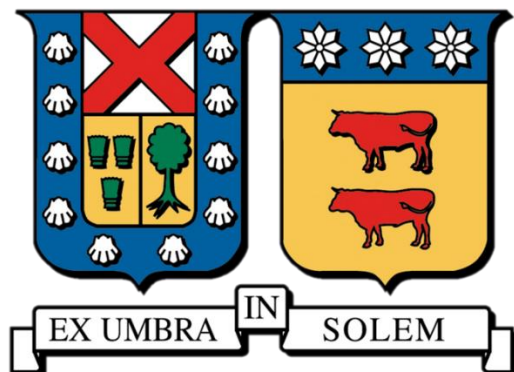


UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

VALPARAÍSO – CHILE



**“ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE UN CHORRO LIBRE
DE FLUIDO ELÉCTRICAMENTE CONDUCTOR EN
PRESENCIA DE UN CAMPO MAGNÉTICO”**

MARTÍN RODRIGO MARDONES MUÑOZ

**MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO**

PROFESOR GUÍA:

PH.D. CARLOS ROSALES H.

PROFESOR CORREFERENTE: PH.D. HARVEY ZAMBRANO R.

JULIO-2020

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi familia por apoyarme durante todos estos años en cada decisión que he tomado. A mis tíos y primo en Viña del Mar por recibirme tan afectuosamente durante mi inicio en la universidad. Agradezco a todos los amigos y personas que conocí en este largo proceso desde el ingreso a la universidad en plan común, los años en mecánica, hasta mi salida; agradezco cada uno de los momentos que viví con ustedes. Agradezco igualmente a los profesores que nos enseñaron con su mejor voluntad y pasión. Agradezco al profesor Harvey Zambrano por su gran apoyo y carisma, y al profesor Carlos Rosales por ser un excelente guía durante este trabajo.

Resumen

En el presente trabajo se estudió la capacidad del software Fluent para modelar fenómenos hidrodinámicos acoplados a fenómenos electromagnéticos. La teoría de mecánica de fluidos es revisada incorporando también la teoría de electromagnetismo, esto es, las ecuaciones de Maxwell, conservación de carga eléctrica y la fuerza de Lorentz. Se realizan con ellos las simplificaciones necesarias para los casos de estudio en magnetohidrodinámica, y en específico para casos aplicables a ingeniería donde el número de Reynolds Magnético es muy bajo.

Se detalla el método de volúmenes finitos para la resolución de las ecuaciones y los principales esquemas utilizados para la aproximación de los distintos términos asociados en las ecuaciones de Navier-Stokes y sus ventajas, complicaciones y consideraciones. El método SIMPLE para un caso estacionario es presentado junto con el algoritmo para su implementación y criterios de convergencia utilizados.

Se modela un chorro de material eléctricamente conductor dentro de una cámara cilíndrica. Se estudian 4 geometrías, dos para inyectores circulares y dos para rectangulares de igual diámetro hidráulico ubicados concéntricamente, y con una razón entre sus diámetros y el diámetro de la cámara cilíndrica d/D de $1/10$ y $1/20$. El caso se modela bajo un régimen de flujo laminar con un número de Reynolds de 100 respecto del inyector, mientras que la magnitud del campo magnético es variada de acuerdo al número de Hartmann desde un valor 0 hasta 60.

Los resultados muestran concordancia con lo analizado teóricamente en cuanto a la tendencia del flujo a un comportamiento cuasi-bidimensional y a la disipación de calor mediante el efecto Joule. Se obtuvieron los parámetros α y β de una función tipo Weibull para caracterizar la velocidad del flujo en función del número de Hartmann, teniendo un coeficiente de correlación R^2 mayor a 0,9 en todos los casos. El análisis de la vorticidad se realiza mediante un parámetro λ que mide la componente de vorticidad alineada al campo magnético respecto de la vorticidad total por cada elemento. Este análisis muestra la influencia del campo magnético en el alineamiento del campo de vorticidad tendiendo estos a alinearse, siempre que la magnitud del campo magnético no sea suficientemente grande como para disipar el flujo. En el caso del inyector rectangular, la posición angular de este es sustancial para un control del alineamiento de la vorticidad respecto del campo magnético.

Palabras Claves: MHD, Fluent, número de Hartmann, número de Reynolds magnético.

Abstract

In the present work, capability of Fluent software is studied to model hydrodynamic phenomena coupled with electromagnetism. Fluid mechanics theory is revised, and also, electromagnetic theory, that is, Maxwell's equations, conservation of electric charge and Lorentz force. Simplifications are developed to get MHD equations. Special simplification for engineering studies with low magnetic Reynolds number is demonstrated.

Finite volume method is shown for equation's resolution as principals approximation schemes used in Navier-Stokes terms, mentioning its advantages, complications and considerations. Stationary SIMPLE method is presented, including the algorithm to its implementation, and convergence criteria.

An electrical conducting fluid jet is modeled inside a cylindrical chamber. Four geometries are studied, two circular nozzle and two rectangular nozzle with same hydraulic diameter located concentric to the chamber. A diameter rate is used between nozzle and chamber diameter d/D with 1/10 and 1/20 values. A laminar flow regime is studied with a Reynolds number of 100 at the nozzle, on the other hand, magnitude of the magnetic field is imposed according to the Hartmann number with values from 0 to 60.

Results agree with theory about tendency of the flow to a quasi-bidimensional

behaviour and heat dissipation through Joule effect. Weibull function parameters α and β are obtained in order to characterize the flow velocity as a function of the Hartmann number, the correlation coefficient R^2 for all cases is greater than 0.9. The vorticity analysis realized through the α parameter measures the vorticity component aligned with the magnetic field against compared vorticity magnitude of all elements. This analysis shows the influence of the magnetic field tending to align the vorticity with itself, this will happen just if the dissipation of the jet is not too strong. In the rectangular nozzle case is needed to consider the orientation of the nozzle to have a better control of the vorticity alignment in respect of the magnetic field.

Keywords: MHD, Fluent, Hartmann number, Magnetic Reynolds number

Glosario

CFD : Computational Fluid Dynamics

MHD : Magnetohidrodinámica

$\vec{E}$: Vector del campo eléctrico

$\vec{B}$: Vector del campo magnético

q : Carga eléctrica

ϵ_0 : Constante de permitividad del vacío

μ_m : Constante de permeabilidad magnética

$\vec{J}$: Vector densidad de corriente

σ : Conductividad eléctrica

ρ_e : Carga eléctrica volumétrica

$\vec{u}$: Campo de velocidad

$\bar{\bar{S}}$: Tensor tasa de deformación

$\bar{\bar{\sigma}}$: Tensor de esfuerzos

λ_m : Difusividad magnética

λ_t : Conductividad térmica

λ : Parámetro de alineación

ρ : Densidad

ν : Viscosidad cinemática

p : Presión

e_t : Energía total

$\vec{\omega}$: Campo de vorticidad S

Término fuente :

ϕ : Potencial electrostático

U : Velocidad característica

L_c : Largo característico

τ : Tiempo adimensional

Ω : Volumen de control

N : Parámetro de interacción o número de Stuart

Re : Número de Reynolds

Re_m : Número de Reynolds magnético

Ha : Número de Hartmann

Superíndices

* : Variable adimensional

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	IV
Glosario	VI
Índice de figuras	XI
Índice de cuadros	XVIII
1. Introducción y Objetivos	1
1.1. Aplicaciones industriales	4
1.1.1. Bombas y generadores electromagnéticos	4
1.1.2. Flujómetro electromagnético	6
2. Marco Teórico	7
2.1. Ecuaciones de conservación	7
2.2. Electromagnetismo	10
2.2.1. Ecuaciones de Maxwell	10
2.2.2. Fuerza de Lorentz	12
2.3. Ecuaciones de electromagnetismo para MHD	13
2.3.1. Ecuación de transporte para el campo magnético	15

2.3.2.	Números adimensionales característicos	16
2.3.3.	Magnetohidrodinámica a bajo número de Reynolds Magnético .	17
2.4.	Soluciones analíticas	19
2.4.1.	Capa límite de Hartmann	20
2.4.2.	Flujo de Hartmann	21
2.4.3.	Chorro 2D bajo influencia de un campo magnético	22
2.5.	Método de volúmenes finitos	26
2.5.1.	Aproximación de la derivada temporal	28
2.5.2.	Aproximación de integrales de volumen	28
2.5.3.	Aproximación de integrales de superficie	29
2.5.3.1.	Upwind Difference Scheme (UDS)	29
2.5.3.2.	Central Difference Scheme (CDS)	30
2.5.3.3.	Quadratic Upstream Interpolation for Convective Ki- netics (QUICK)	31
2.5.3.4.	Total Variation Diminishing (TVD)	32
2.6.	Acoplamiento Presión-Velocidad	35
2.6.0.1.	Malla escalonada	36
2.6.0.2.	Algoritmo SIMPLE	39
2.6.1.	Convergencia y Residuales	42
3.	Metodología	44
3.1.	Caso de estudio	44
3.2.	Caso para N constante	51
4.	Resultados y discusión	52
4.1.	Caso 1, $d/D = 1/10$, $Re = 100$	52
4.1.1.	Corte planos XZ e YZ	53
4.1.2.	Cortes plano XY	54
4.2.	Caso 2, $d/D = 1/10$, $Re = 100$	61
4.2.1.	Corte planos XZ e YZ	62

4.2.2. Cortes plano XY	65
4.3. Caso 3, $d/D = 1/20$, $Re = 100$	72
4.3.1. Corte planos XZ e YZ	72
4.3.2. Cortes plano XY	74
4.4. Caso 4, $d/D = 1/20$, $Re = 100$	82
4.4.1. Corte planos XZ e YZ	82
4.4.2. Cortes plano XY	84
4.5. Caso 1, $d/D = 1/10$, $N=1$	89
4.6. Caso 1, $d/D = 1/10$, $N=2$	91
4.7. Velocidad en el eje central del chorro	93
4.8. Alineación de la vorticidad con el campo magnético (Re constante) . . .	95
4.9. Alineación de la vorticidad con el campo magnético (Parámetro de interacción constante)	96
5. Conclusiones	98
Bibliografía	100

Índice de figuras

1.1. Campo magnético terrestre. Fuente: [1]	2
1.2. Reactor nuclear rápido refrigerado por sodio del tipo piscina. Fuente: Wikipedia	5
1.3. Yamato-1, el primer barco propulsado por MHD. Fuente: [2]	5
1.4. Medidores de flujo electromagnético.	6
2.1. Flujo unidireccional cerca de una pared.	20
2.2. Flujo unidireccional entre dos placas	20
2.3. Comparación de perfiles de velocidad para distintos números de Hart- mann.	22
2.4. Chorro bidimensional sometido a un campo magnético en dirección Y. .	23
2.5. Líneas de corriente y campo de velocidad de un chorro bidimensional sometido a un campo magnético	24
2.6. Un volumen de control típico y la notación utilizada para una malla bidimensional Fuente: [6]	27
2.7. Esquema de diferencias centradas.	30
2.8. Esquema QUICK.	31
2.9. Nodos utilizados para la definición del limitador de pendiente. $i-1$ co- rrespondería al nodo W, i al nodo P, $i+1$ al nodo E, $i+2$ al nodo EE. Fuente: [7]	32
2.10. Región admisible para el limitador para esquemas TVD de segundo orden. r corresponde al parámetro θ y ϕ al limitador l . Fuente: [8] . . .	34

2.11. Malla escalonada con un volúmen de control para la ecuación de continuidad, un VC para la ecuación de momentum en x (u-cell) y un VC para la ecuación de momentum en Y (v-cell). Fuente: [10]	36
2.12. Volumen de control para una celda de momentum en X. Fuente: [10]	37
2.13. Volumen de control para una celda de momentum en Y. Fuente: [10]	38
2.14. Resumen del algoritmo SIMPLE. Fuente: [10]	42
3.1. Experimento de un chorro turbulento.	45
3.2. Geometría para inyector circular, $d/D = 1/10$.	46
3.3. Geometría para inyector rectangular, $d/D = 1/10$.	46
3.4. Vista lateral malla Caso 1	47
3.5. Vista lateral malla Caso 2	47
3.6. Vista lateral malla Caso 3	47
3.7. Vista lateral malla Caso 4	47
3.8. Vista frontal malla Caso 1	48
3.9. Vista frontal malla Caso 2	48
3.10. Vista frontal malla Caso 3	48
3.11. Vista frontal malla Caso 4	48
3.12. Entrada de velocidad inyector circular.	50
3.13. Entrada de velocidad inyector rectangular.	50
4.1. Caso 1, $Ha = 0$	53
4.2. Caso 1, $Ha = 1$	53
4.3. Caso 1, $Ha = 3$	53
4.4. Caso 1, $Ha = 10$	54
4.5. Caso 1, $Ha = 30$	54
4.6. Caso 1, $z/d=0.5$, $Ha = 0$	55
4.7. Caso 1, $z/d=0.5$, $Ha = 1$	55
4.8. Caso 1, $z/d=0.5$, $Ha = 3$	55
4.9. Caso 1, $z/d=0.5$, $Ha = 10$	55

4.10. Caso 1, $z/d=0.5$, $Ha = 30$	55
4.11. Caso 1, $z/d=1$, $Ha = 0$	56
4.12. Caso 1, $z/d=1$, $Ha = 1$	56
4.13. Caso 1, $z/d=1$, $Ha = 3$	56
4.14. Caso 1, $z/d=1$, $Ha = 10$	56
4.15. Caso 1, $z/d=1$, $Ha = 30$	56
4.16. Caso 1, $z/d=5$, $Ha = 0$	57
4.17. Caso 1, $z/d=5$, $Ha = 1$	57
4.18. Caso 1, $z/d=5$, $Ha = 3$	57
4.19. Caso 1, $z/d=5$, $Ha = 10$	57
4.20. Caso 1, $z/d=5$, $Ha = 30$	58
4.21. Caso 1, $z/d=10$, $Ha = 0$	58
4.22. Caso 1, $z/d=10$, $Ha = 1$	58
4.23. Caso 1, $z/d=10$, $Ha = 3$	58
4.24. Caso 1, $z/d=10$, $Ha = 10$	58
4.25. Caso 1, $z/d=10$, $Ha = 30$	59
4.26. Caso 1, $z/d=25$, $Ha = 0$	59
4.27. Caso 1, $z/d=25$, $Ha = 1$	59
4.28. Caso 1, $z/d=25$, $Ha = 3$	60
4.29. Caso 1, $z/d=25$, $Ha = 10$	60
4.30. Caso 1, $z/d=25$, $Ha = 30$	60
4.31. V_Z en el eje Z para un inyector circular, $Re=100$, $d/D=1/10$	61
4.32. Caso 2, $Ha = 0$	62
4.33. Caso 2, $Ha = 1$	63
4.34. Caso 2, $Ha = 3$	63
4.35. Caso 2, $Ha = 10$	64
4.36. Caso 2, $Ha = 30$	64
4.37. Caso 2, $z/d=0.5$, $Ha = 0$	65
4.38. Caso 2, $z/d=0.5$, $Ha = 1$	65

4.39. Caso 2, $z/d=0.5$, $Ha = 3$	65
4.40. Caso 2, $z/d=0.5$, $Ha = 10$	65
4.41. Caso 2, $z/d=0.5$, $Ha = 30$	66
4.42. Caso 2, $z/d=1$, $Ha = 0$	66
4.43. Caso 2, $z/d=1$, $Ha = 1$	66
4.44. Caso 2, $z/d=1$, $Ha = 3$	67
4.45. Caso 2, $z/d=1$, $Ha = 10$	67
4.46. Caso 2, $z/d=1$, $Ha = 30$	67
4.47. Caso 2, $z/d=5$, $Ha = 0$	68
4.48. Caso 2, $z/d=5$, $Ha = 1$	68
4.49. Caso 2, $z/d=5$, $Ha = 3$	68
4.50. Caso 2, $z/d=5$, $Ha = 10$	68
4.51. Caso 2, $z/d=5$, $Ha = 30$	68
4.52. Caso 2, $z/d=10$, $Ha = 0$	69
4.53. Caso 2, $z/d=10$, $Ha = 1$	69
4.54. Caso 2, $z/d=10$, $Ha = 3$	69
4.55. Caso 2, $z/d=10$, $Ha = 10$	69
4.56. Caso 2, $z/d=10$, $Ha = 30$	69
4.57. Caso 2, $z/d=25$, $Ha = 0$	70
4.58. Caso 2, $z/d=25$, $Ha = 1$	70
4.59. Caso 2, $z/d=25$, $Ha = 3$	70
4.60. Caso 2, $z/d=25$, $Ha = 10$	70
4.61. Caso 2, $z/d=25$, $Ha = 30$	70
4.62. Caso 3, Velocidad Z en el eje Z para un inyector rectangular, $Re=100$, $d/D=1/10$	71
4.63. Caso 3, $Ha = 0$	72
4.64. Caso 3, $Ha = 1$	72
4.65. Caso 3, $Ha = 3$	73
4.66. Caso 3, $Ha = 10$	73

4.67. Caso 3, $Ha = 30$	73
4.68. Caso 3, $z/d=0.5$, $Ha = 0$	74
4.69. Caso 3, $z/d=0.5$, $Ha = 1$	74
4.70. Caso 3, $z/d=0.5$, $Ha = 3$	74
4.71. Caso 3, $z/d=0.5$, $Ha = 10$	74
4.72. Caso 3, $z/d=0.5$, $Ha = 30$	75
4.73. Caso 3, $z/d=1$, $Ha = 0$	75
4.74. Caso 3, $z/d=1$, $Ha = 1$	75
4.75. Caso 3, $z/d=1$, $Ha = 3$	76
4.76. Caso 3, $z/d=1$, $Ha = 10$	76
4.77. Caso 3, $z/d=1$, $Ha = 30$	76
4.78. Caso 3, $z/d=5$, $Ha = 0$	77
4.79. Caso 3, $z/d=5$, $Ha = 1$	77
4.80. Caso 3, $z/d=5$, $Ha = 3$	77
4.81. Caso 3, $z/d=5$, $Ha = 10$	77
4.82. Caso 3, $z/d=5$, $Ha = 30$	78
4.83. Caso 3, $z/d=10$, $Ha = 0$	78
4.84. Caso 3, $z/d=10$, $Ha = 1$	78
4.85. Caso 3, $z/d=10$, $Ha = 3$	79
4.86. Caso 3, $z/d=10$, $Ha = 10$	79
4.87. Caso 3, $z/d=10$, $Ha = 30$	79
4.88. Caso 3, $z/d=25$, $Ha = 0$	80
4.89. Caso 3, $z/d=25$, $Ha = 1$	80
4.90. Caso 3, $z/d=25$, $Ha = 3$	80
4.91. Caso 3, $z/d=25$, $Ha = 10$	80
4.92. Caso 3, $z/d=25$, $Ha = 30$	81
4.93. V_Z en el eje Z para un inyector circular, $Re=100$, $d/D=1/20$	81
4.94. Caso 4, $Ha = 0$	82
4.95. Caso 4, $Ha = 1$	83

4.96. Caso 4, $Ha = 3$	83
4.97. Caso 4, $Ha = 10$	83
4.98. Caso 4, $z/d=0.5$, $Ha = 0$	84
4.99. Caso 4, $z/d=0.5$, $Ha = 1$	84
4.100Caso 4, $z/d=0.5$, $Ha = 3$	84
4.101Caso 4, $z/d=0.5$, $Ha = 10$	84
4.102Caso 4, $z/d=1$, $Ha = 0$	85
4.103Caso 4, $z/d=1$, $Ha = 1$	85
4.104Caso 4, $z/d=1$, $Ha = 3$	85
4.105Caso 4, $z/d=1$, $Ha = 10$	85
4.106Caso 4, $z/d=5$, $Ha = 0$	86
4.107Caso 4, $z/d=5$, $Ha = 1$	86
4.108Caso 4, $z/d=5$, $Ha = 3$	86
4.109Caso 4, $z/d=5$, $Ha = 10$	86
4.110Caso 4, $z/d=10$, $Ha = 0$	87
4.111Caso 4, $z/d=10$, $Ha = 1$	87
4.112Caso 4, $z/d=10$, $Ha = 3$	87
4.113Caso 4, $z/d=10$, $Ha = 10$	87
4.114Caso 4, $z/d=25$, $Ha = 0$	88
4.115Caso 4, $z/d=25$, $Ha = 1$	88
4.116Caso 4, $z/d=25$, $Ha = 3$	88
4.117Caso 4, $z/d=25$, $Ha = 10$	88
4.118 V_Z en el eje Z para un inyector rectangular, $Re=100$, $d/D=1/20$	89
4.119Caso 1, $N=1$, $Ha = 3$	90
4.120Caso 1, $N=1$, $Ha = 10$	90
4.121Caso 1, $N=1$, $Ha = 22.36$	90
4.122Caso 1, $N=1$, $Ha = 31.62$	91
4.123Caso 1, $N=2$, $Ha = 3$	91
4.124Caso 1, $N=2$, $Ha = 10$	92

4.125Caso 1, $N=2$, $Ha = 22.36$	92
4.126Caso 1, $N=2$, $Ha = 31.62$	92
4.127Curvas de α vs el número de Hartmann para los cuatro casos.	93
4.128Curvas de β vs α para los cuatro casos.	94
4.129Parámetro de alineación λ bajo distintos números de Hartmann y $Re =$ 100, en los distintos casos.	96
4.130Parámetro de alineación λ bajo distintos números de Hartmann y paráme- tros de alineación para el caso 1	97

Índice de cuadros

2.1. Esquemas de discretización y sus limitadores. Fuente: [7]	32
3.1. Casos de estudio	45
3.2. Parámetros de las distintas mallas	46
3.3. Propiedades termofísicas y eléctricas. Fuente: [3]	49
4.1. Curvas de tendencia y su valor de R^2	95

Capítulo 1

Introducción y Objetivos

El movimiento de fluidos eléctricamente conductores en presencia de campos magnéticos produce una interacción entre la dinámica de fluidos y la electrodinámica de los campos inducidos por el movimiento del mismo fluido. Estos efectos se pueden aplicar en ingeniería para ejercer control sobre el flujo de metales líquidos. El objetivo general de este trabajo es estudiar, mediante modelación computacional, la influencia de un campo magnético transversal sobre la dinámica de un chorro libre de fluido conductor descargado en una cámara. Para esto, los objetivos específicos principales considerados son:

- Investigar las características generales y ecuaciones gobernantes de problemas de magnetohidrodinámica.
- Establecer la formulación para incorporar la fuerza de Lorentz en la ecuación de Navier-Stokes para un régimen de bajo número de Reynolds magnético.
- Implementar un modelo numérico de la configuración del chorro inyectado en la cámara en el código ANSYS Fluent, e incluir los efectos magnéticos mediante el módulo MHD.
- Ejecutar simulaciones del chorro en estado estacionario para diversos valores de los números adimensionales de Hartmann y el parámetro de interacción, median-

te combinaciones de propiedades relevantes: permeabilidad magnética, conductividad eléctrica y viscosidad del fluido; velocidad de inyección; intensidad del campo magnético.

- En base a los resultados caracterizar el campo de flujo del chorro y distribuciones de vorticidad, dentro del rango de números adimensionales estudiado.

A pesar de que podría ser poco intuitivo, la interacción entre campos magnéticos y fluidos conductores eléctricamente se da a menudo en distintos tipos de flujos, tanto naturales como a nivel de ingeniería. Por ejemplo, el movimiento de hierro líquido al interior del núcleo terrestre es capaz de generar el campo magnético terrestre que interacciona con las corrientes solares. Las erupciones solares y la corona solar están ligadas al efecto del campo magnético debido al movimiento del plasma, los vientos solares interactúan también con el campo magnético terrestre e incluso la formación de estrellas está fuertemente afectada por efectos magnetohidrodinámicos.

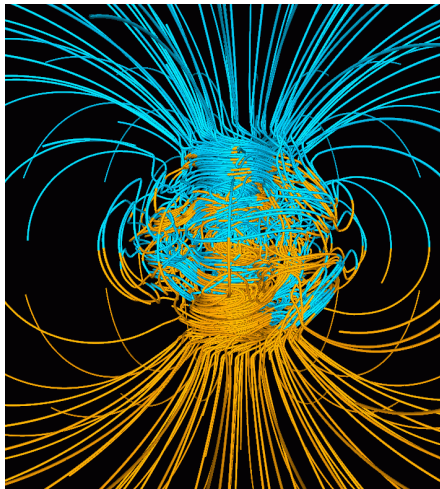


Figura 1.1: Campo magnético terrestre. Fuente: [1]

En el caso de aplicaciones a nivel de ingeniería, los actuales esfuerzos de lograr generar fusión nuclear requieren de un control en el manejo del plasma a alta temperatura, esto se realiza mediante el confinamiento del fluido sometido a campos magnéticos.

También, los reactores de fisión utilizan regularmente esta tecnología para el enfriamiento de los reactores mediante sodio líquido el cual es bombeado mediante bombas que utilizan este principio. En la industria metalúrgica este fenómeno es utilizado para controlar las inestabilidades que se producen debido a la turbulencia. En microfluídica se utiliza para impulsar fluido por microcanales de manera continua, sin pulsaciones.

Para comprender este fenómeno es necesaria la comprensión de las leyes de Maxwell y como éstas interactúan en los flujos de materiales conductores. Aunque éstas leyes serán explicadas en los próximos capítulos, a continuación, se explican los tres tipos de interacción que ocurren en MHD:

1. El movimiento relativo entre un fluido conductor y un campo magnético impuesto generará, de acuerdo a la ley de Faraday, una fuerza electromotriz, y con ello, una corriente inducida.
2. Lo siguiente es que esta corriente eléctrica inducida, de acuerdo a la ley de Ampère, inducirá un campo magnético, el cual interactuará con el campo impuesto.
3. La combinación de los campos magnéticos (inducido e impuesto), en conjunto con la corriente eléctrica inducida, producirá una fuerza sobre el conductor que, en general, tenderá a inhibir el movimiento del fluido.

Estos efectos nos muestran la estrecha relación existente entre el movimiento de un conductor y al campo magnético impuesto. Cualquier cambio en uno de los dos influirá en el comportamiento del otro, y por consiguiente, en sí mismo. Sin embargo, esto no es siempre cierto. En algunos casos, el campo magnético inducido por la corriente eléctrica es tan pequeño que no es suficiente para cambiar al campo magnético impuesto de manera significativa. En este caso se dice que el campo magnético está "desacoplado" del movimiento del conductor. Por otro lado, esto no quiere decir que el campo magnético impuesto no influirá en el movimiento del fluido; es probable que

afecte al flujo dependiendo de la magnitud del campo magnético.

1.1. Aplicaciones industriales

Las aplicaciones a nivel industrial son bastante específicas y no son ampliamente utilizadas. Algunos de estas aplicaciones son mostradas a continuación.

1.1.1. Bombas y generadores electromagnéticos

Conociendo la ley de Faraday podemos notar que es posible impulsar un fluido eléctricamente conductor al aplicar un campo magnético y una corriente eléctrica transversal a este.

A menudo se utilizan bombas electromagnéticas para el transporte de sodio líquido en el proceso de enfriamiento en plantas nucleares de fisión. La utilización de sodio en este tipo de plantas es que, a pesar de que el sodio posee un menor calor específico, posee un amplio rango en el que permanece en estado líquido (desde 371 K hasta 1156 K). Por otro lado, este no genera corrosión en los equipos, como lo haría en su funcionamiento con agua. La desventaja de esto es que al entrar en contacto con agua es explosivo y altamente inflamable al contacto con aire. Obviamente, el manejo de bombas para el movimiento de fluidos se limita al bombeo de fluidos conductores.

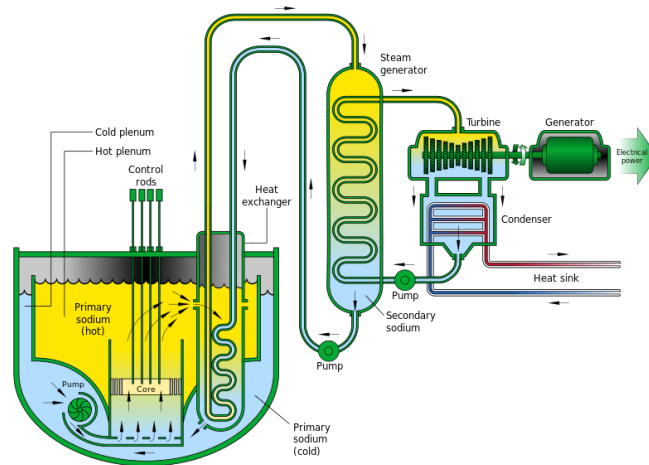


Figura 1.2: Reactor nuclear rápido refrigerado por sodio del tipo piscina. Fuente: Wikipedia

En 1992, en Japón, navegó exitosamente el primer barco propulsado por tecnología de MHD del mundo. Utilizando imanes de materiales superconductores tiene un peso total cercano a las 185 toneladas, posee un propulsor que genera un campo magnético de 4 Tesla, con lo que se obtiene una fuerza de empuje máxima de 16000 [N], una velocidad máxima de 8 nudos y una eficiencia menor al 2 %.



Figura 1.3: Yamato-1, el primer barco propulsado por MHD. Fuente: [2]

1.1.2. Flujómetro electromagnético

Un fluido conductor moviéndose a través de un campo magnético generará una diferencia de potencial eléctrico. Midiendo esta diferencia de potencial es posible obtener el caudal o flujo másico de una tubería.

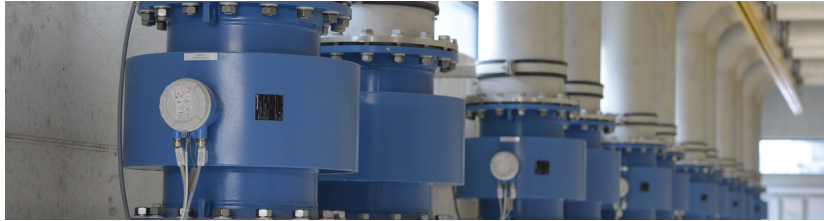


Figura 1.4: Medidores de flujo electromagnético.

El uso de medidores de flujo del tipo electromagnéticos es común en plantas de la industria alimenticia y de tratamiento de aguas. Estos poseen la ventaja de tener una alta precisión y que no intervienen físicamente el flujo, esto tiene la ventaja de que no necesitan mayores mantenciones al interior del medidor. La desventaja, al igual que en el caso de bombas electromagnéticas es que es necesario una conductividad eléctrica mínima para que la diferencia de potencial eléctrico sea medible.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Ecuaciones de conservación

Los fenómenos de mecánica de fluidos son modelados mediante ecuaciones de conservación de propiedades específicas de los fenómenos estudiados. En específico, las propiedades que son tomadas como conservativas son la masa, el momentum, y en caso de requerirse, la energía. Otras magnitudes conservativas corresponden a la carga eléctrica, utilizada en la siguiente sección, y el momento angular.

