanto para el modelo tradicional como para el de varianza EWMA, ambos se analizan por separado, con el fin de sensibilizar los modelos según el tipo de varianza utilizada y finalmente se comparan unos con otros.

Por otro lado dadas las características de la estrategia de Markowitz los resultados de las optimizaciones según Máximo Retorno y Mínima Varianza Global son más bien ejemplificativas, ya que sus resultados no son del todo útiles en la práctica, a pesar de esto servirán para ver más o menos como se comportan los modelos.

De esta forma se da espacio a la optimización según índice de Sharpe como modelo de máximo interés por sus implicancias en la teoría de portafolio a la hora de invertir, donde es posible obtener un máximo retorno para un mínimo riesgo.

6.1. Benchmark Máximo Retorno

Tabla 6.1: Funciones de pérdida para optimización según Máximo Retorno, Fuente: Elaboración Propia.

	Máximo Retorno					
	Retorno Esperado			Volatilidad		
	MAPE	sMAPE	RMSE	MAPE	sMAPE	RMSE
GARCH EVT Gaussian	55,62 %	74,38 %	0,000688	16,17 %	16,01 %	0,004080
GARCH EVT t-student	54,50 %	72,06 %	0,000714	15,43 %	15,24 %	0,004080
ARMA GARCH EVT t-student	158,85 %	142,54 %	0,001454	33,96 %	26,29 %	0,008283
ARMA GARCH EVT Gaussian	158,17 %	143,15 %	0,001447	33,76 %	26,22 %	0,008231

Para la optimización según Máximo Retorno el mejor modelo propuesto para retorno esperado es el GARCH EVT con cópula t -student, el cual presenta un MAPE de 54,50 %, sMAPE de 72,06 % y RMSE de 0.000714, si bien el RMSE del modelo GARCH EVT con cópula Gaussiana es menor, se priorizan ambas funciones anteriores por presentar en ambas el valor mínimo del modelo con cópula t -student.

Por otro lado analizando el comportamiento del riesgo de la cartera mediante los modelos propuestos, el modelo que presenta un mejor pronóstico de la volatilidad para la optimización según Máximo Retorno es el GARCH EVT con cópula t -student, con MAPE 15,43 %, sMAPE 15,24 % y RMSE 0,004080, coincidiendo de esta forma con el mejor modelo de retorno esperado.

6.2. Benchmark Máximo Retorno EWMA

Tabla 6.2: Funciones de pérdida para optimización según Máximo Retorno y Varianza EWMA, Fuente: Elaboración Propia.

	Máximo Retorno					
	Retorno Esperado			Volatilidad		
	MAPE	sMAPE	RMSE	MAPE	sMAPE	RMSE
GARCH EVT Gaussian EWMA	55,62 %	74,38 %	0,000688	36,35 %	31,24 %	0,010015
GARCH EVT t-student EWMA	54,50 %	72,06 %	0,000714	37,62 %	32,49 %	0,010423
ARMA GARCH EVT t-student EWMA	158,85 %	142,54 %	0,001454	54,41 %	37,65 %	0,014888
ARMA GARCH EVT Gaussian EWMA	158,17 %	143,15 %	0,001447	52,94 %	36,59 %	0,014831

Para la optimización según Máximo Retorno y varianza EWMA el mejor modelo propuesto para retorno esperado es el GARCH EVT con cópula *t*-student, el cual presenta un MAPE de 54,50 %, sMAPE de 72,06 % y RMSE de 0.000714, si bien el RMSE del modelo GARCH EVT con cópula Gaussiana es menor, se priorizan ambas funciones anteriores por presentar en ambas el valor mínimo del modelo con cópula *t*-student.

Por otro lado analizando el comportamiento del riesgo de la cartera mediante los modelos propuestos, el modelo que presenta un mejor pronóstico de la volatilidad para la optimización según Máximo Retorno con varianza EWMA es el GARCH EVT con cópula gaussian, con MAPE 36,35 %, sMAPE 31,24 % y RMSE 0,010015. Siguiendo en segundo lugar el GARCH EVT con cópula *t*-student, mejor modelo de retorno esperado.

