



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA COMERCIAL

**OPTIMIZACIÓN Y PREDICCIÓN DE PORTAFOLIOS A TRAVES DE LA
TEORIA DE MARKOWITZ: UN ENFOQUE BASADO EN MODELOS ARIMA -
GARCH Y CÓPULAS MULTIVARIADAS**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO COMERCIAL

AUTOR

NICOLÁS ARMANDO ORTIZ MIRANDA

PROFESORA GUÍA

MACARENA GATICA SILVA

PROFESOR CORREFERENTE

NESTOR MUÑOZ URTUBIA

VIÑA DEL MAR, 24 DE JUNIO, 2022

RESUMEN EJECUTIVO

En el siguiente trabajo, se busca la optimización y predicción de portafolios de inversión usando la teoría del economista Henry Markowitz, aplicando diversas técnicas econométricas como lo son el modelo ARIMA, GARCH, EVT y Cópulas Multivariadas. Las acciones utilizadas se sacaron del mercado chileno (IPSA) que se componen de 30 acciones y utilizando 7 de estas para la optimización de dos portafolios (Mínima Varianza y Máximo de Sharpe). Al final se compara los portafolios aplicados con los diferentes modelos y ver cual modelo se ajusta mejor a la realidad.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	6
2. OBJETIVOS	9
<i>Objetivo general</i>	9
<i>Objetivos específicos</i>	9
3. MARCO TEÓRICO	10
3.1 <i>Mercado de capitales</i>	10
3.2 <i>Índice Bursátil Chileno</i>	12
3.3 <i>Introducción a la teoría de portafolios</i>	15
3.4 <i>Teoría de portafolios de Markowitz</i>	16
3.5 <i>Modelo de Media – Varianza.</i>	19
3.6 <i>Medición del riesgo en portafolios</i>	20
3.7 <i>Valor en Riesgo (VaR)</i>	22
3.8 <i>Valor en Riesgo Condicional (CVaR)</i>	23
3.9 <i>Jarque – Bera (JB)</i>	23
3.10 <i>Serie de Tiempo</i>	24
3.11 <i>Modelo ARIMA</i>	25
3.12 <i>Prueba de Dickey – Fuller Aumentada (ADF)</i>	26
3.13 <i>Prueba Phillips-Perrón (PP)</i>	27
3.14 <i>Prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)</i>	28
3.15 <i>Modelo GARCH</i>	29
3.16 <i>Teoría de Valores Extremos (EVT)</i>	30
3.16 <i>Cópulas Multivariadas</i>	31
4. DATOS	33
5. METODOLOGIA	35
5.1 <i>Análisis del IPSA</i>	35
5.2 <i>Portafolio caracterizado por rentabilidad positiva de sus activos</i>	38
5.3 <i>Estimación del modelo ARIMA</i>	45
5.4 <i>Estimación del modelo GARCH</i>	54
6. BENCHMARK	57
6.1 <i>Rentabilidad proyectada</i>	57
6.2 <i>Rentabilidad Acumulada</i>	58
6.3 <i>Métricas de evaluación de los modelos</i>	59

7. RESULTADOS	61
7.1 Benchmark modelo ARIMA portafolio mínima varianza.....	61
7.2 Benchmark modelo ARIMA portafolio de Sharpe	62
7.3 Benchmark Modelo GARCH Portafolio Mínima Varianza	62
7.4 Benchmark modelo GARCH portafolio de Sharpe	63
7.5 Benchmark Modelo ARIMA Multivariado portafolio de Mínimo Varianza	64
7.6 Benchmark Modelo ARIMA Multivariado portafolio de Máximo de Sharpe	65
7.7 Benchmark Modelo GARCH Multivariado portafolio de Mínimo Varianza.....	65
7.8 Benchmark Modelo GARCH Multivariado portafolio de Máximo de Sharpe	66
7.9 Rentabilidad Acumulada de los Portafolios	67
8. CONCLUSIONES	68
9. RECOMENDACIONES	70
10. REFERENCIAS	71

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Acciones de IPSA, Fuente: Elaboración Propia	14
Tabla 2 Resumen Estadístico, Fuente: Elaboración Propia	33
Tabla 3 Resumen Estadístico de Acciones Seleccionadas, Fuente: Elaboración Propia.....	38
Tabla 4 Portafolio de Mínima Varianza	41
Tabla 5 Portafolio de Máximo de Sharpe	43
Tabla 6 Prueba Dickey-Fuller Aumentada Portafolio de Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia	45
Tabla 7 Prueba Phillips-Perrón Portafolio de Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia	46
Tabla 8 Prueba KPSS Portafolio de Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia.....	46
Tabla 9 Prueba Dickey-Fuller Aumentada Portafolio de Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia	47
Tabla 10 Prueba Phillips-Perrón Portafolio de Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.....	48
Tabla 11 Prueba KPSS Portafolio de Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.....	48
Tabla 12 Resumen Estadístico Modelo ARIMA Para Portafolio de Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia.	50
Tabla 13 Resumen Estadístico Modelo ARIMA Para Portafolio de Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.	51
Tabla 14 Resumen Estadístico Modelo GARCH Para Portafolio de Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia.	54
Tabla 15 Resumen Estadístico Modelo GARCH Para Portafolio de Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.	55
Tabla 16 Resumen Estadístico de Portafolios, Fuente: Elaboración Propia.....	57
Tabla 17 Resumen Estadístico Modelo ARIMA Portafolio Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia.	61
Tabla 18 Resumen Estadístico Modelo ARIMA Portafolio Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.	62
Tabla 19 Resumen Estadístico Modelo GARCH Portafolio Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia.	62
Tabla 20 Resumen Estadístico Modelo GARCH Portafolio Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.	63
Tabla 21 Resumen Estadístico Modelo ARIMA-EVT-Cópulas Gaussiana Portafolio Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia.	64
Tabla 22 Resumen Estadístico Modelo ARIMA-EVT-Cópulas Gaussiana Portafolio Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.	65
Tabla 23 Resumen Estadístico Modelo GARCH-EVT-Cópulas Gaussiana Portafolio Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia.	65
Tabla 24 Resumen Estadístico Modelo GARCH-EVT-Cópulas Gaussiana Portafolio Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.	66

ÍNDICE DE TABLAS

Figura 1 Análisis del IPSA	36
Figura 2 Comparación entre Bono Banco Central a 10 años y IPSA.....	37
Figura 3 Matriz de Covarianza	39
Figura 4 Matriz de Correlación	40
Figura 5 Frontera Eficiente.....	44
Figura 6 Gráficos ACF y PACF Portafolio Mínima Varianza.....	49
Figura 7 Gráficos ACF y PACF Portafolio Máximo de Sharpe.....	50
Figura 8 Rentabilidad Acumulada y Volatilidad Condicional para Portafolios de Mínima Varianza y Máximo de Sharpe	58
Figura 9 Rentabilidad Acumulada de Portafolios de Mínima Varianza y Máximo de Sharpe para los meses de Enero a Septiembre del año 2024.....	67

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El mercado de capitales es fundamental para la asignación de los recursos o ahorro de la economía para los diferentes proyectos de inversión que se realizan en Chile, la gran mayoría de los chilenos son parte de este mercado de capitales, esto debido a que cualquier persona que haya cotizado alguna vez en una AFP, tiene ahorros los cuales se invierten en este mercado. Según la superintendencia de pensiones señala:

El valor total de los Fondos de Pensiones a diciembre de 2021 alcanzó USD 170.709 millones, registrando una disminución de 20,1% respecto a igual mes del año anterior y una disminución de 2,0% respecto a septiembre de 2021. La variación anual negativa se explica principalmente por los retiros de fondos de pensiones implementados en el contexto de la crisis durante 2021 y por el retorno negativo en rentabilidad de instrumentos de renta fija nacional, debido al alza de tasas de interés en bonos locales. (Superintendencia de Pensiones, INVERSIÓN DE LOS FONDOS DE PENSIONES, s.f.a).

Si bien, mucha gente quedó sin ahorros después de los retiros, existe una gran cantidad de personas que aún tienen sus ahorros en estos fondos de pensiones, pero en Chile las personas señalan que tienden a un ahorro de sus rentas, pero estas son para casos de emergencia en relación con los hombres y en relación con las mujeres para una casa propia, así lo señaló un estudio que realizó la Mutual de Seguros de Chile “Según los resultados, el 46% de los hombres consultados afirma que el principal motivo para ahorrar son las emergencias o imprevistos que pueden surgir, mientras que el 27% de las mujeres apunta a la casa propia.”. (Mutual de Seguros de Chile, 2019). Ahora estos datos son del año 2019, con lo cual producto de la pandemia los datos de esta encuesta se modificaron, y las personas que tendían a ahorrar ya no lo hacen tanto por temas de ingresos.

Ahora, a las personas nos encantaría predecir el futuro para poder tomar las mejores decisiones, pero en general no hay videntes los cuales los pueden hacer y respecto a lo anterior, se puede señalar, según el estudio realizado por la Mutual de Seguros de Chile, que “El lugar de preferencia arroja una de las cifras positivas, señalando que el 37% de los encuestados ahorran en compañías de seguros, seguido por el 20% que prefieren hacerlo en Banco y 14% en AFP.”. (Mutual de Seguros de Chile, 2019). Por lo cual, en general, las personas no tienden a ahorrarlos o invertirlos en el mercado de capital, puesto que no confían en este. Y esto tiene mucho que ver con el poco conocimiento financiero que tiene la gente en Chile.

Con lo cual cabe hacerse la siguiente pregunta, ¿Cuál es el conocimiento financiero de las personas en Chile?, según lo señalado por un artículo de La Tercera con relación a diferentes estudios realizados por la Universidad de Chile y Abif sostiene que:

Siguiendo la metodología de la Piac, al categorizar en “Niveles de Competencias” se observa que para los países de la Ode uno de cada 10 adultos (10,6 %) obtuvo un puntaje en el nivel 4 o 5 (máximo en conocimiento), mientras que Chile solo el 1,6 % de los adultos alcanzan estos niveles. (Villena, 2020).

Con lo mencionado anteriormente, se puede señalar que las personas en Chile no tienen una cultura de la educación financiera, con lo cual es difícil hacer que inviertan sus ahorros en instrumentos que no conocen. Con lo cual, es importante que las personas en Chile comiencen a tener un conocimiento del mercado de capitales:

La importancia de la existencia de los mercados de **capitales** dice relación con la contribución que este hace, a través del proceso de **ahorro e inversión**, al desarrollo de los países, particularmente en la generación de empleo y en la estabilidad económica de los mismos. (CMF, CMF CHILE, s.f.a).

Para esto, en esta tesis se construirá un portafolio de inversión a través de la teoría de Henry Markowitz de la optimización de portafolios, con una medida de riesgo VaR (Value at Risk) y proyectando con modelos estadísticos y econométricos, para que cualquier persona que la lea tenga las herramientas de poder crear su propio portafolio de inversión. Como dijo Harry Markowitz, "Un inversor que selecciona valores evaluando solo sus perspectivas individuales se está buscando problemas. El rendimiento potencial de la inversión individual debe evaluarse en conjunto con su impacto en el riesgo y el rendimiento de todo el portafolio" (Markowitz, Efficient diversification of investments, 1952). Esta perspectiva subraya la importancia de la diversificación y la interacción de los activos dentro de un portafolio, principios que se aplicarán a lo largo de esta investigación.

Dado todo lo descrito anteriormente, permitirá analizar el mercado y ver cuál será el mejor portafolio, para esto se comparará el portafolio de mínima varianza, portafolio de mercado (Sharpe) y el de máximo rendimiento, y a la vez poder compararlo con renta fija la cual es la inversión más segura y la que los chilenos más invertimos. Y con esto poder responder la siguiente pregunta ¿Es una buena alternativa invertir en el mercado de capitales?, ¿Vale la pena el riesgo de la volatilidad?

Este estudio será realizado con los precios históricos de las acciones chilenas, y comparado con renta fija en entidades chilenas.

2. OBJETIVOS

Objetivo general

Crear un portafolio de inversión utilizando acciones del mercado bursátil chileno, y analizar portafolios de mínima varianza, portafolio de sharpe, buscando así el rendimiento – riesgo para cada uno de estos, y comparándolo con modelos de pronósticos.

Objetivos específicos

Recopilar información de las diferentes acciones dentro del mercado bursátil chileno, para obtener precios históricos.

Explicar los modelos a utilizar en este trabajo como lo son teorema de portafolio de Markowitz, teorema de value at Risk (VaR), teorema de Jarque Bera, modelo de media-varianza de Markowitz y simulación de Monte Carlo.

Examinar el comportamiento del riesgo-retorno en la optimización de los portafolios de inversión.

Desarrollar un modelo predictivo usando teoremas de ARIMA y GARCH para identificar la estructura de volatilidad de cada portafolio.

Optimizando portafolios de mínima varianza y máximo de Sharpe usando la teoría de Markowitz con proyecciones de retorno a partir de modelos predictivos.

Comparar el desempeño predictivo de los diferentes enfoques a utilizar, usando métricas de error MAPE, RMSE, sMAPE para evaluar la precisión del modelo.

Interpretar pruebas de backtesting para los portafolios optimizados bajo diferentes estrategias, evaluando su desempeño histórico y simulando escenarios futuros con el objetivo de validar la robustez de las metodologías implementadas.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 Mercado de capitales

Existen 12 tipos de mercado donde la gente puede invertir, algunos de ellos son: mercado monetario, mercado de divisas, mercado de derivados, mercado de Commodities, mercado de seguros, mercado bancario, mercado hipotecarios, entre otros. Pero el que tocaremos en esta ocasión es el mercado de capitales, este es un mercado fundamental en el sistema financiero, ya que este mercado permite a las empresas y gobiernos obtengan financiamiento a largo plazo para sus inversiones y proyectos de crecimiento, y por otro lado a los inversionistas la oportunidad de obtener retornos.

Este mercado se divide en lo que es renta variable y renta fija:

3.1.1 Renta variable

En este mercado se negocia lo que son acciones de empresas, que no es más que la representación de una parte del capital de una sociedad, los inversionistas compran acciones y se vuelven propietarios de la empresa hasta que venden sus derechos.

Las acciones se caracterizan por dos tipos, la primera son las acciones ordinarias las cuales ofrecen derecho a voto en la compañía y una participación de las ganancias de la empresa a través de dividendos, y la segunda por acciones preferentes que ofrecen una prioridad en el pago de los dividendos en comparación a las acciones ordinarias y en la liquidez en caso de quiebra, pero en lo general no poseen derecho a voto.