Las ecuaciones conservativas se muestran a continuación en su forma integral obtenidas a partir de un análisis de los flujos en volumen de control genérico visto por un observador Euleriano del campo de flujo. La ecuación de conservación de masa, por lo tanto, surge del análisis de los flujos másicos en una superficie de un volumen de control.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV + \int_{d\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (2.1)$$

Donde ρ es la densidad del fluido, $\vec{u}$ es el vector velocidad, $\vec{n}$ es el vector normal a la superficie del volumen de control, Ω representa el volumen de control y $d\Omega$ la superficie de este. La primera integral representa los cambios al interior del volumen de

control, mientras que la segunda representa los flujos de masa a través de la superficie. En el caso de existir algún término fuente para la masa, como puede ser un cambio de estado, este se incluiría del lado derecho de la ecuación.

La ecuación de momentum representa una ecuación de balance de fuerza, donde una de las partes corresponderá a la parte asociada a la aceleración de las partículas de fluido, mientras que la otra corresponderá a las distintas fuerzas que mueven o afectan el movimiento del fluido. En general, las fuerzas asociadas a un elemento de fluido corresponden a la presión p y las fuerzas viscosas, aunque en algunos casos es necesario considerar también la gravedad. En caso de existir, es necesario agregar una fuente de momentum S_m , esta fuente podría ser la gravedad o alguna fuerza electromagnética, entre otras. En MHD, este término está relacionado con la fuerza de Lorentz la cual relaciona el movimiento del fluido, el campo magnético al cual está sometido, y la corriente eléctrica que circula en él.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} dV + \int_{d\Omega} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F} = \int_{d\Omega} \vec{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} dA + \int_{\Omega} \vec{S}_m dV \quad (2.2)$$

Donde $\vec{n}$ es la dirección normal a la superficie, $\vec{\bar{\sigma}}$ representa el tensor de esfuerzos, el cual incluye los esfuerzos viscosos y debido a la presión. El tensor de esfuerzos corresponde a lo siguiente:

$$\vec{\bar{\sigma}} = -p\vec{\bar{I}} + 2\mu\vec{\bar{S}} + \frac{2}{3}\mu\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (2.3)$$

Donde $\vec{\bar{I}}$ es el tensor unidad, μ la viscosidad dinámica y $\vec{\bar{S}}$ es el tensor tasa de deformación:

$$\vec{\bar{S}} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^t \right) \quad (2.4)$$

La ecuación de conservación de energía surge al hacer un análisis de la energía total, es decir, energía cinética y sensible. El balance, con todos los términos asociados,

resulta en lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho e_t dV + \int_{d\Omega} \rho e_t (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \int_{d\Omega} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} dA - \int_{d\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dA + \int_{\Omega} S_e dV \quad (2.5)$$

Siendo e_t la energía total, es decir, cinética y energía interna, $\vec{q}$, el calor transferido por conducción, según la ley de Fourier :

$$\vec{q} = -\lambda_t \nabla T \quad (2.6)$$

Donde λ_t corresponde a la conductividad térmica del fluido. S_e corresponde a una fuente de energía. En MHD, esta fuente de energía corresponde a la disipación eléctrica debido a la resistencia que genera el fluido al paso de la corriente. Está definida por,

$$S_e = \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot \vec{J} \quad (2.7)$$

Donde J es la densidad de corriente eléctrica y σ la conductividad eléctrica del fluido.

2.2. Electromagnetismo

2.2.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell corresponden a cuatro ecuaciones las cuales en su conjunto describen completamente los fenómenos electromagnéticos. Estas ecuaciones corresponden a las leyes descritas gracias a las contribuciones de Gauss, Faraday, Coulomb y Ampere, entre otros.

En su forma integral, las leyes de Maxwell son mostradas a continuación.

La **Ley de Gauss para electricidad** indica que el flujo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por la superficie.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$

La **Ley de Gauss para magnetismo** dice que las líneas de campo magnético son cerradas, y por lo tanto, el flujo magnético neto en una superficie cerrada es nulo.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.9)$$

La **Ley de inducción de Faraday** explica que una variación temporal en el flujo magnético de una superficie abierta generará una circulación de campo eléctrico.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.10)$$

La **Ley de Ampère**, explica la generación del campo magnético debido a una corriente eléctrica.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_m \left(\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \quad (2.11)$$

Siendo $\vec{J}$ la densidad de corriente que circula en el conductor. Para un conductor en movimiento, la densidad de corriente es una combinación de corriente debida a un campo eléctrico, y otra parte debida a las cargas eléctricas que se mueven a través de un campo magnético. La conocida **Ley de Ohm** se escribe como sigue:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (2.12)$$

la cual debe cumplir con la conservación de carga eléctrica.

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.13)$$

Del mismo modo, utilizando el teorema de la divergencia de Gauss $\left(\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV \right)$ y el teorema de Stokes $\left(\int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \right)$, es posible obtener la forma diferencial de estas ecuaciones.

La ley de Gauss para electricidad, en su forma diferencial se puede escribir, por lo tanto, como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (2.14)$$

La ley de Gauss para magnetismo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.15)$$

La ley de inducción de Faraday,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.16)$$

La ley de Ampère,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_m \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.17)$$

2.2.2. Fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz corresponde a la fuerza electromagnética experimentada por una partícula cargada eléctricamente. Una carga puede tener dos efectos distintos debido a esta fuerza. El primero de ellos y el más simple corresponde a una carga sostenida sobre un campo eléctrico la cual sufrirá una fuerza en la misma dirección del campo proporcional a su carga eléctrica q , de acuerdo a la siguiente expresión,

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.18)$$

Por otra parte, una carga q en movimiento que pasa por un campo magnético sufrirá una fuerza perpendicular a la dirección de su movimiento y a la del campo magnético. Esta fuerza obedece a la siguiente expresión,

$$\vec{F} = q(\vec{u}_q \times \vec{B}) \quad (2.19)$$

La suma de ambas expresiones, por tanto, resulta en la expresión a continuación,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u}_q \times \vec{B}) \quad (2.20)$$

Si consideramos la fuerza que experimenta un volumen infinitesimal que contiene una cantidad N de cargas, entonces, la fuerza experimentada por unidad de volumen corresponderá a lo siguiente,

$$\vec{F} = \frac{1}{\Delta V} \left(\sum_{i=1}^N q_i \vec{E} + \sum_{i=1}^N q_i \vec{u}_q \times \vec{B} \right) \quad (2.21)$$

De esto, podemos ver que aparecen dos términos ya mencionados. El primero corresponde a la definición de densidad de carga eléctrica volumétrica ρ_e , es decir, la cantidad de cargas que existen en un volumen específico. La segunda, corresponde a la densidad de carga eléctrica que pasa a través del volumen, esto es, la densidad de corriente $\vec{J} = \rho_e \vec{u}_q$. Por tanto, la fuerza electromagnética por unidad de volumen es la siguiente,

$$\vec{F} = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.22)$$

2.3. Ecuaciones de electromagnetismo para MHD

Debido a que los casos comunes de estudio de MHD en ingeniería tienen características específicas, es que es posible realizar algunas simplificaciones a las ecuaciones mostradas en el capítulo anterior.

Para realizar estas simplificaciones podemos partir analizando el término de densidad de carga eléctrica. Para ello, se calcula la divergencia de la ley de Ohm, y se reemplaza en ella la Ley de Gauss para campos eléctricos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \sigma \left(\frac{\rho_e}{\epsilon_0} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) \right) \quad (2.23)$$

Donde $\tau_e = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$ corresponde al tiempo de relajación de las cargas. La ecuación de conservación de carga permite encontrar una ecuación para la densidad de carga eléctrica dentro del conductor.

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\rho_e}{\tau_e} + \sigma \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = 0 \quad (2.24)$$

Con esto, es posible analizar dos casos importantes. El primero es el caso en que no existe movimiento del conductor, es decir, $u = 0$. Para este caso, la ecuación resulta en $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \rho_e / \tau_e = 0$. Cuya solución es

$$\rho_e = \rho_e(0) \exp(-t/\tau_e) \quad (2.25)$$

Dado que el tiempo de relajación es del orden de 10^{-18} [s] (la permitividad eléctrica del vacío es del orden de 10^{-12} y la conductividad típica de un material conductor es del orden de 10^6), la carga al interior del conductor es prácticamente cero, sólo a excepción de un intervalo mínimo de tiempo posterior a la aplicación de un campo eléctrico.

El segundo caso a analizar, es el de un conductor en movimiento que ya ha llegado a un estado estacionario. Esto es equivalente a decir que $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \sim 0$. La ecuación resultante

nos entrega una idea de la carga eléctrica en el interior del conductor.

$$\rho_e = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) \quad (2.26)$$

Siendo el valor de la densidad de carga eléctrica un valor finito, se puede obtener un orden de magnitud del aporte de la densidad de carga en la ley de Ohm sabiendo que $|\vec{E}| \sim |\vec{J}|/\sigma$

$$\rho_e |\vec{E}| \sim \frac{\epsilon_0 u B}{L_c} \cdot \frac{J}{\sigma} = \frac{u \tau_e}{L_c} J B \ll |\vec{J} \times \vec{B}| \quad (2.27)$$

Lo cual se cumple siempre que el tiempo característico de advección L_c/U sea suficientemente grande respecto de τ_e , lo cual se cumple fácilmente y en la mayoría de los casos. Esto nos dice que la fuerza de Lorentz en magnetohidrodinámica puede ser calculada mediante,

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.28)$$

Esto es válido, principalmente, por el hecho de que el material es un buen conductor eléctrico. Con esto, comparativamente la fuerza magnética resulta ser sustancialmente mayor que la debida al campo eléctrico.

La simplificación anterior considera que el término transiente $\partial \rho_e / \partial t \sim 0$, lo que implica que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.29)$$

Esto entrega la sospecha de que el término asociado al campo eléctrico en la ley de Ampère, es también despreciable. Revisando los órdenes de magnitud de este término podemos confirmar esta suposición.

$$\epsilon_0 \frac{\partial |\vec{E}|}{\partial t} \sim \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial |\vec{J}|}{\partial t} \ll |\vec{J}| \quad (2.30)$$

Con lo que obtenemos, finalmente, la ley de Ampère en su forma anterior a la propuesta por Maxwell, pero siendo consistente entre las otras ecuaciones.

Realizando un resumen de las ecuaciones, para los casos de MHD, las ecuaciones del electromagnetismo son las siguientes:

- Ley de Ampère y conservación de carga eléctrica

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_m \vec{J} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.31)$$

- Ley de Faraday y ley de Gauss para magnetismo

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.32)$$

- Ley de Ohm y fuerza de Lorentz

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad ; \quad \vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.33)$$

- La ley de Gauss para campos eléctricos no es necesaria para el cálculo de las variables, sin embargo, es importante saber que la divergencia del campo eléctrico no necesariamente es igual a cero.

2.3.1. Ecuación de transporte para el campo magnético

A partir de las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm, se encuentra una ecuación de transporte para el campo magnético, también conocida como **ecuación de inducción**.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \frac{1}{\sigma \mu_m} \vec{\nabla}^2 \vec{B} \Rightarrow \frac{D \vec{B}}{Dt} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \lambda_m \vec{\nabla}^2 \vec{B} \quad (2.34)$$

Siendo $\lambda_m = (\sigma \mu)^{-1}$ denominado coeficiente de difusividad magnética.

2.3.2. Números adimensionales característicos

Los números adimensionales nos ayudan a observar comportamientos de los fenómenos físicos reduciendo considerablemente la cantidad parámetros. Por ejemplo, la ecuación de momentum con el término de Lorentz incluido puede entregarnos cierta información utilizando los parámetros característicos del fenómeno.

Realizando el siguiente cambio de variable,

$$x^* = \frac{x}{L_c} \quad ; \quad u^* = \frac{u}{U} \quad ; \quad \tau = \frac{Ut}{L_c} \quad ;$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2} \quad ; \quad B^* = \frac{B}{B_0} \quad ; \quad J^* = \frac{J}{\sigma U B_0}$$

El operador diferencial ∇ adimensional quedará expresado por:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Rightarrow \vec{\nabla}^* = \left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*}, \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

La ecuación de conservación de momentum adimensional resulta ser,

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial \tau} + \left(\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* \right) \vec{u}^* = -\vec{\nabla}^* p^* + \frac{\nu}{UL_c} \vec{\nabla}^{*2} \vec{u}^* + \frac{\sigma B_0^2 L_c}{\rho U} \vec{J}^* \times \vec{B}^* \quad (2.35)$$

En esta ecuación podemos observar dos grupos adimensionales, estos son, el conocido número de Reynolds Re , y el parámetro de interacción N . El primero hace alusión a la relación entre los términos convectivos y difusivos en la ecuación de momentum. El segundo, relaciona el término convectivo con la fuerza de Lorentz.

A partir de estos dos se define el número de Hartmann Ha , el cual relaciona la fuerza de Lorentz con el término viscoso.

$$Ha^2 = NRe \quad (2.36)$$

De la sección anterior podemos recurrir a la ecuación de transporte del campo magnético. Utilizando los cambios de variable recién mostrados se obtiene

$$\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial \tau} = \vec{\nabla}^* \times (\vec{u}^* \times \vec{B}^*) + \frac{1}{\sigma \mu_m U L_c} \vec{\nabla}^{*2} \vec{B}^* \quad (2.37)$$

De esta ecuación se obtiene el número adimensional denominado como Reynolds magnético Re_m

- Reynolds magnético

$$Re_m = \sigma \mu_m U L_c = \frac{U L_c}{\lambda_m} \quad (2.38)$$

Más los números adimensionales encontrados de la ecuación de momentum hacen un total de tres números adimensionales necesarios para caracterizar el problema. Siendo los otros dos

- Número de Hartmann

$$Ha = B L_c (\sigma / \rho \nu)^{1/2} \quad (2.39)$$

- Parámetro de interacción

$$N = \frac{\sigma B^2 L_c}{\rho U} \quad (2.40)$$

2.3.3. Magnetohidrodinámica a bajo número de Reynolds Magnético

La clave de la simplificación para las ecuaciones de MHD para un bajo número de Reynolds Magnético consiste en que el campo magnético inducido es mucho menor que el campo magnético impuesto. Para probar esto, haciendo uso de las leyes de Ohm para la corriente inducida ($|\vec{J}| \sim \sigma |\vec{u}| |\vec{B}|$) y de Ampère, para el campo magnético inducido ($|\vec{b}| \sim \mu L_c |\vec{J}|$) se puede ver que la relación entre el campo magnético inducido y el impuesto es del orden del Reynolds magnético.

$$|\vec{b}| \sim \sigma \mu L_c |\vec{u}| |\vec{B}| = Re_m |\vec{B}| \quad (2.41)$$

Si se analiza el caso en que $Re_m \ll 1$, entonces se puede decir que el campo magnético inducido es despreciable $(|\vec{b}| \ll |\vec{B}|)$.

Sabiendo que el campo magnético inducido es muy pequeño, es posible dejar de lado la resolución de las ecuaciones de Maxwell como tal. La resolución del problema se reduce a encontrar el flujo eléctrico mediante la ley de Ohm, la cual además debe cumplir con la ecuación de conservación de carga eléctrica. Producto de que el campo eléctrico es irrotacional, dadas las suposiciones recién mostradas, es posible utilizar una función potencial para el campo eléctrico definida por $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Por consiguiente, reescribimos la ley de Ohm.

$$\vec{J} = \sigma \left(-\vec{\nabla}\phi + \vec{u} \times \vec{B} \right) \quad (2.42)$$

Por lo tanto, para cumplir con la conservación de carga se debe satisfacer lo siguiente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \sigma \left(-\vec{\nabla}^2 \phi + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) \right) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \phi = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{B} \cdot \vec{\omega} \quad (2.43)$$

Donde $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ corresponde a la vorticidad del campo de flujo.

Esto reduce sustancialmente las ecuaciones a resolver, necesitándose solamente de las ecuaciones de conservación de masa, de momentum con el término de Lorentz incluido, la ley de Ohm y la ecuación (2.35) obtenida de la ecuación de conservación de carga eléctrica. Esto se resume a continuación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.45)$$

$$\vec{J} = \sigma \left(-\vec{\nabla}\phi + \vec{u} \times \vec{B} \right) \quad (2.46)$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \vec{B} \cdot \vec{\omega} \quad (2.47)$$

Es importante destacar que la reducción de las ecuaciones que involucran al fenómeno es debido al desacoplamiento de la ecuaciones de momentum con la ecuación de inducción. Esto debido a que el campo magnético inducido es despreciable respecto del campo impuesto, dado por las condiciones que ha otorgado el tener un bajo número de Reynolds magnético.

2.4. Soluciones analíticas

Por medio de la teoría revisada es posible encontrar algunas soluciones analíticas que nos ayudarán a comprender el comportamiento del fenómeno físico.

Considerando un flujo unidireccional en dirección Z de un sistema cartesiano sobre el cual actúa un campo magnético constante en dirección Y, se puede ver que la fuerza de Lorentz asociada al flujo corresponde a la siguiente expresión.

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}_0 = (0, 0, \sigma u B_0) \times (0, B, 0) = (-\sigma B_0^2 u, 0, 0) \quad (2.48)$$

Utilizando esto en la ecuación de Navier-Stokes, viendo la componente de momentum en la dirección del flujo.

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma B_0^2 u \quad (2.49)$$

Es posible reordenar esta ecuación considerando los siguientes cambios de variable, los cuales tienen la suposición de que el gradiente de presión es constante en la dirección de movimiento del flujo.

$$u_\infty = -\frac{1}{\sigma B_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad ; \quad \delta^2 = \frac{\rho \nu}{\sigma B_0^2}$$

Finalmente, se obtiene la siguiente ecuación que será analizada en los siguientes puntos.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u - u_\infty) - \frac{1}{\delta^2}(u - u_\infty) = 0 \quad (2.50)$$

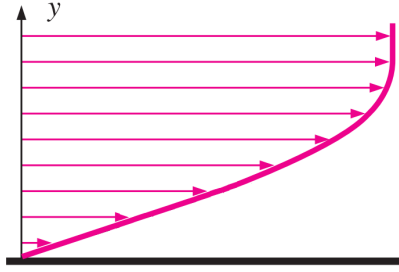


Figura 2.1: Flujo unidireccional cerca de una pared.

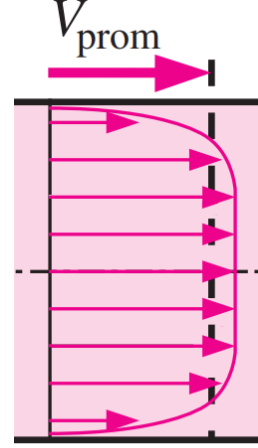


Figura 2.2: Flujo unidireccional entre dos placas

2.4.1. Capa límite de Hartmann

De la ecuación anterior, se puede hacer un análisis de la capa límite para un flujo con cizalle simple como el de la figura 2.1, donde $u = u(y)$, y así saber como esta es modificada por el campo magnético. Utilizando las condiciones de borde de pared ($u(y = 0) = 0$) y de que la velocidad debe ser constante lejos de la pared ($u = (y \rightarrow \infty) = u_\infty$) se llega a la solución.

$$u(y) = u_\infty \left(1 - e^{-y/\delta}\right) \quad (2.51)$$

Esto nos muestra que dentro de un tramo de espesor de orden $\sim \delta$ la velocidad aumenta rápidamente, modificándose la capa límite conocida comúnmente. Además, este parámetro δ depende de la intensidad del campo magnético, y por lo tanto, el

espesor de esta capa depende de la intensidad de este. En este caso, el término u_∞ corresponde a la velocidad de corriente libre lejos de la pared.

2.4.2. Flujo de Hartmann

Utilizando la misma ecuación mostrada previamente podemos obtener la solución de un flujo entre dos placas como el de la figura 2.2. Las condiciones de borde para este flujo corresponden a no deslizamiento en sus dos paredes ubicadas en $y = \pm w$. Estas condiciones llegan a la solución a continuación.

$$u(y) = u_\infty \left(1 - \frac{\cosh(y/\delta)}{\cosh(w/\delta)} \right) \quad (2.52)$$

Esta ecuación se puede escribir en términos del número de Hartmann y puede ser reescrita de la siguiente manera.

$$u(y) = u_\infty \left(1 - \frac{\cosh(Ha(y/w))}{\cosh(Ha)} \right) \quad (2.53)$$

La que puede ser reescrita en función de la velocidad media del flujo.

$$u(y) = u_{prom} \frac{\left(1 - \frac{\cosh(Ha(y/w))}{\cosh(Ha)} \right)}{\left(1 - \frac{\tanh(Ha)}{Ha} \right)} \quad (2.54)$$

Se puede notar la importante influencia que tiene el número de Hartmann en el flujo. La forma del perfil de velocidad corresponde a una capa límite cerca de la pared, mientras que en su centro se asemeja a un flujo aproximadamente plano. Otro punto a mencionar es que en el caso en que $Ha \rightarrow 0$, el flujo retorna a la forma parabólica, es decir, es consistente con la teoría de flujo laminar. Por otro lado, cuando $Ha \rightarrow \infty$ vemos que la velocidad aumenta en una zona muy pequeña a la pared y la mayor parte central tendrá una velocidad constante en todo su ancho como se muestra en la figura 2.3.

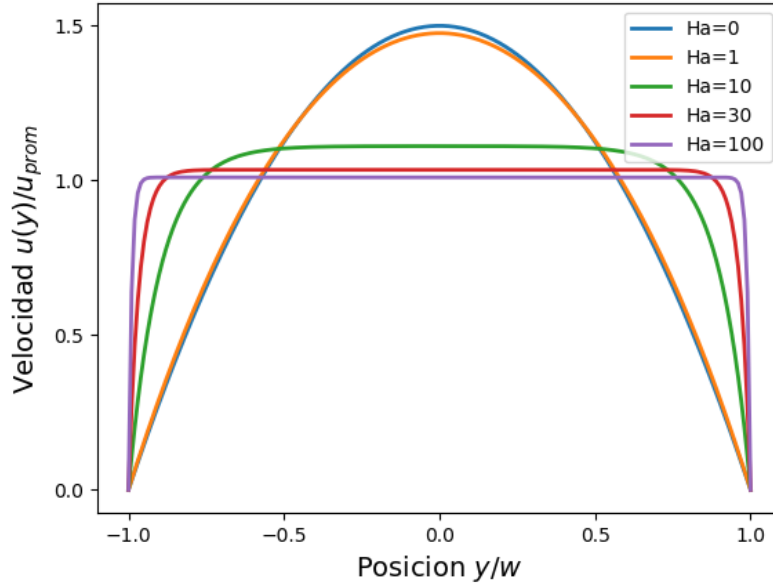


Figura 2.3: Comparación de perfiles de velocidad para distintos números de Hartmann.

2.4.3. Chorro 2D bajo influencia de un campo magnético

Se puede realizar un tercer análisis, para un chorro bidimensional con un campo magnético transversal como en la figura 2.4. Para ello, se considera que el flujo es fuertemente afectado por el campo magnético y por lo tanto los efectos de la viscosidad son despreciables frente a los efectos magnéticos ($Ha \gg 1$). La segunda suposición corresponde al campo de presión. Al ser inyectado el chorro a una cámara muy grande, el campo de presión se mantiene prácticamente constante.

El balance de momentum en la dirección X considera las componentes advectivas del flujo y la fuerza de Lorentz. Es importante notar que la corriente eléctrica J en este caso irá en dirección Z, y por tanto, la fuerza de Lorentz irá en dirección X contraria al flujo.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{F_{Lorentz}}{\rho} = -\frac{\sigma u B_0^2}{\rho} = -\frac{u}{\tau} \quad (2.55)$$

Para resolver esta ecuación se utiliza la función de corriente $\psi(x, y) = u_0(x) f(\frac{y}{\delta}) \delta(x)$, donde u_0 corresponde a la velocidad en el eje, δ corresponde al radio del chorro, f es una función de similitud y la distancia adimensional $\eta = y/\delta$ es definida.

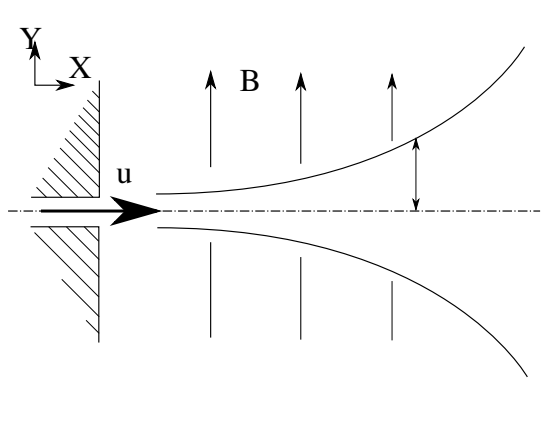


Figura 2.4: Chorro bidimensional sometido a un campo magnético en dirección Y.

Las componentes de la velocidad quedan expresadas mediante la función de similitud, siendo $f' = \frac{df}{d\eta}$. Se considera también, por conservación de masa, que $u_0 \delta^2 = \text{constante}$, y analizando el eje central del chorro se concluye $\frac{\partial u}{\partial x} = -1/\tau$.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0 f' \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\tau_e} (f + f' \eta) \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\tau_e} \left(f' + \frac{1}{2} f'' \eta \right) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_0}{\delta} f'' \quad (2.57)$$

La ecuación de momentum se ve transformada en una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden.

$$f'^2 - \frac{1}{2} f f'' = f' \quad (2.58)$$

Las condiciones de borde vienen dadas por las ecuaciones 2.56 y corresponden a la

velocidad en el eje y a una velocidad cercana a 0 muy lejos del chorro.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f'(\eta \rightarrow \infty) &= 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Esta ecuación tiene una solución analítica usando el cambio de variable $y = f' \Rightarrow y' = f'' = \frac{dy}{df} \frac{df}{d\eta} = y' y$. Lo cual entrega la solución para la función de similaridad.

$$f(\eta) = \tanh(\eta) \Rightarrow f'(\eta) = \text{sech}^2(\eta) \quad (2.60)$$

La velocidad en el eje central resulta en $u_0(x) = U - x/\tau$, mientras que el radio del chorro corresponde a $\delta(x) = R/\sqrt{1 - \frac{x}{U\tau}}$. El campo de velocidades obtenido muestra un límite definido de alcance para el chorro, como se observa en la figura 2.5.

$$u(x, y) = (U - x/\tau) \text{sech}^2(y/\delta) \quad (2.61)$$

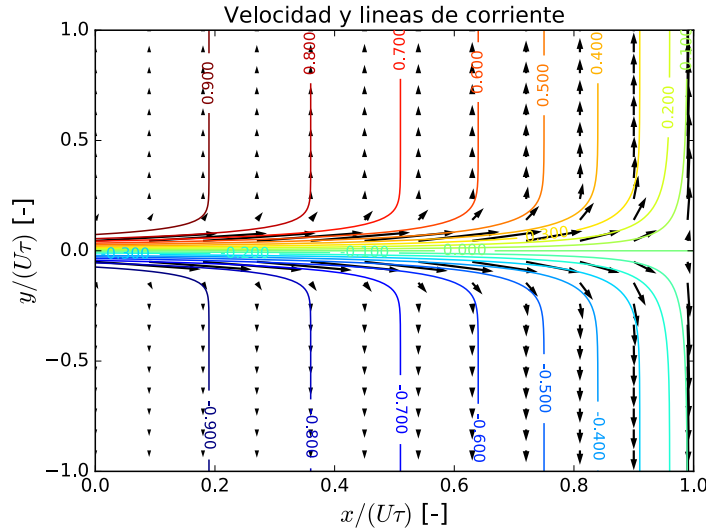


Figura 2.5: Líneas de corriente y campo de velocidad de un chorro bidimensional sometido a un campo magnético

Es necesario mencionar que cerca de $x = U\tau$, la solución no es válida debido a que el radio del chorro δ aumenta considerablemente y la condición $\nabla P = 0$ no se sostiene. También, para un caso tridimensional esta solución no es compatible puesto que la corriente eléctrica debe recircular, y no sigue indefinidamente como en este caso. Por lo anterior, un chorro tridimensional es capaz de conservar su cantidad momento por lo que tendrá la tendencia a ordenarse en un plano para compensar la energía cinética disipada mediante el efecto Joule.

2.5. Método de volúmenes finitos

La resolución de las ecuaciones mostradas anteriormente difícilmente poseen soluciones analíticas para casos específicos. Es por ello que una resolución numérica de las ecuaciones es requerida, transformando las ecuaciones diferenciales a sistemas de ecuaciones algebraicas.

El método de volúmenes finitos utiliza la forma integral de las ecuaciones de conservación como punto de partida. La idea del método es subdividir el dominio en un número finito de volúmenes de control y aplicar las ecuaciones de conservación a cada uno de estos volúmenes. En este método las propiedades del fluido y la presión son calculadas en el centro del volumen de control, mientras que la velocidad (los flujos) son calculados en la superficie del volumen de control. Las integrales de volumen y de superficie en las ecuaciones de conservación son aproximadas usando la forma más correcta de cuadratura. Resultado de esto se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas la cual contendrá los valores de los nodos alrededor del volumen de control.

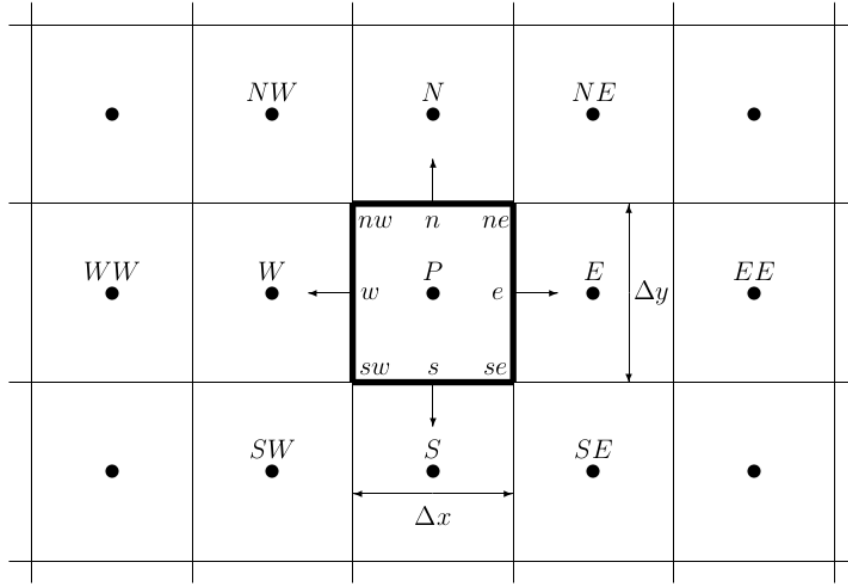


Figura 2.6: Un volumen de control típico y la notación utilizada para una malla bidimensional Fuente: [6]

Las principales ventajas de este método son que es conservativo debido a que está formulado a partir de la física del problema, es decir, los flujos en las superficies son compartidos por los volúmenes de control. Otra gran ventaja es que puede ser acomodado a cualquier tipo de malla, por lo tanto puede utilizarse para la modelación de geometrías complejas. La desventaja es que la utilización de esquemas de un alto orden son más complejos de desarrollar, dado que se requieren tres tipos de aproximación: interpolación, diferenciación e integración.

