

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO FÍSICA

Generación de estados ligados en el continuo en guías de onda unidimensionales.

Sofía Catalina Pinto Muñoz

Tesis presentada al Departamento de Física de la Universidad de Técnica
Federico Santa María para optar al grado académico de Licenciado en
Ciencias con Mención en Física

Septiembre 2022

Valparaíso, Chile

Profesores Guía:
Dr. Pedro Orellana
Dr. Rafael Molina

Agradecimientos

A mis dos profesores guías, Dr. Pedro Orellana y Dr. Rafael Molina, por la paciencia, el compromiso y la orientación que me entregaron durante el desarrollo de este trabajo.

A mi familia, por apoyarme siempre y poner cara de que entendían cuando les comentaba sobre algo que me emocionaba.

A todos mis amigos y compañeros, por compartir esta parte de su vida y carrera conmigo, siempre con una sonrisa.

Por último, agradecer a los proyectos Fondecyt 1201876 y PGC2018-094180-BI00 por hacer este trabajo posible.

Resumen

Durante las últimas décadas el estudio de los estados ligados en el continuo (BICs por sus siglas en inglés) ha alcanzado un punto de auge atrayendo la atención principalmente en los campos de la óptica y la fotónica [1]. El estudio de su generación, propiedades y manejo a voluntad promete grandes avances para la creación de dispositivos en distintos campos de la física, lo que ha derivado en una gran cantidad de trabajos sobre el tema en diversas áreas de investigación. Llama particularmente la atención que la mayoría de los sistemas utilizados en los que se estudia la formación de BICs trabajan en base a la simetría absoluta del sistema.

En este trabajo se ha estudiado la formación de BICs en sistemas de transporte electrónico y/o fotónico compuestos por guías de onda unidimensionales con forma de cruces, utilizando largos conmensurables para los brazos superiores e inferiores de las mismas. Además, se ha investigado el efecto que tiene sobre la formación de dichos estados la distancia utilizada entre las intersecciones consecutivas y su conmensurabilidad con los largos, así como la cantidad de cruces presentes en el sistema. Analizamos primero el caso simple de una cruz y se ha obtenido una generalización para un arreglo periódico de N cruces idénticas e igualmente espaciadas. Para esto se ha resuelto la ecuación de Helmholtz con las condiciones de borde adecuadas al sistema y se han comparado de forma numérica y gráfica cantidades relevantes para el estudio, cómo la transmisión y la densidad de estados de los sistemas.

Los resultados muestran que es posible la formación de BICs si los largos de los brazos superiores e inferiores de las cruces son conmensurables entre sí o en el caso de que el largo de dichos brazos (iguales) sea conmensurable a la distancia entre las cruces.

Índice general

1. Introducción	2
2. Conceptos Previos	4
2.1. BICs	4
2.2. Matriz de Transferencia	5
2.2.1. ¿Qué es la matriz de transferencia?	5
2.2.2. Amplitudes de Reflexión y Transmisión	7
2.2.3. Multiplicación de Matrices de Transferencia	8
2.2.4. Identidad de Chebyshev	10
2.2.5. Transmisión a través de N Barreras Idénticas	11
3. Sistemas Estudiados	12
3.1. Una cruz	12
3.1.1. Modelo	12
3.1.2. Desarrollo y Resultados	13
3.2. N cruces	15
3.2.1. Modelo	15
3.2.2. Desarrollo y Resultados	16
3.2.3. Caso Particular: Dos Cruces	19
4. Análisis y Discusiones	22
4.0.1. Una Cruz	22
4.0.2. N Cruces	26
4.0.3. Dos Cruces	30
5. Conclusiones	35
Referencias	36
Apéndices	38
A. Otras Ecuaciones	38
A1. Dos cruces: Densidades de Estado	38

Capítulo 1

Introducción

En 1929 John von Neumann y Eugene Wigner propusieron por primera vez en la historia la existencia de los estados ligados en el continuo (BICs) en el contexto de la mecánica cuántica [2]. En su trabajo encontraron una solución particular a la ecuación de Schrödinger en que un estado ligado de energía discreta y positiva dentro del espectro continuo se forma como resultado de múltiples interferencias provenientes de un potencial oscilatorio resultando en la supresión absoluta de la filtración de energía [3]. A pesar de que el modelo particular propuesto por estos científicos no ha sido implementado de forma experimental, el descubrimiento ha cimentado la base para el desarrollo de la investigación de estos estados en diversas áreas de la física, como por ejemplo la acústica y la óptica.

Posterior a este primer descubrimiento el estudio de esta temática perdió fuerza. En la década de los 70 y los años posteriores existieron diversos estudios teóricos que presentaron estados energéticos con las características ya mencionadas, pero éstos no relacionaron los resultados obtenidos con el fenómeno de los BICs. [3].

Posteriormente, en 1992, Capasso, Sirtori, Faist et al. reportaron evidencia directa de la formación de estos estados en heteroestructuras semiconductoras [4]. Sin embargo, no fue hasta el año 2008, en que Marinica et. al. realizaron estudios sobre la física de estos particulares estados en sistemas ópticos [5], que este fenómeno fue medido de forma experimental por primera vez.