Con el fin de comparar el comportamiento de la varianza EWMA es que se segmentan de esta forma los resultados, como se puede apreciar en las tablas 6.1 y 6.2, los valores de las funciones de pérdida para el retorno esperado son los mismos para ambos tipos de varianza, esto ocurre por la naturaleza del criterio utilizado, esta optimización busca el máximo retorno posible dado los promedios históricos de cada serie en estudio (el valor pronosticado para cada serie), por este motivo es que independiente de la capacidad predictiva de cada modelo, la forma de la varianza no les afecta, sin embargo cabe mencionar que la varianza EWMA no beneficia a la cartera en el cálculo del riesgo. Por otro lado la tendencia muestra que los modelos sin ecuación de la media (media constante) presentan una mejor performance tanto para retorno esperado como para volatilidad.

6.3. Benchmark Mínima Varianza Global

Tabla 6.3: Funciones de pérdida para optimización según Mínima Varianza Global, Fuente: Elaboración Propia.

	Mínima Varianza Global					
	Retorno Esperado			Volatilidad		
	MAPE	sMAPE	RMSE	MAPE	sMAPE	RMSE
GARCH EVT Gaussian	0,0001 %	0,0001 %	7,36E-09	0,0002 %	0,0002 %	5,72E-07
GARCH EVT t-student	0,0001 %	0,0001 %	7,36E-09	0,0002 %	0,0002 %	5,72E-07
ARMA GARCH EVT t-student	5,45E-14 %	5,45E-14 %	5,46E-19	0,00 %	0,00 %	0,00
ARMA GARCH EVT Gaussian	5,45E-14 %	5,45E-14 %	5,46E-19	0,00 %	0,00 %	0,00

Para la optimización según Mínima Varianza Global los mejores modelos propuestos para retorno esperado son el ARMA GARCH EVT con cópula *t*-student y el ARMA GARCH EVT con cópula Gaussiana, los cuales presentan un MAPE de $5,45 \cdot 10^{-14} \%$, sMAPE de $5,45 \cdot 10^{-14} \%$ y RMSE de $5,46 \cdot 10^{-19}$, a pesar de esto, los modelos GARCH EVT con cópula *t*-student y Gaussiana también presentan valores similares tendiendo a cero.

Por otro lado analizando el comportamiento del riesgo de la cartera mediante los modelos propuestos, el modelo que presenta un mejor pronóstico de la volatilidad para la optimización según Mínima Varianza Global son los ARMA GARCH EVT con cópula gaussian y *t*-student, con MAPE 50,00 %, sMAPE 0,00 % y RMSE 0,00. Mismos modelos seleccionados como mejores para el pronóstico de retorno esperado según este criterio.

En la optimización por Mínima Varianza Global con varianza tradicional todos los modelos presentan valores similares tendiendo a cero, esto ocurre por la naturaleza de la optimización, la cual sólo busca reducir el riesgo y la estrategia de trabajo propuesta, en la cual se modificaba el promedio ponderado de las series temporales.

6.4. Benchmark Mínima Varianza Global EWMA

Tabla 6.4: Funciones de pérdida para optimización según Mínima Varianza Global y Varianza EWMA, Fuente: Elaboración Propia.

	Mínima Varianza Global					
	Retorno Esperado			Volatilidad		
	MAPE	sMAPE	RMSE	MAPE	sMAPE	RMSE
GARCH EVT Gaussian EWMA	43,62 %	48,69 %	0,000189	34,21 %	44,39 %	0,002897
GARCH EVT t-student EWMA	43,62 %	48,69 %	0,000189	34,21 %	44,39 %	0,002897
ARMA GARCH EVT t-student EWMA	43,62 %	48,69 %	0,000189	34,21 %	44,39 %	0,002897
ARMA GARCH EVT Gaussian EWMA	43,62 %	48,69 %	0,000189	34,21 %	44,39 %	0,002897

Para la optimización según Mínima Varianza Global y varianza EWMA los cuatro modelos propuestos para retorno esperado presentan los mismos valores en sus funciones de pérdida, MAPE de 43,62 %, sMAPE de 48,69 % y RMSE de 0,000189.

Por otro lado analizando el comportamiento del riesgo de la cartera mediante los modelos propuestos, los modelos que presentan un mejor pronóstico de la volatilidad para la optimización según Mínima Varianza Global con varianza EWMA son los cuatro propuestos, con MAPE 34,21 %, sMAPE 44,39 % y RMSE 0,002897. Mismos modelos seleccionados como mejores para el pronóstico de retorno esperado según este criterio.