La ecuación a resolver corresponde en cada uno de los volúmenes de control posee la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \phi dV + \int_{d\Omega} \rho \phi (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \int_{d\Omega} \Gamma \vec{\nabla}(\phi) \cdot \vec{n} dA + \int_{\Omega} q_{\phi} dV \quad (2.62)$$

Donde Γ corresponde a una propiedad de difusividad. La notación estándar utilizada en el método de volúmenes finitos para un caso 2D se ve representada en la figura 2.6 en

la cual, para un volumen centrado en el nodo P, los volúmenes adyacentes se denominan con letras mayúsculas en base a la posición relativa que ocupan en el espacio, N, S, W, E para los volúmenes ubicados encima, debajo, izquierda y derecha respectivamente. La nomenclatura utilizada para las caras de los volúmenes de control sigue la misma lógica, utilizando letras minúsculas para diferenciarlas.

2.5.1. Aproximación de la derivada temporal

La forma más sencilla de aproximar una integral es considerando que esta tiene un valor constante promedio. De esta forma, este valor puede ser considerado el valor al centro de la celda, es decir, en el nodo P. Esto resulta en lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \phi dV \approx \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi \Delta V) \quad (2.63)$$

Si se considera que este término es igual a una función, esto es, $\partial(\rho \phi \Delta V)/\partial t = F(\vec{x}, t)$. Entonces, integrando en el tiempo, y aproximando esta integral utilizando un esquema de Crank-Nicholson, se obtiene:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi \Delta V) dt = \int_t^{t+\Delta t} F(\vec{x}, t) dt \approx \frac{1}{2} (F(\vec{x}, t + \Delta t) + F(\vec{x}, t)) \Delta t$$

Finalmente, de la integral se obtiene que:

$$\frac{(\rho \phi \Delta V)^{n+1} - (\rho \phi \Delta V)^n}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} (F(\vec{x}, t + \Delta t) + F(\vec{x}, t)) \quad (2.64)$$

Siendo $n + 1$ el paso de tiempo por calcular y n el paso de tiempo actual.

2.5.2. Aproximación de integrales de volumen

Las integrales de volumen se pueden obtener fácilmente considerando al igual que en el punto anterior que el integrando posee un valor constante. La forma más sencilla es considerando que este posee un comportamiento constante, sin embargo, existen to-

do tipo de aproximaciones para esta integral, como suponer un perfil lineal o cuadrático a la función. Considerando que la función q_ϕ se evalúa en el nodo central P,

$$\int_{\Omega} q_\phi dV \approx q(\phi_P) \Delta V \quad (2.65)$$

2.5.3. Aproximación de integrales de superficie

Las integrales de superficie pueden ser consideradas como la sumatoria de los flujos F en cada una de las superficies del volumen de control. Así, se resuelve una integral para cada superficie:

$$F(\phi) = \int_{d\Omega} f(\phi) dA = \sum_k \int_{A_k} f_k(\phi) dA \quad (2.66)$$

Donde $\bigcup_k A_k = d\Omega$. Similar a lo realizado anteriormente, las integrales se resuelven con algún valor promedio que represente el flujo que entra o sale del volumen de control, es decir,

$$\int_{A_k} f_k(\phi) dA \approx \overline{f_k(\phi)} \Delta A \quad (2.67)$$

Puesto que este valor está evaluado en la superficie y no en el centro es que se deben interpolar los valores en las caras. Para ello, existen diversos esquemas de los cuales se mostrarán los principales.

2.5.3.1. Upwind Difference Scheme (UDS)

Este esquema es el más simple de implementar, su idea se basa en que la información proviene de "aguas arriba", por lo que el valor en la superficie se toma como el valor del nodo vecino del cual proviene el flujo. Es decir, para un caso unidimensional en la figura 2.7, si el flujo viene de izquierda a derecha ($u > 0$), para la cara e del volumen de control, el valor en la superficie será el del nodo P. Por el contrario, si el flujo viene de derecha a izquierda ($u < 0$), entonces el valor en la superficie será la del nodo

E.

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{si } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \phi_E & \text{si } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e < 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

La magnitud del error de este esquema es de primer orden, esto quiere decir que el error disminuirá de forma lineal con el refinamiento de la malla. Como esquema de primer orden, este no genera dispersión para grandes diferencias en los valores, sin embargo, este es altamente disipativo.

2.5.3.2. Central Difference Scheme (CDS)

Este esquema aproxima el valor en la superficie utilizando ambos puntos vecinos mediante una interpolación lineal como se muestra en la figura 2.7.

$$\phi_e = \phi_E \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} + \phi_P \left(1 - \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \right) \quad (2.69)$$

En el caso en que la malla sea equiespaciada esto se reduce a lo siguiente:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (2.70)$$

Este esquema posee un error de segundo orden, sin embargo, presenta falsas oscilaciones en zonas con un alto gradiente lo cual puede contaminar la solución. Este tipo de interpolación puede generar incluso valores que no son físicos, como lo son fracciones volumétricas mayores a 1 o menores a 0.

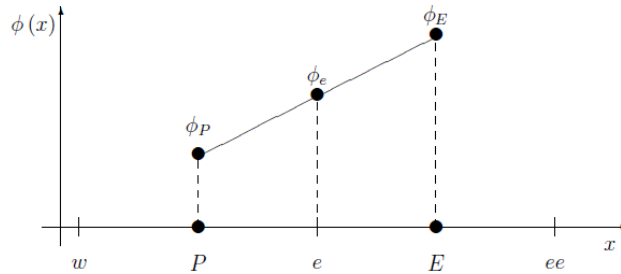


Figura 2.7: Esquema de diferencias centradas.

2.5.3.3. Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics (QUICK)

Este esquema utiliza tres nodos para interpolar los valores en la superficie, además de considerar el sentido del flujo. El esquema utiliza una función cuadrática pasando por dos nodos "aguas arriba" y un nodo "aguas abajo" respecto de la superficie, como se muestra en la figura 2.8 para una interpolación en una dimensión.

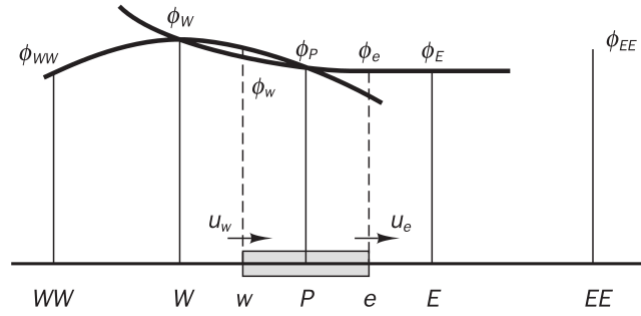


Figura 2.8: Esquema QUICK.

En la figura 2.8, si el flujo va de izquierda a derecha el valor en w se interpola utilizando los nodos P , W y WW , mientras que un flujo de derecha a izquierda utilizaría los nodos P , W y E .

En el caso de una malla equiespaciada es posible probar que la interpolación entregaría el valor

$$\phi_e = \begin{cases} \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W & \text{si } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \frac{6}{8}\phi_E + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{EE} & \text{si } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e < 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

El error de truncación de este esquema corresponde a un error de tercer orden. También puede presentar problemas de estabilidad bajo determinadas condiciones de flujo, por lo que es condicionalmente estable [10].

2.5.3.4. Total Variation Diminishing (TVD)

En busca de métodos de mayor orden, y que además no generen valores no-físicos es que se utiliza un limitador de pendiente (*slope limiter*), el cual evita la generación de oscilaciones en alguna interfase o aumento grande de pendiente.

Utilizando la notación u, c, d para *upstream*, *center* y *downstream* es posible definir de forma simple los términos utilizados por los esquemas TVD.

	ϕ_c	ϕ_u	ϕ_d
$(\vec{u} \cdot \vec{n})_e > 0$	ϕ_P	ϕ_W	ϕ_E
$(\vec{u} \cdot \vec{n})_e < 0$	ϕ_E	ϕ_{EE}	ϕ_P

Cuadro 2.1: Esquemas de discretización y sus limitadores. Fuente: [7]

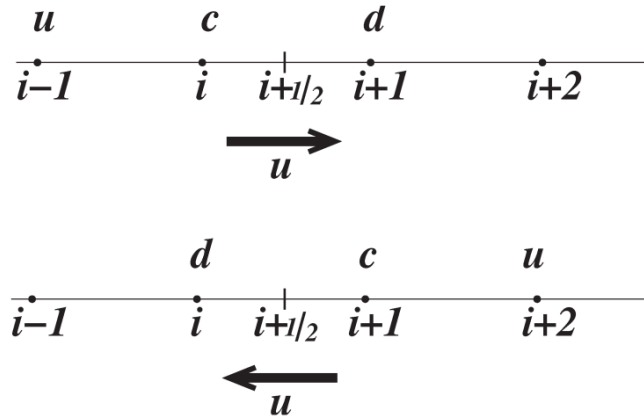


Figura 2.9: Nodos utilizados para la definición del limitador de pendiente. $i-1$ correspondería al nodo W, i al nodo P, $i+1$ al nodo E, $i+2$ al nodo EE. Fuente: [7]

Hecho esto, se define un parámetro de suavidad θ , el cual estima la magnitud del gradiente en la superficie.

$$\theta = \frac{\phi_c - \phi_u}{\phi_d - \phi_c} \quad (2.72)$$

Luego, los limitadores de pendiente para distintos esquemas se muestran en el siguiente cuadro:

Esquema de discretización	Limitador l
Van Leer	$(\theta + \theta)/(1 + \theta)$
Minmod	$\max[0, \min(1, \theta)]$
MUSCL	$\max[0, \min(2\theta, \frac{1}{2}(1 + \theta), 2)]$
UMIST	$\max[0, \min(2\theta, \frac{1}{4}(3 + \theta), 2)]$
SMART	$\max[0, \min(4\theta, \frac{1}{4}(3 + \theta), 2)]$
SuperBee	$\max[0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta)]$

Con esto, el valor que se obtiene en la superficie corresponderá a lo siguiente:

$$\phi_e = \begin{cases} (1 - \frac{1}{2}l_e)\phi_P + \frac{1}{2}l_e\phi_E & \text{si } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \frac{1}{2}l_e\phi_P + (1 - \frac{1}{2}l_e)\phi_E & \text{si } (\vec{u} \cdot \vec{n})_e < 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

Como casos particulares, si el valor del limitador l equivale a 0 se tendrá una interpolación Upwind (UDS), de orden 1; si el valor l corresponde a 1, entonces la interpolación es centrada (CDS). Revisando los distintos esquemas, el esquema Minmod utilizará siempre el mínimo valor posible para el limitador de pendiente y tiende a ser el más difusivo de todos los esquemas. Por otro lado, el esquema SuperBee utiliza el máximo valor posible para el limitador y este tiende a sobrecomprimir la pendiente en las discontinuidades. Los demás esquemas mostrados tienen comportamientos intermedios a estos dos.

Los rangos en que puede trabajar el limitador de pendiente se muestran en la figura.

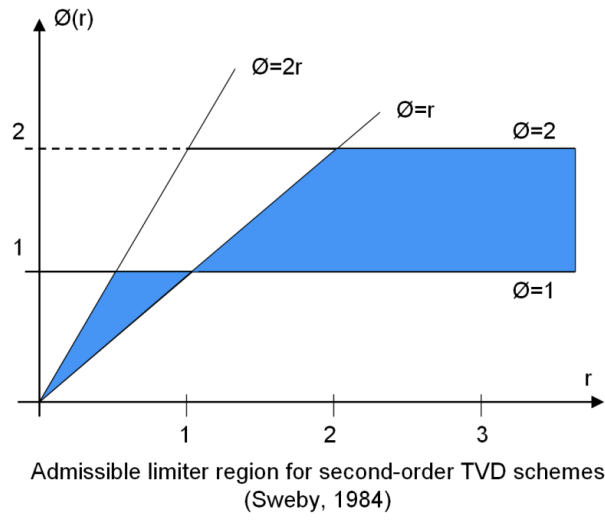


Figura 2.10: Región admisible para el limitador para esquemas TVD de segundo orden.
 r corresponde al parámetro θ y ϕ al limitador l . Fuente: [8]

2.6. Acoplamiento Presión-Velocidad

La resolución numérica de las ecuación de Navier Stokes no es de simple desarrollo como ocurriría con una ecuación del tipo convección-difusión. En el caso de las ecuaciones de Navier Stokes en 3D para un fluido incompresible, sin considerar la ecuación de energía, se poseen 4 ecuaciones, una para masa y una ecuación para cada componente de momentum; además existen 4 incógnitas, las 3 componentes del vector velocidad y la presión. El problema surge debido a que las 3 componentes de la velocidad son obtenidas de cada una de sus respectivas ecuaciones de momentum, mientras que la ecuación restante para la obtención de la presión no contiene esta variable. Es por esto que se debe buscar una alternativa para incorporar la presión en la ecuación de conservación de masa.

La forma más común de resolver este problema es combinando la ecuación de momentum con la de continuidad. Esto se hace tomando la divergencia de la ecuación de momentum, lo que resulta en:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}p) = -\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla}(\rho \vec{u} \cdot \vec{u} - \bar{\tau}) - \rho \vec{S}_m + \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} \right) \quad (2.74)$$

En el caso en que la densidad y la viscosidad son constantes, el resultado de esta ecuación nos entrega una ecuación que relaciona la velocidad con la presión. De esta manera, es posible obtener el gradiente de presión del problema.

$$\vec{\nabla}^2 p = -\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla}(\rho \vec{u} \cdot \vec{u}) \right) \quad (2.75)$$

Uno de los algoritmos más comunes para el acoplamiento de la presión y la velocidad es el conocido algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations). Este corresponde a un algoritmo iterativo de resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes que utiliza el método de volúmenes finitos como base, además de utilizar una malla escalonada (staggered grid) para evitar posibles oscilaciones debido

a un cálculo erróneo del gradiente de presión. Por otro lado, el uso de una malla escalonada permite evitar el interpolar la velocidad en las paredes del volumen de control utilizado para el cálculo de la ecuación de conservación de masa.

2.6.0.1. Malla escalonada

Como acaba de ser mencionado el uso de una malla escalonada permite evitar las oscilaciones generadas por un cálculo erróneo del gradiente de presión. En el caso extremo en que la presión sea oscilatoria, en una malla donde toda la información se encuentra en los nodos, el cálculo del gradiente de presión podría resultar incluso en un valor constante.

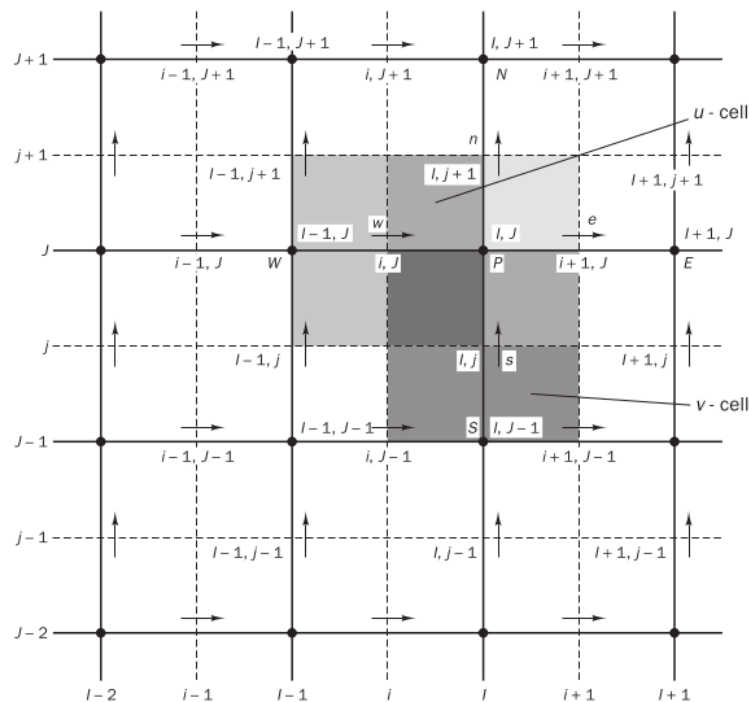


Figura 2.11: Malla escalonada con un volúmen de control para la ecuación de continuidad, un VC para la ecuación de momentum en x (u-cell) y un VC para la ecuación de momentum en Y (v-cell). Fuente: [10]

La idea de usar una malla escalonada consiste en resolver las ecuaciones de Navier-

Stokes en celdas vecinas a los nodos. De esta forma, de acuerdo a la nomenclatura utilizada en la figura a continuación, un balance de momentum generará lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 -\rho A_x (u_w u_w - u_e u_e) - \rho A_y (u_s u_s - u_n u_n) = & -(P_e - P_w) A_x \\
 & + \rho v \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] A_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) A_y \\
 & + \Delta V S_{m,x}|_P
 \end{aligned}
 \tag{2.76}$$

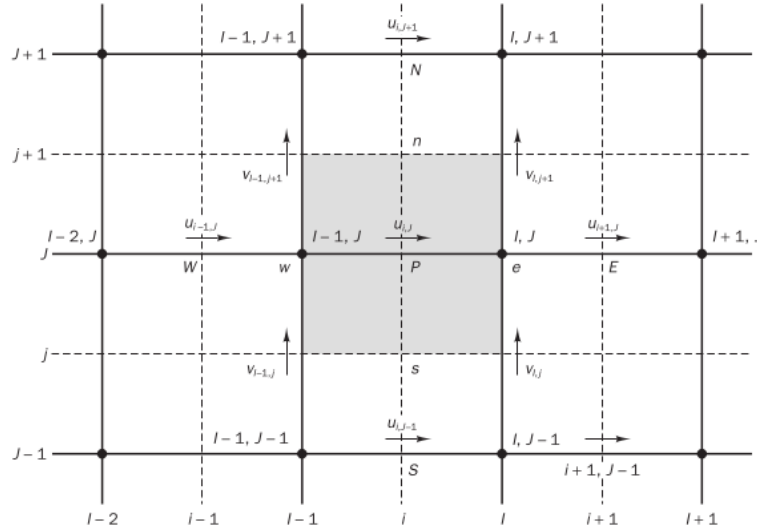


Figura 2.12: Volumen de control para una celda de momentum en X. Fuente: [10]

De la misma manera, se puede realizar un balance de momentum en Y utilizando la

celda correspondiente a la v-cell:

$$\begin{aligned}
 -\rho A_x (u_w v_w - u_e v_e) - \rho A_y (v_s v_s - v_n v_n) = & -(P_n - P_s) A_x \\
 & + \rho v \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_w \right) A_x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_n - \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_s \right) A_y \right] \\
 & + \Delta V S_{m,y} \Big|_P
 \end{aligned}
 \tag{2.77}$$

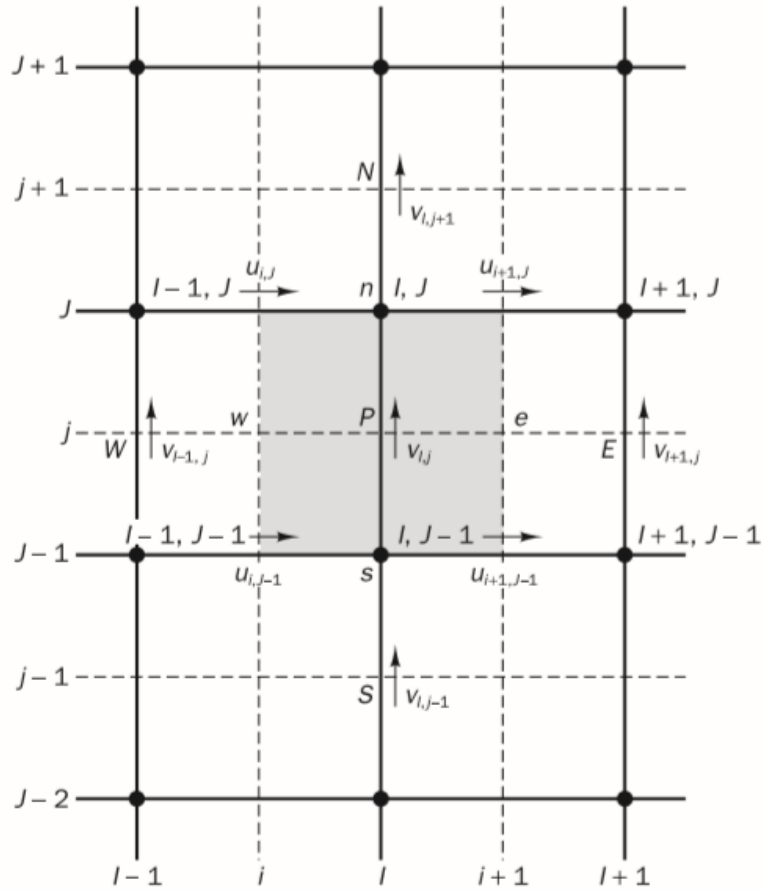


Figura 2.13: Volumen de control para una celda de momentum en Y. Fuente: [10]

Como se puede ver de las figuras, las velocidades en las caras para las ecuaciones de momentum no se encuentran explícitas por lo que se deben obtener mediante una de

los métodos de interpolación mostrados en la sección anterior.

El caso del volumen de control asociado a la ecuación de conservación de masa resulta en un balance simple, mostrado a continuación.

$$(\rho Au)_w - (\rho Au)_e + (\rho Av)_s - (\rho Av)_n = 0 \quad (2.78)$$

En lo que viene a continuación se utilizará la notación presente en las figuras recién mostradas. Esta consiste en que los nodos están ubicados en posiciones (I, J) , mientras que las posiciones de las caras están asociadas a posiciones (i, j)

2.6.0.2. Algoritmo SIMPLE

Habiendo discretizado las ecuaciones y obteniendo las interpolaciones de las velocidades en las caras, es posible reescribir las ecuaciones de la siguiente forma utilizando la notación de las figuras:

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} + (P_{I-1,J} - P_{I,J})A_{i,J} + b_{i,J} \quad (2.79)$$

Donde a corresponden a los coeficientes que acompañen a los términos de velocidad en la ecuación, el subíndice nb corresponde a los datos vecinos al punto P y b corresponden a todos los valores que no acompañen a algún término de velocidad.

Los coeficientes a contendrán valores de velocidad, sin embargo, estos corresponderán al valor estimado de acuerdo a la iteración anterior. Es por esto que en cada iteración se deben recalcular los coeficientes con los valores actualizados de velocidad y presión. Además, notar que los coeficientes para las distintas ecuaciones (considerando las que vienen a continuación) no son necesariamente iguales y es importante notar la diferencia en los subíndices.

Continuando con la resolución de las ecuaciones de momentum, se encuentra una ecuación equivalente a la anterior para la cantidad de momentum en dirección y

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{nb}v_{nb} + (P_{I,J-1} - P_{I,J})A_{I,j} + b_{I,j} \quad (2.80)$$

Si separamos los términos para la velocidad y la presión en una parte supuesta o estimada (*), y en otro valor de corrección ('), esto es,

$$p = p^* + p' \quad (2.81)$$

$$u = u^* + u' \quad (2.82)$$

$$v = v^* + v' \quad (2.83)$$

Considerando esto, tanto el valor corregido (u ó p) como el supuesto (u^* ó p^*) deben cumplir con la ecuación anterior, especialmente cuando la ecuación ya ha convergido.

$$a_{i,J}u_{i,J}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (P_{I-1,J}^* - P_{I,J}^*)A_{i,J} + b_{i,J} \quad (2.84)$$

$$a_{I,j}v_{I,j}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (P_{I,J-1}^* - P_{I,J}^*)A_{I,j} + b_{I,j} \quad (2.85)$$

Si restamos el valor supuesto con el corregido obtenemos una ecuación que relaciona la corrección de presión con la de velocidad.

$$a_{i,J}u_{i,J}' = \sum a_{nb}u_{nb}' + (P_{I-1,J}' - P_{I,J}')A_{i,J} \quad (2.86)$$

$$a_{I,j}v_{I,j}' = \sum a_{nb}v_{nb}' - (P_{I,J-1}' - P_{I,J}')A_{I,j} \quad (2.87)$$

Sin embargo, esta ecuación no puede ser resuelta ya que necesitamos o la corrección de velocidad o la corrección de presión. Para ello, la aproximación realizada por el

método SIMPLE consiste en omitir el término asociado a la velocidad en los nodos vecinos. De esta forma, se obtiene lo siguiente

$$u'_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} (P'_{I,j-1} - P'_{I,j}) \quad (2.88)$$

$$v'_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}} (P'_{I,j-1} - P'_{I,j}) \quad (2.89)$$

Finalmente, incorporando el valor de corrección de velocidad en la ecuación de continuidad se puede encontrar una ecuación para obtener la corrección de presión, y por lo tanto, la corrección de velocidad. Esta ecuación es conocida como **ecuación de corrección de la presión** y tendrá la siguiente forma

$$a_{I,j} p'_p = \sum a_{nb} p'_{nb} + b_{I,j} \quad (2.90)$$

Debido a que la corrección de presión tiende a estar sobreestimada es que es necesario aplicar factores de relajación a esta. Por lo tanto, el valor para la siguiente iteración corresponderá a lo siguiente,

$$p^{new} = p^* + \alpha_p p' \quad (2.91)$$

$$u^{new} = u^* + \alpha_u u' \quad (2.92)$$

$$v^{new} = v^* + \alpha_v v' \quad (2.93)$$

Siendo α el factor de relajación y los subíndices p , u y v asociados a los términos de presión y a cada componente de velocidad, respectivamente.

Es de aclarar que el método recién expuesto corresponde a un caso 2D. La utilización de este algoritmo para un caso tridimensional tendría un desarrollo análogo agregando solamente la tercera componente de la velocidad, incluyéndose con esto una cara frontal y trasera al volumen de control. Finalmente, a modo de resumen se muestra el algoritmo SIMPLE en el siguiente diagrama.

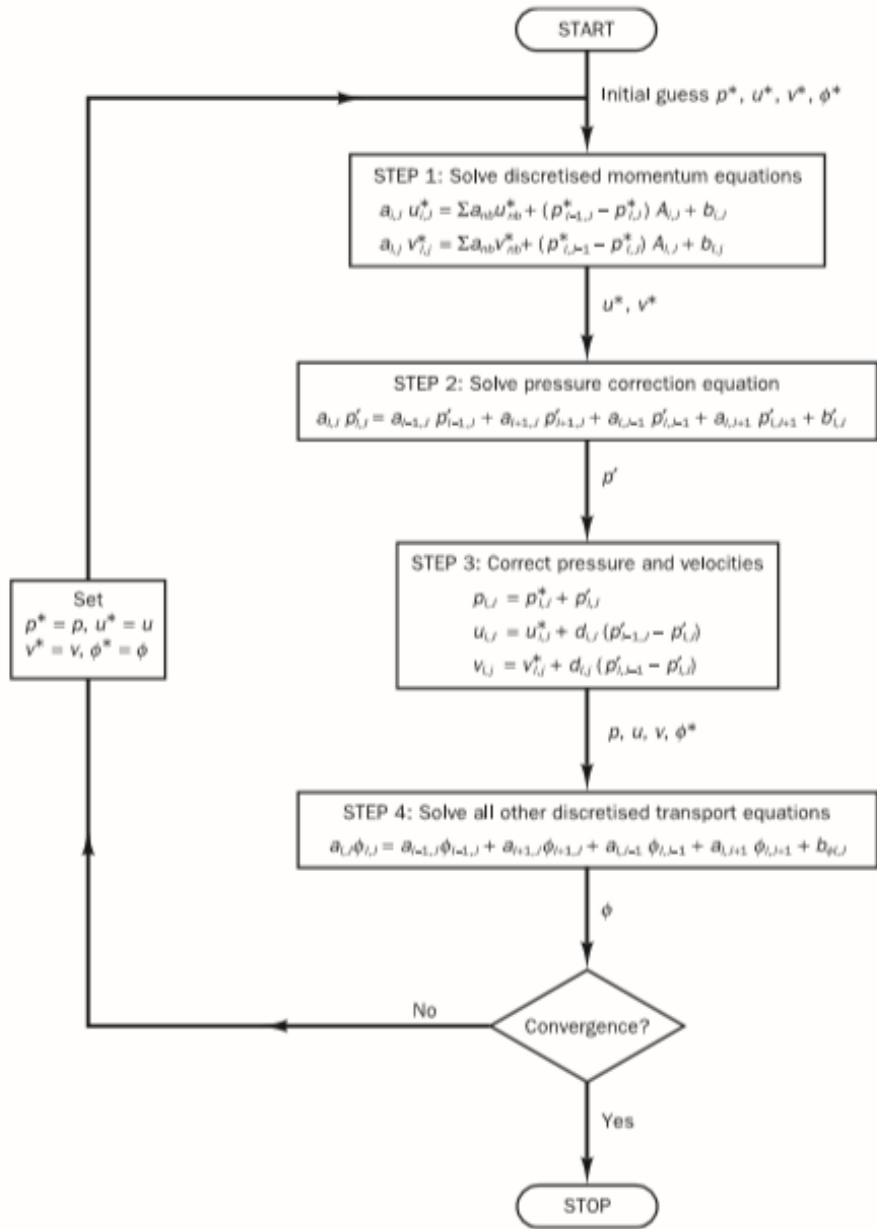


Figura 2.14: Resumen del algoritmo SIMPLE. Fuente: [10]

2.6.1. Convergencia y Residuales

Para comprobar la convergencia de las simulaciones es necesario tener algún parámetro de referencia respecto del error de la simulación que se está realizando. Es por ello que, a partir de las ecuaciones del método SIMPLE, se obtiene una ecuación para el

error. Si la ecuación de transporte se escribe de la siguiente forma

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (2.94)$$

Entonces, habiendo realizado el cálculo del parámetro ϕ en cada celda, el error corresponde a cada celda será calculado como

$$R_{celda}^{\phi} = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b - a_P \phi_P \quad (2.95)$$

Para calcular el error en todo el dominio simplemente se realiza la sumatoria sobre todas las celdas de este.

$$R^{\phi} = \sum_{celdas} |R_{celda}^{\phi}| \quad (2.96)$$

El valor de ϕ corresponderá a los valores de u , v y w en las ecuaciones de momento, mientras que para la conservación de masa se calculará la creación de masa en cada una de las celdas.