Existe un mercado primario y secundario en este mundo, en el mercado primario es donde las empresas emiten nuevas acciones para recaudar capital

y esto se realiza a través de ofertas públicas iniciales. En cambio, el mercado secundario es donde se negocian las acciones ya emitidas entre los inversionistas y especuladores, sin este mercado no podría existir el mercado de renta variable.

3.1.2 Renta fija

En este mercado se negocian instrumentos de deuda, esta deuda la puede emitir gobiernos, empresas, y otras entidades financieras. Las personas que invierten en este tipo de instrumentos son los que prestan dinero al emisor de esta deuda a cambio de pagos de intereses periódicos y la devolución del dinero a la fecha de vencimiento.

Se caracterizan por 3 tipos de instrumentos, bonos gubernamentales los cuales son emitidos por gobiernos, ejemplo los bonos del tesoro en Estados Unidos o los bonos del Banco Central de Chile (BCU – BCP). También tenemos los bonos corporativos, los cuales son emitidos por empresas para financiar proyectos u operaciones, y por último bonos municipales que son emitidos por municipios para financiar proyectos públicos.

En este mercado también existe el mercado primario y secundario, y al igual que en el mundo de la renta variable en el mercado primario se emiten nuevos bonos a los inversionistas mientras que en mercado secundario se venden-compran bonos ya emitidos.

El mercado de capitales es muy importante en varios aspectos, el premio nobel de economía Robert C. Merton decía “Los mercados de capitales son un componente crítico del sistema financiero que contribuye al crecimiento económico y la eficiencia al canalizar el ahorro hacia inversiones productivas.” (Merton, 1995), en otras palabras es muy importante

para la financiación de las empresas y gobiernos a largo plazo para proyectos, expansión e infraestructura, también ofrece diversificación y rentabilidades más altas a inversionistas en comparación con los instrumentos de corto plazo. También, proporciona una mayor liquidez y eficiencia en la asignación de los recursos que permiten una economía más estable a la hora de asignar recurso.

Y, por último, las bolsas de valores y otros mercados de capitales están regulados para garantizar la transparencia, equidad y protección de los inversionistas. En Chile la Comisión para el Mercado Financiero (CMF) es la encargada de regular y supervisar el mercado chileno.

3.2 Índice Bursátil Chileno

El Índice de Precios Selectivo de Acciones conocido como IPSA es el principal índice bursátil de Chile, el cual representa a las 30 empresas chilenas con la mayor capacitación que cotizan en la Bolsa de Comercio de Santiago. Este índice es un indicador clave para poder medir el rendimiento general del mercado accionario chileno.

El IPSA se calcula multiplicando su capitalización bursátil por el free float que es el porcentaje de las acciones de una empresa que están disponible para ser compradas y vendidas libremente en el mercado de valores, excluyendo las acciones que están en manos de los accionistas mayoritarios, directivos, o restricciones legales. La suma de todos estos valores se dividirá por el valor de cada acción, en el siguiente ejemplo ficticio quedará más claro:

Empresas	Capitalización Bursátil	Free Float (%)
A	10.000	90%
B	8.000	70%
C	18.000	50%

La capacitación ajustada por free float:

$$\text{Empresa A} = 10.000 * 90\% = 9.000$$

$$\text{Empresa B} = 8.000 * 70\% = 5.600$$

$$\text{Empresa C} = 18.000 * 50\% = 9.000$$

La suma de las capacitaciones ajustadas:

$$\text{Total} = 9.000 + 5.600 + 9.000 = 23.600$$

El peso de cada empresa en un mercado bursátil:

$$\text{Empresa A} = 9.000 / 23.600 = 38,135\%$$

$$\text{Empresa B} = 5.600 / 23.600 = 23,73\%$$

$$\text{Empresa C} = 9.000 / 23.600 = 38,135\%$$

Esto llevado a el IPSA se debe hacer con las 30 empresas que corresponden al índice, las cuales poseen diferentes capitalizaciones bursátiles. Las 30 empresas chilenas que componen el IPSA 2024 son las siguientes:

Tabla 1

Acciones de IPSA, Fuente: Elaboración Propia.

NEMOTÉCNICO	RAZÓN SOCIAL	INDUSTRIA
SQM-B	SOC QUÍMICA MINERA DE CHILE S.A. SERIE B	Minería
CHILE	BANCO DE CHILE	Bancaria y Financiera
BSANTANDER	BANCO SANTANDER CHILE	Bancaria y Financiera
COPEC	EMPRESAS COPEC S.A.	Energía
ENELAM	ENEL AMERICAS S.A.	Servicios
CENCOSUD	CENCOSUD S.A.	Retail
CMPC	EMPRESAS CMPC S.A.	Materiales
BCI	BANCO DE CRÉDITO E INVERSIONES	Bancaria y Financiera
FALABELLA	SACI FALABELLA	Retail
ENELCHILE	ENEL CHILE S.A.	Servicios
PARAUCO	PARQUE ARAUCO S.A.	Inmobiliario
COLBUN	COLBUN S.A.	Energía
CCU	COMPAÑÍA CERVECERA UNIDAS S.A.	Bebestibles
ANDINA-B	EMBOTELLADORA ANDINA S.A. SERIE B	Embotelladora
VAPORES	COMPAÑÍA SUDAMERICANA DE VAPORES S.A.	Naviera
AGUAS-A	AGUAS ANDINAS S.A. SERIE A	Sanitaria/Agua
QUINENCO	QUINENCO S.A.	Holding
CENCOSHOPP	CENCOSUD SHOPPING S.A.	Inmobiliario
LTM	LATAM AIRLINES GROUP S.A.	Aéreo
CONCHATORO	VINA CONCHA Y TORO S.A.	Vitivinícola
ENTEL	EMP. NACIONAL DE TELECOMUNICACIONES S.A.	Telecomunicaciones
CAP	CAP S.A.	Minero-Siderúrgico
ORO BLANCO	SOCIEDAD DE INVERSIONES ORO BLANCO S.A.	Inversiones
MALLPLAZA	PLAZA S.A.	Retail
ECL	ENGIE ENERGIA CHILE S.A.	Energía
IAM	INVERSIONES AGUAS METROPOLITANAS S.A.	Sanitaria/Agua
SMU	SMU S.A.	Retail
ITAUCORP	BANCO ITAU CHILE	Bancaria y Financiera
SONDA	SONDA S.A.	Tecnología
RIPLEY	RIPLEY CORP S.A.	Retail

Las empresas del IPSA se van modificando cada año según la capacitación del mercado, y complementan las 30 empresas con mayor capacitación que cotizan en Chile.

3.3 Introducción a la teoría de portafolios

La teoría de portafolios se basa en poder maximizar los retornos de las inversiones y a la vez poder disminuir los riesgos. En 1952 el economista Henry Markowitz publica su artículo “Portfolio Selection” el cual introdujo el concepto de diversificación efectiva, que se basa en combinar diferentes activos, pero sin sacrificar el retorno esperado.

Esto revolucionó el mundo financiero, que antes de este modelo las inversiones se hacían a través la intuición del inversionista. Por este motivo Markowitz propone que el riesgo del portafolio no debe medirse por la suma de los riesgos individuales de los activos, si no que los riesgos se interrelacionan entre sí, a través de una covarianza.

La gestión de portafolios es una práctica actual de las finanzas modernas con el objetivo de diversificar los riesgos y maximizar los rendimientos, además incluye una correlación de activos que se mueven en un rango entre $[-1,1]$ donde entre más cercano a -1 significa que menos correlacionados están, donde se denomina correlación imperfecta, y más cercano a 1 significa que tienen una fuerte correlación, donde se denomina correlación perfecta.

En el mundo real, la teoría de portafolios es fundamental para poder crear fondos de inversión, las empresas financieras utilizan estos tipos de principios para poder gestionar y armar carteras que logren un equilibrio óptimo entre los riesgos y retornos.

3.4 Teoría de portafolios de Markowitz

Esta teoría como antes se mencionó se basa en la diversificación de los activos, relacionados entre sí, para maximizar el retorno y minimizar el riesgo. Para poder formar un portafolio se requiere hacer ciertos cálculos:

3.4.1 Retorno Esperado

El retorno esperado en un portafolio mide la media ponderada los activos que incluyen al portafolio, la cual se calcula de la siguiente forma:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i)$$

$E(R_p)$: Retorno esperado del portafolio.

w_i : Peso del activo i en el portafolio (proporción del portafolio invertido en el activo i).

$E(R_i)$: Retorno esperado del activo i .

3.4.2 Riesgo (Varianza y Desviación Estándar)

La varianza del portafolio mide la variabilidad de los retornos del portafolio, y se calcula con la covarianza de los activos, como se muestra a continuación:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

σ_p^2 = Varianza del portafolio.

w_i, w_j = Pesos de los activos i y j en el portafolio.

σ_{ij} = Covarianza entre los activos i y j .

La desviación estándar representa el riesgo total del portafolio, y se calcula como la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$$

3.4.3 Covarianza

La covarianza es una medida estadística que indica la dirección y fuerza que se da entre dos activos, con lo cual una covarianza positiva indica que ambos activos se mueven en la misma dirección, mientras que una covarianza negativa indica que los activos se mueven en direcciones opuestas. En estos casos se busca minimizar lo que más posible la correlación para poder diversificar de mejor manera los portafolios. La covarianza se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (R_{ik} - E(R_i))(R_{jk} - E(R_j))$$

σ_{ij} = Covarianza entre los activos i y j .

R_{ik} , R_{jk} = Rendimientos de los activos i y j en el periodo k .

$E(R_i)$, $E(R_j)$ = Retornos esperados de los activos i y j .

N = Número de observaciones.

3.4.4 Correlación

La correlación también es una medida estadística que cuantifica la relación entre dos activos, esta correlación se mueve entre -1 y 1, donde llamaremos correlación perfecta cuando es uno, e indica que los activos se mueven en la misma dirección y con la misma magnitud, y llamaremos correlación imperfecta cuando es -1, la cual indica que los activos se mueven en dirección contraria y con la misma magnitud. En el caso de que esta sea 0, indica que

no existe una relación lineal entre los movimientos de los activos, el cálculo de la correlación es la siguiente:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

ρ_{ij} = Coeficiente de correlación entre los activos i y j .

σ_{ij} = Covarianza entre los activos i y j .

σ_i, σ_j = Desviación estándar de los activos i y j .

3.4.5 Ratio de Sharpe

El ratio de Sharpe es una métrica desarrollada por William F. Sharpe y se utiliza para evaluar el rendimiento ajustado al riesgo de un portafolio, dicho de otra manera es la rentabilidad adicional que se obtiene por cada unidad de riesgo asumido. Al buscar el máximo de sharpe, estamos señalando que buscamos el mayor rendimiento optimizando el riesgo. Su cálculo es el siguiente:

$$S = \frac{E(E_p) - R_f}{\sigma_p}$$

S = Ratio de Sharpe

$E(R_p)$ = Retorno esperado del portafolio

R_f = Tasa de retorno libre de riesgo.

σ_p = Desviación estándar del portafolio.

3.4.6 Ecuación cuadrática de optimización

Esta ecuación, es un instrumento matemático que se utiliza en la teoría de portafolios para poder encontrar la combinación optima de los activos para minimizar el riesgo total del portafolio. Esta ecuación se basa en la

minimización de la varianza del portafolio, y se calcula de la siguiente manera:

$$\min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

σ_p^2 = Varianza del portafolio, que se busca minimizar.

w_i, w_j = Pesos de los activos i y j en el portafolio.

σ_{ij} = Covarianza entre los activos i y j .

Esto está sujeto a 2 condiciones:

1. La suma de los pesos debe ser igual a 1, es decir, 100% del capital invertido.
2. El retorno esperando del portafolio debe alcanzar un valor objetivo.

3.5 Modelo de Media – Varianza.

El modelo describe como los inversionistas pueden construir portafolios que puedan optimizar el equilibrio de riesgo – retorno, con lo cual se mide a través de una media que representa el retorno esperado y la varianza mide la dispersión entre esos retornos, que lo interpretamos como el riesgo del portafolio.

El modelo se basa en los siguientes supuestos, se asume que los inversionistas son racionales y adversos al riesgo, lo que quiere decir es que buscan un menor riesgo para un retorno esperado dado, además el modelo supone que los rendimientos de los activos siguen una distribución normal. Otro supuesto es que los inversionistas toman decisiones únicamente basados en el retorno esperado y la varianza de sus portafolios, ignorando la liquidez y las restricciones regulatorias.

En el modelo de Media – Varianza la frontera eficiente es un concepto principal que representa el conjunto de portafolios óptimos que ofrecen el máximo retorno para un nivel de riesgo dado. Los portafolios que se encuentran en la frontera son considerados eficientes, y cualquier portafolio que se encuentre por debajo de esta frontera es subóptimo ya que se existe un portafolio que posee un mayor rendimiento a ese riesgo asignado.

Para construir la frontera eficiente se resuelve el problema de optimización cuadrática donde se minimiza la varianza del portafolio sujeto a las restricciones del retorno esperado, estos cálculos generan una curva que muestran la relación entre el retorno y el riesgo para cada uno de los portafolios óptimos. Una vez construida esta frontera, los inversionistas pueden tomar cualquier de estos portafolios óptimos medido a su nivel de riesgo.

Este modelo de Media – Varianza tiene limitaciones, ya que se basa en suposiciones simplificadas, como lo son la normalización de los retornos y la aversión constante del riesgo de los inversionistas. En la realidad, los retornos de los activos no siguen una distribución normal, y poseen colas gruesas y asimétricas que este modelo no absorbe. Además, el modelo asume que las correlaciones de los activos son constantes en el tiempo, lo cual no siempre es así, ya que los mercados financieros son dinámicos y modifican las correlaciones de los activos y estas afectan en la construcción de los portafolios y en la creación de la frontera eficiente.

3.6 Medición del riesgo en portafolios

El riesgo en los portafolios es la incertidumbre que se asocia a los retornos esperados, la podemos definir como la probabilidad que los rendimientos sean diferentes o inferiores a lo esperado. El riesgo se puede medir de dos maneras:

- **Riesgo Sistemático:** Este riesgo es conocido como el riesgo de mercado, el cual no se puede eliminar a través de la diversificación. Afecta a todo el mercado en su conjunto, ya que es provocado por cambios en las tasas de interés, inflación, recesiones económicas, guerras, entre otras.
- **Riesgo no Sistemático:** Este riesgo es el cual afecta a una empresa o sector en específico y no al mercado en general, es un riesgo que se mide a través de la gestión empresarial, la competencia, los productos, decisiones estratégicas, flujos de caja. A diferencia de riesgo sistemático, este se puede reducir o eliminar a través de la diversificación, al tener un portafolio con la mayor cantidad de activos con correlaciones negativas para poder compensar fluctuaciones negativas de algunos activos.