En la optimización por Mínima Varianza Global con varianza EWMA todos los modelos presentan las mismas funciones de pérdida, esto ocurre por la naturaleza de la optimización, la cual sólo busca reducir el riesgo y la estrategia de trabajo propuesta, en la cual se modificaba el promedio ponderado de las series temporales, a diferencia del caso anterior con varianza tradicional, la varianza EWMA es distinta a la tradicional utilizada en el modelo teórico de benchmark, por esta razón es que si bien todos los modelos presentan el mismo nivel de predicción, este es distinto al modelo teórico.

6.5. Benchmark Índice de Sharpe

Tabla 6.5: Funciones de pérdida para optimización según Índice de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.

	Índice de Sharpe					
	Retorno Esperado			Volatilidad		
	MAPE	sMAPE	RMSE	MAPE	sMAPE	RMSE
GARCH EVT Gaussian	39,73 %	53,01 %	0,000395	18,13 %	15,79 %	0,002262
GARCH EVT t-student	38,92 %	52,10 %	0,000386	18,36 %	16,00 %	0,002266
ARMA GARCH EVT t-student	117,14 %	128,35 %	0,000811	42,91 %	32,07 %	0,005278
ARMA GARCH EVT Gaussian	117,62 %	128,80 %	0,000802	42,61 %	32,00 %	0,005141

Para la optimización según Índice de Sharpe el mejor modelo propuesto para retorno esperado es el GARCH EVT con cópula *t*-student, el cual presenta un MAPE de 38,92 %, sMAPE de 52,10 % y RMSE de 0,000386, obteniendo así este modelos los mejores resultados según funciones de pérdida entre los cuatro propuestos en esta sección.

Por otro lado analizando el comportamiento del riesgo de la cartera mediante los modelos propuestos, el modelo que presenta un mejor pronóstico de la volatilidad para la optimización según Índice de Sharpe, criterio que más interesa, es el GARCH EVT con cópula gaussian con MAPE 18,13 %, sMAPE 15,79 % y RMSE 0,002262. En segundo lugar se encuentra el modelo GARCH EVT con cópula *t*-student, seleccionado como mejor pronóstico de retorno esperado.

6.6. Benchmark Índice de Sharpe EWMA

Tabla 6.6: Funciones de pérdida para optimización según Índice de Sharpe y Varianza EWMA, Fuente: Elaboración Propia.

	Índice de Sharpe					
	Retorno Esperado			Volatilidad		
	MAPE	sMAPE	RMSE	MAPE	sMAPE	RMSE
GARCH EVT GaussianEWMA	34,91 %	46,58 %	0,000338	29,02 %	30,01 %	0,004042
GARCH EVT t-student EWMA	34,46 %	46,40 %	0,000333	29,20 %	30,69 %	0,003837
ARMA GARCH EVT t-student EWMA	107,13 %	120,24 %	0,000741	35,07 %	29,30 %	0,004846
ARMA GARCH EVT Gaussian EWMA	108,72 %	120,77 %	0,000745	35,34 %	29,24 %	0,004928

Para la optimización según Índice de Sharpe y varianza EWMA el mejor modelo propuesto para retorno esperado es el GARCH EVT con cópula *t*-student, el cual presenta un MAPE de 34,46 %, sMAPE de 46,40 % y RMSE de 0,000333, obteniendo así este modelos los mejores resultados según funciones de pérdida entre los cuatro propuestos en esta sección.

Por otro lado analizando el comportamiento del riesgo de la cartera mediante los modelos propuestos, el modelo que presenta un mejor pronóstico de la volatilidad para la optimización según Índice de Sharpe con varianza EWMA, es el GARCH EVT con cópula gaussian con MAPE 29,02 %, sMAPE 30,01 % y RMSE 0,004042, si bien los modelos ARMA GARCH EVT con cópula *t*-student y gaussian presentan un sMAPE menor, porcentualmente siguen siendo mejor los modelos con media constante, ya que su MAPE es en promedio 6 % menor versus su sMAPE que es 1 % mayor. Si bien el RMSE del modelo GARCH EVT con cópula *t*-student es menor, se selecciona de todos modos el modelo con cópula gaussiana como mejor por tener mejores resultados en las otras funciones de pérdida. En segundo lugar se encuentra el modelo GARCH EVT con cópula *t*-student, seleccionado como mejor pronóstico de retorno esperado.