Para tener un valor del error relativo es que la ecuación anterior se normaliza de acuerdo a lo siguiente.

$$\bar{R}^{\phi} = \frac{\sum_{celdas} |R_{celda}^{\phi}|}{\sum_{celdas} |a_P \phi_P|} \quad (2.97)$$

Capítulo 3

Metodología

3.1. Caso de estudio

El caso de estudio consiste en un chorro de un material eléctricamente conductor dentro de una cámara cilíndrica, mediante un inyector. La cámara tendrá un largo L suficiente, de tal manera que el chorro logre desarrollarse. A este chorro se le aplica un campo magnético que actúa transversalmente de manera que este genere una resistencia al movimiento del fluido. Se estudia el caso para bajo número de Reynolds magnético ($Re_m \ll 1$) debido a que en este régimen el campo magnético no es fuertemente modificado por el flujo, además de que este corresponde a la mayoría de las aplicaciones en ingeniería. Una ejemplificación del caso, sin aplicarse un campo magnético, se muestra a continuación

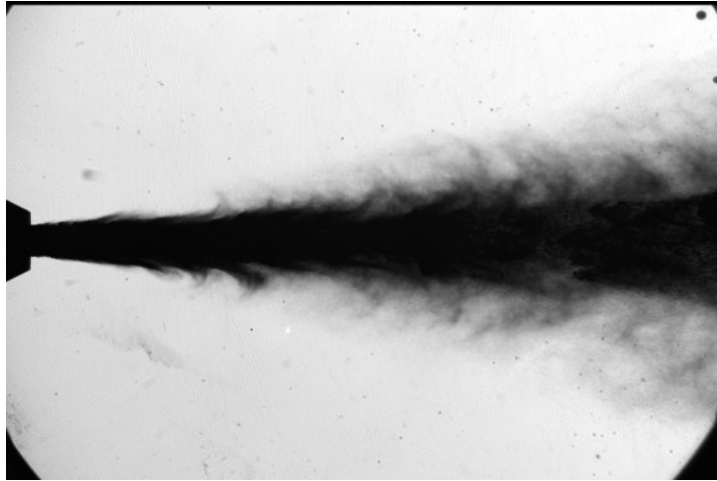


Figura 3.1: Experimento de un chorro turbulento.

El dominio por tanto es el de un cilindro de diámetro d y largo L , con un inyector de diámetro hidráulico D ubicado de forma coaxial por uno de sus lados y abierto en el otro extremo. Se estudiarán cuatro dominios distintos de acuerdo a la razón del diámetro del inyector y el de la cámara, y de acuerdo a la forma del inyector. Se estudiará un inyector circular y un inyector rectangular con una relación entre sus lados de $1/10$, como los de las geometrías mostradas en las figuras 3.2 y 3.3.

Cuadro 3.1: Casos de estudio

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Forma del inyector	Circular	Rectangular	Circular	Rectangular
d/D	$1/10$	$1/10$	$1/20$	$1/20$
L [m]	0.75	1	0.85	1.4

La idea de estas dos relaciones es que las paredes no influyan en la dinámica del chorro. En cuanto al largo, como ya fue mencionado, se elige de modo que el chorro logre desarrollarse.

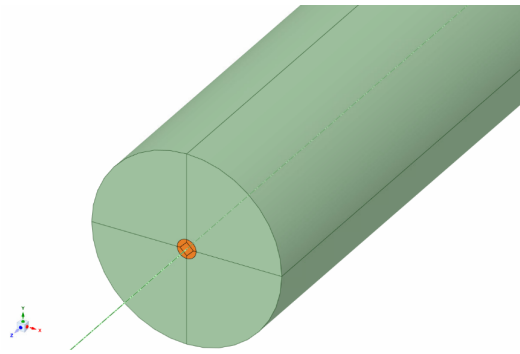


Figura 3.2: Geometría para inyector circular, $d/D = 1/10$.

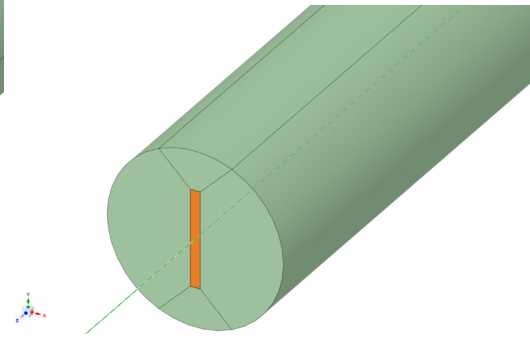


Figura 3.3: Geometría para inyector rectangular, $d/D = 1/10$.

La malla a utilizar corresponderá a una malla extruida donde se busca asemejar de la mejor forma lo que sería una malla en coordenadas cilíndricas. Se refina el espaciamiento de los nodos en las zonas más importantes, esto es, donde los gradientes son más grandes. Por lo tanto, se refina en la pared del manto de cilindro, en la pared en el lado del inyector, y en el eje central por donde pasa el chorro. A continuación, se muestran las distintas mallas para los cuatro casos de estudio.

Cuadro 3.2: Parámetros de las distintas mallas

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
No. nodos	624260	565444	833102	896080
No. elementos	614646	556380	822180	802530
Angular	80 div.	65 div.	125 div.	100 div.
Diametro	9 div., bias 5	-	38 div., bias 15	-
Largo	188 div, bias 12	180 div., bias 20	188 div., bias 12	185 div, bias 20
Inflation (manto)	1era capa 0.5mm 10 Capas Growth rate 1.15	1era capa 0.5mm 10 capas Growth rate 1.15	1era capa 0.5mm 10 Capas Growth rate 1.15	1era capa 0.5mm 16 capas Growth rate 1.15

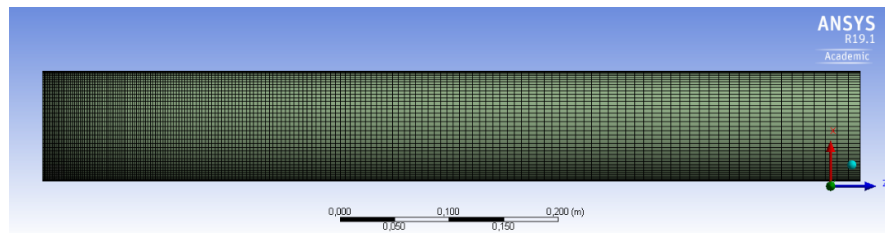


Figura 3.4: Vista lateral malla Caso 1

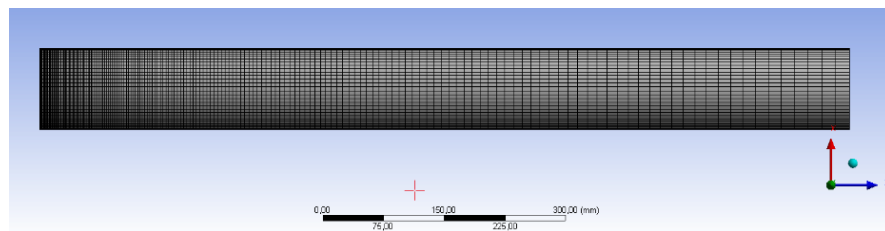


Figura 3.5: Vista lateral malla Caso 2

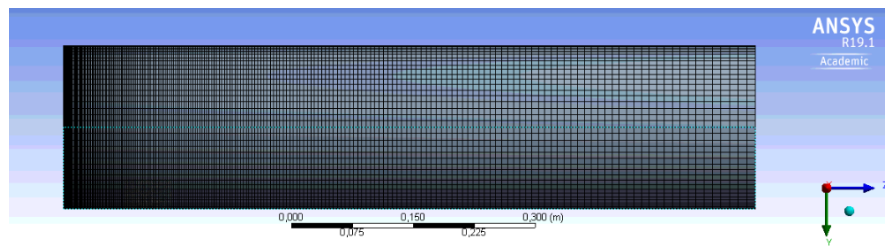


Figura 3.6: Vista lateral malla Caso 3

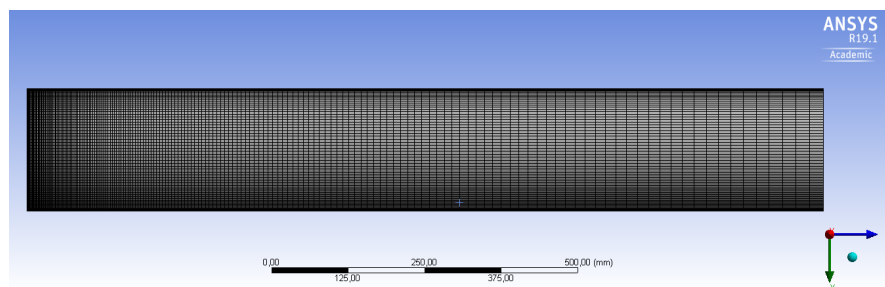


Figura 3.7: Vista lateral malla Caso 4

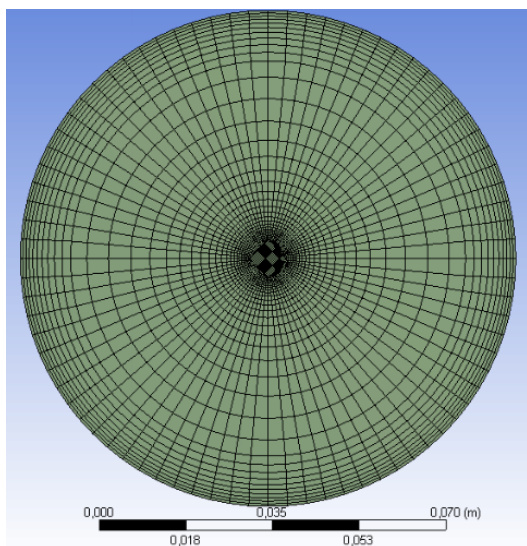


Figura 3.8: Vista frontal malla Caso 1

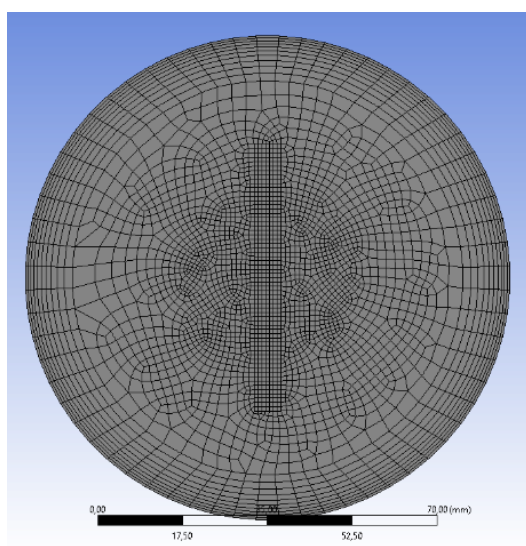


Figura 3.9: Vista frontal malla Caso 2

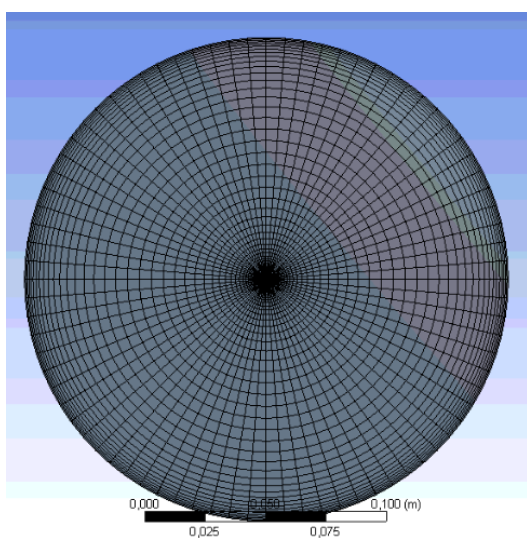


Figura 3.10: Vista frontal malla Caso 3

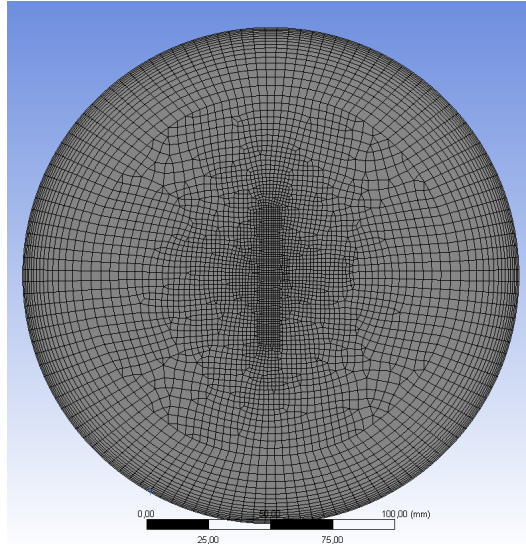


Figura 3.11: Vista frontal malla Caso 4

El material del fluido conductor y sus propiedades se muestran en la siguiente tabla.

Cuadro 3.3: Propiedades termofísicas y eléctricas. Fuente: [3]

Propiedades	Aluminio
Temperatura Referencia [K]	973
Densidad [kg/m ³]	2400
Viscosidad Dinámica [Pa · s]	0.00144
Conductividad Eléctrica [Ω ⁻¹ · m ⁻¹]	4,1 · 10 ⁶
Reynolds magnético [—]	0,0003

Se utilizará un número de Reynolds constante de valor 100 y se hará variar el número de Hartmann. Las simulaciones corresponderán a números de Hartmann de 0 (es decir, sin campo magnético), 1, 2, 3, 6, 10, 30 y 60 (en algunos casos).

Las condiciones de borde del problema corresponden a las condiciones de velocidad en la entrada de flujo, de acuerdo al número de Reynolds a utilizar. La condición a la salida corresponde a pressure-outlet. En las paredes las condiciones corresponden a no deslizamiento debido a que por las magnitudes físicas una condición de deslizamiento no generaría mayores variaciones en la solución. Además se aplica un campo magnético constante en la dirección x, con una magnitud de acuerdo al número de Hartmann. Las condiciones de borde eléctricas corresponden a paredes aislantes, es decir, el gradiente de potencial eléctrico es cero.

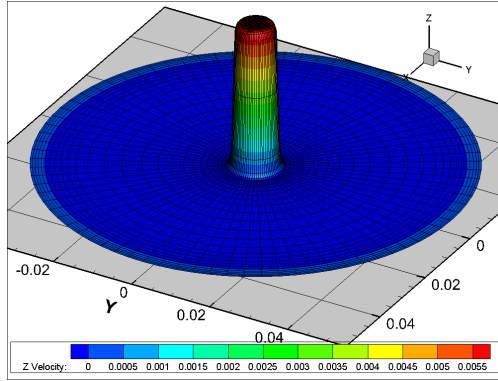


Figura 3.12: Entrada de velocidad in-
vector circular.

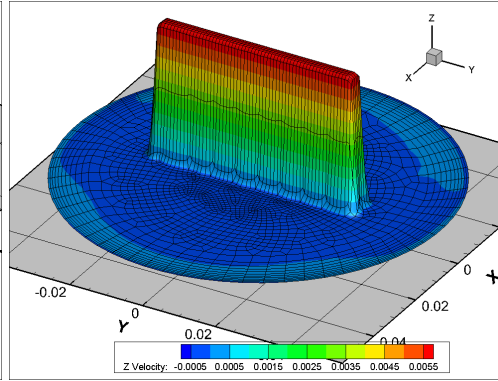


Figura 3.13: Entrada de velocidad in-
vector rectangular.

La resolución de las ecuaciones de transporte se realizan mediante el software Fluent, mientras que las ecuaciones asociadas a MHD son resueltas mediante el módulo MHD que incluye el mismo software. El módulo MHD permite decidir si se quiere resolver la ecuación de inducción magnética, donde se resuelven 3 ecuaciones para cada componente del campo magnético inducido, o utilizar la simplificación para bajo número de Reynolds magnético, resolviendo la ecuación para el potencial eléctrico.

Posterior a la resolución de las ecuaciones se caracteriza la velocidad v_z en el eje Z (es decir, en $x=y=0$) para los distintos valores de número de Hartmann. Para ello, se realiza un ajuste no-lineal a la velocidad en dirección z mediante una función del tipo Weibull, la cual fue elegida de acuerdo a la observación de los resultados. El ajuste se realiza de acuerdo a la siguiente ecuación.

$$\frac{v_z(z) - v_{out}}{v_{in} - v_{out}} = e^{-(\frac{z}{\alpha})^\beta} \quad (3.1)$$

Realizado esto se obtienen curvas para la obtención de los parámetros α y β de acuerdo a la configuración escogida.

La vorticidad también es analizada mediante un parámetro que mide la alineación

de este con el campo magnético.

$$\lambda = \frac{\sum_k \left(\vec{B}_0 \cdot \vec{\omega}_k \right)^2}{\left(\sum_k |\vec{B}_0|^2 |\vec{\omega}_k|^2 \right)} \quad (3.2)$$

En este caso, el campo magnético está en dirección x y es constante, por lo que el parámetro de alineación se relaciona con la parte de la vorticidad que apunta en esta dirección.

$$\lambda = \frac{\sum_k \omega_{x,k}^2}{\sum_k |\vec{\omega}_k|^2} \quad (3.3)$$

Lo que se esperaría de este parámetro es que fuese creciente al aumentar el número de Hartmann debido a que la vorticidad tiende a alinearse con el campo magnético.

3.2. Caso para N constante

Se analiza además el parámetro de alineamiento λ para varios números de Hartmann conservando un parámetro de interacción constante, esto aplicado para la geometría del caso 1. Se analiza el caso para $N=1$ y $N=2$ y variando el número de Hartmann desde 3 hasta aproximadamente 30.

Capítulo 4

Resultados y discusión

En esta sección se muestran los resultados más característicos para los distintos casos mencionados. Los campos de velocidad Z que se muestran corresponden a los planos XZ e YZ para los distintos valores de Hartmann. Posteriormente, se muestran cortes en los planos XY a distintas distancias desde el inyector. Finalmente, a partir de la velocidad en el eje central se caracterizan los flujos obtenidos y se analiza el campo de vorticidad del flujo.

4.1. Caso 1, $d/D = 1/10$, $Re = 100$

Se observa que el campo de velocidades es axisimétrico cuando no existe un campo magnético. A medida que el número de Hartmann aumenta el campo de velocidad tiende a tener un comportamiento anisotrópico, la vorticidad tiende a alinearse con la dirección del campo magnético, siendo reducida en las otras direcciones. Se puede ver que la recirculación tiende solamente a ocurrir en el plano YZ a medida que el número de Hartmann aumenta, mientras que el plano XZ muestra una tendencia a presentar un flujo más "plano". También se observa que la longitud en que el chorro logra su desarrollo disminuye notablemente con el aumento del campo magnético.

4.1.1. Corte planos XZ e YZ

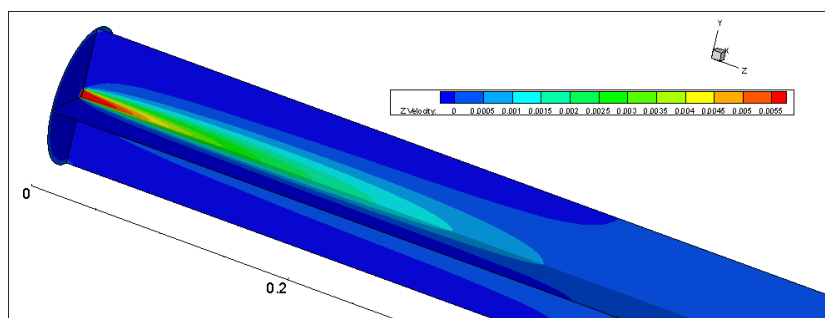


Figura 4.1: Caso 1, $Ha = 0$

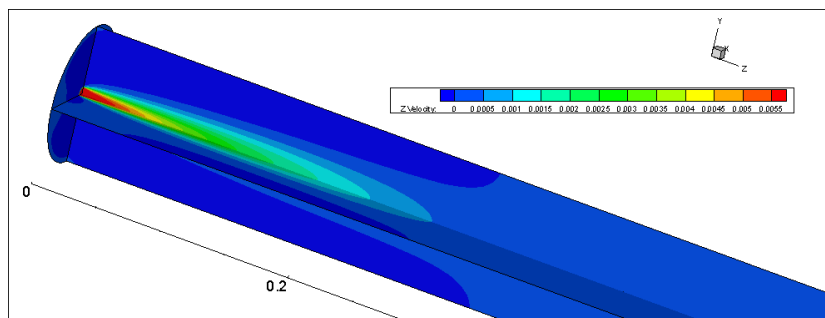


Figura 4.2: Caso 1, $Ha = 1$

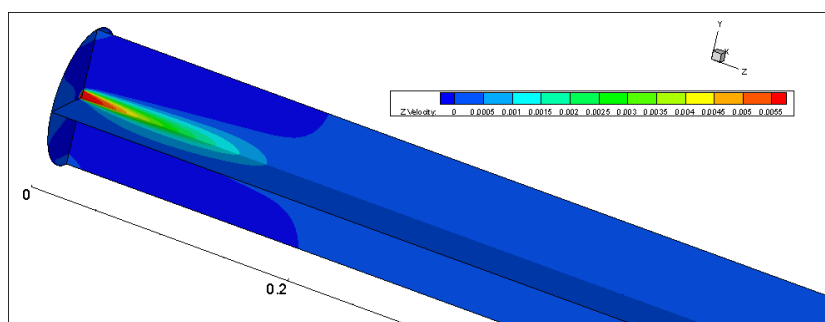


Figura 4.3: Caso 1, $Ha = 3$

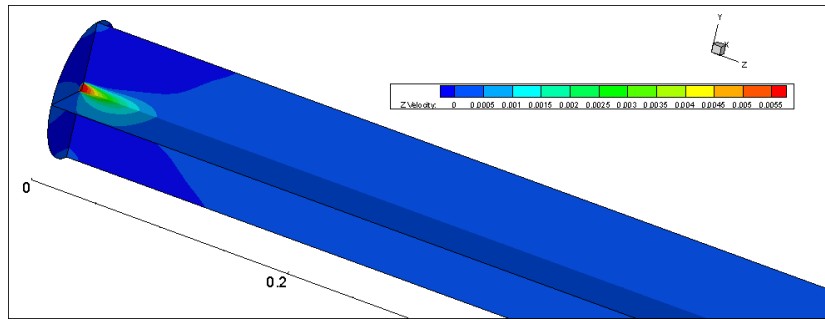


Figura 4.4: Caso 1, $Ha = 10$

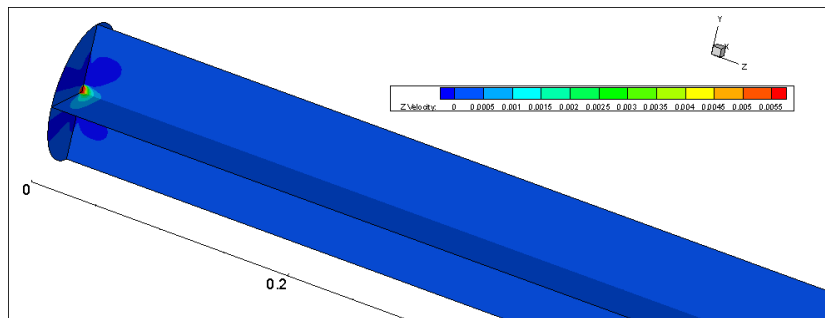


Figura 4.5: Caso 1, $Ha = 30$

4.1.2. Cortes plano XY

A continuación, se muestran los resultados para distintos cortes transversales de Z . Se realizan cortes en los planos tales que $z/d = 0.5, 1, 5, 10, 25$.

Se observa que incluso cerca de la pared del lado del inyector la velocidad se ve fuertemente afectada con el aumento del número de Hartmann. También la anisotropía del fenómeno se ve evidenciada.

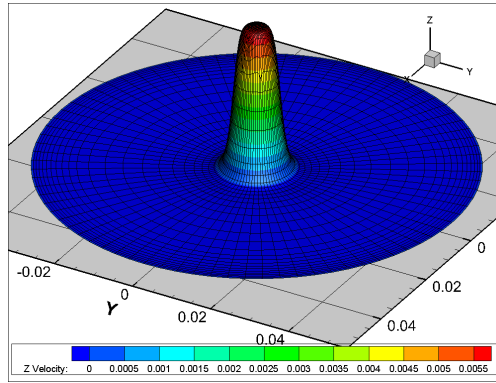


Figura 4.6: Caso 1, $z/d=0.5$, $Ha = 0$

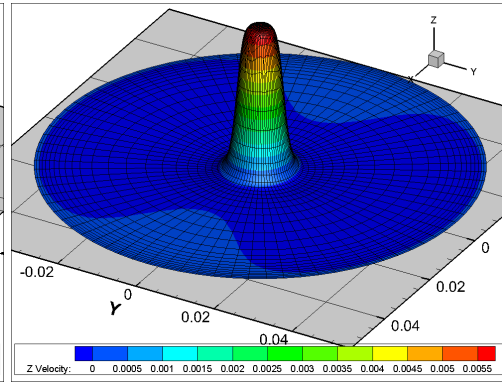


Figura 4.7: Caso 1, $z/d=0.5$, $Ha = 1$

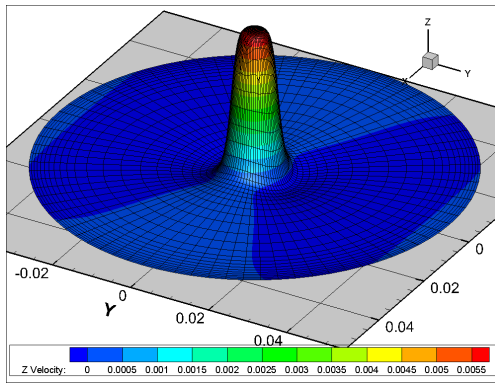


Figura 4.8: Caso 1, $z/d=0.5$, $Ha = 3$

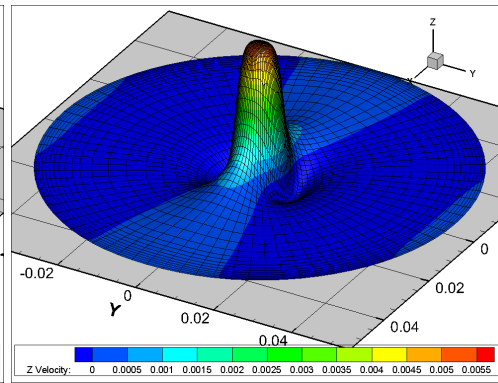


Figura 4.9: Caso 1, $z/d=0.5$, $Ha = 10$

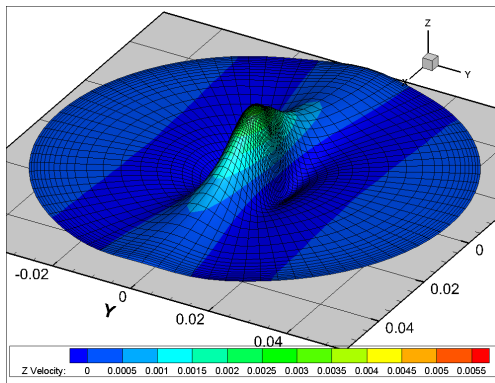


Figura 4.10: Caso 1, $z/d=0.5$, $Ha = 30$

En esta posición $z/d = 1$, ya se comienza a observar claramente la tendencia del flujo hacia un comportamiento cuasi-dimensional, especialmente en la figura 4.14 don-

de se ve un comportamiento de velocidad en el plano X, y uno muy distinto en el plano Y.

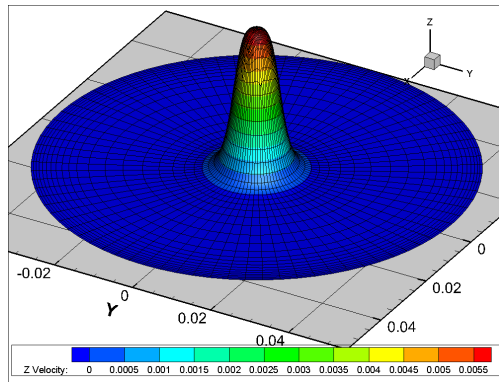


Figura 4.11: Caso 1, $z/d=1$, $Ha = 0$

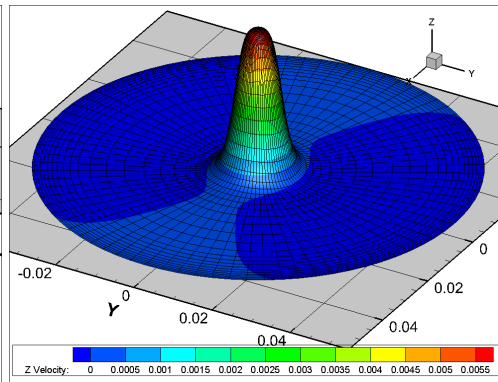


Figura 4.12: Caso 1, $z/d=1$, $Ha = 1$

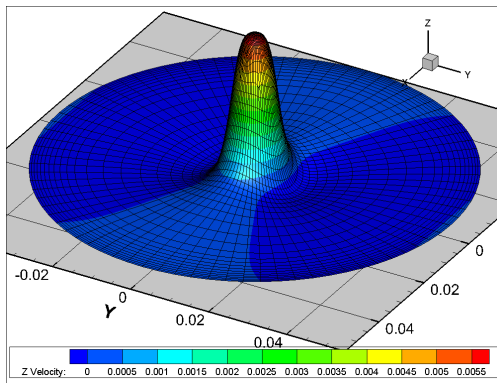


Figura 4.13: Caso 1, $z/d=1$, $Ha = 3$

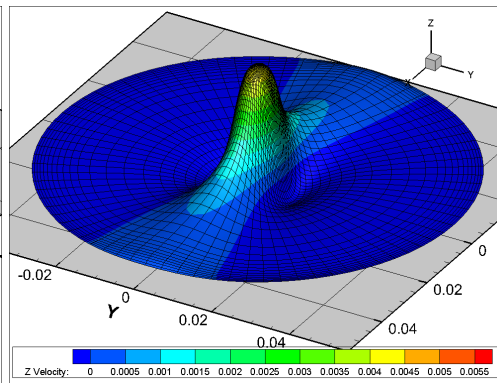


Figura 4.14: Caso 1, $z/d=1$, $Ha = 10$

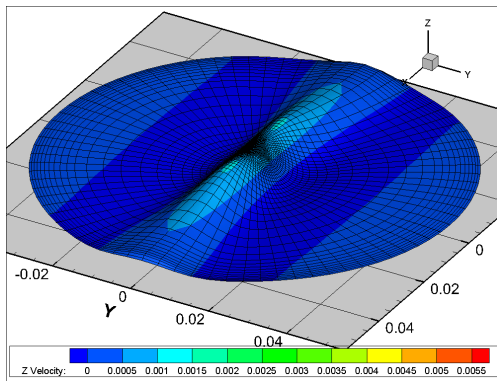


Figura 4.15: Caso 1, $z/d=1$, $Ha = 30$

Comparando las figuras 4.16 hasta 4.20, se observa que el pico de velocidad disminuye con el aumento del número de Hartmann. Esto es la disipación de energía cinética provocada por el campo magnético, las que en términos de energía son debido a la disipación eléctrica en el fluido o efecto Joule, el cual se superpone a la disipación viscosa.