Para medir el riesgo en los mercados se utilizan varias métricas y herramientas matemáticas, una de las medidas más comunes para medir este riesgo es la desviación estándar, ya que mide la volatilidad de los retornos del portafolio en cuestión, reflejando la variabilidad en comparación con el retorno esperado. Dentro de este mismo análisis al elevar al cuadrado la desviación estándar se obtiene la varianza, la cual permite una visión más detallada de la dispersión de los retornos.

La covarianza y correlación en este modelo es esencial para entender como los activos se relacionan entre sí, la primera mide como se mueven los rendimientos de los activos y la segunda proporciona una medida estandarizada de la relación de los activos. Una medida clave para medir y estimar la máxima pérdida esperada del portafolio midiéndolo en una línea temporal específica y con un nivel de confianza determinada, la más común es al 95%

de confianza. Este enfoque permite a los inversionistas evaluar el riesgo de pérdida bajo condiciones de mercado normales.

3.7 Valor en Riesgo (VaR)

Este valor es una métrica que se utiliza en la gestión de riesgo financiero para poder cuantificar la máxima pérdida esperada de un portafolio. Para llevarlo a un ejemplo un VaR mensual de 5% con una confianza del 95% significa que existe un 95% de probabilidad de perder un 5 por ciento o menos. Existen varios métodos para poder calcular el VaR:

- VaR Paramétrico (Varianza – Covarianza): Este método consta en definir que los datos siguen una distribución normal, se calcula usando la media y desviación estándar. Si bien es la forma más sencilla de realizarlo, tiene limitaciones ya que los mercados no siguen en lo general una distribución normal.
- VaR no Paramétrico (Datos Históricos): En este método no se asume ninguna distribución en específico, si no que se utilizan los datos históricos para poder calcular las potenciales pérdidas. Tiene pros y contras, el mayor pro es que refleja de mejor manera los comportamientos de los mercados, aunque uno de sus contras es que si los datos no son lo suficientemente representativos el cálculo será muy impreciso.
- VaR mediante simulación de Montecarlo: Este método utiliza simulaciones de posibles resultados de retornos esperados, con lo cual incorpora diferentes distribuciones de retornos y de correlaciones entre los diferentes activos, y con estos calcular el VaR.

Una de las funciones donde el VaR es útil, es poder saber cuánto será la máxima pérdida y asegurar tener la liquidez para cubrir las pérdidas. Los datos a usar serán de un

nivel de confianza del 90 por ciento, 95 por ciento y 99 por ciento para poder analizar los diferentes escenarios.

3.8 Valor en Riesgo Condicional (CVaR)

Es un cálculo que mide la pérdida esperada en caso de que ocurra un caso extremo que exceda el Valor en Riesgo (VaR), se define como el valor promedio de las pérdidas que exceden el VaR para un nivel de confianza determinado. Matemáticamente se calcula:

$$CVaR_{\alpha} = E[(L|L \geq VaR_{\alpha})]$$

L = Pérdida del portafolio

VaR $_{\alpha}$ = Valor en riesgo al nivel de confianza α

α = Nivel de confianza

E = Representa valor esperado

El CVaR proporciona una visión más completa de los riesgos de cola, y es particularmente útil para distribuciones asimétricas o no normales, que posean colas más pesadas, como las que se observan en los activos financieros

3.9 Jarque – Bera (JB)

La prueba de Jarque – Bera es una prueba estadística que evalúa una si una serie de datos se distribuye normalmente, basado en sus valores de asimetría y curtosis.

- Asimetría: Es el grado de desviación de la simetría de una distribución de datos con respecto a su media, señala si los datos se encuentran a la izquierda o derecha de su media. Su fórmula se define como:

$$Asimetria = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$$

n = Número de observaciones

x_i = Cada valor de la serie

$\bar{x}$ = Media de la serie

s = Desviación estándar de la serie

- Curtosis: Mide la altura y anchura de las colas de una distribución, en otras palabras, la concentración de los valores en las colas en relación con la media. Una curtosis elevada indica una distribución tiene colas más gruesas, o más valores extremos, mientras que una curtosis baja indica menos valores extremos. La fórmula es:

$$Curtosis = \frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

Con los cálculos de ambos se puede calcular JB, con la siguiente formula:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right)$$

n = Número de observaciones

S = Asimetría de la serie

K = Curtosis de la serie

El valor de JB se distribuye aproximadamente como una chi-cuadrado (X^2) con dos grados de libertad. Si el valor de JB es mayor que el valor crítico de X^2 , se rechaza la hipótesis nula de normalidad (Jarque, 1987)

3.10 Serie de Tiempo

Una serie de tiempo es una sucesión de datos recolectados y registrados en intervalos de tiempo regulares. El objetivo de utilizar estas series es poder analizar, y predecir

comportamientos futuros, en el contexto financiero, sirve para ver la evolución de una variable como precios de acciones, rendimientos de portafolios o índices a lo largo del tiempo. El análisis de series de tiempo tiene como objetivo identificar patrones (tendencias, estacionalidad, ciclos) y estas se deben tomar en periodos sucesivos como horas, días, meses o años.

3.11 Modelo ARIMA

El modelo ARIMA, por sus siglas en inglés, AutoRegressive Integrated Moving Average es un instrumento estadístico que sirve para modelar y predecir series temporales de tiempo en el corto y largo plazo. El modelo se basa en la combinación de tres componentes fundamentales:

- AR (Autorregresivo): La parte del modelo AR implica que los valores de la serie en el momento actual (Y_t) depende linealmente de los valores pasados (Y_{t-1} , Y_{t-2} Y_{t-p}). La cantidad de valores pasados se define con un parámetro p , el modelo tiene la siguiente forma:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

c = Terminio constante.

ϕ_i = Coeficientes autorregresivos.

Y_{t-1} = Valores rezagados de la serie.

ϵ_t = Error blanco en el momento t .

- I (Integrado): Esta parte hace referencia a la diferenciación de la serie para eliminar tendencias y hacerla estacionaria. Las series estacionarias es aquellas cuya media y

varianza son constantes a lo largo del tiempo y no tienen patrones de tendencias, se define con la letra d, y se define como:

$$\Delta^d Y_t = Y_t - Y_{t-d}$$

- MA (Media Móvil): La componente de promedio móvil modela la relación entre el valor actual de la serie y los errores de predicción pasados ($\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots, \epsilon_{t-q}$). El término de promedio móvil de orden q se representa como:

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

Donde:

μ = Media de la serie.

θ_i = Coeficientes de los términos de promedio móvil.

ϵ_{t-i} = Errores de predicción anteriores.

La fórmula completa del modelo ARIMA (p, d, q) es:

$$\Delta^d Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t$$

3.12 Prueba de Dickey – Fuller Aumentada (ADF)

La prueba ADF es una prueba estadística que es utilizada para saber si una serie de tiempo es estacionaria, esta es una extensión de la prueba de Dickey – Fuller, con lo cual incorpora términos adicionales para capturar la estructura temporal de la serie y corregir la autocorrección. Su expresión matemática es:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \alpha Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \gamma_k \Delta Y_{t-k} + \epsilon_t$$

ΔY_t = Diferencia de la serie.

β_0 = Término constante.

β_1 = Coeficiente de la tendencia temporal.

α = Parámetro a probar.

Y_{t-1} = Valor rezagado de la serie.

γ_i = Coeficientes de las diferencias rezagadas.

k = Número de rezagos.

ϵ_t = Término de error blanco.

La hipótesis nula (H_0) es que si la serie tiene raíz unitaria no es estacionaria, mientras que la alternativa (H_1) me indica que la serie si es estacionaria.

3.13 Prueba Phillips-Perrón (PP)

La prueba PP es una prueba estadística para evaluar la estacionalidad de una serie de tiempo, es similar a Dickey – Fuller aumentada, pero con una metodología diferente para poder corregir la autocorrelación y heterocedasticidad. La expresión matemática es:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \alpha Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}.$$

β_0 = Término constante.

β_1 = Coeficiente de la tendencia.

α = Parámetro a probar.

Y_{t-1} = Valor rezagado de la serie.

ϵ_t = Término de error.

A diferencia de la prueba ADF, la prueba Phillips-Perrón ajusta el error estándar de la regresión en lugar de añadir términos autorregresivos. La hipótesis nula (H0) es que si la serie tiene raíz unitaria no es estacionaria, mientras que la alternativa (H1) me indica que la serie si es estacionaria.

3.14 Prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)

La prueba KPSS es un complemento a las pruebas ADF y PP, pero a diferencia de estas, se evalúa la hipótesis nula (H0) si es estacionaria, frente a la alternativa (H1) que tiene raíz unitaria. La expresión matemática es:

$$Y_t = \mu_t + \eta_t + \epsilon_t$$

μ_t = Media constante.

η_t = Proceso de caminata aleatoria.

ϵ_t = Término de error blanco.

La estadística de la prueba se define como:

$$\eta^2 = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T S_t^2$$

$$S_t = \sum_{j=1}^t \epsilon_j$$

T = Tamaño de la muestra.

3.15 Modelo GARCH

El modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) es un modelo que expande el modelo ARCH que es una estructura para modelar la volatilidad de las series de tiempo financieras. Este modelo captura heterocedasticidad condicional, en otras palabras, cambios en la volatilidad en el tiempo, utilizando términos autorregresivos (AR) para medir la varianza y medias móviles (MA) para los errores. El modelo GARCH (p, q) tiene la siguiente estructura:

Media:

$$Y_t = \mu + \epsilon_t$$

Varianza Condicional:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

σ_t^2 = Varianza condicional en el momento t .

α_0 = Término constante.

α_i = Coeficientes de los términos de ARCH.

β_j = Coeficientes de los términos de GARCH.

p = Número de términos autorregresivos de la varianza (GARCH).

q = Número de términos de promedios móviles de la varianza (ARCH).

Para que el modelo sea estacionario, o en otras palabras la varianza condicional converge en un valor estable, se debe cumplir la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$$

Si esta suma es cercana a 1, indica que el modelo posee una alta persistencia en la volatilidad y periodos prolongados de alta volatilidad.

3.16 Teoría de Valores Extremos (EVT)

La teoría EVT se utiliza para poder modelar y analizar el comportamiento de las colas de distribución, su objetivo principal es estimar la probabilidad de eventos extremos, es decir valores que son mucho más alto o bajo que los observados en condiciones normales. El EVT es particularmente importante en las finanzas corporativas porque la distribución de los retornos suele tener colas más gruesas que una distribución normal. El EVT se basa en dos enfoques principales para modelar los valores extremos:

- Distribución Generalizada de Valores Extremos (GEV): La GEV modela el valor máximo o mínimo de una serie de observaciones y tienen tres formas dependiendo del parámetro ξ , esta se unifica en una sola formula que es la siguiente:

$$G(z) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z-\mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, \text{ para } 1 + \xi \left(\frac{z-\mu}{\sigma} \right) > 0$$

μ = Parámetro de la locación.

$\sigma > 0$ = Parámetro de la escala.

ξ = Parametro de la forma que se define la cola en la distribución

- $\xi = 0$: Distribución de Gumbel (colas ligeras).
- $\xi > 0$: Distribución de Fréchet (colas pesadas).
- $\xi < 0$: Distribución de Weibull (colas limitadas).

- **Distribución Generalizada de Pareto (GPD):** La GPD se utiliza para modelar los excesos sobre el umbral específico u y es adecuada para capturar las colas de la distribución. La función de distribución acumulativa de GPD está dada por:

$$F(y) = 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \text{ para } y \geq 0; \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right) > 0$$

$y = x - u$ son los excesos de x sobre el umbral u .

$\beta > 0$ = Parámetro de escala.

ξ = Parametro de la forma que se define la cola en la distribución

- $\xi = 0$: Colas ligeras.
- $\xi > 0$: Colas pesadas.
- $\xi < 0$: Colas limitadas.

Para este trabajo se utilizará un enfoque de Distribución Generalizada de Pareto en un percentil 95, para así modelar los excesos de los retornos por encima del umbral.

3.16 Cópulas Multivariadas

Las cópulas son funciones que permiten modelar la dependencia entre variables aleatorias, la ventaja que tiene las cópulas es que permiten separar la estructura de la dependencia de las distribuciones marginales de las variables. Lo principal es que proporciona gran flexibilidad para modelar relaciones complejas y no lineales.

Una cópula es una función que junta las distribuciones marginales $X_1, X_2, \dots, X_n$ para construir la distribución conjunta $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Si $F_1, F_2, \dots, F_n$ son las distribuciones marginales de $X_1, X_2, \dots, X_n$, entonces la cópula $C: [0,1] \rightarrow [0,1]$ satisface:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = C(F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n))$$

Existen varios tipos de cópulas, pero para este trabajo solo se utilizará la Gaussiana, la cual se basa en la distribución normal multivariada y está determinada por una matriz de correlación Σ . La cópula para n dimensiones es:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

Φ^{-1} = Función inversa de la distribución normal estándar.

Φ_{Σ} = Función de distribución conjunta de una distribución normal multivariada con correlación Σ .

4. DATOS

Los datos con los que se trabaja en este estudio fueron sacados de Yahoo Finance, Investing. Se tomaron las 7 acciones con una media positiva para realizar un portafolio de acciones, en el siguiente grafico se muestran datos de las acciones del IPSA.