Al igual que para la optimización según máximo retorno, la del índice de Sharpe muestra una clara tendencia hacia los modelos sin ecuación de la media (media constante), presentando una mejor performance los 4 modelos, tanto para varianza normal como para varianza EWMA, frente a los que se calcularon con varianza tradicional, esto en términos tanto de retornos esperado como de volatilidad. Cabe mencionar también que según las tablas 6.5 y 6.6 los modelos con varianza EWMA presentan superioridad predictiva respecto al retorno esperado pero no frente al cálculo de volatilidad, lo que podría indicar alta volatilidad en el mediano largo plazo, por lo que asignar mayor peso a los valores cercanos no refleje la realidad.

Por otro lado la diferencia entre los resultados de los modelos GARCH EVT con cópula gaussiana, *t*-student y ambos tipos de varianza, podría definir dos perfiles de inversionista, uno adverso al riesgo con menor esperanza de retorno y otro más arriesgado con mayor esperanza de retorno.



7 | Conclusiones

Tanto en la optimización según Máximo Retorno e Índice de Sharpe, los modelos sin ecuación de la media (media constante) muestran mejor performance que los ARMA GARCH, que si la poseen. EL modelo de Máximo Retorno no se afectado por el tipo de varianza utilizada, ya que sólo busca maximizar beneficios independiente del riesgo, si bien esta información no es relevante para una inversión racional, sirve de pie para entender mejor el comportamiento de los datos ante los modelos propuestos.

Los modelos optimizados según el criterio de Mínima Varianza Global presentaron los resultados esperados, ya que lo que busca esta optimización es minimizar el riesgo a toda costa (o dado un retorno esperado mínimo), es por esto que independiente de la media de las series de tiempo en estudio, lo importante era la varianza, esto se ve reflejado en los modelos ARMA GARCH EVT y GARCH EVT con ambas cópulas, presentando funciones de pérdida similares y tendiendo a cero, puesto que la metodología aplicada; pronosticar un valor representativo para cada serie y optimizar los pesos según ese valor; no afectaba esta optimización, obteniéndose prácticamente los mismos valores que los de benchmark con data histórica.

Por otro lado ocurre lo mismo para este criterio pero con los modelos donde se utilizó la varianza EWMA, las funciones de pérdida eran todas iguales pero diferentes a las del modelo con varianza tradicional, esto por el hecho de que la varianza calculada para las series de tiempo a optimizar no eran las mismas que la del modelo con data histórica.

Para el caso del Índice de Sharpe, caso de mayor interés, se genera una disyuntiva entre los modelos con varianza tradicional y con varianza EWMA, ya que estos últimos presentan una mejor performance respecto al retorno esperado pero los modelos con varianza tradicional presentan mejor performance respecto al riesgo o volatilidad, esto da la opción al inversionista de elegir entre ambos modelos, uno con mejor capacidad predictiva del retorno esperado y el otro con mejor capacidad predictiva de volatilidad. De la misma forma eligiendo cualquiera de los dos tipos de varianza para los modelos y restringiendo la elección final sólo a los modelos con ecuación de la media constante, ambos tipos de modelos, ahora diferenciados por el tipo de cópula utilizada presentan ventajas individuales que el otro no tiene respecto a las funciones de pérdida de retorno esperado y volatilidad.

Finalmente, las herramientas computacionales presentadas en el trabajo pueden ser de ayuda para la toma de decisiones al momento de decidir cuándo y dónde invertir, analizando múltiples escenarios y criterios de optimización, pero la decisión final siempre estará ligada al inversionista, su instinto, emociones e irracionalidad.

7.1. Recomendaciones

Como recomendación sería interesante expandir el estudio de pronóstico de series con modelos ARMA GARCH EVT y cópulas en otras áreas, como el pronóstico de tipos de cambio u otro derivado. Analizar más a fondo cada serie temporal por separado o en pares para introducir cópulas arquimedanas las cuales son bivariadas. Estudiar cointegración de series aprovechando el aporte que otorga el trabajo con cópulas, sería interesante analizar el rendimiento de la teoría del valor extremo en el acontecer actual, estudiar data histórica del tipo de cambio entre dólar y yuan, analizar cointegración y ver si el EVT arroja algún indicio de la crisis actual, si bien es una temática afectada por un sin fin de variables macroeconómicas, se podría hacer un pequeño alcance desde el punto de vista del tipo de cambio. Respecto al trabajo de optimización de cartera también sería interesante mezclar el trabajo realizado con una estrategia de momentos, para testear si el pronóstico obtenido mediante la estrategia presentada en el trabajo rinde frutos en el corto mediano plazo.