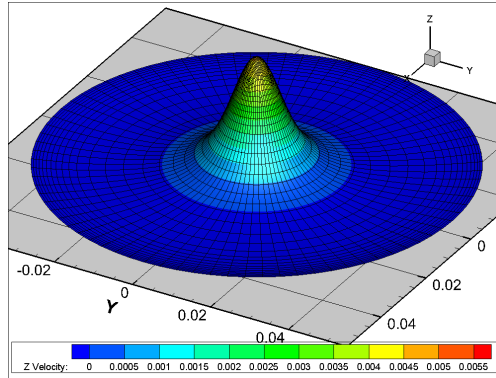


Figura 4.16: Caso 1, $z/d=5$, $Ha = 0$

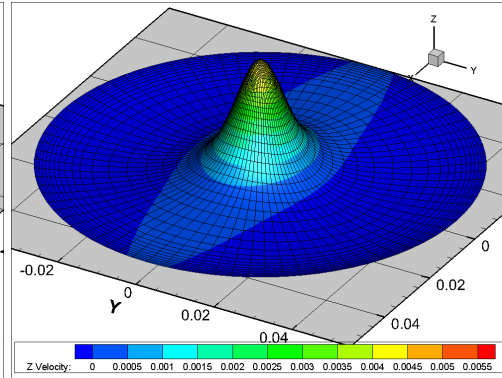


Figura 4.17: Caso 1, $z/d=5$, $Ha = 1$

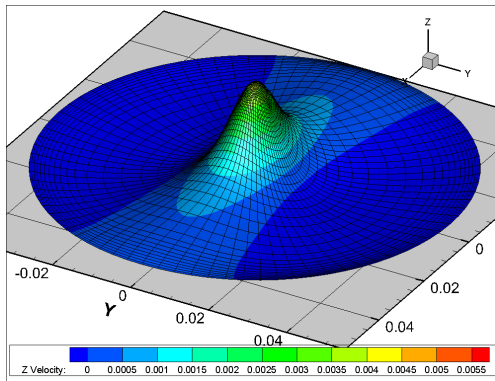


Figura 4.18: Caso 1, $z/d=5$, $Ha = 3$

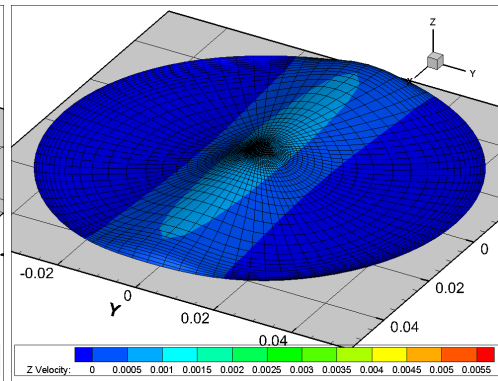


Figura 4.19: Caso 1, $z/d=5$, $Ha = 10$

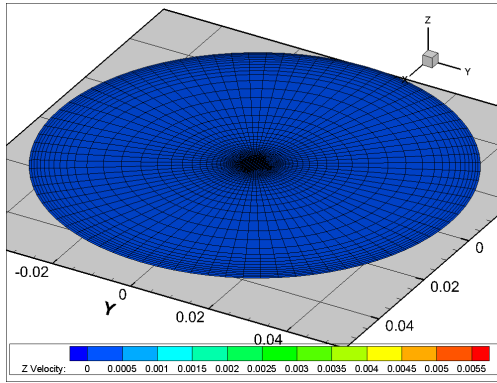


Figura 4.20: Caso 1, $z/d=5$, $Ha = 30$

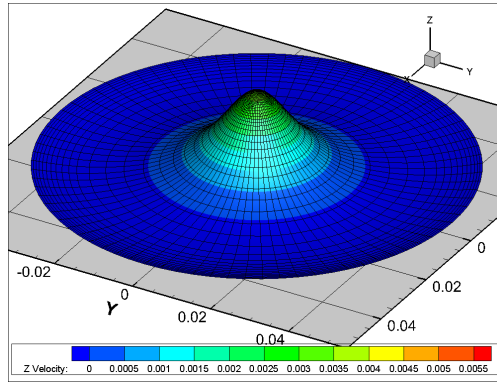


Figura 4.21: Caso 1, $z/d=10$, $Ha = 0$

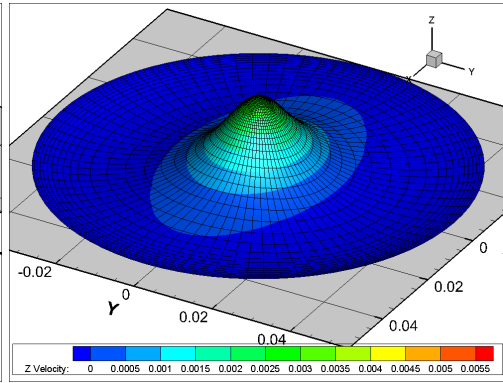


Figura 4.22: Caso 1, $z/d=10$, $Ha = 1$

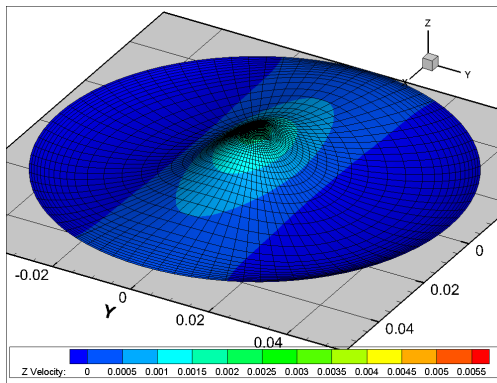


Figura 4.23: Caso 1, $z/d=10$, $Ha = 3$

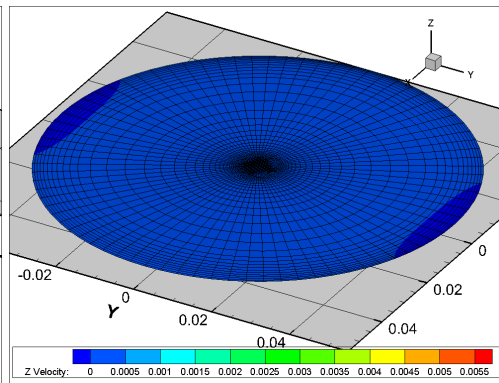


Figura 4.24: Caso 1, $z/d=10$, $Ha = 10$

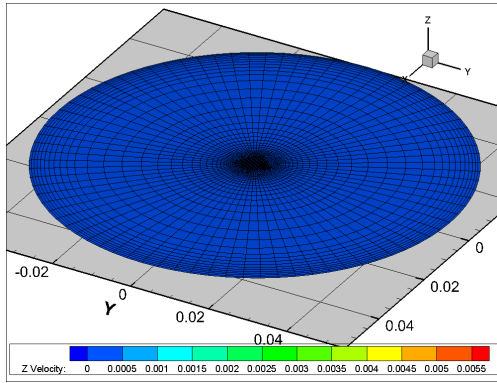


Figura 4.25: Caso 1, $z/d=10$, $Ha = 30$

Se observa que a esta distancia $z/d = 25$ en las figuras 4.26 a 4.30, la mayoría de los flujos con campo magnético ya se encuentran desarrollados. A pesar de que estos pueden parecer similares existen diferencias de velocidad debido al comportamiento de la capa límite bajo la influencia de un campo magnético.

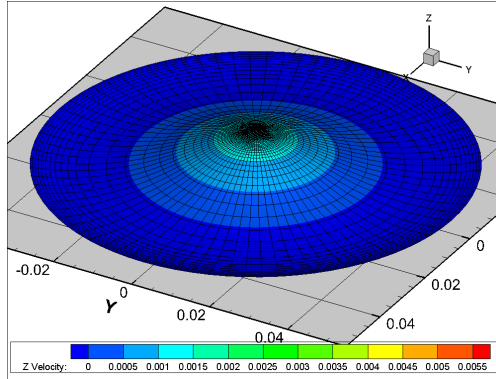


Figura 4.26: Caso 1, $z/d=25$, $Ha = 0$

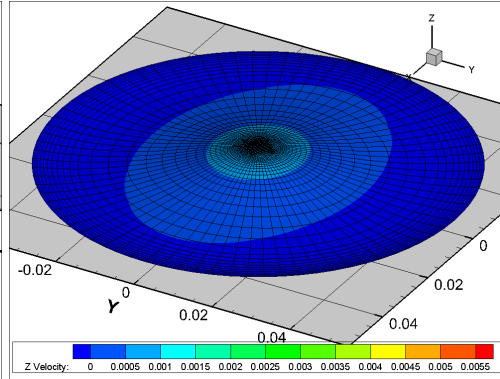


Figura 4.27: Caso 1, $z/d=25$, $Ha = 1$

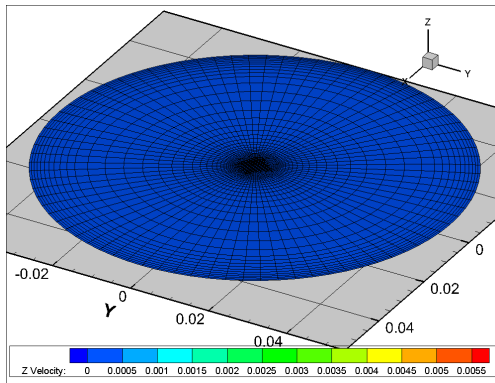


Figura 4.28: Caso 1, $z/d=25$, $Ha = 3$

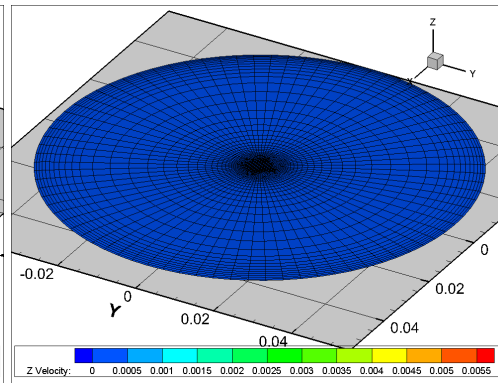


Figura 4.29: Caso 1, $z/d=25$, $Ha = 10$

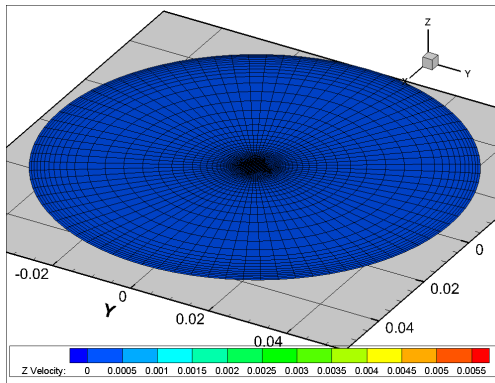


Figura 4.30: Caso 1, $z/d=25$, $Ha = 30$

La velocidad Z obtenida en el eje de simetría y el ajuste de curva realizado se muestran en la figura 4.31

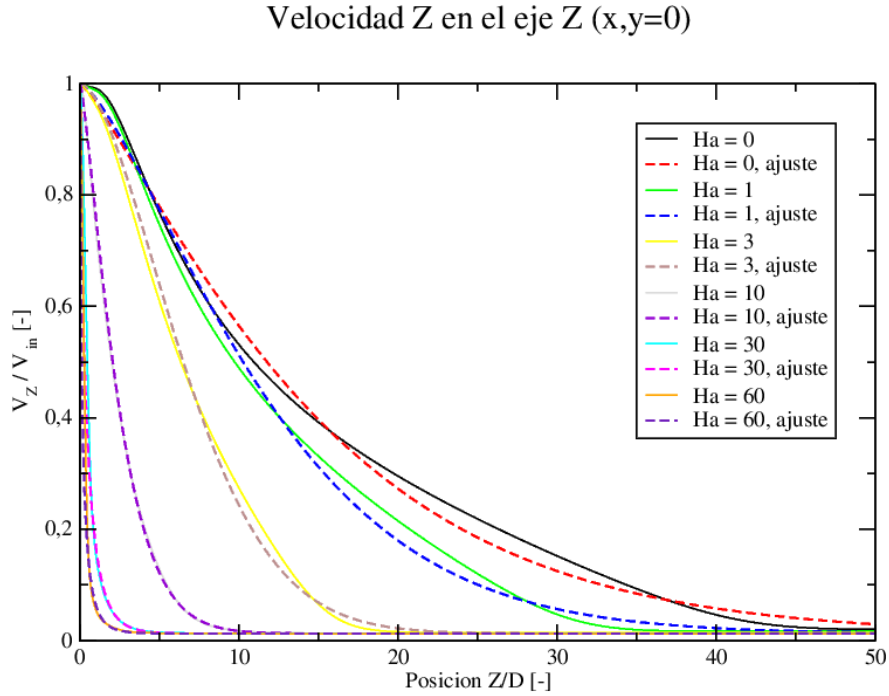


Figura 4.31: V_Z en el eje Z para un inyector circular, $Re=100$, $d/D=1/10$

Se aprecia claramente el amortiguamiento que sufre el chorro debido al campo magnético aplicado, llegando incluso a disiparse muy cerca de la salida del inyector.

La correlación de todas las curvas tiene un valor de R^2 de al menos un 95 %. Este ajuste es aún mayor para números de Hartmann más grandes.

4.2. Caso 2, $d/D = 1/10$, $Re = 100$

A diferencia del caso anterior, no existe una simetría con respecto al eje aun cuando no existe un campo magnético. Con el aumento del número de Hartmann la amortiguación del chorro ocurre de igual manera, aunque en este caso la disipación es mucho mayor. La vorticidad al igual que en el caso anterior tiende a alinearse con la dirección del campo magnético. En este caso, al forzar la recirculación por solo uno de los

lados se observa que el chorro se adelgaza en un parte central para luego expandirse nuevamente y acelerar ligeramente como se muestra más claramente en la figura 4.34. También, al ser la longitud transversal al campo magnética mayor que en el caso 1, la disipación del chorro es más significativa con el aumento del número de Hartmann.

4.2.1. Corte planos XZ e YZ

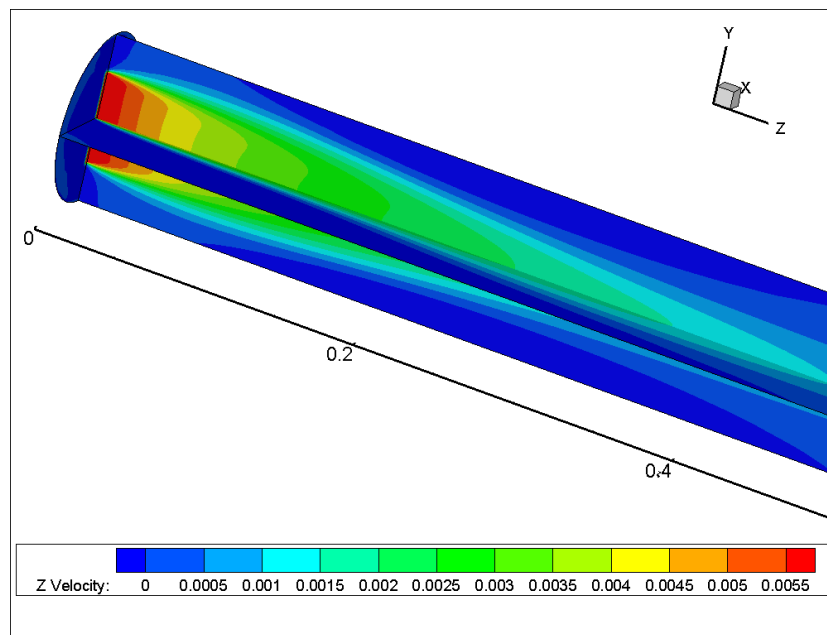


Figura 4.32: Caso 2, $Ha = 0$

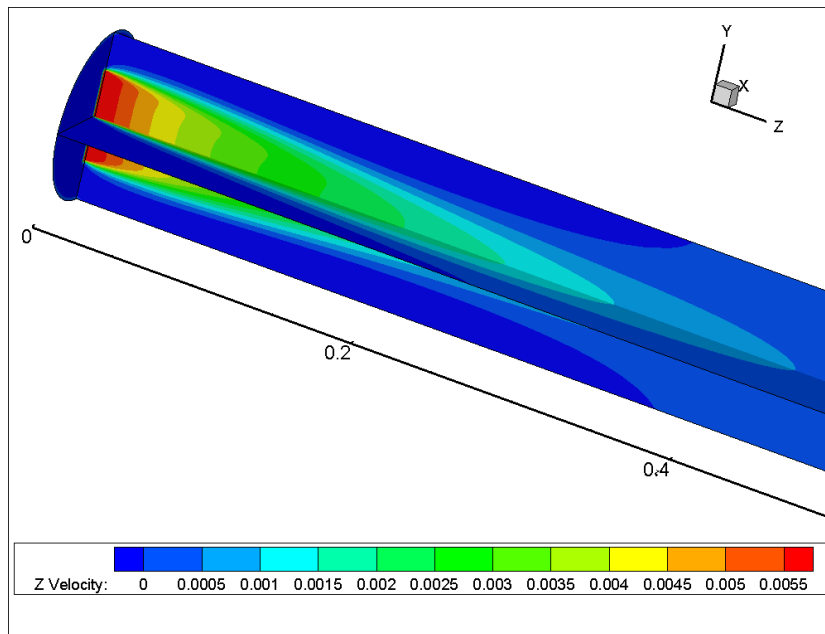


Figura 4.33: Caso 2, $Ha = 1$

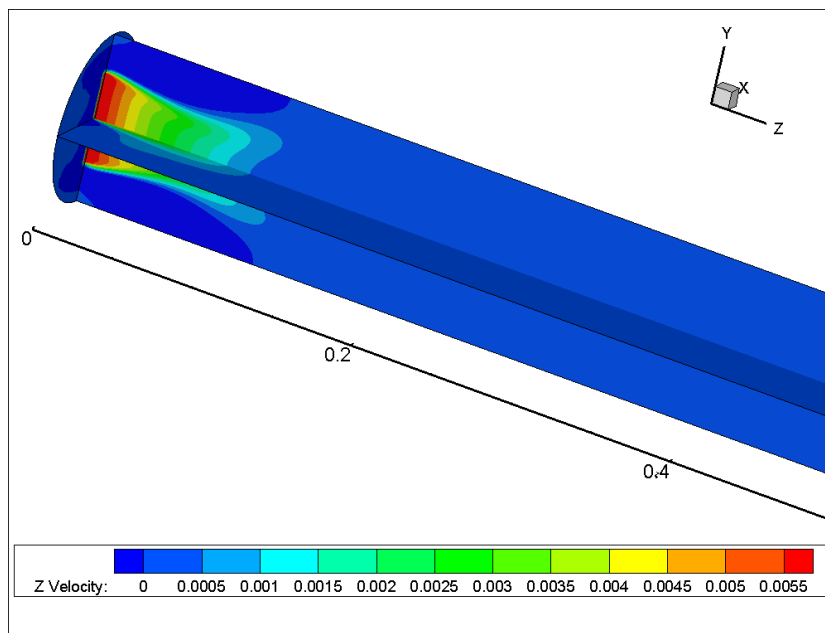


Figura 4.34: Caso 2, $Ha = 3$

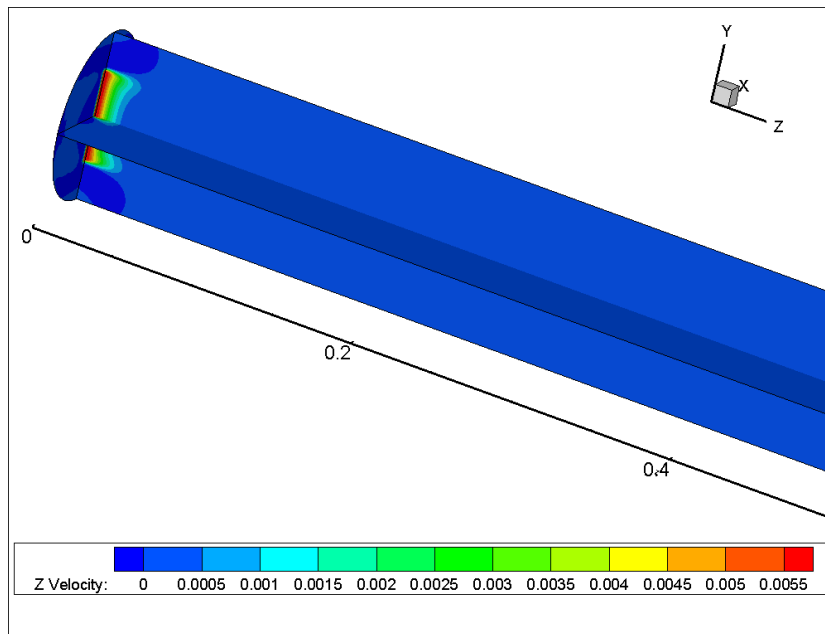


Figura 4.35: Caso 2, $Ha = 10$

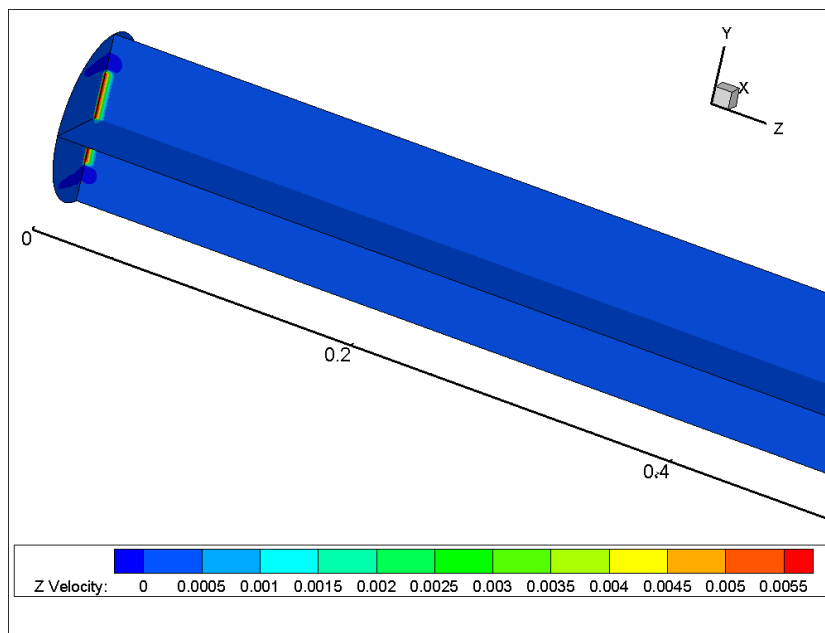


Figura 4.36: Caso 2, $Ha = 30$

4.2.2. Cortes plano XY

Los resultados muestran que incluso cerca de la pared donde se ubica el inyector la velocidad se ve fuertemente afectada con el aumento del número de Hartmann como se ve en la figura 4.40. Para un número de Hartmann de 30, en la figura 4.41, el flujo se encuentra ya prácticamente desarrollado a una distancia de 0.5 veces el diámetro hidráulico.

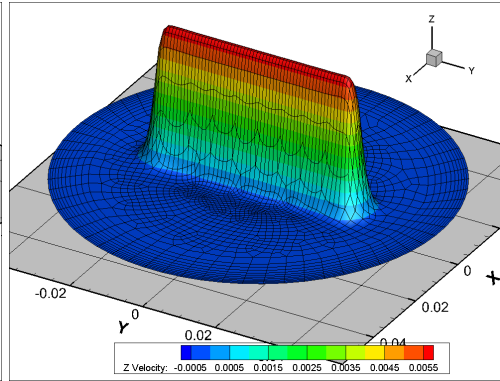
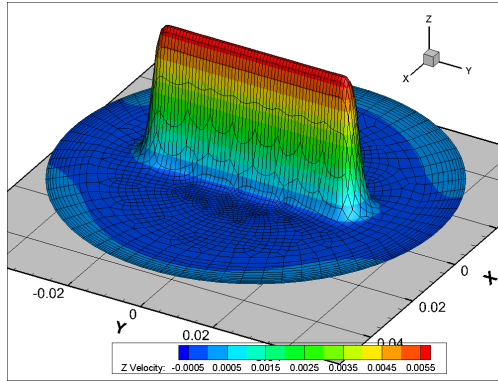


Figura 4.37: Caso 2, $z/d=0.5$, $Ha = 0$ Figura 4.38: Caso 2, $z/d=0.5$, $Ha = 1$

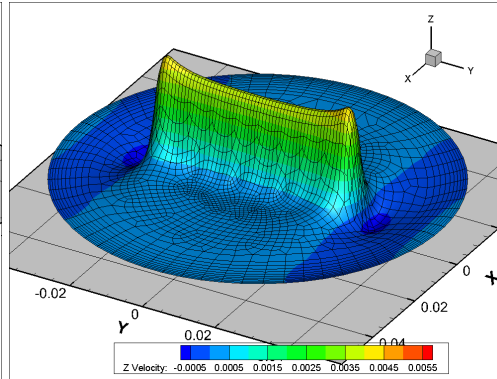
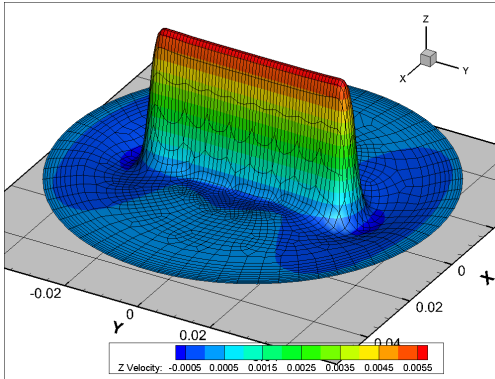


Figura 4.39: Caso 2, $z/d=0.5$, $Ha = 3$ Figura 4.40: Caso 2, $z/d=0.5$, $Ha = 10$

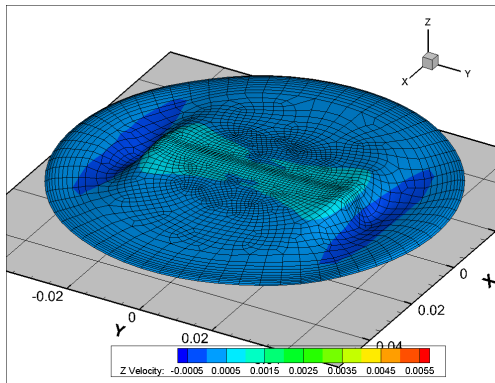


Figura 4.41: Caso 2, $z/d=0.5$, $Ha = 30$

Se observa que la velocidad se mantiene en los bordes del chorro, siendo amortiguada principalmente en el centro de este. Esto ocurre debido a que estos son puntos de fuga de la corriente eléctrica y por lo tanto la fuerza de Lorentz es menor en ellos. Sin embargo, esto ocurre debido a que la condición de velocidad de entrada es constante. En un caso real, la velocidad en las paredes del inyector tendería a ser cercana a 0, eliminando este efecto.

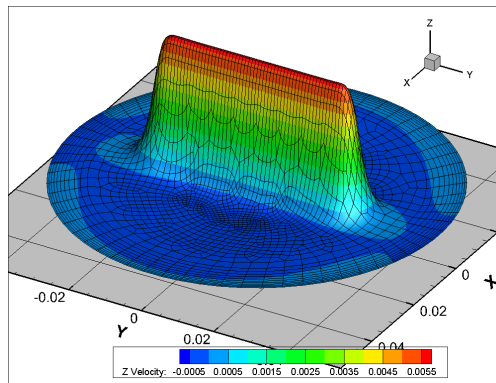


Figura 4.42: Caso 2, $z/d=1$, $Ha = 0$

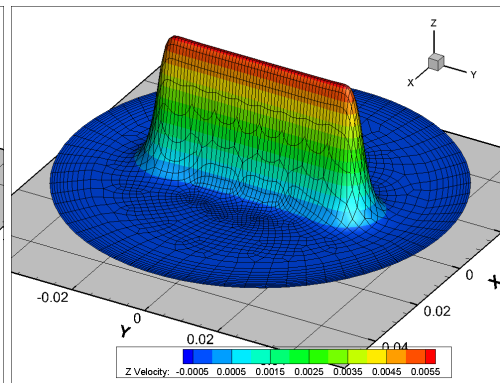


Figura 4.43: Caso 2, $z/d=1$, $Ha = 1$

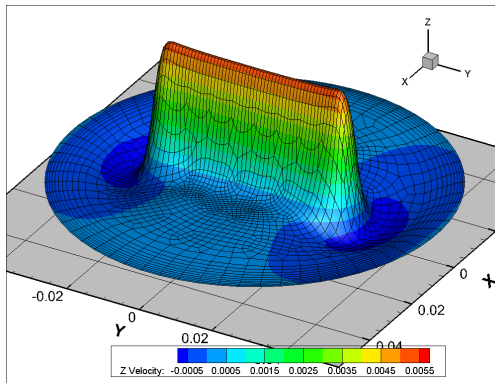


Figura 4.44: Caso 2, $z/d=1$, $Ha = 3$

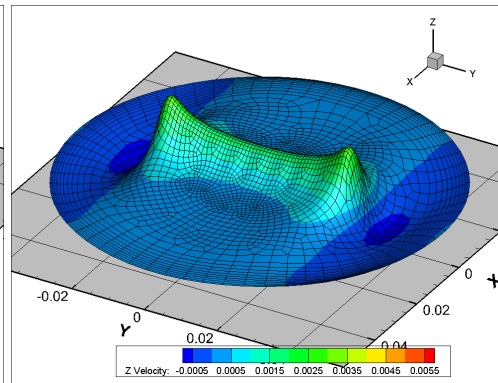


Figura 4.45: Caso 2, $z/d=1$, $Ha = 10$

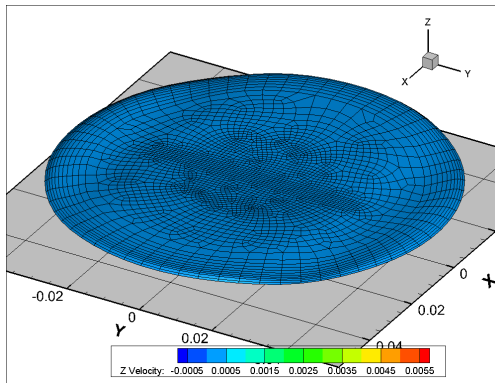


Figura 4.46: Caso 2, $z/d=1$, $Ha = 30$

En la posición $z/d = 5$, la disipación debido al efecto Joule se vuelve evidente, teniendo ya en la figura 4.50 con un número de Hartmann de 10 un flujo desarrollado completamente.