Tabla 2

Resumen Estadístico, Fuente: Elaboración Propia

Acciones	N° Datos	Media	Desv. Estandar	Asimetría	Curtosis	Jarque- Bera
AGUAS-A.SN	1120	-8,21%	0,0231	0,2529	11,996	3789
ANDINA-B.SN	1120	-2,43%	0,0198	-0,9593	12,004	3955
BCI.SN	1120	-5,22%	0,0210	-0,2383	3,151	12
BSANTANDER.SN	1120	-3,77%	0,0206	-0,7354	7,871	1208
CAP.SN	1120	-2,03%	0,0302	-1,0689	14,246	6116
CCU.SN	1120	-11,80%	0,0203	0,0649	1,642	87
CENCOSHOPP.SN	1120	-2,64%	0,0271	-0,4449	6,868	735
CENCOSUD.SN	1120	4,58%	0,0239	-0,7172	10,022	2397
CHILE.SN	1120	0,86%	0,0198	-0,2922	12,329	4077
CMPC.SN	1120	-1,66%	0,0242	-0,1328	2,389	21
COLBUN.SN	1120	0,05%	0,0281	-4,8049	83,174	304279
CONCHATORO.SN	1120	-7,22%	0,0187	0,2979	10,224	2452
COPEC.SN	1120	-2,82%	0,0229	0,0658	2,451	15
ECL.SN	1120	-6,66%	0,0249	0,0784	11,245	3174
ENELAM.SN	1120	-4,54%	0,0196	0,0491	12,138	3897
ENELCHILE.SN	1120	-2,79%	0,0229	-0,0731	3,205	3
ENTEL.SN	1120	-16,97%	0,0260	-1,3060	16,713	9094
FALABELLA.SN	1120	-15,60%	0,0242	-0,3022	9,542	2014
IAM.SN	1120	-8,22%	0,0227	-0,0394	6,762	661
ITAUCL.SN	1120	-24,63%	0,0237	-0,6418	14,929	6717
LTM.SN	1120	-81,41%	0,0999	0,8622	81,897	290629
MALLPLAZA.SN	1120	-5,75%	0,0257	-0,1193	8,289	1308
ORO-BLANCO.SN	1120	16,65%	0,0295	-0,7175	11,855	3755
PARAUCO.SN	1120	-6,31%	0,0253	-0,9516	14,179	6001
QUINENCO.SN	1120	10,56%	0,0209	-0,8116	13,920	5688
RIPLEY.SN	1120	-25,41%	0,0261	-0,2277	6,976	748
SMU.SN	1120	-2,40%	0,0227	0,6005	11,894	3759
SONDA.SN	1120	-20,31%	0,0230	-0,0420	5,628	323
SQM-B.SN	1120	21,24%	0,0303	-0,3113	3,241	21
VAPORES.SN	1120	19,49%	0,0290	-3,5296	47,442	94498

Lo que podemos observar en los datos es que solo 8 acciones tienen asimetría positiva, lo que implica que estas tienen mayor frecuencia de rendimientos positivos extremos, por lo tanto, las demás acciones muestran asimetrías negativas indicando una mayor probabilidad de pérdidas grandes y ocasionales, además de que la mayoría de las acciones tienen una curtosis sobre 3 con lo cual poseen una distribución con colas más pesadas. En la prueba de Jarque-Bera con un valor crítico de 5.99 para el nivel de significancia del 5 por ciento, solo Enel Chile se aproxima a una distribución normal.

5. METODOLOGIA

Para realizar este trabajo se utilizó el software Spyder (Python 3.9) tomando los datos de precio de cierre diarios desde julio del 2019 hasta diciembre del 2023, tomando así 1120 datos observados por activo. La primera parte consiste en calcular los retornos logarítmicos de las acciones e índice, usando la siguiente formula

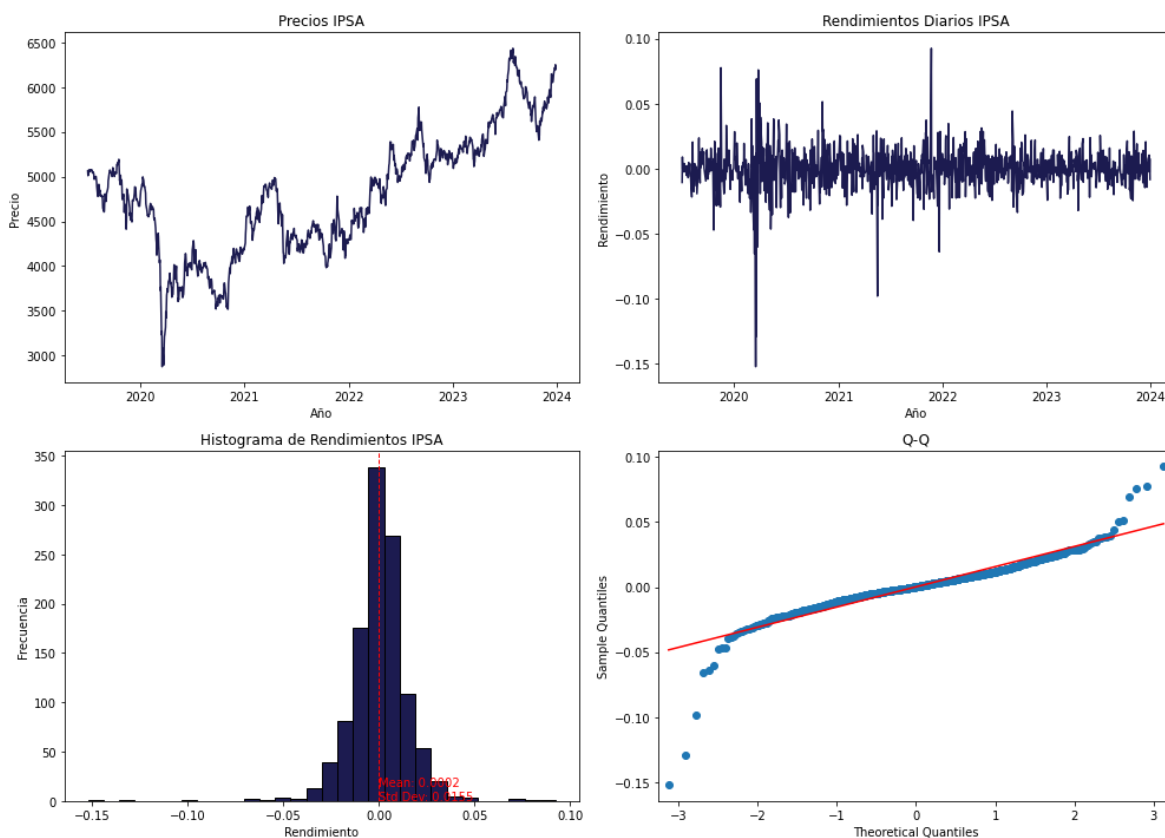
$$r(t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Se utiliza este método por varios motivos, entre ellos los retornos se pueden sumar a lo largo del tiempo para calcular un retorno total de un periodo más largo, también estos tienden a comportarse de manera más cercana a la normalidad o simetría, con lo cual facilita la interpretación de los modelos econométricos para predecir precios futuros.

Otra característica es que son más adecuados para medir métricas de riesgo, ya que la suma de los retornos logarítmicos de diferentes activos de un portafolio es más fácil de manejar y calcular que los retornos simples, y lo facilita en la evaluación de riesgo a nivel portafolio, y por último tiene una simetría en el cálculo de pérdidas y ganancias, por ejemplo si tomamos una acción A con los siguientes precios [1000, 500, 1000] y calculamos los retornos logarítmicos y simples me da [-0.69, 0.69], [0.5, 1] respectivamente. Al calcular el promedio de ambos me da un retorno esperado de 0% para el cálculo logarítmico y del 25% para el método simple.

5.1 Análisis del IPSA

En una primera instancia se graficó la evolución de los precios, los rendimientos diarios, histograma y un gráfico Q-Q el cual nos podrá dar una primera impresión del mercado. En el siguiente grafico muestra lo señalado:

Figura 1*Análisis del IPSA*

Desglosando cada uno de los gráficos, el primero me indica una recuperación del precio importante después de la gran caída del 2020 producto a la pandemia del COVID-19. En el segundo grafico muestra una serie temporal de los rendimientos diarios, el cual muestra una gran volatilidad en el 2020, y estabilizándose después en el tiempo, aunque aún se muestran picos ocasionales de volatilidad.

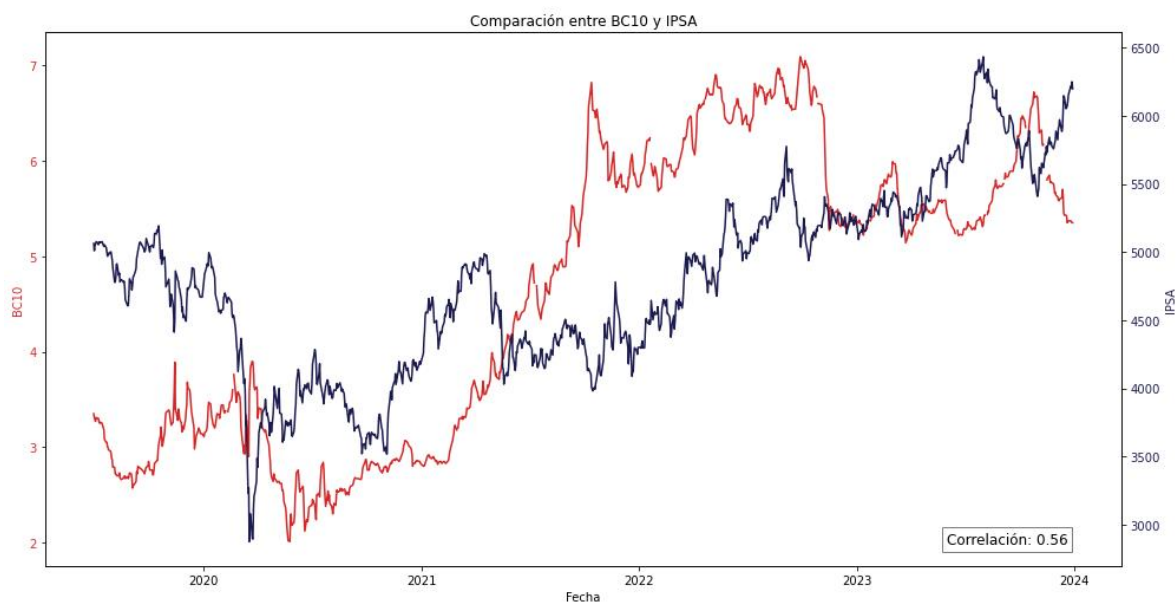
El tercero que indica un histograma de rendimiento del IPSA, y podemos ver que la media muy cercana a 0 y una desviación estándar pequeña, lo que sugiere que en promedio el índice no tiene grandes cambios en su valor diario, en resumen, el histograma permite visualizar como se distribuyen los rendimientos en un periodo determinado. Mientras que el

cuarto grafico compara la distribución empírica con una distribución normal teórica, y se observa que los valores del centro de la distribución siguen de cerca o rozando la línea roja (La distribución normal teórica), pero viendo los extremos observamos colas que se alejan de esta línea, lo que indica poseen colas más pesadas que una distribución normal, indicando que existen mayor probabilidad de grandes subidas o bajadas alejados del promedio, esto sugiere un mayor riesgo en el comportamiento de los rendimientos.

Dentro del mercado chileno nuestro referente, además del IPSA, es el bono del Banco Central a 10 años ya que refleja el rendimiento de la economía chilena en tanto a la inflación, crecimiento económico y política monetaria a largo plazo, en el siguiente grafico podemos ver una comparación entre la evolución del bono y del IPSA:

Figura 2

Comparación entre Bono Banco Central a 10 años y IPSA



En el gráfico, podemos observar el valor del Bono a 10 años (BC10) que se encuentra al eje Y del lado izquierdo y está representado por la línea roja, y el precio del IPSA que se

encuentra al eje Y del lado derecho, representada por la línea azul. Ambos activos poseen una correlación moderada positiva de 0.56, esto indica que, en algunos periodos del tiempo sus valores han seguido una tendencia similar. Este comportamiento se puede atribuir a factores externos que pasaron, como la pandemia y el proceso constituyente que afectaron directamente a los mercados.

Sin embargo, en el año 2023, se puede observar una relación inversa, que se asemeja a las dinámicas tradicionales de los mercados, donde los inversionistas cuando liquidan posiciones en renta fija tienden a trasladar sus capitales a renta variable y viceversa.

5.2 Portafolio caracterizado por rentabilidad positiva de sus activos

Para comenzar a realizar los portafolios, se seleccionaron acciones con rentabilidad positiva, sacados de la tabla 1, con el objetivo de identificar oportunidades de inversión con un rendimiento histórico consistente. Así evitar ventas cortas en los portafolios, en la siguiente tabla muestra las acciones a utilizar:

Tabla 3

Resumen Estadístico de Acciones Seleccionadas, Fuente: Elaboración Propia

Acciones	Retorno Esperado	Volatilidad
CENCOSUD.SN	4,58%	0,0239
CHILE.SN	0,86%	0,0198
COLBUN.SN	0,05%	0,0281
ORO-BLANCO.SN	16,65%	0,0295
QUINENCO.SN	10,56%	0,0209
SQM-B.SN	21,24%	0,0303
VAPORES.SN	19,49%	0,0290

Como se puede observar en la tabla, las acciones tienen un retorno esperado en un rango de [0.05% - 21.24%], la media del retorno de las acciones esta multiplicado por 252

para anualizarlo, mientras que posee una volatilidad de las acciones esta se multiplica por $\sqrt{252}$ y así anualizarla, los valores se encuentran entre los rangos [0.0198 – 0.0303].

5.2.1 Matriz de Covarianza

Esta matriz nos proporciona una medida de como los retornos de los diferentes activos se mueven en que dirección entre sí. El siguiente grafico muestra la matriz:

Figura 3

Matriz de Covarianza

Matriz de Covarianza						
CENCOSUD.SN	0.00057	0.00022	0.00021	0.00022	0.00014	0.00026
CHILE.SN	0.00022	0.00039	0.00022	0.00015	0.00011	0.0002
COLBUN.SN	0.00021	0.00022	0.00079	0.00011	0.00015	0.00018
ORO-BLANCO.SN	0.00022	0.00015	0.00011	0.00087	0.00014	0.00045
QUINENCO.SN	0.00014	0.00011	0.00015	0.00014	0.00044	0.00014
SQM-B.SN	0.00026	0.0002	0.00018	0.00045	0.00014	0.00092
VAPORES.SN	0.0002	0.00017	0.00018	0.00025	0.00027	0.00026
	CENCOSUD.SN	CHILE.SN	COLBUN.SN	ORO-BLANCO.SN	QUINENCO.SN	SQM-B.SN

Lo que se puede observar es que los valores son positivos y muy cercanos al 0, lo que indica que tienden a moverse en una misma dirección, pero no hay una relación consistente en los movimientos de las acciones.