Bibliografía

- Benninga, Simon et al. (2010). Principles of finance with excel. *OUN Catalogue*. 2.6.3
- Berger, Theo (2013). Forecasting value-at-risk using time varying copulas and evt return distributions. *International Economics*, 133, 93–106. 1
- Bhatti, M Ishaq y Nguyen, Cuong C (2012). Diversification evidence from international equity markets using extreme values and stochastic copulas. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 22(3), 622–646. 1
- Bodnar, Taras; Mazur, Stepan; y Okhrin, Yarema (2017). Bayesian estimation of the global minimum variance portfolio. *European Journal of Operational Research*, 256(1), 292–307. 2.6.2
- Bollerslev, Tim (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307–327. 2.3.3
- Bornholt, Graham (2007). Extending the capital asset pricing model: the reward beta approach. *Accounting & Finance*, 47(1), 69–83. 1
- Box, GEORGE EP; Jenkins, Gwilym M; y Reinsel, G (1970). Time series analysis: forecasting and control holden-day san francisco. *BoxTime Series Analysis: Forecasting and Control Holden Day1970*. 2.3.1
- Box, George EP; Jenkins, Gwilym M; Reinsel, Gregory C; y Ljung, Greta M (2015). *Time series analysis: forecasting and control*. John Wiley & Sons. 2.3.1
- Daly, Kevin (2008). Financial volatility: Issues and measuring techniques. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(11), 2377–2393. 2.2
- de Comercio, Bolsa (2010). Características del mercado bursátil en chile. *Santiago*. 2.1
- Dickey, David A y Fuller, Wayne A (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American statistical association*, 74(366a), 427–431. 2.3.2.1
- Dueñas Ortiz, Angie Paola; Prieto Garzón, Katherine Yohana; Alfonso, Sánchez; y Lizeth, Jennifer (2017). Análisis de rentabilidad y riesgo de un portafolio de inversión, aplicando el modelo de harry markowitz. 1
- Engle, Robert F (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, (pp. 987–1007). 2.3.2.1
- Fama, Eugene F y French, Kenneth R (1992). The cross-section of expected stock returns. *the Journal of Finance*, 47(2), 427–465. 1
- Fama, Eugene F y French, Kenneth R (1995). Size and book-to-market factors in earnings and returns. *The journal of finance*, 50(1), 131–155. 1
- Fama, Eugene F y French, Kenneth R (1996). Multifactor explanations of asset pricing anomalies. *The journal of finance*, 51(1), 55–84. 1
- Fama, Eugene F y MacBeth, James D (1973). Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of political economy*, 81(3), 607–636. 1
- Fernández, Viviana Paulina et al. (2003). *Extreme value theory: value at risk and returns dependence around the world*. Technical report, Centro de Economía Aplicada, Universidad de Chile. 2.4