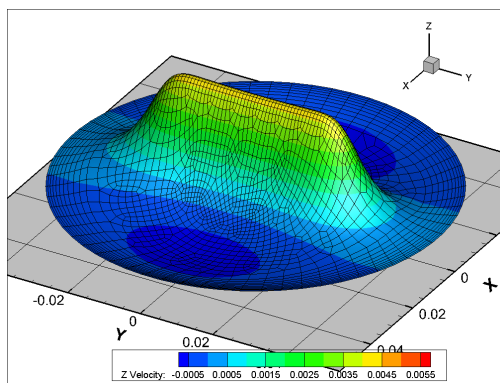


Figura 4.47: Caso 2, $z/d=5$, $Ha = 0$

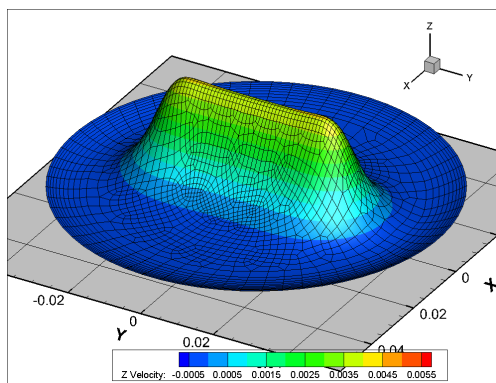


Figura 4.48: Caso 2, $z/d=5$, $Ha = 1$

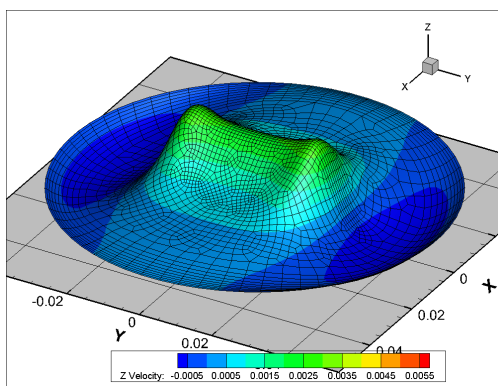


Figura 4.49: Caso 2, $z/d=5$, $Ha = 3$

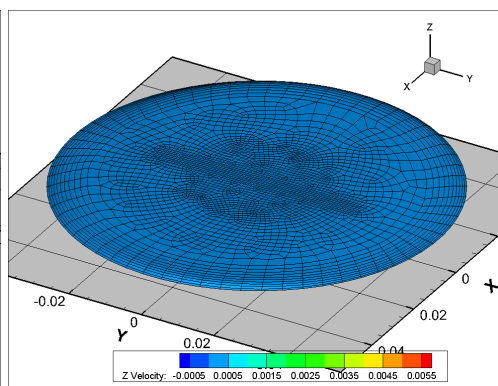


Figura 4.50: Caso 2, $z/d=5$, $Ha = 10$

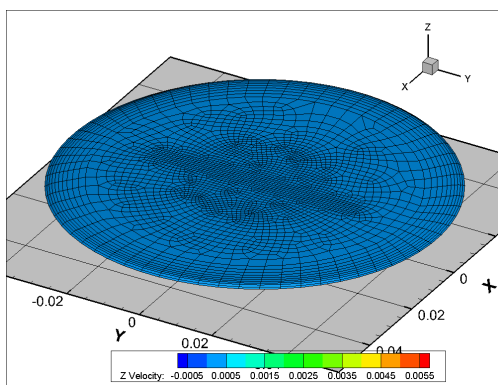


Figura 4.51: Caso 2, $z/d=5$, $Ha = 30$

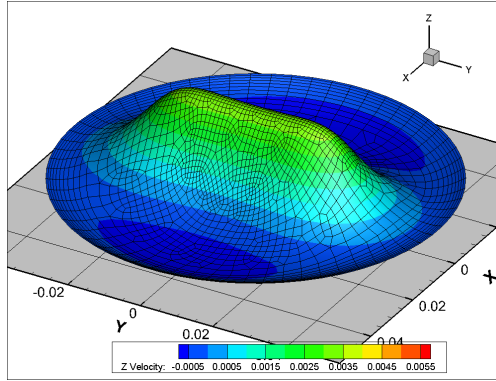


Figura 4.52: Caso 2, $z/d=10$, $Ha = 0$

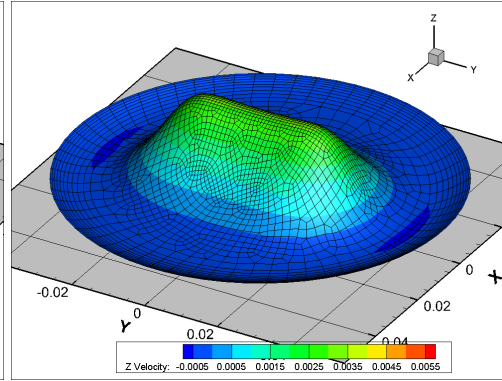


Figura 4.53: Caso 2, $z/d=10$, $Ha = 1$

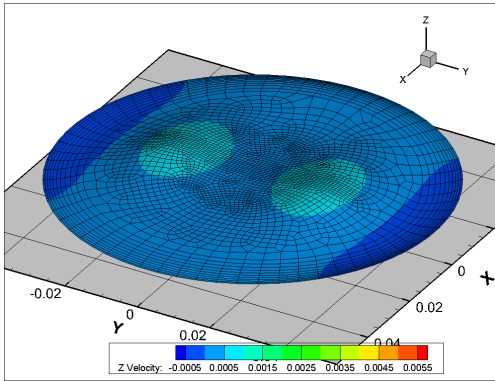


Figura 4.54: Caso 2, $z/d=10$, $Ha = 3$

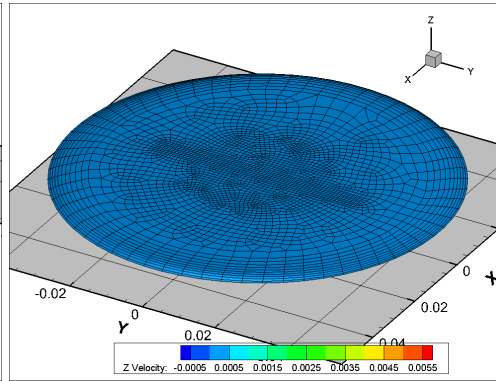


Figura 4.55: Caso 2, $z/d=10$, $Ha = 10$

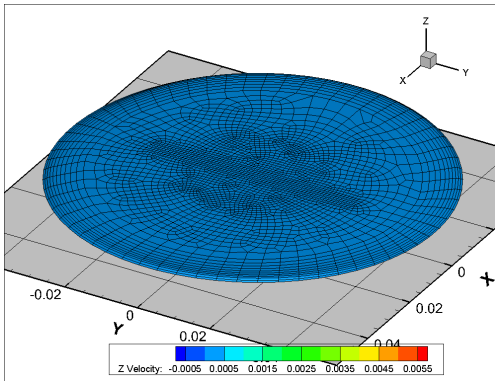


Figura 4.56: Caso 2, $z/d=10$, $Ha = 30$

A partir de la posición $z/d = 25$ en adelante los perfiles de velocidad se encuentran en su mayoría desarrollados como se observa en las figuras 4.59, 4.60 y 4.61. Los

perfiles de velocidad del flujo que se encuentra lejos del inyector son idénticos para los casos 1 y 2.

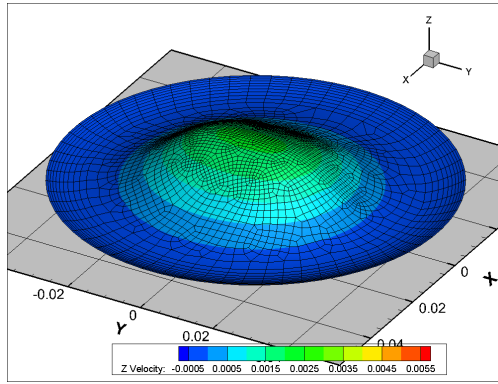


Figura 4.57: Caso 2, $z/d=25$, $Ha = 0$

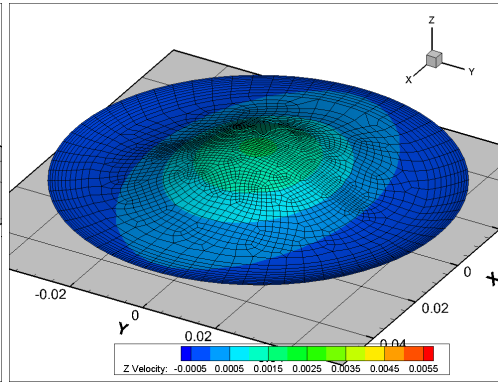


Figura 4.58: Caso 2, $z/d=25$, $Ha = 1$

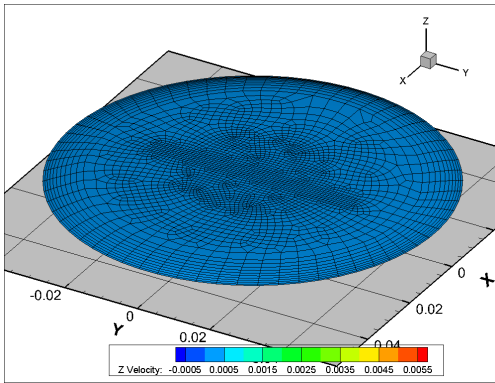


Figura 4.59: Caso 2, $z/d=25$, $Ha = 3$

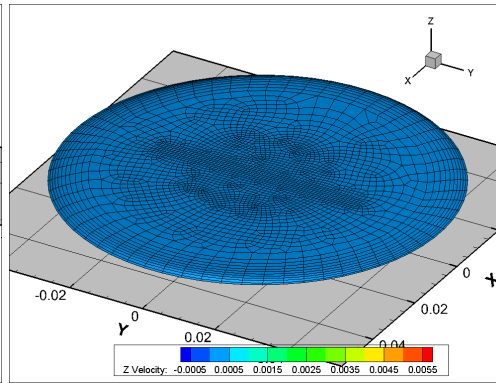


Figura 4.60: Caso 2, $z/d=25$, $Ha = 10$

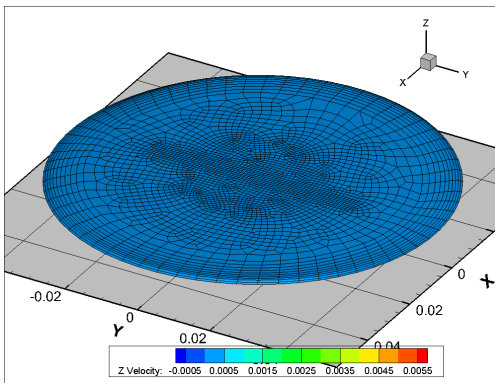


Figura 4.61: Caso 2, $z/d=25$, $Ha = 30$

La velocidad en dirección Z obtenida en la línea del eje de simetría y el ajuste no-lineal realizado se muestra en la figura 4.62

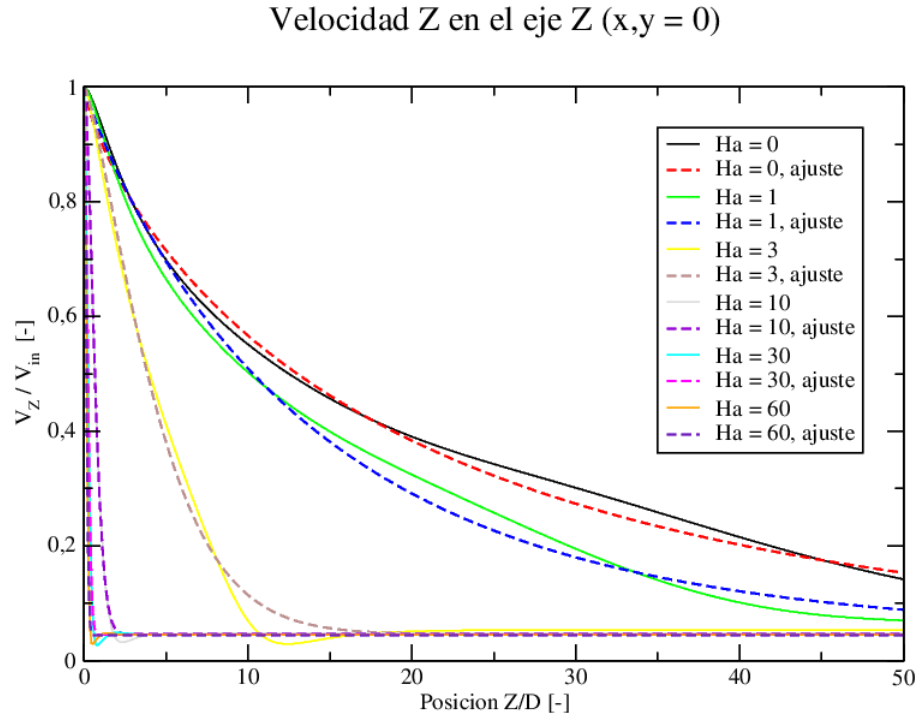


Figura 4.62: Caso 3, Velocidad Z en el eje Z para un inyector rectangular, $Re=100$, $d/D=1/10$

Se aprecia claramente el amortiguamiento que sufre el chorro debido al campo magnético aplicado, llegando incluso disiparse muy cerca de la salida del inyector. Se puede ver que existe una desaceleración del flujo, la que es reincorporada al pasar el tramo de recirculación. Se aprecia claramente una mayor disipación comparado con el caso 1 al aumentar el número de Hartmann.

La correlación de todas las curvas tiene un valor de R^2 de al menos un 95 %. Este ajuste es aún mayor para números de Hartmann más grandes.

4.3. Caso 3, $d/D = 1/20$, $Re = 100$

Los resultados esperados para este caso, esperan ser similares al caso 1. Al estar las paredes alejadas la longitud del chorro es un poco mayor debido a que el esfuerzo ejercido por la pared será menor en este caso. Sin embargo, el comportamiento general es el mismo.

4.3.1. Corte planos XZ e YZ

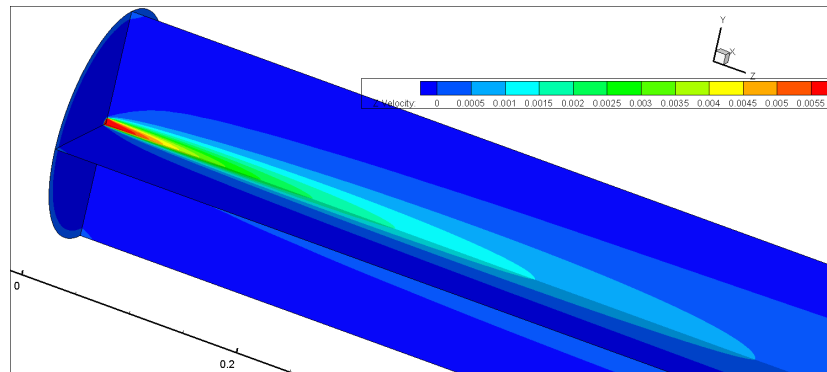


Figura 4.63: Caso 3, $Ha = 0$

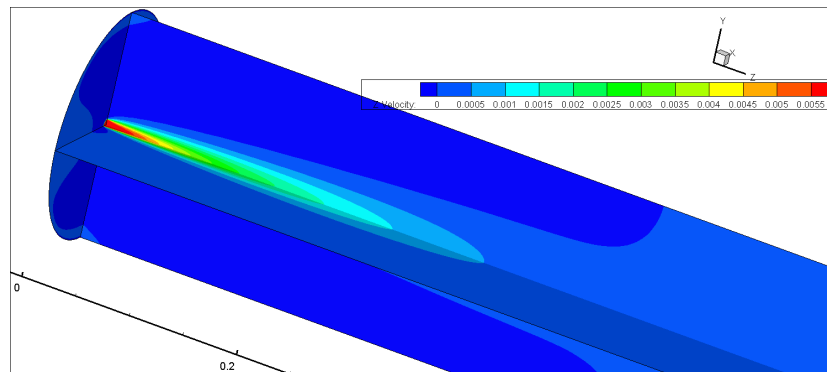


Figura 4.64: Caso 3, $Ha = 1$

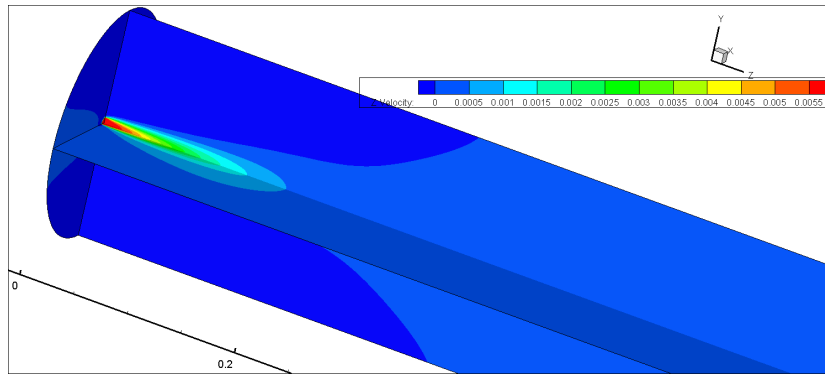


Figura 4.65: Caso 3, $Ha = 3$

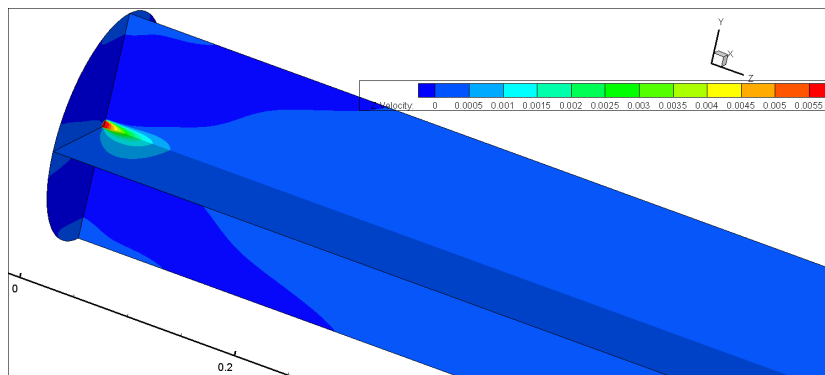


Figura 4.66: Caso 3, $Ha = 10$

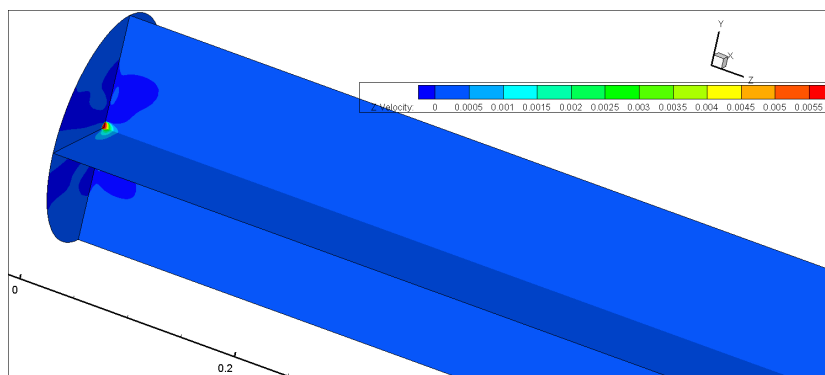


Figura 4.67: Caso 3, $Ha = 30$

4.3.2. Cortes plano XY

En este caso la malla no se muestra debido a que por la concentración de esta en el centro, no se logra apreciar las curvas de nivel.

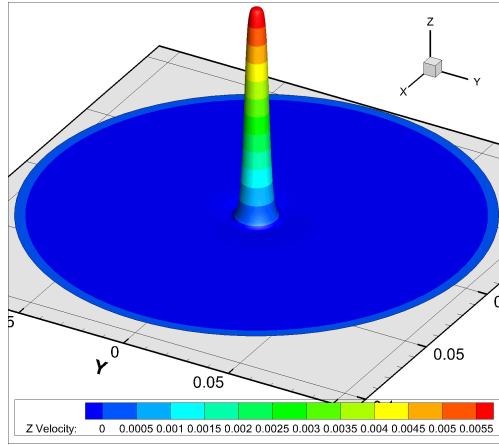


Figura 4.68: Caso 3, $z/d=0.5$, $Ha = 0$

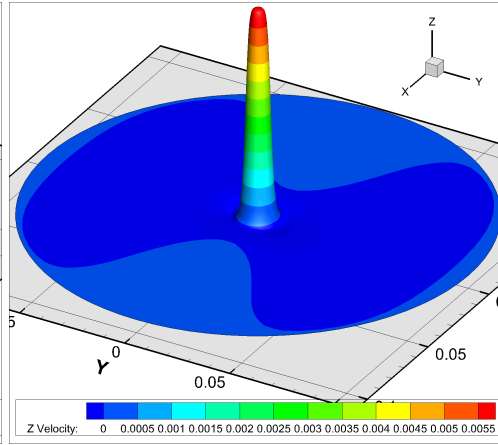


Figura 4.69: Caso 3, $z/d=0.5$, $Ha = 1$

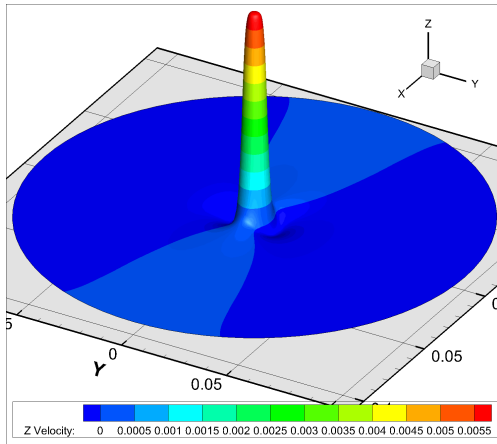


Figura 4.70: Caso 3, $z/d=0.5$, $Ha = 3$

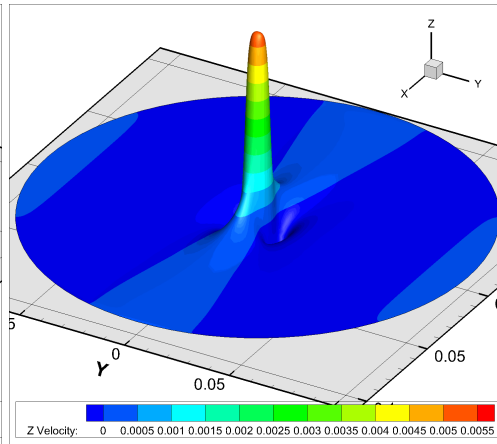


Figura 4.71: Caso 3, $z/d=0.5$, $Ha = 10$

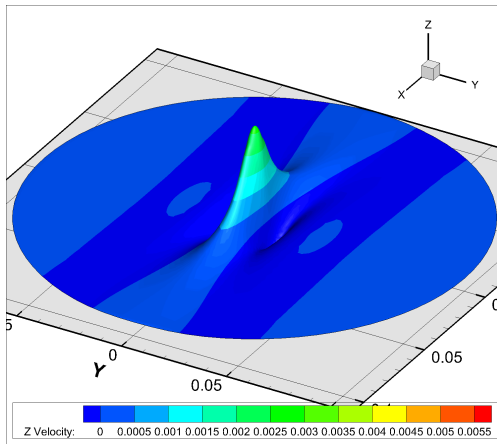


Figura 4.72: Caso 3, $z/d=0.5$, $Ha = 30$

En la posición $z/d = 1$ se comienza a observar el comportamiento bidimensional del flujos. En las figuras 4.75, 4.76 y ?? se observa que en la dirección Y existe recirculación de flujo, mientras que en la dirección X las velocidades son principalmente positivas.

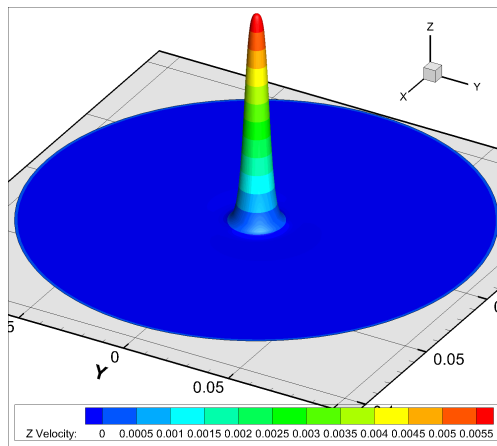


Figura 4.73: Caso 3, $z/d=1$, $Ha = 0$

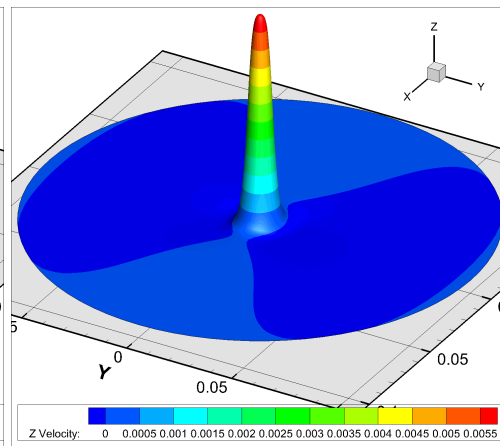


Figura 4.74: Caso 3, $z/d=1$, $Ha = 1$

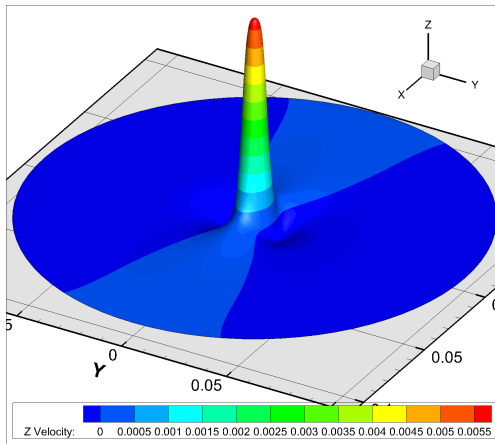


Figura 4.75: Caso 3, $z/d=1$, $Ha = 3$

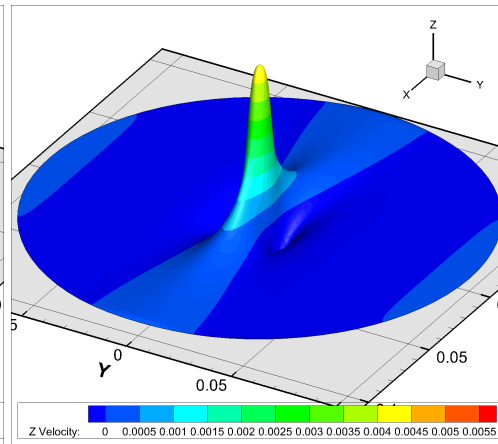


Figura 4.76: Caso 3, $z/d=1$, $Ha = 10$

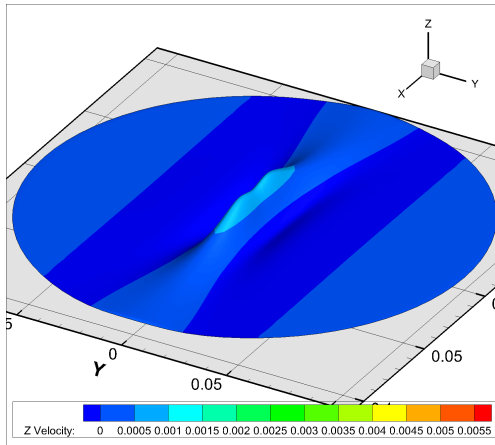


Figura 4.77: Caso 3, $z/d=1$, $Ha = 30$

Se continúan observando comportamientos similares al caso 1, especialmente para un número de Hartmann alto.