5.2.2 Matriz de Correlación

Se ha calculado la matriz de correlación para estos 7 activos, para poder medir en que dirección se mueven, pero también la magnitud entre la relación de las acciones en términos absolutos, y ver que tan riesgoso puede ser el portafolio, el siguiente grafico muestra la correlación entre las acciones:

Figura 4

Matriz de Correlación

Matriz de Correlación							
CENCOSUD.SN	1	0.47	0.31	0.31	0.28	0.36	0.29
CHILE.SN	0.47	1	0.4	0.25	0.27	0.33	0.3
COLBUN.SN	0.31	0.4	1	0.14	0.26	0.21	0.22
ORO-BLANCO.SN	0.31	0.25	0.14	1	0.22	0.51	0.3
QUINENCO.SN	0.28	0.27	0.26	0.22	1	0.22	0.44
SQM-B.SN	0.36	0.33	0.21	0.51	0.22	1	0.3
VAPORES.SN	0.29	0.3	0.22	0.3	0.44	0.3	1
	CENCOSUD.SN	CHILE.SN	COLBUN.SN	ORO-BLANCO.SN	QUINENCO.SN	SQM-B.SN	VAPORES.SN

Donde se observa que todas las correlaciones son positivas y se mueven en la misma dirección, donde se puede intuir ya que pertenecen al mismo mercado, pero son correlaciones bajas, más cercanas al número 0 que al número 1, por lo que indica que no hay una relación lineal clara entre los movimientos de los activos.

5.2.3 Portafolio de mínima varianza y Portafolio de máxima eficiencia (Portafolio de Sharpe)

En este análisis, se calcularon dos portafolios claves para entender las características de un portafolio optimo, uno con la menor volatilidad y el otro portafolio con mayor rendimiento ajustado al riesgo. El portafolio de mínima varianza es el que busca minimizar la volatilidad de los retornos, se construye a través de minimizar la varianza, de la siguiente manera:

1. Varianza del portafolio

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$$

Donde:

w = Es el vector de los pesos de los activos en el portafolio

Σ = Es la matriz de las covarianzas de los rendimientos de los activos

2. Optimización del portafolio

El objetivo es minimizar σ_p^2 sujeto a la restricción que las ponderaciones sean igual a 1:

$$\text{Minimizar: } W^T \Sigma w ; \text{ Con la restricción } 1^T w = 1$$

Donde:

1 = Es un vector de unos

Calculando el portafolio nos arroja los siguientes resultados:

Tabla 4

Portafolio de Mínima Varianza

Portafolio de Mínimo Riesgo		ACTIVOS	PONDERACIÓN
Riesgo	0.243147	CENCOSUD	0.084109
Rentabilidad	7.2893%	CHILE	0.303605
Ratio Sharpe	0.299789	COLBUN	0.086573
		ORO-BLANCO	0.074228
		QUINENCO	0.384863

SQM-B	0.023925
VAPORES	0.042696
TOTAL	1

Se puede ver que este portafolio posee una rentabilidad anual estimada de 7.2893% con un riesgo anualizado de 0.243147, el cual, si lo comparamos con un retorno esperado teórico anualizado del mercado IPSA, el cual entrega una rentabilidad del 5.04% y un riesgo anualizado 0.246055, se logró a través de este portafolio tener una mayor rentabilidad con un menor riesgo.

Por otro lado, el portafolio de máxima eficiencia, también conocido como el portafolio de Sharpe, tiene como objetivo maximizar el ratio de Sharpe. Esta relación mide el rendimiento adicional que recibe un inversionista por asumir un riesgo adicional en comparación con una inversión libre de riesgo, este portafolio se obtiene al maximizar el ratio de Sharpe, de la siguiente manera:

Ratio de Sharpe

$$S = \frac{E(E_p) - R_f}{\sigma_p}$$

Donde:

S = Ratio de Sharpe

$E(R_p)$ = Retorno esperado del portafolio

R_f = Tasa de retorno libre de riesgo.

σ_p = Desviación estándar del portafolio.

1. Rendimiento esperado del Portafolio

$$R_p = w^T \mu$$

Donde:

μ = Es el vector de rendimientos esperados de los activos

2. Optimización del portafolio

El objetivo es maximizar S con la restricción que las ponderaciones sean igual a

1:

$$\text{Maximizar: } \frac{w^T \mu - R_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}}; \text{ con restricción } 1^T w = 1$$

Calculando el portafolio nos arroja los siguientes resultados:

Tabla 5

Portafolio de Máximo de Sharpe

Portafolio de Máximo de Sharpe		ACTIVOS	PONDERACIÓN
Riesgo	0.302248	CENCOSUD	0.006382
Rentabilidad	16.4953%	CHILE	0.001813
Ratio Sharpe	0.545755	COLBUN	0.009810
		ORO-	
		BLANCO	0.162710
		QUINENCO	0.310388
		SQM-B	0.319913
		VAPORES	0.188984
		TOTAL	1

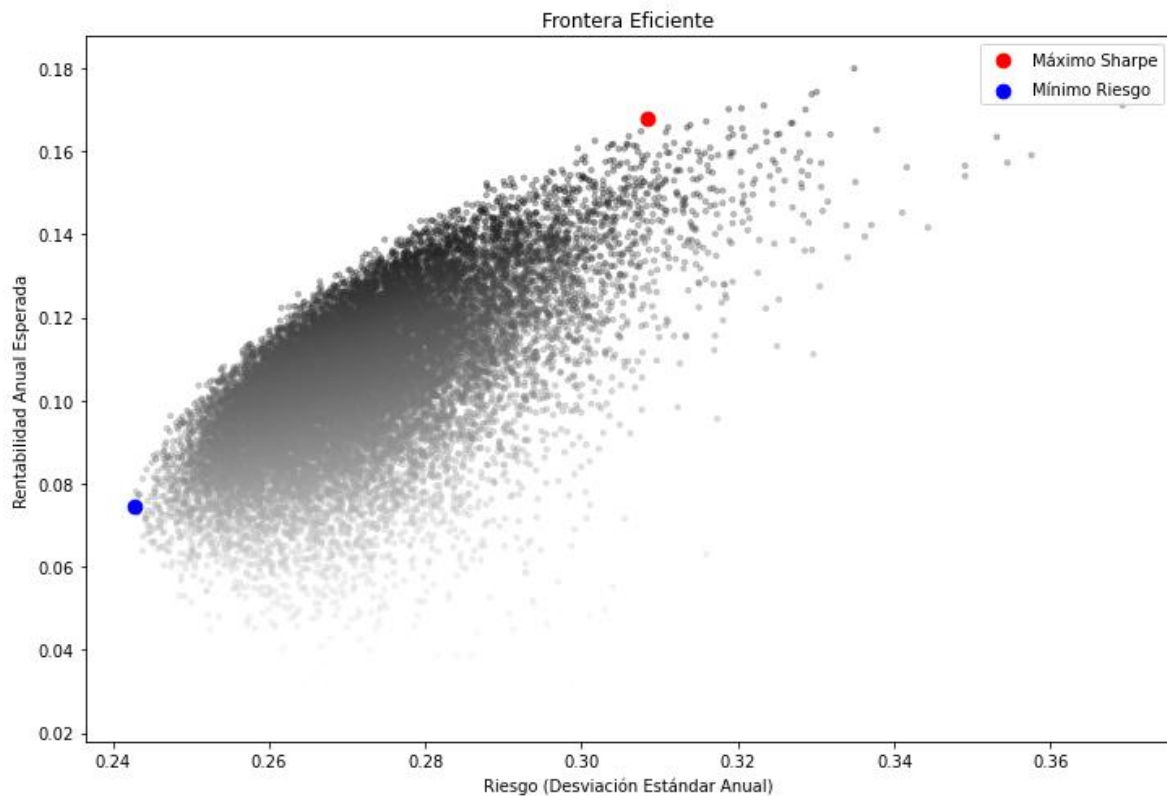
Donde se puede observar que la rentabilidad esperada anual es de 16.4953% con un riesgo anualizado de 0.302248, también analizando el ratio de Sharpe podemos ver que es de 0.54, el cual significa que por cada unidad de riesgo, el portafolio está generando un rendimiento adicional de aproximado de 0.54 unidades por encima de la tasa libre de riesgo. Si bien es un valor positivo, es un valor moderado, lo que sugiere que, aunque el portafolio esta compensado el riesgo, no lo está haciendo de manera excepcional.

5.2.4 Frontera Eficiente

Todo lo calculado anteriormente, sirve para efectuar una frontera eficiente, para calcular esta frontera se realiza una simulación de Montecarlo con 20.000 iteraciones para crear la misma cantidad de portafolios. Para graficar esto se debe asignar pesos aleatorios los cuales la suma debe sumar 1.

Figura 5

Frontera Eficiente



Se identifican 2 puntos en el gráfico, el portafolio de mínimo riesgo (Punto Azul) el cual indica el de menor riesgo que optan inversionistas con una alta aversión al riesgo y el portafolio de máximo de Sharpe (Punto Rojo) representa la mejor relación entre riesgo – retorno y es ideal para los inversionistas que buscan maximizar las ganancias por cada unidad de riesgo asumido.

En cuanto a la dispersión, los puntos se encuentran en el límite superior de gráfico que curvan entre los portafolios de mínima varianza y el de Sharpe son fronteras eficientes en relación a otros riesgos que puede asumir el inversionista, mientras que los que se encuentran por debajo de este límite superior son portafolios ineficientes.

5.3 Estimación del modelo ARIMA

Para realizar los modelos tanto ARIMA como GARCH se utilizará los portafolios antes calculados, Mínima Varianza – Máximo de Sharpe. Se toma una serie de tiempo de los retornos de los portafolios, así se toma una primera diferencia y se calcula las pruebas ADF, PP, KPSS para ver si la serie es estacionaria:

5.3.1 Pruebas para el Portafolio de Mínima Varianza

Comenzando se realiza una prueba ADF, con los siguientes resultados:

Tabla 6

Prueba Dickey-Fuller Aumentada Portafolio de Mínima Varianza, Fuente: Elaboración

Propia

Prueba Dickey-Fuller Aumentada	
Estadístico ADF	-11,1495
Valor p	0,0000
Número de rezagos utilizados	9
Número de observaciones utilizadas	1110
Valores críticos 1%	-3,4362549
Valores críticos 5%	-2,8641473
Valores críticos 10%	-2,5681582

$P > 0.05 \rightarrow H_0$ tiene raíz unitaria

$P < 0.05 \rightarrow H_1$ es estacionaria

En la prueba nos arroja un valor p de 0.000, con lo cual rechazamos la hipótesis nula H_0 , y aceptamos que la serie es estacionaria con un alto nivel de confianza, ya que posee un estadístico -11.1495 menor a los valores críticos para los niveles de confianza del 1, 5, 10 porciento.

Siguiendo con la prueba PP, con los siguientes resultados:

Tabla 7

Prueba Phillips-Perrón Portafolio de Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia

Prueba Phillips-Perrón	
Estadístico PP	-31,6556
Valor p	0,0000
Número de rezagos utilizados	22

$P > 0.05 \rightarrow H_0$ tiene raíz unitaria

$P < 0.05 \rightarrow H_1$ es estacionaria

En esta prueba nos arroja un valor p de 0.000, con lo cual rechazamos la hipótesis nula H_0 , y confirmamos al igual que la prueba anterior que es estacionaria para el portafolio de mínima varianza.

Y finalizando con la prueba KPSS, con los siguientes resultados:

Tabla 8

Prueba KPSS Portafolio de Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia

Prueba KPSS	
Estadístico KPSS	0,1596
Valor p	0,1000
Valores críticos 1%	0,739
Valores críticos 2,5%	0,574

Valores críticos 5%	0,463
Valores críticos 10%	0,347

$P > 0.05 \rightarrow H_0$ es estacionaria

$P < 0.05 \rightarrow H_1$ tiene raíz unitaria

En esta prueba nos arroja un valor p de 0.100, con lo cual aceptamos la hipótesis nula y señalamos que es estacionaria, y reafirma los análisis de las pruebas anteriores.

5.3.2 Pruebas para el Portafolio de Máximo de Sharpe

La prueba ADF son muestra los siguientes resultados:

Tabla 9

Prueba Dickey-Fuller Aumentada Portafolio de Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración

Propia

Prueba Dickey-Fuller Aumentada	
Estadístico ADF	-21,5117
Valor p	0,0000
Número de rezagos utilizados	1
Número de observaciones utilizadas	1118
	-
Valores críticos 1%	3,4362126
	-
Valores críticos 5%	2,8641287
	-
Valores críticos 10%	2,5681483

$P > 0.05 \rightarrow H_0$ tiene raíz unitaria

$P < 0.05 \rightarrow H_1$ es estacionaria

En la prueba nos arroja un valor p de 0.000, con lo cual rechazamos la hipótesis nula H_0 , y aceptamos que la serie es estacionaria con un alto nivel de confianza, ya que posee un estadístico -21.5117 menor a los valores críticos para los niveles de confianza del 1, 5, 10 porciento.

En la siguiente prueba de PP nos arroja los siguientes resultados:

Tabla 10

Prueba Phillips-Perrón Portafolio de Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia

Prueba Phillips-Perrón	
Estadístico PP	-30,9486
Valor p	0,0000
Número de rezagos utilizados	22

$P > 0.05 \rightarrow H_0$ tiene raiz unitaria

$P < 0.05 \rightarrow H_1$ es estacionaria

En esta prueba nos arroja un valor p de 0.000, con lo cual rechazamos la hipótesis nula H_0 , y confirmamos al igual que la prueba anterior que es estacionaria para el portafolio de máximo de Sharpe.

Y por último para reafirmar que la serie es estacionaria, se realiza la prueba KPSS con los siguientes resultados:

Tabla 11

Prueba KPSS Portafolio de Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia

Prueba KPSS	
Estadístico KPSS	0,1496
Valor p	0,1000
Valores críticos 1%	0,739

Valores críticos 2,5%	0,574
Valores críticos 5%	0,463
Valores críticos 10%	0,347

$P > 0.05 \rightarrow H_0$ es estacionaria

$P < 0.05 \rightarrow H_1$ tiene raíz unitaria

En esta prueba nos arroja un valor p de 0.100, con lo cual aceptamos la hipótesis nula y señalamos que es estacionaria.

Ya sabiendo que la serie es estacionaria en ambos portafolios, procedemos a calcular el modelo ARIMA. Primero graficamos los gráficos ACF y PACF para ambos portafolios.