- Frantz, P y Payne, R (2011). Corporate finance. chapter 2. 2.6
- Goodwin, Paul y Lawton, Richard (1999). On the asymmetry of the symmetric mape. *International journal of forecasting*, 15(4), 405–408. 5.3.3
- Han, Yingwei; Li, Ping; y Xia, Yong (2017). Dynamic robust portfolio selection with copulas. *Finance Research Letters*, 21, 190–200. 1
- Hight, Gregory N (2010). Diversification effect: Isolating the effect of correlation on portfolio risk. *Journal of Financial Planning*, 23(5), 54. 2.6
- Huang, Chin-Wen y Hsu, Chun-Pin (2015). Portfolio optimization with garch–evt–copula–cvar models. *Banking and Finance review*, 7(1). 1
- Huang, Jen-Jsung; Lee, Kuo-Jung; Liang, Hueimei; y Lin, Wei-Fu (2009). Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-garch method. *Insurance: Mathematics and economics*, 45(3), 315–324. 1
- Hyndman, Rob J y Koehler, Anne B (2006). Another look at measures of forecast accuracy. *International journal of forecasting*, 22(4), 679–688. 5.3.1
- Johnson, Christian A (2005). Métodos alternativos de evaluación del riesgo para portafolios de inversión. *Academia. Revista Latinoamericana de Administración*, (35), 33–65. 1
- Koliai, Lyes (2016). Extreme risk modeling: An evt–pair–copulas approach for financial stress tests. *Journal of Banking & Finance*, 70, 1–22. 1
- Kristjanpoller, Werner y Caballero, Víctor (2012). Volumen y asimetría en los principales mercados accionarios latinoamericanos. *Lecturas de Economía*, (76), 119–141. 2.1
- Kristjanpoller Rodríguez, Werner y Liberona Maturana, Carolina (2010). Comparación de modelos de predicción de retornos accionarios en el mercado accionario chileno: Capm, fama y french y reward beta. *EconoQuantum*, 7(1), 121–140. 1
- Leadbetter, Malcolm R (1991). On a basis for ‘peaks over threshold’ modeling. *Statistics & Probability Letters*, 12(4), 357–362. 2.4
- Longerstaey, Jacques y Spencer, Martin (1996). Riskmetricstm—technical document. *Morgan Guaranty Trust Company of New York: New York*, 51, 54. 2.7
- Low, Rand Kwong Yew; Alcock, Jamie; Faff, Robert; y Brailsford, Timothy (2013). Canonical vine copulas in the context of modern portfolio management: Are they worth it? *Journal of Banking & Finance*, 37(8), 3085–3099. 1
- Makridakis, Spyros (1993). Accuracy measures: theoretical and practical concerns. *International Journal of Forecasting*, 9(4), 527–529. 5.3.2
- Markowitz, Harry (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77–91. 1, 2.6
- McClure, B (2010). Modern portfolio theory: Why it’s still hip. *investopedia*. 2.6
- Merton, Robert C (1980). On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of financial economics*, 8(4), 323–361. 2.6.2
- Rojas, Ignacio; Valenzuela, Olga; Rojas, Fernando; Guillén, Alberto; Herrera, Luis Javier; Pomares, Héctor; Marquez, Luisa; y Pasadas, Miguel (2008). Soft-computing techniques and arma model for time series prediction. *Neurocomputing*, 71(4-6), 519–537. 2.2.1
- Romero-Meza, Rafael; Bonilla, Claudio A; y Hinich, Melvin J (2007). Nonlinear event detection in the chilean stock market. *Applied Economics Letters*, 14(13), 987–991. 2.1

- Ross, SRW; Westerfield, R; y Jaffe, J (2002). Capital market theory: An overview. *Corporate finance*, (pp. 220–241). 2.6.3
- Sharpe, William F (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management science*, 9(2), 277–293. 2.6.1
- Sklar, A (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges; l'institut de statistique de l'université de paris: Paris. 2.5
- Urzúa, Mauricio Gutiérrez; Melillanca, Erick Torres; Gálvez, Patricio Gálvez; y Caamaño, Germán Poo (2014). Optimización de portafolios accionarios a través de un micro algoritmo genético. *Industrial Data*, 10(2), 012–020. 1
- Urzúa, Mauricio Gutiérrez; Salgado, Marcelo; et al. (2012). Construcción de una cartera de inversión usando modelos garch. *Industrial data*, 15(1), 84–99. 1
- Wang, Zong-Run; Chen, Xiao-Hong; Jin, Yan-Bo; y Zhou, Yan-Ju (2010). Estimating risk of foreign exchange portfolio: Using var and cvar based on garch–evt-copula model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(21), 4918–4928. 1
- Whittle, P (1951). Hypothesis testing in time series analysis (uppsala, sweden: Almqvist and wicksell). 2.3.1
- Zhang, Bangzheng; Wei, Yu; Yu, Jiang; Lai, Xiaodong; y Peng, Zhenfeng (2014). Forecasting var and es of stock index portfolio: A vine copula method. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 416, 112–124. 1



A | Anexo

Tabla A.1: Resumen de memotecnia y reseña de empresas utilizadas en estudio.