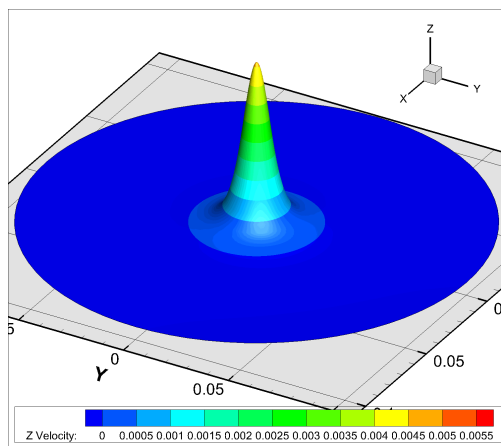


Figura 4.78: Caso 3, $z/d=5$, $Ha = 0$

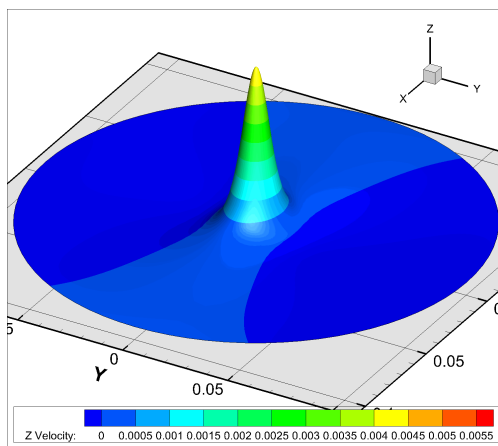


Figura 4.79: Caso 3, $z/d=5$, $Ha = 1$

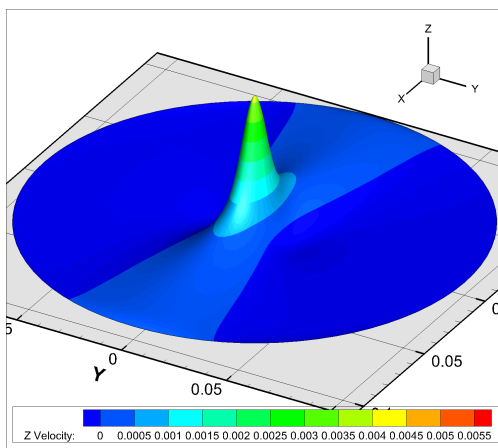


Figura 4.80: Caso 3, $z/d=5$, $Ha = 3$

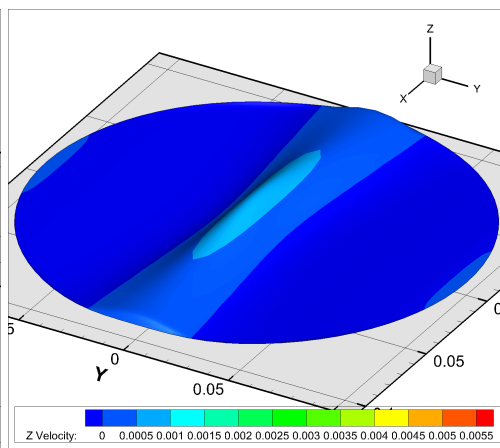


Figura 4.81: Caso 3, $z/d=5$, $Ha = 10$

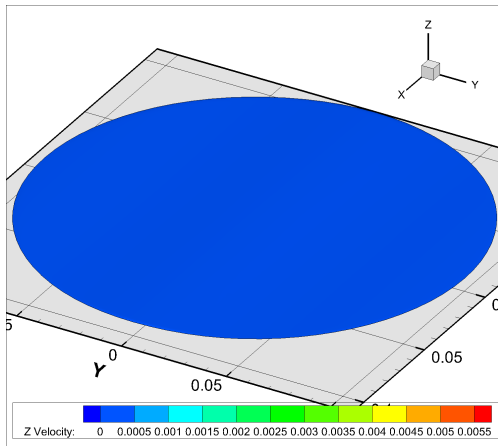


Figura 4.82: Caso 3, $z/d=5$, $Ha = 30$

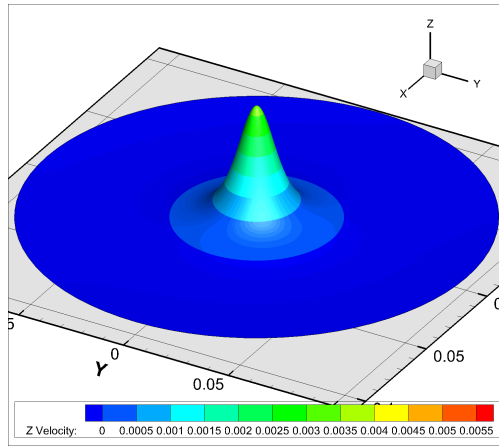


Figura 4.83: Caso 3, $z/d=10$, $Ha = 0$

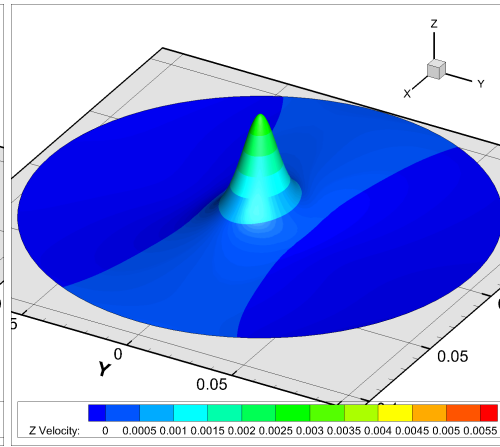


Figura 4.84: Caso 3, $z/d=10$, $Ha = 1$

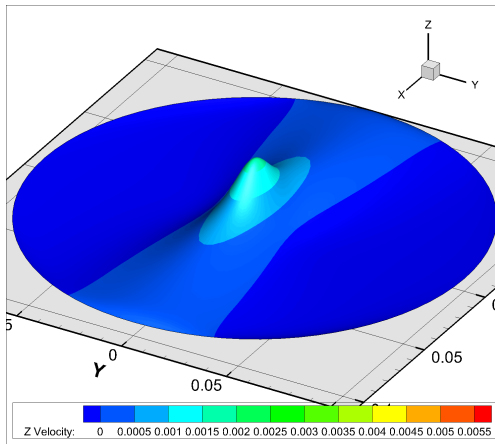


Figura 4.85: Caso 3, $z/d=10$, $Ha = 3$

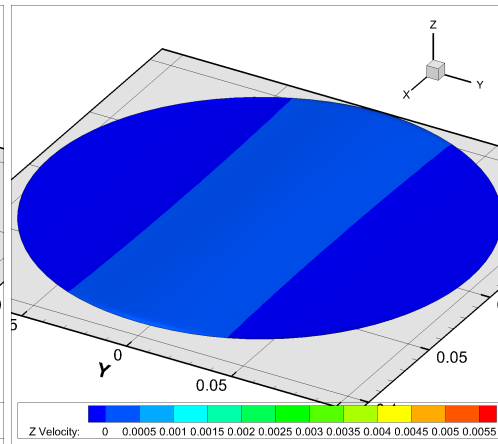


Figura 4.86: Caso 3, $z/d=10$, $Ha = 10$

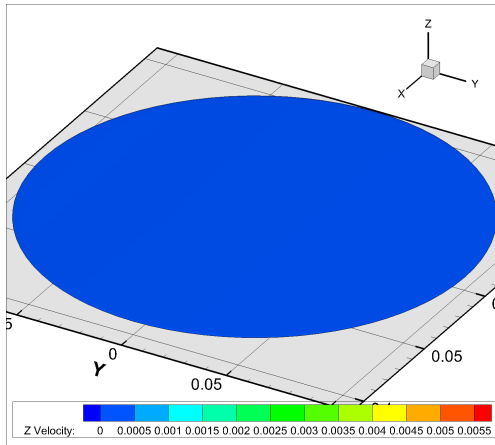


Figura 4.87: Caso 3, $z/d=10$, $Ha = 30$

Las velocidades a este punto son ligeramente superiores comparadas con el caso 1, no se ven cambios significativos. El chorro se prolonga de forma ligeramente superior.

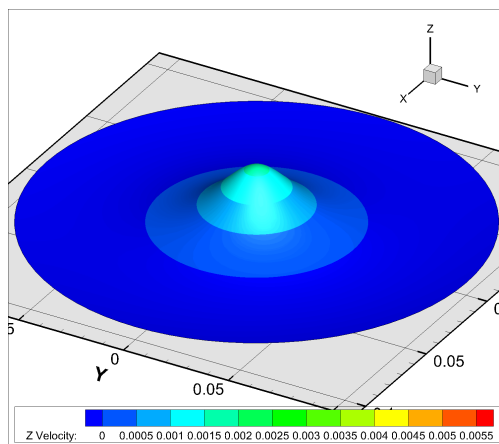


Figura 4.88: Caso 3, $z/d=25$, $Ha = 0$

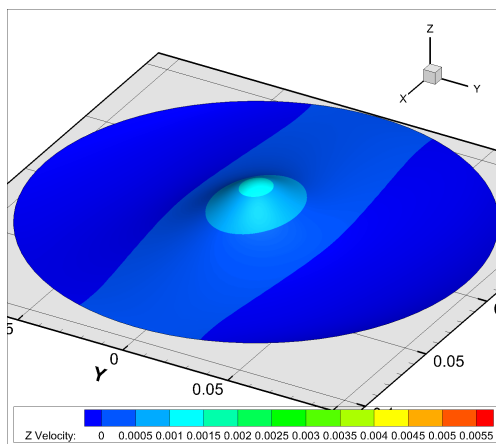


Figura 4.89: Caso 3, $z/d=25$, $Ha = 1$

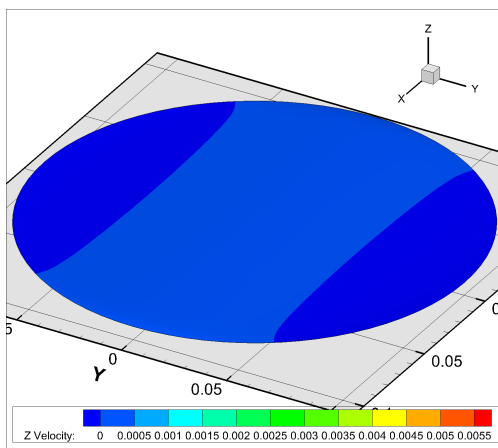


Figura 4.90: Caso 3, $z/d=25$, $Ha = 3$

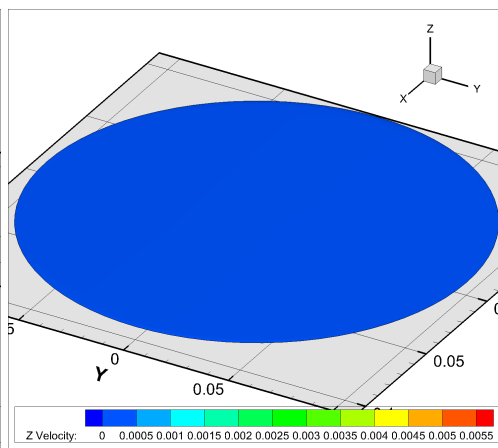


Figura 4.91: Caso 3, $z/d=25$, $Ha = 10$

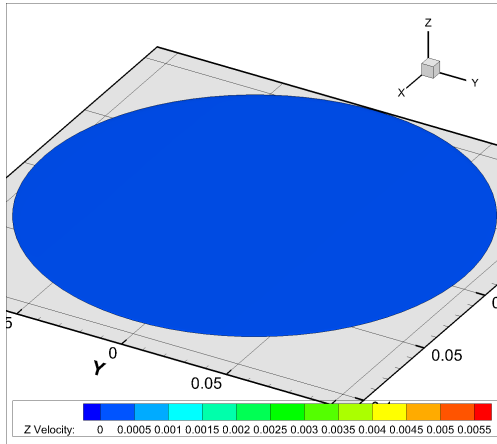


Figura 4.92: Caso 3, $z/d=25$, $Ha = 30$

La velocidad en dirección Z obtenida en la línea del eje de simetría y el ajuste no-lineal es presentado en la figura 4.93.

Velocidad Z en el eje Z ($x,y=0$)

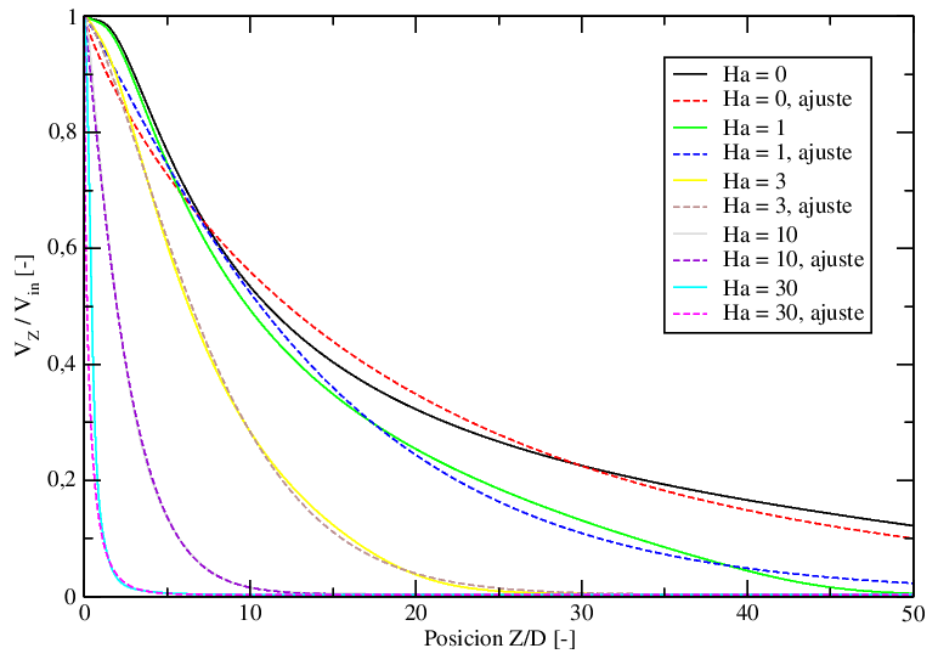


Figura 4.93: V_Z en el eje Z para un inyector circular, $Re=100$, $d/D=1/20$

Se observa una disminución clara debido al aumento del campo magnético. El com-

portamiento en cuanto a velocidad es bastante similar al del caso 1, donde el aumento del campo magnético afecta más fuertemente al flujo.

La correlación de todas las curvas tiene un valor de R^2 de al menos un 95 %. Este ajuste es aún mayor para números de Hartmann más grandes.

4.4. Caso 4, $d/D = 1/20$, $Re = 100$

En este caso, al aumentar el diámetro de la cámara se observa que el chorro aumenta considerablemente su tamaño. Comparando este caso con el caso 2, se ve que en el recién mencionado la inyección del chorro está muy cerca de la pared, por lo que el esfuerzo es mayor debido al contacto con la superficie.

Se muestra las simulaciones para los valores de Hartmann 0, 1, 3, 10. No se realizó para valores más alto debido a que el número de iteraciones aumenta de manera importante. Se realizaron otras simulaciones intermedias entre esos valores las cuales se utilizaron para los cálculos de la caracterización del flujo.

4.4.1. Corte planos XZ e YZ

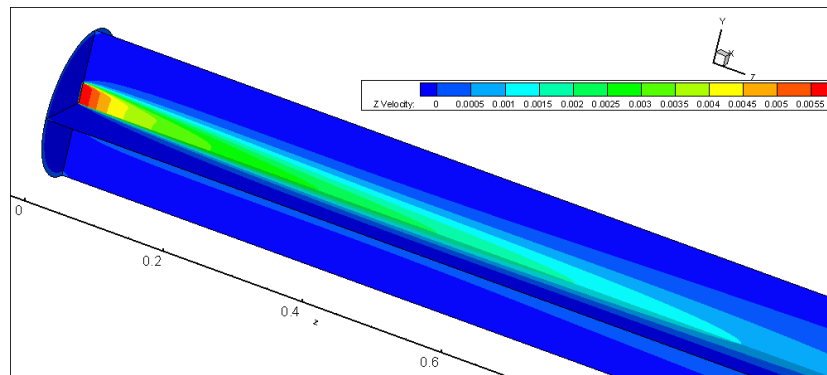


Figura 4.94: Caso 4, $Ha = 0$

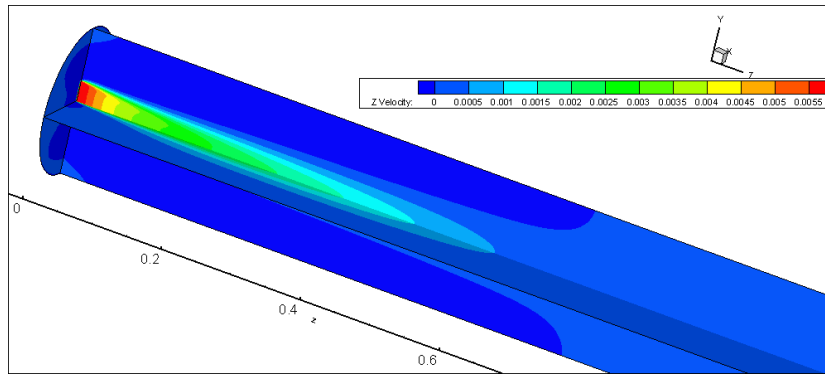


Figura 4.95: Caso 4, $Ha = 1$

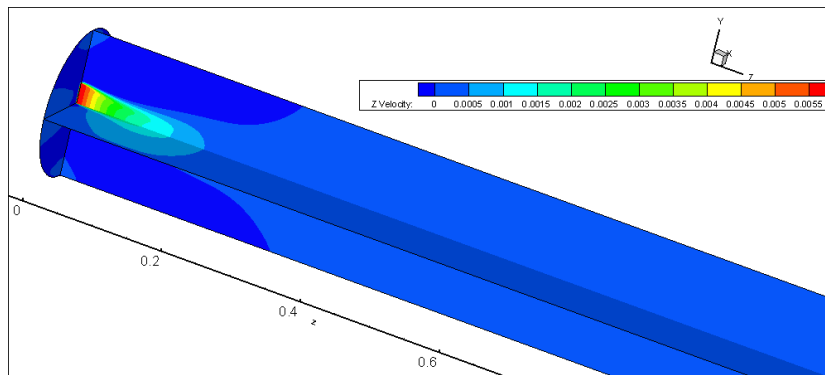


Figura 4.96: Caso 4, $Ha = 3$

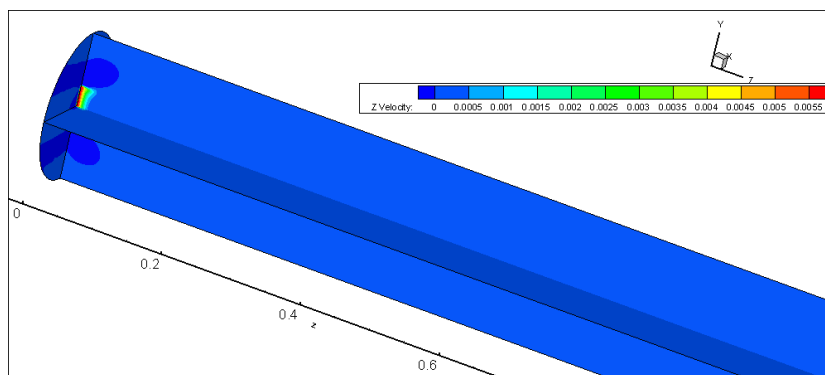


Figura 4.97: Caso 4, $Ha = 10$

4.4.2. Cortes plano XY

Se muestran los resultados para distintos cortes transversales de Z. Se realizan cortes en los planos tales que $z/d = 0.5, 1, 5, 10, 25$.

Se observa de la figura 4.101 que incluso cerca de la pared la velocidad se ve fuertemente afectada con el aumento del número de Hartmann.

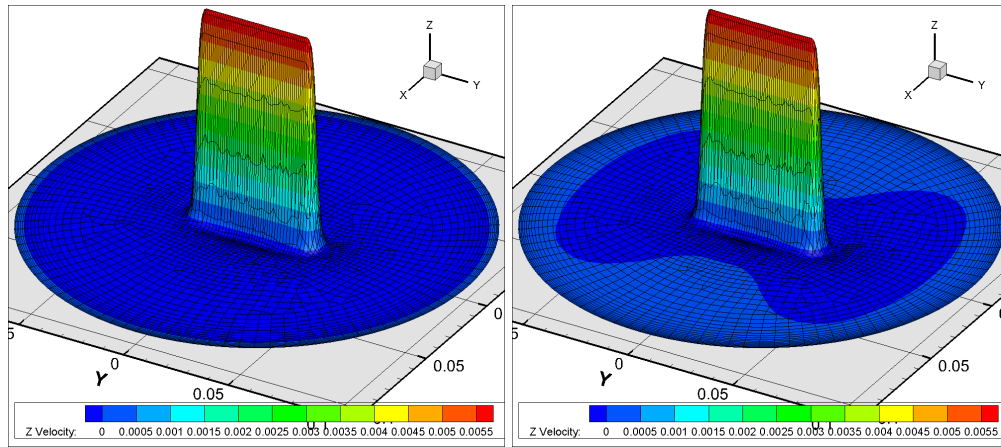


Figura 4.98: Caso 4, $z/d=0.5$, $Ha = 0$ Figura 4.99: Caso 4, $z/d=0.5$, $Ha = 1$

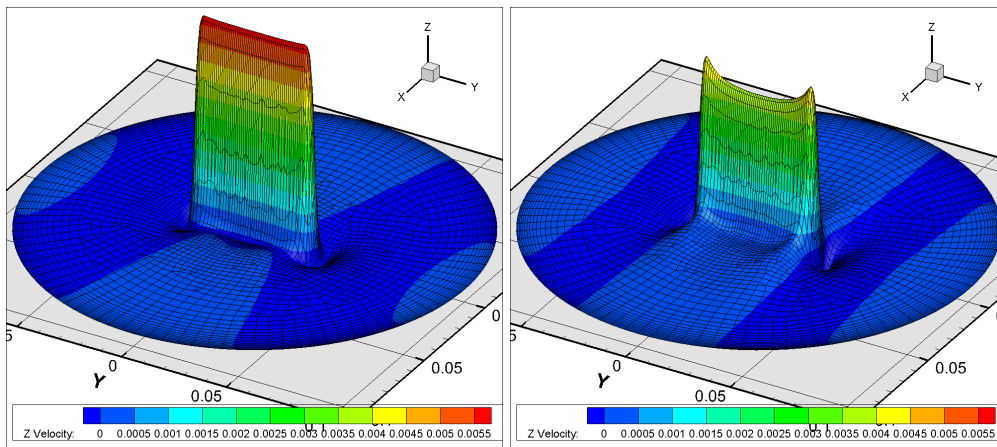


Figura 4.100: Caso 4, $z/d=0.5$, $Ha = 3$ Figura 4.101: Caso 4, $z/d=0.5$, $Ha = 10$

Se observa el mismo comportamiento que en el caso 2, donde en los bordes del chorro la velocidad se ve afectada en menor medida; esto debido a que la mayor fuerza

de Lorentz debido al campo magnético se encuentra principalmente en el centro del chorro.

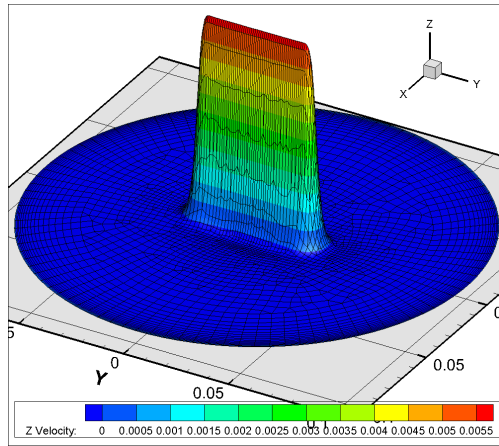


Figura 4.102: Caso 4, $z/d=1$, $Ha = 0$

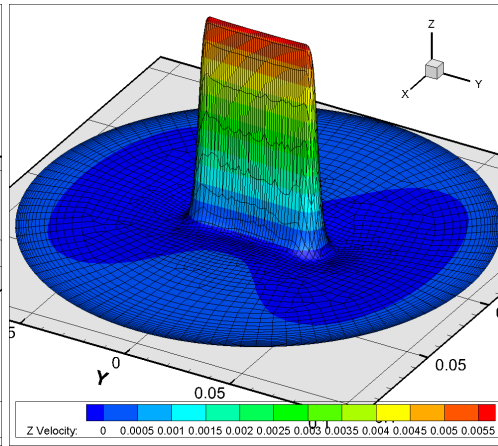


Figura 4.103: Caso 4, $z/d=1$, $Ha = 1$

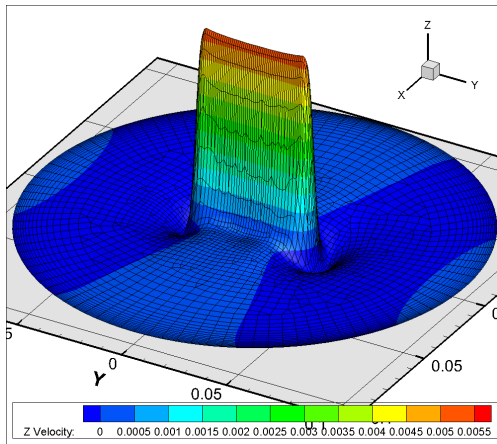


Figura 4.104: Caso 4, $z/d=1$, $Ha = 3$

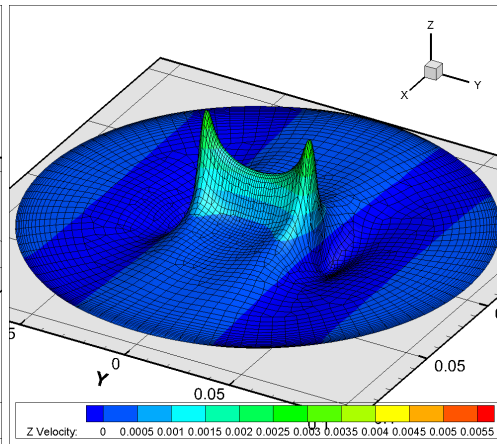


Figura 4.105: Caso 4, $z/d=1$, $Ha = 10$

La disipación de energía cinética es clara en la figura 4.109, y en adelante, se ve claramente la disipación provocada por el campo magnético, las que en términos de energía son debido a la disipación eléctrica en el fluido.

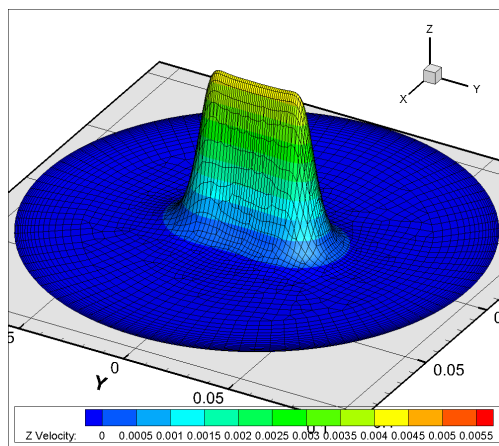


Figura 4.106: Caso 4, $z/d=5$, $Ha = 0$

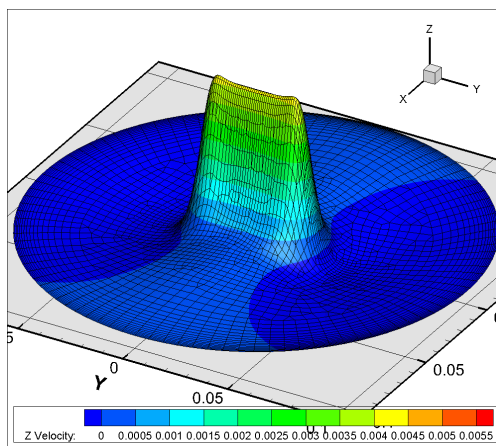


Figura 4.107: Caso 4, $z/d=5$, $Ha = 1$

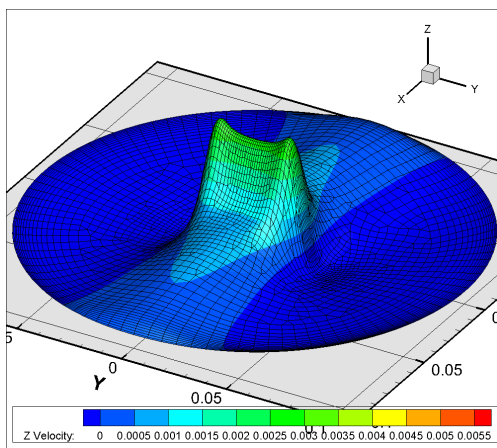


Figura 4.108: Caso 4, $z/d=5$, $Ha = 3$

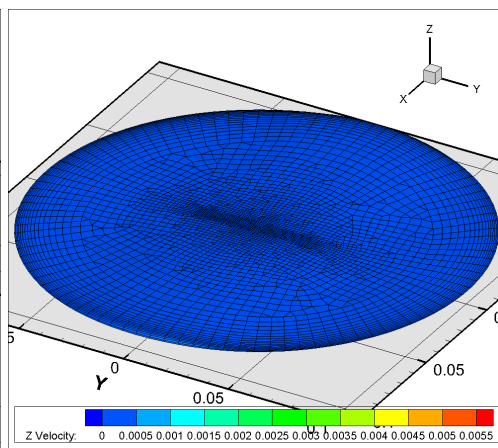


Figura 4.109: Caso 4, $z/d=5$, $Ha = 10$

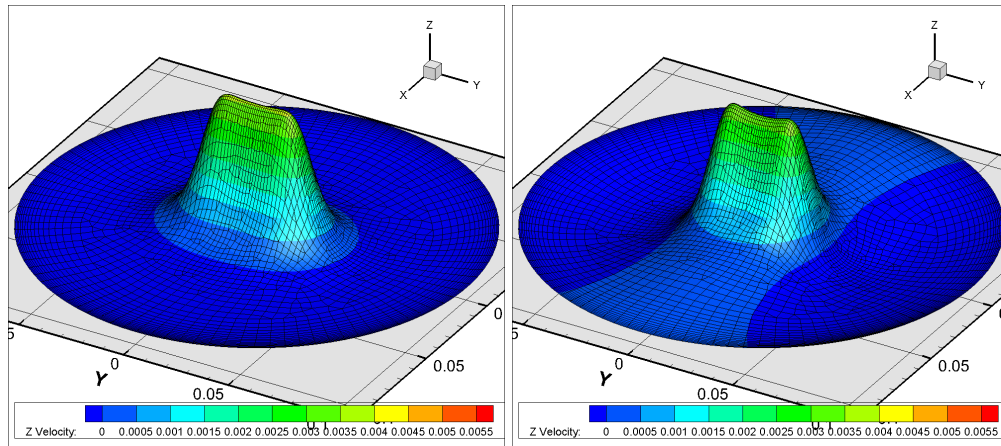


Figura 4.110: Caso 4, $z/d=10$, $Ha = 0$ Figura 4.111: Caso 4, $z/d=10$, $Ha = 1$

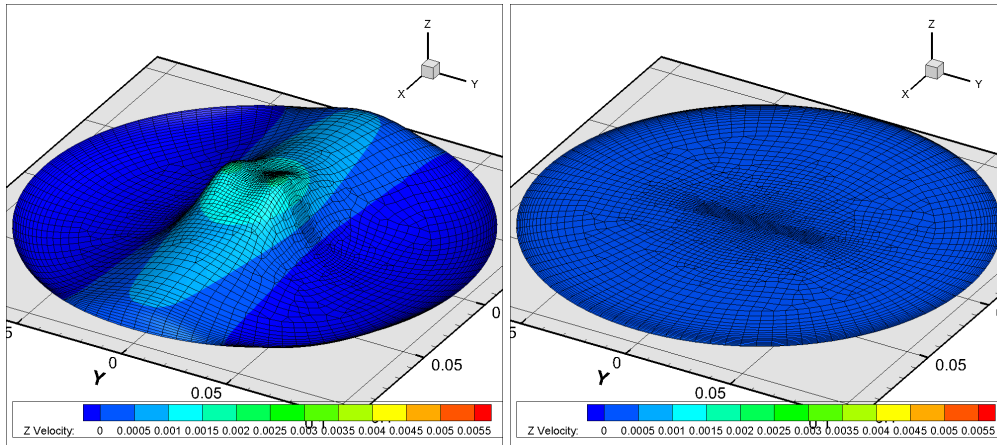


Figura 4.112: Caso 4, $z/d=10$, $Ha = 3$ Figura 4.113: Caso 4, $z/d=10$, $Ha = 10$

Para $z/d = 25$ la mayoría de los flujos con campo magnético se encuentran desarrollados. A pesar de que estos pueden parecer similares existen diferencias de velocidad debido al comportamiento de la capa límite bajo la influencia de un campo magnético. Al comparar las figuras, especialmente la 4.114 y 4.115, con las del caso 2, son prácticamente idénticas si no se considera el aumento de la sección transversal.