Figura 6

Gráficos ACF y PACF Portafolio Mínima Varianza

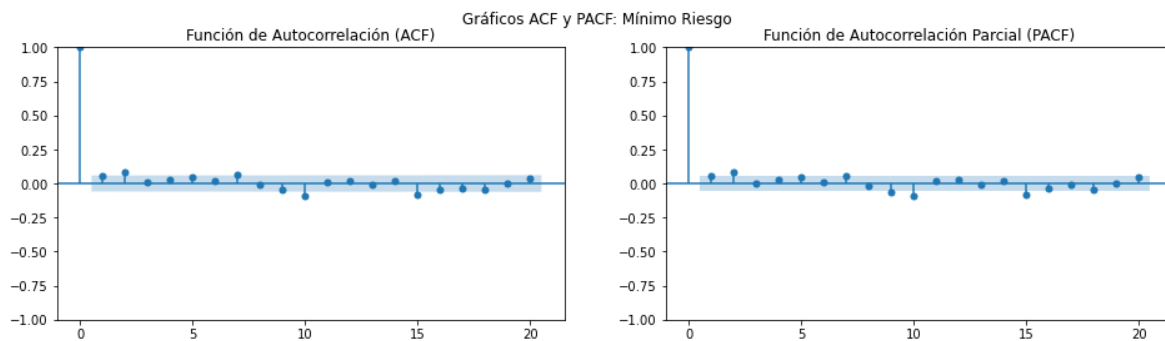
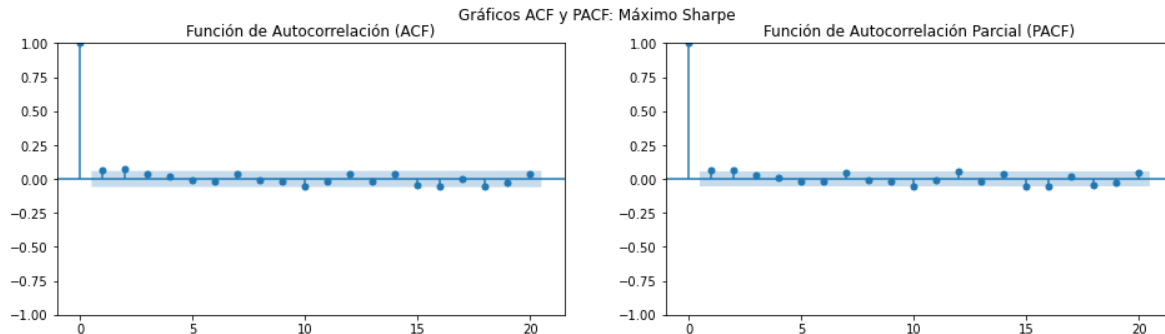


Figura 7

Gráficos ACF y PACF Portafolio Máximo de Sharpe



Los gráficos me señalan que el primer rezago es 1, una autocorrelación perfecta, con lo cual es esperado ya que la serie siempre es perfectamente correlacionada consigo misma y los siguientes rezagos son pequeños y dentro los intervalos de confianza, con lo cual señala que no hay una autocorrelación significativa más allá del primer rezago. A primera vista el modelo que más se adapta para esta serie es un AR (1) y MA (1), pero se comprobó con múltiples resultados.

Tabla 12

Resumen Estadístico Modelo ARIMA Para Portafolio de Mínima Varianza, Fuente:

Elaboración Propia.

PORTAFOLIO DE MINIMA VARIANZA				
	ARIMA (1,0,1)	ARIMA (2,0,1)	ARIMA (1,0,2)	ARIMA (2,0,2)
AIC	-6194,847	-6185,521	-6186,559	-6192,707
BIC	-6174,762	-6160,416	-6161,454	-6162,580
HQIC	-6187,255	-6176,032	-6177,070	-6181,320
Ljung-Box (L1)	0,62	0,00	0,00	0,00
Jarque-Bera (JB)	6673,6	6420,44	7055,00	5471,41
Prob(Q)	0,43	1,00	0,98	1,00
Prob(JB)	0,00	0,00	0,00	0,00
Heteroskedasticity	0,44	0,40	0,46	0,48
Skew	-1,14	-1,09	-1,19	-1,07

Prob(H) (two-sided)	0,00	0,00	0,00	0,00
Kurtosis	14,74	14,52	15,06	13,62
const P > z	0,630	0,657	0,591	0,639
ar.L1 P > z	0,000	0,979	0,034	0,774
ar.L2 P > z	No posee	0,000	No posee	0,439
ma.L1 P > z	0,003	0,798	0,079	0,924
ma.L2 P > z	No posee	No posee	0,001	0,609
sigma P > z	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabla 13

Resumen Estadístico Modelo ARIMA Para Portafolio de Máximo de Sharpe, Fuente:

Elaboración Propia.

PORTAFOLIO DE MAXIMO DE SHARPE				
	ARIMA (1,0,1)	ARIMA (2,0,1)	ARIMA (1,0,2)	ARIMA (2,0,2)
AIC	-5706,537	-5616,311	-5664,971	-5690,220
BIC	-5686,452	-5591,206	-5639,866	-5660,094
HQIC	-5698,945	-5606,822	-5655,482	-5678,833
Ljung-Box (L1)	0,00	0,10	0,00	0,05
Jarque-Bera (JB)	16063,69	19444,53	16344,05	18230,49
Prob(Q)	0,96	0,76	0,99	0,83
Prob(JB)	0,00	0,00	0,00	0,00
Heteroskedasticity	0,73	0,72	0,79	0,77
Skew	-1,75	-1,84	-1,80	-1,89
Prob(H) (two-sided)	0,00	0,00	0,03	0,01
Kurtosis	21,22	23,08	21,37	22,40
const P > z	0,439	0,428	0,392	0,393
ar.L1 P > z	0,000	0,000	0,006	0,038
ar.L2 P > z	No posee	0,585	No posee	0,174
ma.L1 P > z	0,000	0,000	0,016	0,048
ma.L2 P > z	No posee	No posee	0,335	0,152
sigma P > z	0,000	0,000	0,000	0,000

Para evaluar el modelo se segmentará en 5 partes, criterios de información (AIC, BIC, HQIC), pruebas de diagnóstico, heterocedasticidad, asimetría – curtosis, significancia de los parámetros.

- Criterios de información:
 - AIC (Akaike Information Criterion): Este criterio mide la calidad del modelo en relación con otros modelos para los mismos datos, con lo cual busca el equilibrio entre la bondad de ajuste y la complejidad del modelo. Entre más bajo es el valor mejor es el modelo, en ambos portafolios el modelo ARIMA (1,0,1) indica un número más bajo.
 - BIC (Bayesian Information Criterion): Es similar al criterio anterior, pero busca la simplicidad de los modelos, penaliza a modelos más complejos con mayores números de parámetros. En este caso al igual que el anterior el menor valor indica un mejor modelo, en este caso ambos portafolios indican que ARIMA (1,0,1) Están más alejados del 0.
 - HQIC (Hannan-Quinn Criterion): Al igual que el BIC es un criterio que penaliza la complejidad del modelo, pero en este caso de manera más gradual. También que los anteriores el menor valor es el mejor modelo, y también arroja en ambos portafolios el ARIMA (1,0,1)
- Pruebas de diagnóstico:
 - Ljung-Box: Es una prueba estadística que evalúa si existe autocorrelación significativa en las series de tiempo, con la hipótesis nula H_0 que los residuos son ruidos blancos, y la alternativa es que existe autocorrelación significativa en los residuos. En este caso Prob (Q) de todos los modelos son aceptables lo que indica que todos los residuos poseen autocorrelación. En el portafolio de máximo de Sharpe en el modelo ARIMA (1,0,1) posee un Prob (Q) de 0.96 que es muy cercano a 1, mientras que el portafolio de mínima varianza en el

mismo modelo solo posee una probabilidad de 0,43 pero sigue siendo un valor para rechazar la hipótesis nula.

- Jarque-Bera: Mide la normalidad de los residuos, cuando la Prob (JB) es cercana a 1 indica que siguen esta distribución normal, en ese caso todos los modelos tienen probabilidad 0, así que ningún modelo cumple.
- Heterocedasticidad: Es una prueba que indica la presencia de una varianza cambiante en el tiempo en los residuos, lo que implica que el error es mayor o menor en diferentes puntos de la serie. En ambos portafolios tienen valores por debajo de 1, la cual señala que no hay una heterocedasticidad significativa.
- Asimetría y Curtosis:
 - Asimetría (Skew): En este caso se busca un numero cercano a 0, en caso de ambos portafolios indica números menores a -1, con lo cual indica una distribución sesgada a la izquierda, en el portafolio de mínima varianza la mejor asimetría se encuentra en el modelo ARIMA (2,0,2) y en el de máximo de Sharpe en el modelo ARIMA (1,0,1).
 - Curtosis (Kurtosis): En este caso se busca números cercanos a 3, valores mayores indican colas más pesadas en la distribución de los residuos. Ambos portafolios indican colas pesadas, pero los mejores modelos son ARIMA (2,0,2) y ARIMA (1,0,1) para los portafolios de mínima varianza y máximo de Sharpe respectivamente.
- Significancia de los parámetros: En ambos portafolios, el único modelo que todos los parámetros son significativos es en el ARIMA (1,0,1), con lo cual indican que son todos útiles para el modelo.

En este caso, los dos mejores modelos son los de ARIMA (1,0,1) y ARIMA (2,0,2), inclinándose un poco mejor para el primero, pero para poder ver la comparación de los modelos, se proyectarán ambos para ver la diferencia y la precisión de cada uno.

5.4 Estimación del modelo GARCH

Se estimarán 4 modelos GARCH por portafolios, para compararlos y elegir el mejor modelo para proyectarlo a futuro, los modelos serán GARCH (1,1) – GARCH (2,1) – GARCH (1,2) – GARCH (2,2). Los resultados son los siguientes:

Tabla 14

Resumen Estadístico Modelo GARCH Para Portafolio de Mínima Varianza, Fuente:

Elaboración Propia.

PORTAFOLIO DE MINIMA VARIANZA				
	GARCH (1,1)	GARCH (1,2)	GARCH (2,1)	GARCH (2,2)
AIC	-6410,54	-6381,99	-6411,81	-6385,46
BIC	-6390,45	-6356,88	-6386,70	-6355,33
Log-Likelihood	3209,27	3195,99	3210,90	3198,73
R-squared	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Adj. R-squared	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
mu coef	0,0006745	0,0006	0,0008	0,0006
mu P > t	0,0926	0,109	0,0000	0,117
omega coef	0,000023	0,00002	0,0000	0,00002
alpha [1] coef	0,1000	0,1	0,0502	0,050
alpha [2] coef	No tiene	No tiene	0,0501	0,050
beta [1] coef	0,8000	0,400	0,8800	0,400
beta [2] coef	No tiene	0,400	No tiene	0,400
omega P > t	0,0000	0,000	0,0000	0,0000
alpha [1] P > t	0,0009	0,000	0,296	0,446
alpha [2] P > t	No tiene	No tiene	0,398	0,385
beta [1] P > t	0,000	0,128	0,0000	0,440
beta [2] P > t	No tiene	0,133	No tiene	0,439

Tabla 15

Resumen Estadístico Modelo GARCH Para Portafolio de Máximo de Sharpe, Fuente:

Elaboración Propia.

PORTAFOLIO DE MAXIMO DE SHARPE				
	GARCH (1,1)	GARCH (1,2)	GARCH (2,1)	GARCH (2,2)
AIC	-5763,08	-5883,93	-5793,26	-5729,55
BIC	-5743,00	-5858,83	-5768,16	-5699,43
Log-Likelihood	2885,54	2946,97	2901,63	2870,78
R-squared	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Adj. R-squared	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
mu coef	0,0013	0,001	0,0013	0,0013
mu $P > t $	0,0147	0,016	0,0082	0,0110
omega coef	0,0000	0,000	0,0001	0,0001
alpha [1] coef	0,1000	0,200	0,100	0,100
alpha [2] coef	No tiene	No tiene	0,100	0,100
beta [1] coef	0,8000	0,350	0,500	0,250
beta [2] coef	No tiene	0,350	No tiene	0,250
omega $P > t $	0,0000	0,000	0,134	0,127
alpha [1] $P > t $	0,0348	0,004	0,284	0,432
alpha [2] $P > t $	No tiene	No tiene	0,353	0,314
beta [1] $P > t $	0,0000	0,113	0,034	0,622
beta [2] $P > t $	No tiene	0,123	No tiene	0,515

- Criterios de información:
 - AIC: Dicho anteriormente se busca el menor valor, para el portafolio de mínima varianza es el modelo GARCH (2,1) y para el de máximo de Sharpe es GARCH (1,2).
 - BIC: En este caso al buscar el menor valor, para el portafolio de mínima varianza es el modelo GARCH (1,1) y para el portafolio máximo de Sharpe es el modelo GARCH (1,2).

- Log-Likelihood: Es un criterio que indica que tan bien se ajusta el modelo a los datos, un valor más alto indica un mejor ajuste. En caso del portafolio de mínima varianza es el modelo GARCH (2,1) y para el máximo de Sharpe es GARCH (1,2).
- Significancia de los parámetros: En cuanto a los modelos de GARCH (1,1) en ambos portafolios todas las variables son significativas, mientras que los modelos (1,2), (2,1) tienen algunas variables significativas, pero otras no, mientras que el (2,2) no posee.

En este caso los mejores modelos son el GARCH (1,2) y GARCH (2,1), pero también se probará el modelo GARCH (1,1) para poder ver un modelo más simple y ver cómo funciona con la realidad.

6. BENCHMARK

6.1 Rentabilidad proyectada

A través de la teoría de Henry Markowitz, se ha formado dos portafolios en los cuales se trabajará en proyectar su rentabilidad. En un inicio tenemos los siguientes datos:

Tabla 16

Resumen Estadístico de Portafolios, Fuente: Elaboración Propia.

	Portafolio mínima varianza	Portafolio máximo de Sharpe
Rentabilidad proy. 252 días	7,29%	16,50%
Riesgo proy. 252 días	0,243	0,302
VaR _{90%}	-1,477%	-1,982%
VaR _{95%}	-2,058%	-2,836%
VaR _{99%}	-3,937%	-4,919%
CVaR _{90%}	-2,725%	-3,537%
CVaR _{95%}	-3,734%	-4,724%
CVaR _{99%}	-7,364%	-9,123%

En la teoría, en un año si se invierte en el portafolio de mínima varianza se debería obtener una rentabilidad de 7.29% asumiendo un riesgo de 0.243 o en su contraparte en el portafolio de máximo de Sharpe se obtendría una rentabilidad de 16.50% tomando un riesgo de 0.302.