HAB :	(AFP Habitat) AFP Habitat es una administradora de fondos de pensiones chilena, creada en 1981 y una de las dos mayores del país por número de cotizantes. Las actividades de la empresa incluyen la inversión y cobro de las contribuciones de sus clientes,
PRO :	(AFP Provida) Administradora de Fondos de Pensiones Provida es la Administradora de Fondos de Pensión más grande de Chile con 3,3 millones de clientes, más de 1000 ejecutivos y más de 80 sucursales.
AES :	(AES Gener) Empresa productora de energía eléctrica chilena. AES Gener es el resultado de la división en 1987 de Chilectra en tres empresas independientes, dos distribuidoras y una generadora.
AGA :	(Aguas Andinas) Empresa chilena de servicios sanitarios, que realiza el suministro de agua potable y alcantarillado en la ciudad de Santiago de Chile.
ANT :	(Antares Chile) Sociedad anónima chilena ligada a la familia Angelini, controladora de la compañía forestal Celulosa Arauco y Constitución, pesqueras Corpesca S.A., Orizon S.A. y de servicios Empresas Copec.
CHI :	(Banco de Chile) Institución financiera que opera en Chile. Proporciona productos y servicios financieros a grandes, pequeñas, medianas empresas y personas.
BCI :	(Banco BCI) Empresa bancaria chilena, actualmente BCI es el tercer banco privado en términos de colocaciones y el cuarto banco en número de clientes.
ITAU :	(Banco Itaú) Banco brasileño perteneciente a Itaú Holding con sede en Sao Paulo. Luego de su fusión con Unibanco sus activos consolidados son de 504.000 millones de dólares.
SAN :	(Banco Santander) Multinacional española de banca comercial y servicios financieros. Santander mantiene su presencia en todos los centros financieros globales como la 16ª institución bancaria más grande del mundo.
BAN :	(Isapre Banmédica) Organización de salud privada con más de 25 años de presencia en Chile, entrega servicios integrales en salud abarcando desde la atención médica hasta la prevención en seguros.
BES :	(Besalco Inmobiliaria) Empresa inmobiliaria chilena con proyectos de pavimentación y urbanización en diferentes ciudades a lo largo del país.
CAP :	(CAP) Grupo minero siderúrgico de Chile. Su producción de hierro es exportada principalmente a países como China, Japón y Baréin.
CEN :	(Cencosud) consorcio empresarial multinacional chileno que opera en diversos países de América del Sur, con participación en diversos mercados, principalmente en el rubro minorista.

EMB :	(Coca Cola Embonor) Empresa de tipo franquicia, embotelladora de excelencia bajo la licencia de The Coca Cola Company con plantas en Chile y Bolivia.
COL :	(Colbum) Empresa chilena productora de electricidad. Creada a partir de las centrales hidroeléctricas de Colbún y Machicura de ENDESA y traspasada como empresa filial de la Corporación de Fomento de la Producción.
CCU :	(Compañía de Cervezerías Unidas) Empresa chilena productora de bebidas alcohólicas y no alcohólicas, también opera en el área de los alimentos. Tiene operaciones en Chile, Argentina, Bolivia, Colombia, Paraguay y Uruguay.
VAP :	(Compañía SudAmericana de Vapores) Compañía con sede en Chile que participa en el sector de transporte marítimo de carga. Las actividades de la Compañía se dividen en transporte de contenedores y otros servicios de transporte.
ANA :	(Embotelladora Andina Serie A) Embotelladora de bebidas de la marca comercial Coca Cola en América Latina. La compañía opera en cuatro segmentos: Chile, Brasil, Argentina y Paraguay. La entidad produce y distribuye jugos de fruta, otras bebidas con sabor a fruta y agua mineral y purificada en Chile, Argentina y Paraguay con las marcas comerciales de propiedad de The Coca Cola Company.
ANB :	(Embotelladora Andina Serie A) Embotelladora de bebidas de la marca comercial Coca Cola en América Latina. La compañía opera en cuatro segmentos: Chile, Brasil, Argentina y Paraguay. La entidad produce y distribuye jugos de fruta, otras bebidas con sabor a fruta y agua mineral y purificada en Chile, Argentina y Paraguay con las marcas comerciales de propiedad de The Coca Cola Company.
ENT :	(Entel Chile) Empresa de telecomunicaciones fundada en Chile con gran participación en el mercado chileno, ofrece servicios de tecnologías de la información, telefonía celular y fija, carrier de larga distancia, entre otros servicios.
CMP :	(Empresas CMPC) Conocida también como La Papelera, es un holding forestal y papelerero chileno dedicado principalmente a la manufactura de papeles y cartones.
COP :	(Copec) Principal compañía distribuidora de combustibles y lubricantes, con una participación de mercado que supera el 58 % y el 50 % respectivamente. Cuenta con plantas de servicio a lo largo de todo el país.
NPO :	(Empresas la Polar) Compañía con sede en Chile dedicada principalmente al sector minorista. Las principales actividades de la Compañía incluyen la importación, exportación, distribución y venta de electrodomésticos, electrónicos, juguetes, muebles y accesorios para el hogar.
ENE :	(Enel Américas) Anteriormente Enersis Américas S.A., se dedica a los negocios de generación, transmisión y distribución de electricidad en Chile, Brasil, Colombia, Perú y Argentina a través de sus subsidiarias y entidades controladas de manera conjunta.
ENG :	(Enel Generación Chile) Anteriormente Empresa Nacional De Electricidad S.A., es una empresa con sede en Chile que participa en el negocio de la generación de electricidad.
ECL :	(Engie Energía Chile) Anteriormente Empresa Eléctrica del Norte Grande S.A., es una empresa con sede en Chile, dedicada al sector energético. Las actividades de la compañía comprenden la producción, transporte y distribución de energía eléctrica y gas natural;