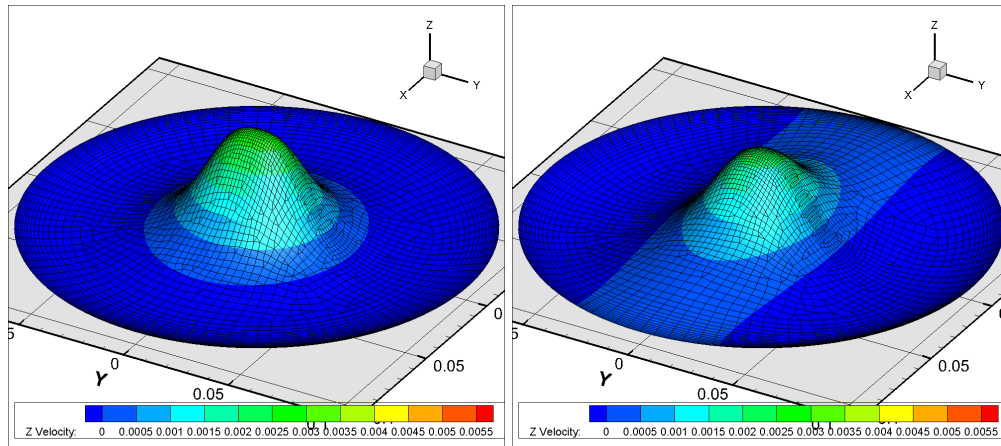


Figura 4.114: Caso 4, $z/d=25$, $Ha = 0$ Figura 4.115: Caso 4, $z/d=25$, $Ha = 1$

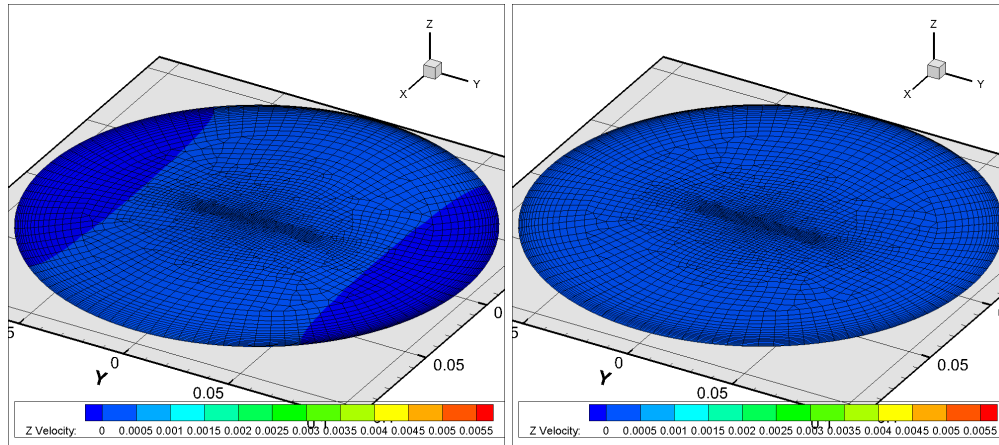


Figura 4.116: Caso 4, $z/d=25$, $Ha = 3$ Figura 4.117: Caso 4, $z/d=25$, $Ha = 10$

La velocidad en dirección Z obtenida en la línea del eje de simetría y el ajuste no-lineal se muestra en la figura 4.118.

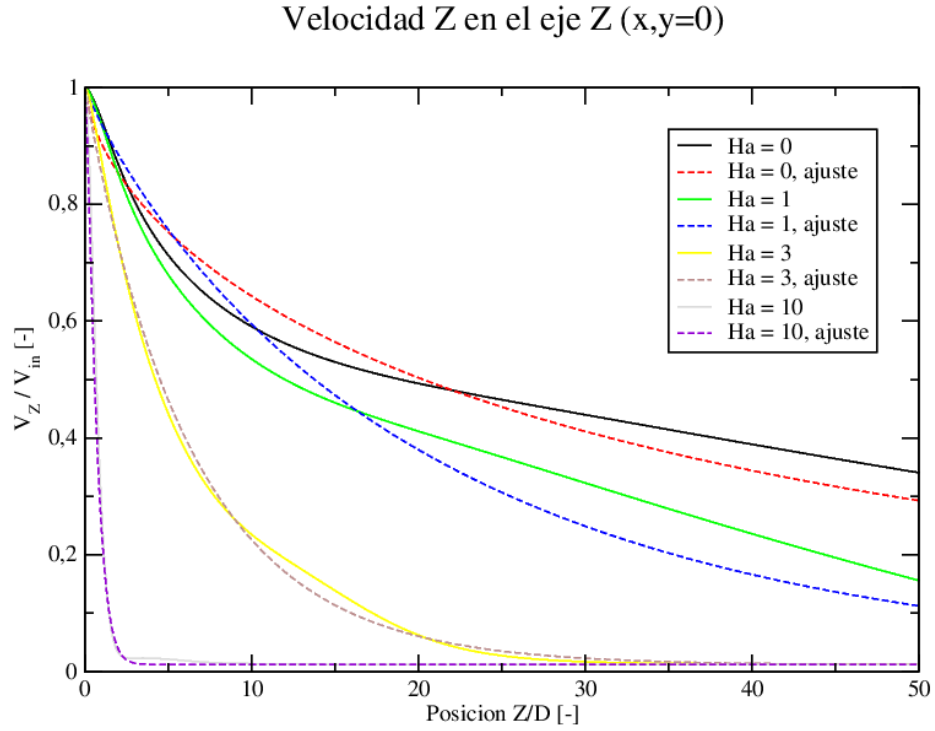


Figura 4.118: V_Z en el eje Z para un inyector rectangular, $Re=100$, $d/D=1/20$

Se observa una disminución clara debido al aumento del campo magnético. El comportamiento en cuanto a velocidad es bastante similar al del caso 2. La similitud entre las curvas de ajuste se observa mayor a medida que el número de Hartmann es mayor.

La correlación de todas las curvas tiene un valor de R^2 de al menos un 95 %. Este ajuste es aún mayor para números de Hartmann más grandes.

4.5. Caso 1, $d/D = 1/10$, $N=1$

En esta sección y en la siguiente se analizan los casos en que se fija el parámetro de interacción y se hace variar el número de Hartmann. La realización de esto es esperando que el fenómeno convectivo sea del orden del efecto electromagnético, y no termine este último disipando completamente el chorro como se ve en las secciones anteriores

cuando el número de Hartmann es demasiado alto.

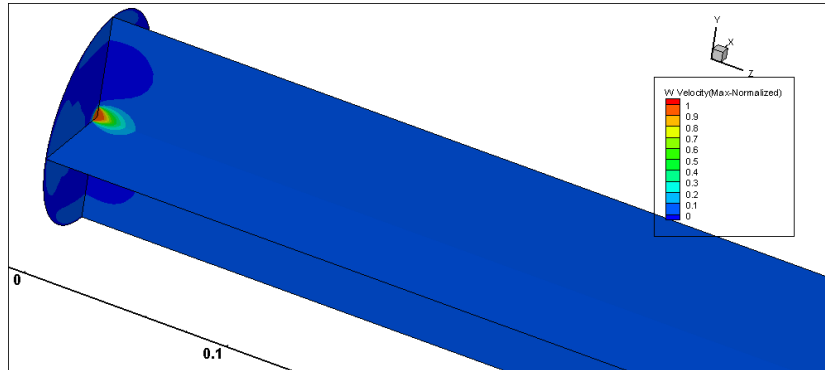


Figura 4.119: Caso 1, $N=1$, $Ha = 3$

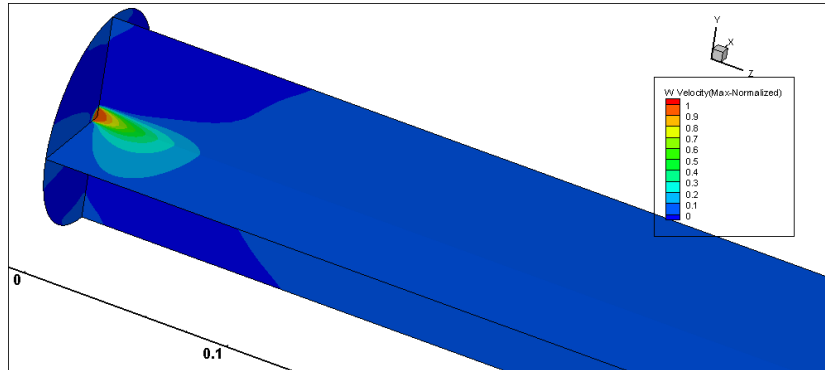


Figura 4.120: Caso 1, $N=1$, $Ha = 10$

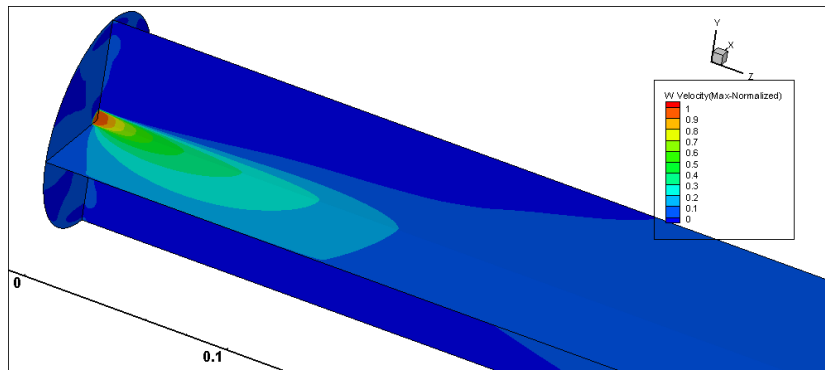


Figura 4.121: Caso 1, $N=1$, $Ha = 22.36$

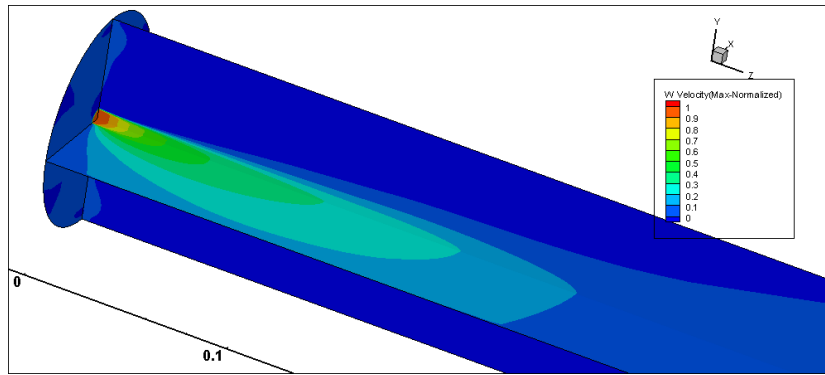


Figura 4.122: Caso 1, $N=1$, $Ha = 31.62$

4.6. Caso 1, $d/D = 1/10$, $N=2$

Cuando el parámetro de interacción se duplica se observa que el largo del chorro resulta ser cercano a la mitad del caso anterior. Esto es equivalente a decir que los términos convectivos son la mitad de los del caso anterior.

Se observa que tanto en este caso como en el anterior el chorro queda confinado en un espacio cada vez más limitado con el aumento del número de Hartmann.

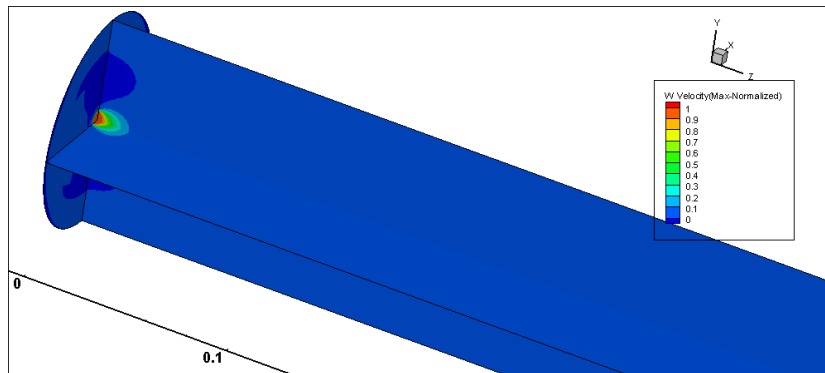


Figura 4.123: Caso 1, $N=2$, $Ha = 3$

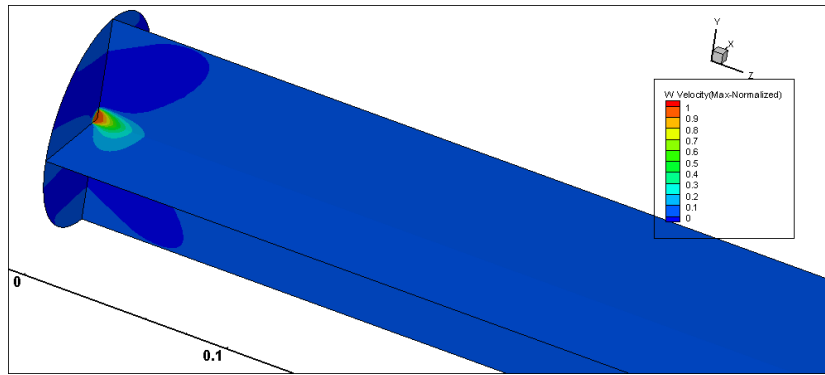


Figura 4.124: Caso 1, $N=2$, $Ha = 10$

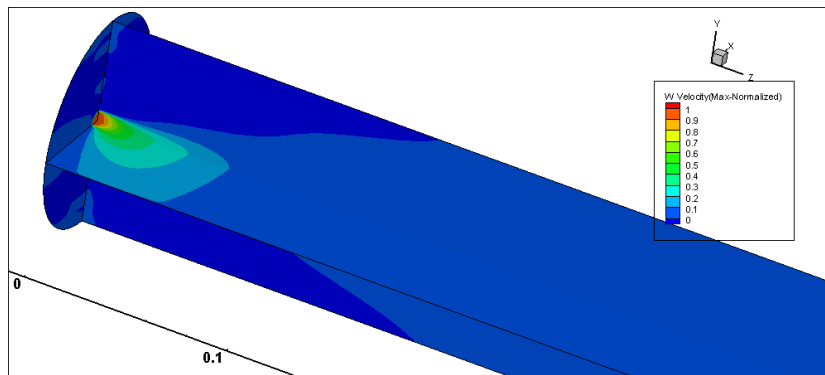


Figura 4.125: Caso 1, $N=2$, $Ha = 22.36$

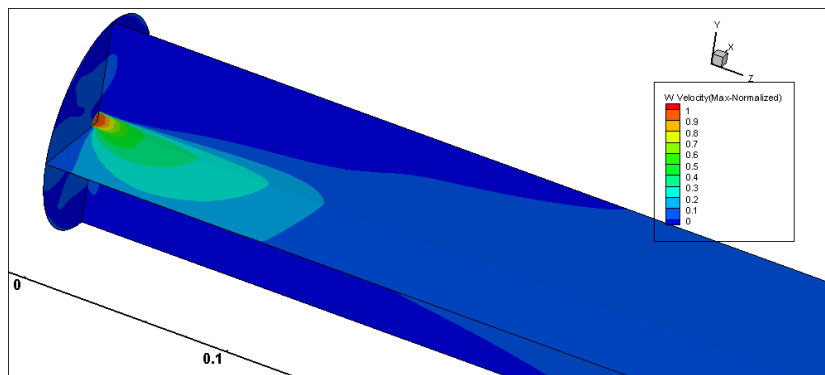


Figura 4.126: Caso 1, $N=2$, $Ha = 31.62$

4.7. Velocidad en el eje central del chorro

Los resultados obtenidos de los ajustes de curva revelan algunas características del flujo. El valor α está relacionado con el largo del chorro, mientras que el valor de β muestra la forma en que este se desarrolla.

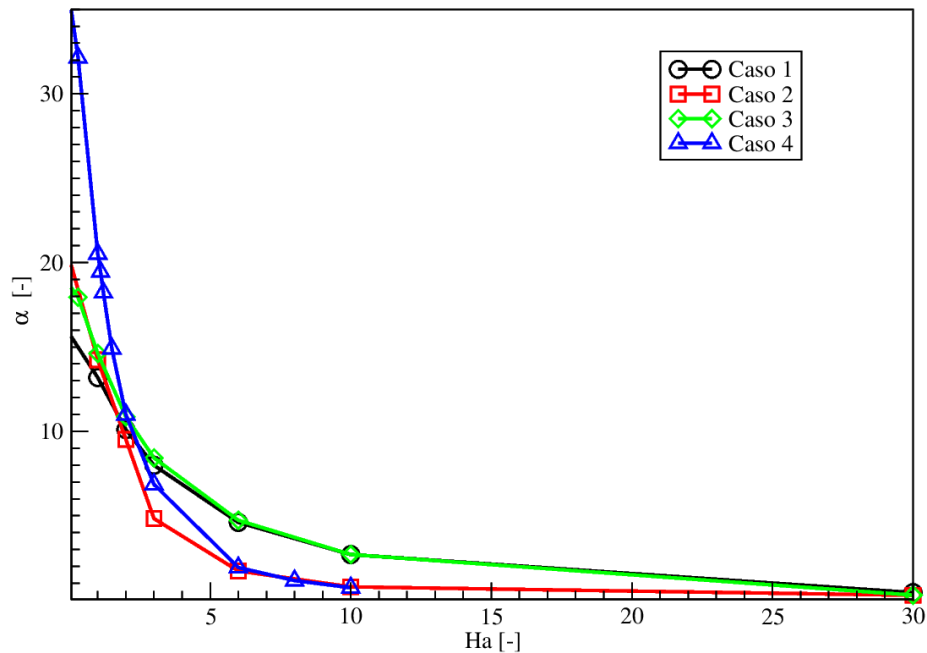


Figura 4.127: Curvas de α vs el número de Hartmann para los cuatro casos.

La figura 4.127 muestra como varía el parámetro α en función del número de Hartmann. Se observa que el largo de todos los casos es afectado con un comportamiento similar, de cierta manera exponencial. Se revela además que tanto los casos 1 con el 3, y el 2 con el 4, llegan a resultados muy similares al aumentar el número de Hartmann. No así al imponer un campo magnético bajo o nulo. Esto quiere decir que el efecto magnético es superior a los efectos viscosos, lo que es el concepto detrás del número de Hartmann.

Las curvas obtenidas para el parámetro β en la figura 4.128 son mostradas en fun-

ción del valor α puesto que la relación es mucho más clara que al mostrarse directamente en función del número de Hartmann.

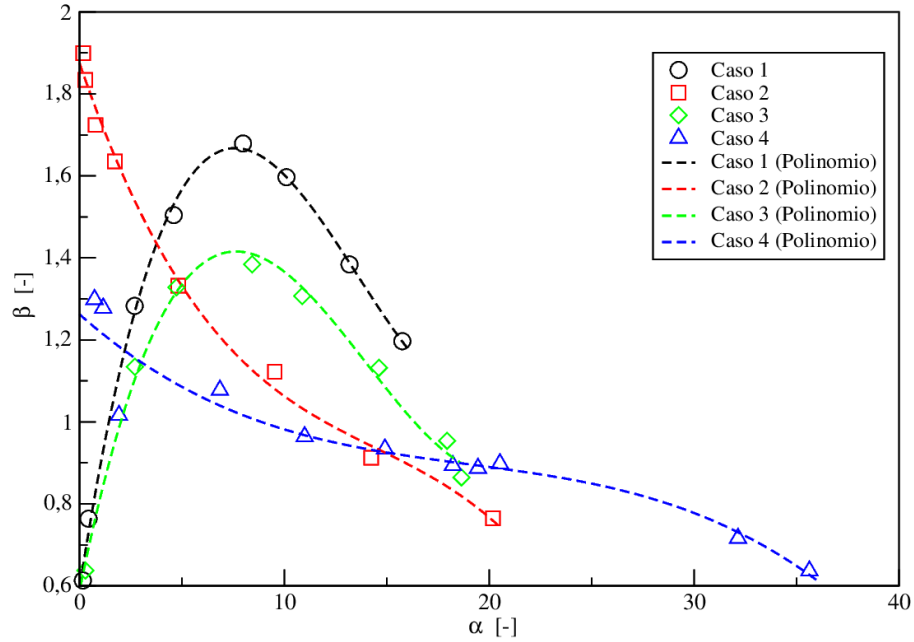


Figura 4.128: Curvas de β vs α para los cuatro casos.

Ambas comparaciones entre los casos 1 con 3, y 2 con 4 llegan a formas similares en cuanto a sus curvas.

Todas las curvas tienen su límite explícito por el lado derecho dado que el valor de α no puede ser mayor que el caso sin campo magnético.

Se muestra a continuación una tabla con las funciones obtenidas para β y los valores de R^2 correspondientes a la correlación entre las curvas y los datos.

Cuadro 4.1: Curvas de tendencia y su valor de R^2

	Polinomio	R^2
Caso 1	$7,3357 \cdot 10^{-4}\alpha^3 - 2,9793 \cdot 10^{-2}\alpha^2 + 0,32567\alpha + 0,5915$	0,9968
Caso 2	$-1,9371 \cdot 10^{-4}\alpha^3 + 8,3974 \cdot 10^{-3}\alpha^2 - 0,14589\alpha + 1,8756$	0,9946
Caso 3	$5,3232 \cdot 10^{-4}\alpha^3 - 2,2333 \cdot 10^{-2}\alpha^2 + 0,24815\alpha + 0,58587$	0,9968
Caso 4	$-3,4919 \cdot 10^{-5}\alpha^3 + 1,9932\alpha^3 - 0,044528\alpha + 1,2626$	0,9053

Especialmente en los casos de inyectores circulares los valores para las funciones presentan comportamientos muy similares. En los casos de inyectores rectangulares la relación entre ellos es menor.

4.8. Alineación de la vorticidad con el campo magnético (Re constante)

Los resultados obtenidos del parámetro de alineamiento λ en la figura 4.129 muestran una tendencia al aumento de la vorticidad en la dirección X con el aumento del campo magnético. Esto ocurre hasta el punto en que el chorro presenta una disipación tal que la pared por la que es inyectado comienza a afectar en su movimiento. Esto provoca una disminución de la vorticidad en la componente X y un aumento en las otras componentes, especialmente en la componente Y que es la que es modificada directamente por la pared.

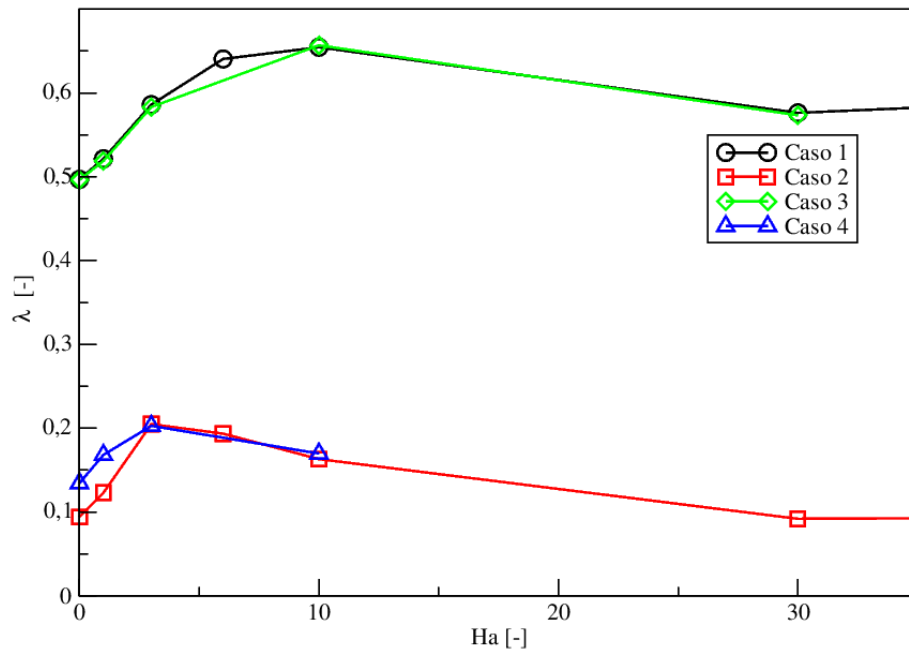


Figura 4.129: Parámetro de alineación λ bajo distintos números de Hartmann y $Re = 100$, en los distintos casos.

Los casos 1 y 3, para inyectores circulares, son prácticamente idénticos. Para los casos 2 y 4, con inyectores rectangulares, existe un mayor alineamiento con el campo magnético cuando el diámetro de la cámara es más grande, debido a que la pared afectando menos en el flujo, y por tanto, el campo magnético tiene más influencia. Comparando los casos para inyectores circulares y rectangulares, se puede notar que el parámetro λ es aproximadamente 5 veces en los casos 1 y 3 al compararlos con el 2 y 4. Esto se debe a la forma del inyector rectangular que genera una mayor vorticidad en la dirección Y dada su orientación.

4.9. Alineación de la vorticidad con el campo magnético (Parámetro de interacción constante)

Al utilizar siempre un parámetro de interacción constante se equilibran los efectos electromagnéticos con los términos convectivos, de esta manera, se consigue elimi-

nar los efectos viscosos que se producen al aumentar el número de Hartmann. De la figura 4.130 se observa que el parámetro λ consigue aumentar de manera prácticamente asintótica hacia el valor 1 donde toda la vorticidad está en la dirección del campo magnético.

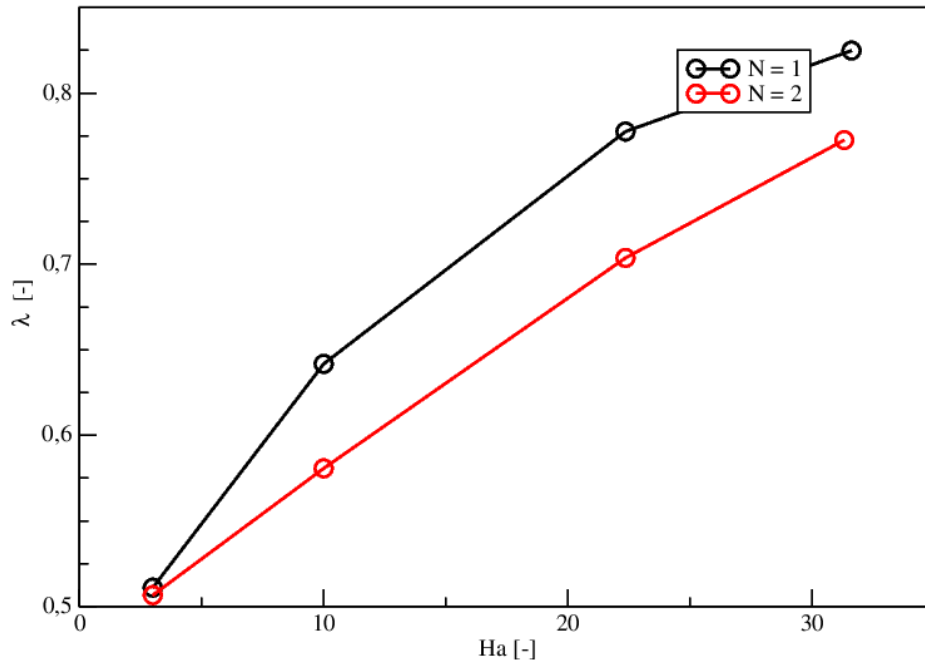


Figura 4.130: Parámetro de alineación λ bajo distintos números de Hartmann y parámetros de alineación para el caso 1

La disminución del parámetro de alineamiento de $N=2$ respecto de $N=1$ se explica por la longitud del chorro. Al tener una mayor longitud, la zona de vorticidad es mayor en $N=1$, y por consiguiente, lo es el parámetro λ .

Capítulo 5

Conclusiones

Los resultados obtenidos muestran los comportamientos esperados de acuerdo al fenómeno físico presentado por Davidson[3]. Se comprueba el comportamiento bidimensional al momento de aumentar el número de Hartmann, así como la disipación del chorro. La anisotropía del fenómeno se ve evidenciada incluso desde valores pequeños del número de Hartmann.

El modulo MHD del software Fluent es consistente con el fenómeno físico implicado, al menos para los casos bajos de Reynolds Magnético. La convergencia del problema se ve fuertemente afectada por el número de Hartmann; a medida que éste aumenta, el número de iteraciones requeridas para la convergencia aumenta prácticamente de forma exponencial.

Se obtienen correlaciones para la velocidad Z en el eje central ($x,y=0$). Se obtienen funciones para el largo medio del chorro. Se encuentra que la mejor forma para la obtención del exponente β de la distribución de Weibull corresponde a la correlación entre este parámetro y el largo medio del chorro α .

La vorticidad del flujo es analizada mediante el parámetro λ el que muestra una

tendencia del flujo a alinear su vorticidad con el campo magnético bajo ciertas restricciones, dada la alta disipación que genera el efecto Joule y la interacción importante que esto provoca con la pared del inyector. El análisis utilizando un parámetro de interacción constante comprueba lo recién dicho. El parámetro de alineación aumenta acercándose a 1 cuando toda la vorticidad está alineada con el campo magnético.

No se encontraron grandes diferencias al variar la relación entre diámetros, esto ocurre especialmente para altos números de Hartmann.

A pesar de que el fenómeno es bien modelado para números de Reynolds de bajo orden, esto no se cumple necesariamente en un régimen de flujo turbulento. Es necesario estudiar la influencia de los términos adicionales en las ecuaciones de turbulencia.

Bibliografía

- [1] Glatzmaier, Gary A.; Roberts, Paul H. (1995). A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*. 377 (6546): 203–209.
- [2] Yohei Sasakawa. 1996. YAMATO-1 World's First Superconducting Magnetohydrodynamic Propulsion Ship. The Ship and Ocean Foundation.
- [3] Davidson, P. A. 2001. An Introduction to Magnetohydrodynamics. Cambridge University Press.
- [4] Davidson, P. A. 1995 Magnetic damping of jets and vortices. *J. Fluid Mech.* 299, 153–186.
- [5] Fleisch, D. A. 2011 A student's guide to Maxwell's equations. Cambridge University Press, 1. edition, 11 printed edition.
- [6] Joel H. Ferziger y Milovan Peric. Computational Methods for Fluid Dynamics. 2002.
- [7] Andrea Prosperetti and Grétar Tryggvason. (2006). Computational Methods for Multiphase Flow. Cambridge: Cambridge University Press.
- [8] Sweby, P.K. (1984), High resolution schemes using flux-limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM J. Num. Anal.*, 21 (5): 995–1011.
- [9] Patankar, S. V. and Spalding, D.B., A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows.

- [10] Versteeg, H.K. and Malalasekera, W. (1995). An Introduction to Computational Fluid Dynamics the Finite Volume Method. Longman Scientific and Technical, England.
- [11] Turner, P. J. (2005). XMGRACE, Version 5.1. 19. Center for Coastal and Land-Margin Research, Oregon Graduate Institute of Science and Technology, Beaverton, OR.