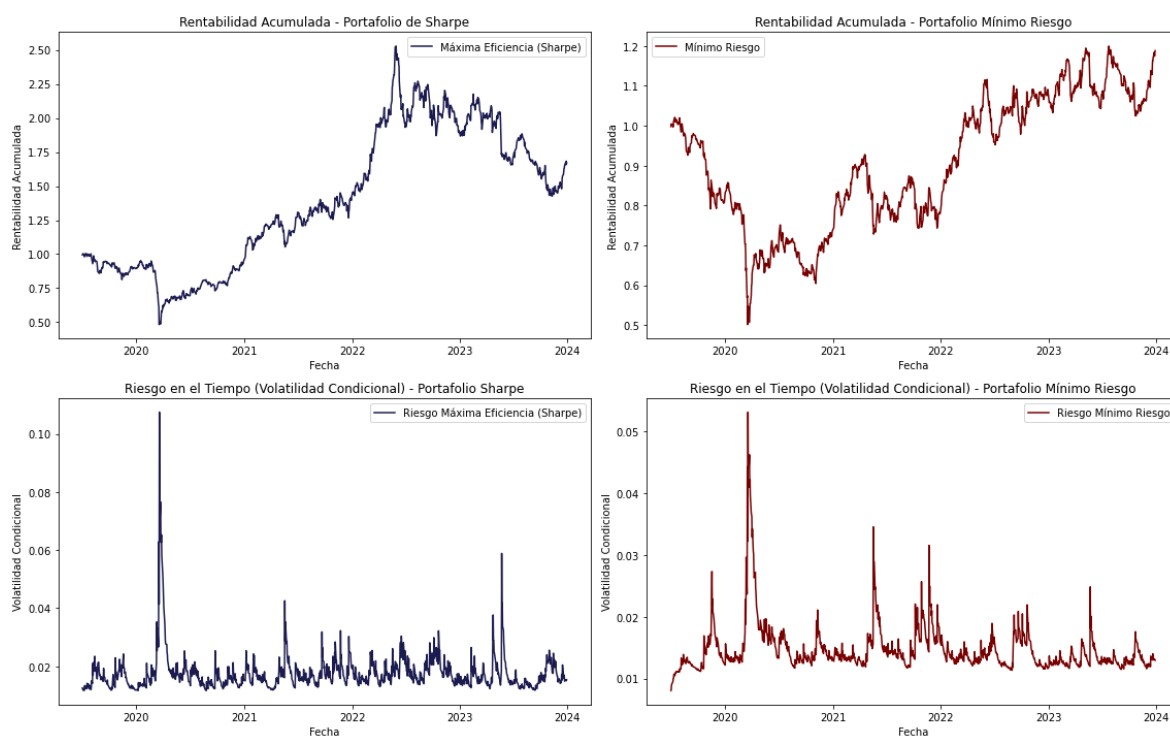
En cuanto a la máxima pérdida esperada definida en 3 niveles de confianza [0.9, 0.95, 0.99] varían en un rango de [1.477% - 3.937%] y [1.982% - 4.919%] para los portafolios de mínima varianza y máximo de Sharpe respectivamente. Mientras que CVaR que representa el promedio de pérdida esperada en las situaciones donde exceda el VaR, varían entre el rango [2.725% – 7.364%] para el portafolio de mínima varianza y [3.537% - 9.123%] para el máximo de Sharpe.

6.2 Rentabilidad Acumulada

Para tener una visión más completa de la rentabilidad y riesgo de los portafolios que se está trabajando, el siguiente grafico muestra las rentabilidades de los portafolios de mínima varianza y máximo de Sharpe, partiendo de una base 1 o 100% y ver la evolución hasta fines del 2023.

Figura 8

Rentabilidad Acumulada y Volatilidad Condicional para Portafolios de Mínima Varianza y Máximo de Sharpe



En ambos portafolios se a rentado positivamente a lo largo del tiempo, en el de Sharpe llegando a un pico máximo de 2.53 en el 2022 y a fines del 2023 1.73, y en el de mínimo

riesgo llegando a un a su máximo de 1.22 y a fines del 2023 1.17. Con lo cual, se ha rentado un 73% y 17% en 4 años y medio para los portafolios de MV¹ y MS² respectivamente.

6.3 Métricas de evaluación de los modelos

Para evaluar los modelos se utilizarán 3 métricas que serán las cuales nos indiquen cual es el mejor modelo para utilizar, y cuál de estos preside mejor los retornos a futuro.

6.3.1 RSME (Root Mean Squared Error)

Es una métrica de evaluación de la precisión de un modelo estadístico, la cual mide la magnitud promedio del error cuadrático, entre los valores reales y los pronosticados. Su expresión matemática.

$$RSME = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}$$

y_t = Valor real en el tiempo t .

$\hat{y}_t$ = Valor pronosticado en el tiempo t .

n = Número de observaciones

Si los valores del RSME son bajos, indican un modelo más preciso, es sensible a los valores atípicos y principalmente se utiliza cuando es importante minimizar grandes desviaciones estándares en las predicciones.

6.3.2 MAPE (Mean Absolute Percentage Error)

Es el error porcentual medio y se utiliza para medir la predicción de un modelo en términos relativos, esta métrica calcula el promedio de los errores absolutos como proporción a los valores reales. La expresión matemática es:

¹ MV = Portafolio de mínima varianza.

² MS = Portafolio de máximo de Sharpe.

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \cdot 100$$

y_t = Valor real en el tiempo t .

$\hat{y}_t$ = Valor pronosticado en el tiempo t .

n = Número de observaciones

El MAPE muestra el error en términos porcentuales, lo que permite una evaluación fácil de interpretar, sin embargo, es sensible a valores reales muy pequeños o cercanos a cero. Un valor bajo del MAPE indica que el modelo tiene una alta precisión relativa.

6.3.3 sMAPE (Symmetric Mean Absolute Percentage Error)

El sMAPE es una versión modificada del MAPE, la cual ajusta la fórmula para garantizar la simétrica entre los valores reales y proyectados, evitando así que se sobredimensionen los errores cuando los valores reales son muy bajos. La expresión matemática es:

$$sMAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{(|y_t| + |\hat{y}_t|)/2} \cdot 100$$

La métrica reduce la sensibilidad a los valores bajos y garantiza una comparación justa entre el valor proyectado y el valor real. Un sMAPE bajo indica un modelo con buen ajuste relativo y es más robusto que el MAPE en series con fluctuaciones de gran magnitud o valores cercanos a 0.

7. RESULTADOS

Con el objetivo de analizar la robustez de los modelos se analizarán diferentes resultados para ver cuál de estos se ajustan mejor, se dividirá en análisis simples y análisis multivariados para los portafolios de mínima varianza y máximo de Sharpe. Por un lado, tendremos el retorno esperado de la proyectada a 252 días, y por otro lado las métricas de evaluación (RMSE, MAPE, sMAPE).

Dada las características de la teoría de Portafolio de Markowitz, los resultados no son muy útil para la vida real, pero servirá para ver cómo se comportan los modelos predictivos.

7.1 Benchmark modelo ARIMA portafolio mínima varianza

Tabla 17

Resumen Estadístico Modelo ARIMA Portafolio Mínima Varianza, Fuente: Elaboración

Propia.

	RETORNO ESPERADO			
	RETORNO ESPERADO	RSME	MAPE	sMAPE
ARIMA (1,0,1)	7,64320%	0,011197924	1,16608%	1,85151%
ARIMA (2,0,1)	7,64333%	0,011197486	1,16367%	1,85143%
ARIMA (1,0,2)	7,58560%	0,011197757	1,16157%	1,85233%
ARIMA (2,0,2)	7,68696%	0,01119842	1,16638%	1,85123%

El mejor modelo para la optimización del portafolio de mínima varianza a través de los modelos de ARIMA es el (1,0,2), Aunque las métricas evaluadas muestran resultados mixtos, donde el modelo (1,0,2) presenta un mejor RSME, en el MAPE es el (2,0,1) y en el sMAPE (2,0,2), en la teoría de portafolios de Markowitz lo que se busca es minimizar la volatilidad, y el RSME suele ser la métrica más adecuada al momento de evaluar la volatilidad. En el modelo (1,0,2) proyecta un retorno esperado de 7.64% que está cercano 7.29% del resultado teórico de portafolio inicial.

7.2 Benchmark modelo ARIMA portafolio de Sharpe

Tabla 18

Resumen Estadístico Modelo ARIMA Portafolio Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración

Propia.

	RETORNO ESPERADO			
	RETORNO ESPERADO	RSME	MAPE	sMAPE
ARIMA (1,0,1)	16,85034%	0,017703074	1,07418%	1,81038%
ARIMA (2,0,1)	16,37850%	0,017696993	1,07167%	1,81440%
ARIMA (1,0,2)	16,43723%	0,017697665	1,07204%	1,81415%
ARIMA (2,0,2)	14,63888%	0,017692031	1,06174%	1,82828%

El mejor modelo para la optimización del portafolio de Sharpe a través de los modelos de ARIMA es el (2,0,2), que ha demostrado ser el de mejor desempeño en las métricas RMSE, MAPE con los valores 0.017692031 y 1.06174% respectivamente.

En cuanto a la métrica sMAPE el mejor modelo es el ARIMA (1,0,1) con un valor de 1.81038%, pero no es mucha la diferencia con el modelo (2,0,2). Con un retorno esperado de 14.63% en comparación a un retorno teórico de 16.50%.

7.3 Benchmark Modelo GARCH Portafolio Mínima Varianza

Tabla 19

Resumen Estadístico Modelo GARCH Portafolio Mínima Varianza, Fuente: Elaboración

Propia.

	RETORNO ESPERADO			
	RETORNO ESPERADO	RSME	MAPE	sMAPE
GARCH (1,1)	18,42110%	0,011199658	1,45452%	1,73727%
GARCH (1,2)	20,70261%	0,011202761	1,51966%	1,71936%
GARCH (2,1)	19,04126%	0,011200429	1,47222%	1,73235%

GARCH (2,2)	20,57960%	0,011202575	1,51614%	1,72031%
-------------	-----------	-------------	----------	----------

El mejor modelo para la optimización del portafolio de Mínima Varianza a través de los modelos de GARCH es el (1,1), esto se debe a que presenta mejores métricas RSME y MAPE, con valores de 0.011199658 y 1.45452% respectivamente, lo cual indica que su capacidad para predecir retornos y volatilidades futuras es superior a los demás modelos. Aunque el modelo GARCH (2,1) presenta mejor ajuste en el sMAPE, siendo una buena alternativa.

En comparación a los retornos esperados, en la teoría me da un 7.29% a diferencia de la proyección de un 18.42%, la amplia diferencia se debe a que el modelo toma una mayor volatilidad condicional al final del periodo, esto se puede ver en la figura 8, donde posee unos picos pronunciados en los últimos 252 días.

7.4 Benchmark modelo GARCH portafolio de Sharpe

Tabla 20

Resumen Estadístico Modelo GARCH Portafolio Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.

	RETORNO ESPERADO			
	RETORNO ESPERADO	RSME	MAPE	sMAPE
GARCH (1,1)	29,07339%	0,017740948	1,15709%	1,73334%
GARCH (1,2)	27,48667%	0,017734938	1,14592%	1,74253%
GARCH (2,1)	27,46214%	0,017734847	1,14574%	1,74267%
GARCH (2,2)	29,93906%	0,01774432	1,16318%	1,72838%

El mejor modelo para la optimización del portafolio de Sharpe a través de los modelos de GARCH es el (2,1), esto se debe a que presenta mejores métricas RSME y MAPE, con valores de 0.017734847 y 1.14574% respectivamente, aunque el modelo GARCH (2,2) presenta mejores métricas en sMAPE, con lo cual es una excelente alternativa, ya que captura una estructura de volatilidad a largo plazo.

En cuanto al retorno esperado, la proyección del modelo arroja un 27.46% en comparación a un 16.5% en el teórico, esta amplia diferencia se debe a que el modelo toma una mayor volatilidad condicional al final del periodo, esto se puede ver en la figura 8, donde posee unos picos pronunciados en los últimos 252 días.

7.5 Benchmark Modelo ARIMA Multivariado portafolio de Mínimo Varianza

Tabla 21

Resumen Estadístico Modelo ARIMA-EVT-Cópulas Gaussiana Portafolio Mínima

Varianza, Fuente: Elaboración Propia.

	RETORNO ESPERADO			
	RETORNO ESPERADO	RSME	MAPE	sMAPE
ARIMA (1, 0, 1)-EVT-Copula	6,99312%	0,010926	1,08325%	1,83551%
ARIMA (1, 0, 2)-EVT-Copula	6,96640%	0,010927	1,08160%	1,83551%
ARIMA (2, 0, 1)-EVT-Copula	7,04269%	0,010927	1,08259%	1,83449%
ARIMA (2, 0, 2)-EVT-Copula	7,08367%	0,010927	1,08425%	1,83486%

Para el Portafolio de Mínima Varianza, en un análisis multivariado, en las tres métricas me arroja un modelo diferente, en la evaluación de RSME el mejor modelo es el ARIMA (1, 0, 1)-EVT-Copula, para la métrica MAPE es ARIMA (1, 0, 2)-EVT-Copula y para sMAPE ARIMA (2, 0, 1)-EVT-Copula, ahora si bien los tres modelos son competitivos y robustos, si se tiene que elegir uno, a través del contexto que se está trabajando se elegiría

el modelo ARIMA (1, 0, 1)-EVT-Copula ya que presenta un mejor RMSE, por lo cual lo que se busca analizar el impacto de los errores.

7.6 Benchmark Modelo ARIMA Multivariado portafolio de Máximo de Sharpe

Tabla 22

Resumen Estadístico Modelo ARIMA-EVT-Cóputas Gaussiana Portafolio Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.

	RETORNO ESPERADO			
	RETORNO ESPERADO	RSME	MAPE	sMAPE
ARIMA (1, 0, 1)-EVT-Copula	17,60127%	0,018177	1,48425%	1,81233%
ARIMA (1, 0, 2)-EVT-Copula	17,46040%	0,018175	1,48299%	1,81291%
ARIMA (2, 0, 1)-EVT-Copula	17,34236%	0,018174	1,47992%	1,81371%
ARIMA (2, 0, 2)-EVT-Copula	15,82071%	0,018167	1,46792%	1,80571%

Para el Portafolio de Máximo de Sharpe, el mejor modelo multivariado es ARIMA (2, 0, 2)-EVT-Copula, puesto que en las tres métricas de evaluación presentan mejores resultados, con lo cual logra ser un modelo robusto. Este nos da una proyección de 15.82% en la rentabilidad esperada, en comparación a 16.50% en la teoría.