	la compra, venta y transporte de combustibles líquidos, sólidos y gaseosos
FOR :	(Forus) Empresa con sede en Chile dedicada principalmente al comercio minorista de calzado y vestimenta. La compañía se enfoca en el diseño, producción y distribución de calzado, indumentaria y accesorios para hombres, mujeres y niños.
SEC :	(Grupo Security) Empresa con sede en Chile dedicada principalmente al sector bancario. Las actividades de la compañía se dividen en cinco segmentos: Financiamiento, Inversiones, Seguros, Servicios y Corporativo.
IAM :	(Inversiones Aguas Metropolitanas) Compañía de servicios sanitarios en América Latina. La Compañía, a través de sus filiales reguladas, ofrece los servicios de captación de agua cruda; producción, transporte y distribución de agua potable, y recolección.
LTM :	(Latam Airlines Group) Empresa con sede en Chile, que se dedica al transporte aéreo de pasajeros y carga, tanto en los mercados regionales e internacionales en América, Europa y Oceanía.
PAR :	(Parque Arauco) Empresa con sede en Chile dedicada a la industria de bienes raíces. La Compañía se enfoca en la adquisición, desarrollo y administración de activos inmobiliarios multiformato, principalmente para uso comercial. La Compañía posee y opera varios formatos de centros comerciales, tales como centros regionales, de vecindario, centros comerciales y centros comerciales.
QUI :	(Quineco) Empresa dedicada a los sectores de servicios financieros e industrial. También opera a través de cinco segmentos: Manufactura, Financiero, Energía, Transporte y Otros.
RIP :	(Ripley) Cadena de tiendas por departamento de origen chileno. Ha tenido operaciones en el Perú y Colombia. Las actividades de la Compañía se dividen en tres segmentos comerciales: Venta Minorista, Banca y Bienes Raíces.
FAL :	(Falabella) Empresa y tienda chilena por departamentos. Actualmente Falabella cuenta con sucursales en Argentina, Perú, Colombia, México y Brasil. Es considerada como la empresa de retail más grande y valiosa de América Latina.
SAL :	(Salfacorp) Compañía con sede en Chile dedicada principalmente al sector de construcción. Las actividades de la compañía se dividen en cuatro segmentos de negocio: ingeniería y construcción, servicios de minería, desarrollo de bienes raíces residenciales y no residenciales.
SK :	(Sigdo Koppers) Conglomerado industrial con sede en Chile. Las actividades de la compañía se dividen en tres segmentos: Servicios, Industrial, así como Comercial y Automotriz.
SMB :	(Sociedad Matriz del Banco de Chile Serie B) Sociedad que operó bajo el nombre comercial de banco de Chile hasta 1996 donde la junta de accionistas acordó convertirse en una sociedad de inversiones de giro exclusivo, creando también un banco comercial con nombre Banco de Chile, traspasando todos sus activos y pasivos al banco, la acciones de la sociedad se dividen actualmente en 4 grupos: A,B,D y E teniendo la serie B un 90.6 % de las acciones.
SQB :	(Sociedad Química y Minera de Chile Serie B) Productor de nitrato de potasio y yodo. La compañía produce nutrientes vegetales de especialidad, derivados de yodo, litio y sus derivados, cloruro de potasio, sulfato de potasio y ciertos productos químicos industriales.
SON :	(Sonda) Compañía con sede en Chile dedicada principalmente al sector de tecnologías de la información. La compañía se centra en brindar soluciones informáticas corporativas,

incluyendo soluciones tecnológicas para grandes, medianas empresas y organizaciones.

CON : (Viña Concha y Toro) Compañía controladora de la viña homónima establecida en Chile.
Es la principal productora y exportadora de vinos de Latinoamérica y una de las 10
mayores compañías de vino en el mundo.