7.7 Benchmark Modelo GARCH Multivariado portafolio de Mínimo Varianza

Tabla 23

Resumen Estadístico Modelo GARCH-EVT-Cóputas Gaussiana Portafolio Mínima Varianza, Fuente: Elaboración Propia.

	RETORNO ESPERADO			
	RETORNO ESPERADO	RSME	MAPE	sMAPE
GARCH (1,1)-EVT-Copula	17,60127%	0,018177	1,48425%	1,81233%
GARCH (1,2)-EVT-Copula	17,46040%	0,018175	1,48299%	1,81291%
GARCH (2,1)-EVT-Copula	17,34236%	0,018174	1,47992%	1,81371%
GARCH (2,2)-EVT-Copula	15,82071%	0,018167	1,46792%	1,80571%

El mejor modelo para este portafolio es GARCH (1,2)-EVT-Copula, este arroja mejores valores en las métricas RMSE y MAPE, convirtiéndolo en un análisis robusto, en cuando a sMAPE nos arroja el mejor modelo el GARCH (2,1)-EVT-Copula.

En cuanto a el retorno esperado, nos arroja una proyección de 17.46%, en comparación a la teoría de Markowitz que nos arrojó 7.29%, la gran diferencia se da como el modelo GARCH toma la volatilidad condicional, en el último año (Figura 8) presenta grandes picos lo que hace que tome un mayor riesgo y una mayor rentabilidad.

7.8 Benchmark Modelo GARCH Multivariado portafolio de Máximo de Sharpe

Tabla 24

Resumen Estadístico Modelo GARCH-EVT-Cópulas Gaussiana Portafolio Máximo de Sharpe, Fuente: Elaboración Propia.

	RETORNO ESPERADO			
	RETORNO ESPERADO	RSME	MAPE	sMAPE
GARCH (1,1)-EVT-Copula	34,42282%	0,018237	1,99382%	1,71072%
GARCH (1,2)-EVT-Copula	34,15622%	0,018236	1,98570%	1,71212%
GARCH (2,1)-EVT-Copula	33,11235%	0,018231	1,95403%	1,71777%
GARCH (2,2)-EVT-Copula	32,26411%	0,018228	1,92837%	1,72248%

El mejor modelo para este portafolio de Máximo de Sharpe es GARCH (2,2)-EVT-Copula, este arroja mejores valores en las métricas RMSE y MAPE, convirtiéndolo en un análisis robusto, en cuando a sMAPE nos arroja el mejor modelo el GARCH (1,1)-EVT-Copula.

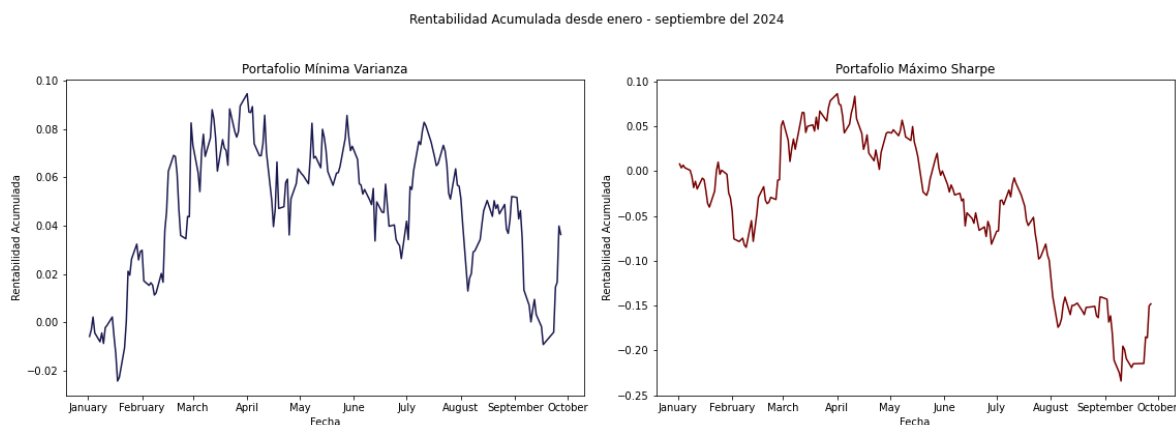
Ahora comparando el retorno esperado, nos arroja una proyección de 32.26%, en comparación a la teoría inicial que nos arrojó 16.50%, esta diferencia de casi el doble de rentabilidad es porque el modelo GARCH toma la volatilidad condicional, y si observamos la figura 8 esta posee grandes picos de volatilidad condicional.

7.9 Rentabilidad Acumulada de los Portafolios

Para tener una visión más clara de la proyección de los modelos proyectados, se analizará como se ha comportado los portafolios de Mínima Varianza y Máximo de Sharpe. Los modelos toman datos desde julio 2019 hasta diciembre del 2023 y proyectan 252 días o un año bursátil, a continuación, se observa un gráfico que muestra la evolución del retorno de ambos portafolios entre los meses enero a septiembre del año 2024, lo que señala 185 días bursátiles.

Figura 9

Rentabilidad Acumulada de Portafolios de Mínima Varianza y Máximo de Sharpe para los meses de Enero a Septiembre del año 2024



Lo que se observa es que el portafolio de Mínima Varianza hasta el momento (30 de septiembre) posee una rentabilidad positiva de 3.63%, teniendo un mínimo de rentabilidad de -2.44% y un pico máximo de 9.47% obtenido en el mes de abril. En cuanto al portafolio de Máximo de Sharpe hasta el 30 de septiembre está obteniendo una rentabilidad negativa de -14.81%, obteniendo la mayor acumulación de perdida el día 10 de septiembre alcanzando un valor de -23.43% y la mayor acumulación de ganancia fue en abril teniendo un saldo a favor de 8.65%.

8. CONCLUSIONES

En este trabajo de investigación se abordó la creación y optimización de portafolios utilizando acciones del mercado chileno, se utilizó la teoría del portafolio de Markowitz y se aplicó diferentes metodologías econométricas y de medición de riesgo. El análisis se centró en dos portafolios: el portafolio de mínima varianza y el portafolio de máxima eficiencia o de Sharpe, utilizando diferentes configuraciones de los modelos predictivos ARIMA, GARCH y sus combinaciones con EVT y Cópulas Multivariadas. A través de este análisis se buscó responder si la implementación de estas técnicas permite mejorar la predicción y gestión del riesgo de portafolios frente a eventos extremos y condiciones de mercado complejas.

En primer lugar, se escogió la teoría de portafolios de Henry Markowitz porque mide la volatilidad con una varianza constante, la cual hace que no sea muy útil a la hora de usarlo en la vida real. Y así es posible ver cómo cambia las proyecciones cuando se utiliza una varianza condicional, en el caso de los resultados cuando se analizó con los modelos ARIMA se proyectó una rentabilidad parecida a la de los portafolios predichos por la teoría de Markowitz ya que ambos usan una varianza constante en sus análisis, pero cuando se compara con los datos reales están lejos de la realidad.

Cuando se analiza con los modelos GARCH, los resultados de se alejan de la teoría de Markowitz, pero si estos datos lo comparamos con los datos reales, poseen una buena proyección en el corto plazo, en los primeros 60 días bursátiles el modelo se ajusta bastante bien a la realidad, ya pasado el tiempo falla considerablemente, teniendo al día bursátil 185 una predicción muy lejos de lo que se esperaba.

Por otro lado, cuando se realizaron los análisis multivariados, los modelos ARIMA siguen fallando, se acercan a lo teórico, pero en la realidad se aleja de lo pronosticado, en

cuanto a los modelos GARCH en el corto plazo se ajusta de mejor manera aún a la realidad, pero comienza a fallar pasado el día bursátil 63, teniendo una diferencia importante con la rentabilidad acumulada hasta la fecha de septiembre del 2024.

Otro hallazgo importante fue la evaluación de las métricas de error utilizadas para comparar los diferentes modelos. Las métricas de error como MAPE, RMSE y sMAPE permitieron identificar que, si bien los modelos lineales como ARIMA presentaban bajos errores en periodos de estabilidad, su capacidad predictiva se deterioraba rápidamente en periodos de alta volatilidad. Los modelos GARCH, en contraste, presentaban mayores errores

Finalmente, es importante destacar que, a pesar de las mejoras obtenidas con el uso de modelos avanzados y técnicas multivariadas, existen ciertas limitaciones que deben ser consideradas. Una de las principales limitaciones es la suposición de estabilidad de las correlaciones en el tiempo.

9. RECOMENDACIONES

Como recomendación puedo decir que sería interesante realizar este análisis utilizando la teoría de Black-Litterman para optimizar los portafolios, así se pueden incluir factores macroeconómicos, que afectan a los mercados financieros.

Otra recomendación es realizar otros análisis de cópulas, por ejemplo, t-student que permite capturar dependencias en las colas, esta característica las hace más flexibles y realistas en comparación con las cópulas Gaussianas.

Y la última recomendación, es aplicar modelos Machine Learning como Redes Neuronales Recurrentes (RNN), Long Short-Term Memory (LSTM) ya que permite capturar patrones no lineales y de largo plazo, así se podría tener predicciones más exactas en el tiempo.

10. REFERENCIAS

- Westerfield, R. W., & Ross, S. (1995). *Finanzas Corporativas*. Ciudad de Mexico: McGraw-Hill.
- Alegre, A. (12 de Enero de 2022). *Rankia*. Recuperado el 24 de Junio de 2022, de <https://www.rankia.cl/blog/analisis-ipsa/3229498-que-empresas-forman-parte-ipsa>
- Aragón, J. R. (2000). *Valor en Riesgo. Aplicación a la Gestión Empresarial*. España: Ediciones Pirámide.
- Banco Santander. (25 de 05 de 2022). *Banco Santander*. Obtenido de <https://www.santander.com/es/stories/guia-para-saber-que-son-las-criptomonedas>
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2000). *Fundamentos de Inversiones*. Porto Alegre: McGraw Hill.
- Castro, L. F. (27 de 09 de 2021). *Rankia*. Obtenido de <https://www.rankia.co/blog/analisis-colcap/3690806-que-son-commodities-caracteristicas-tipos>
- Central, B. (2022). *Estadísticas del Mercado de Derivados y Spot*. Banco Central.
- Central, B. (2022). *Estadísticas del Mercado de Valores de Renta Fija e Intermediación Financiera*. Banco Central. Banco Central.
- Chile, M. d. (19 de Febrero de 2019). *Mutual de Seguros de Chile*. Obtenido de <https://www.mutualdeseguros.cl/novedades/novedades-encuesta-de-ahorro-2018>
- CMF Educa. (s.f.). *Comisión para el Mercado Financiero*. Obtenido de <https://www.cmfchile.cl/educa/621/w3-propertyvalue-1162.html>
- CMF Educa- Portafolio. (s.f.). *Comisión para el Mercado Financiero*. Obtenido de <https://www.cmfchile.cl/educa/621/w3-propertyvalue-1217.html>
- CMF. (s.f.a). *CMF CHILE*. Obtenido de <https://www.cmfchile.cl/educa/621/w3-article-511.html>
- CMF. (S.f.a). *Comisión del Mercado Financiero*. Recuperado el 31 de Mayo de 2022, de https://www.cmfchile.cl/educa/621/w3-propertyname-505.html#glosario_filtro_grupo_m
- Consortio . (s.f.). *Consortio* . Obtenido de <https://web.consortio.cl/entuidioma/finanzas-y-proyectos/posts/para-componer-tu-portafolio-de-inversiones-sigue-siempre-estos-3-pasos-invertir>
- Corporate Finance Institute . (21 de 01 de 2022). *Coporate Finance Institute*. Obtenido de <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/trading-investing/derivatives-market/>
- Estrategias de Inversión. (s.f.). *Estrategias de Inversión* . Obtenido de <https://www.estrategiasdeinversion.com/herramientas/diccionario/analisis-tecnico/covarianza-financiera-t-114>
- Franklin Allen, G. C. (2020). *European Central Bank*. ECB. Obtenido de <https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwp/ecb.wp2374~1f36c32e02.en.pdf>
- Furioc, E. (11 de 09 de 2020). *BBVA NOTICIAS*. Obtenido de <https://www.bbva.com/es/mercado-divisas-que-es-como-funciona/>
- Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2010). *Econometría*. Ciudad de Mexico: McGraw-Hill.

- Jarque, C. M. (1987). A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review*, 55(2). Obtenido de <https://doi.org/10.2307/1403192>
- Madura, J. (2010). *Mercados e Instituciones Financieras* (8 ed.). Santa Fe: Cengage Learning Editores.
- Mallavia Carrera, A. (2020). *Comparativa de mercados over the counter y mercados organizados sobre futuros y opciones*.
- Markowitz, H. (1952). 1952.
- Markowitz, H. (1952). *Efficient diversification of investments*. New York: John Wiley & Sons.
- Merton, R. C. (1995). *A functional perspective of financial intermediation* (Vol. 24). Richmond: Financial Management Association.
- Pensiones, S. d. (2021). *INVERSIÓN DE LOS FONDOS DE PENSIONES*.
- Pensiones, S. d. (s.f.a). *INVERSIÓN DE LOS FONDOS DE PENSIONES*.
- Rodríguez, Á. (2007). El mercado de capitales como alternativa de inversión. *Visión Gerencial*, 105-116.
- Rodriguez, J. (01 de 06 de 2019). *Rankia*. Obtenido de <https://www.rankia.co/blog/analisis-colcap/4265629-mercado-contado-plazos-futuros-opciones>
- Santiago, B. d. (2021). *IPSA cerró 2021 con alza acumulada de 3,14%, monto acumulado del mercado de acciones aumentó en un 32%*.
- Teall, J. L. (2019). *Financial Trading and Investing*. Academic Press.
- Villena, M. (26 de Noviembre de 2020). Estudio U. de Chile y Abif: la educación financiera es baja, pero existe una cultura doméstica. *La Tercera*.
- Wieland, I., Kovács, L., & Savchenko, T. (2020). Conceptual study of the difference between the money market and the capital market. pág. 57.