Durante la última década la investigación de los BICs ha tomado gran relevancia en variados campos de la física, entre los que destacan la fotónica y la

electrónica, debido principalmente a sus aplicaciones en la fabricación de diversos dispositivos [6]. Lo anterior ha derivado en el estudio de distintos sistemas físicos que permitan la formación de estos exóticos estados. En dichos estudios ha predominado hasta la actualidad la simetría de los sistemas como base para la creación de BICs, ya sea en términos energéticos o espaciales. En este trabajo buscamos determinar si es posible la formación de estos estados para sistemas que no presenten simetría absoluta.

Capítulo 2

Conceptos Previos

2.1. BICs

Los BICs son ondas que permanecen localizadas y confinadas a pesar de coexistir con espectros continuos de ondas irradiadas que transportan energía fuera del sistema [7]. En la práctica los sistemas que presentan estados resonantes acoplados a espectros continuos de radiación filtran y pierden su energía con el paso del tiempo, sin embargo los BICs son excepciones a esta regla. En los BICs la energía resonante está completamente localizada a pesar que el estado se encuentra acoplado al espectro de radiación continuo [3]. En la Figura 2.1.1 [7] se aprecia el espectro de frecuencia de un sistema abierto común.

De forma fundamental, los BICs se originan a partir del fenómeno de interferencia destructiva cuando, por la superposición de dos o más ondas, las pérdidas por radiación se anulan [3].

Dado que las ondas provenientes del infinito en experimentos de dispersión no pueden excitar los BICs al encontrarse estos completamente desacoplados del continuo de frecuencias irradiadas (a diferencia de las resonancias simples que si resultan excitadas) es que se puede considerar que los BICs son resonancias que no filtran su energía y con ancho cero [7]

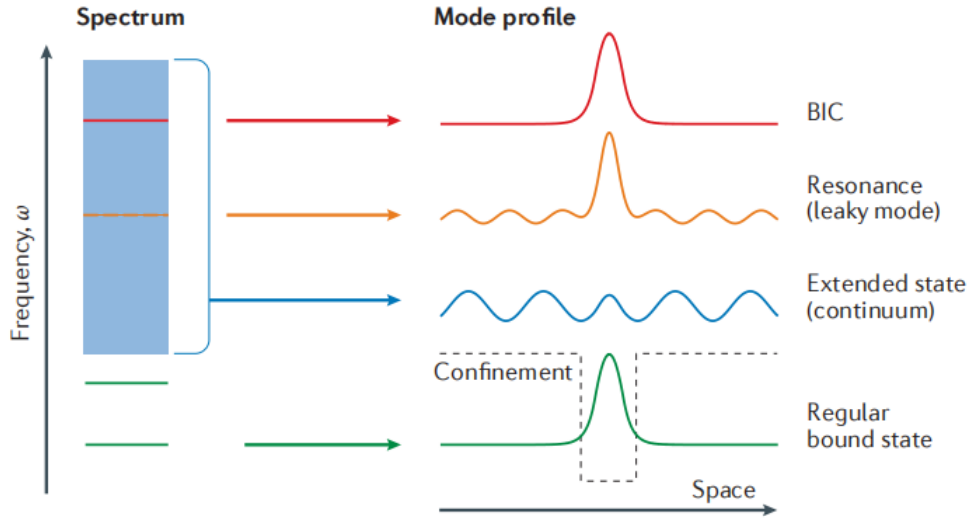


Figura 2.1.1: Espectro de frecuencia de un sistema abierto, consistente de un continuo de estados extendidos (azul), estados ligados discretos (verdes), resonancias ligadas al continuo que filtran su energía (naranja) y estados ligados en el continuo que permanecen localizados sin irradiar (rojo). Imagen extraída de Ref. [7].

Los BICs están intrínsecamente relacionados a otro fenómeno físico: las resonancias de Fano. Las resonancias de Fano son generadas a partir de la interferencia destructiva y constructiva entre el estado localizado discreto y el estado continuo [8] y, a diferencia de la resonancia Lorentziana tradicional, presenta un perfil espectral agudo y antisimétrico [9]. Los BICs ideales y teóricamente calculados se manifiestan como un colapso de la resonancia de Fano, lo que genera que la misma desaparezca del espectro [3].

2.2. Matriz de Transferencia

2.2.1. ¿Qué es la matriz de transferencia?

Supongamos un electrón que se desplaza de forma unidimensional en un potencial localizado. El movimiento de una partícula de masa m bajo estas condiciones está gobernado por la ecuación de Schrödinger (independiente del tiempo) [10]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + [V(x) - E]\Psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

Supongamos, por simplicidad, que el potencial tiene la forma:

$$V(x) = \begin{cases} V(x) & \text{para } 0 \leq x \leq l \\ 0 & \text{para } x < 0 \\ & x > l \end{cases} \quad (2.2)$$

La partícula puede acercarse a la muestra, que representa al potencial, por ambos lados, como se muestra en la Figura 2.2.1 y experimentará dispersión, es decir, al interactuar con la muestra puede reflejarse o transmitirse.



Figura 2.2.1: Dispersión a una muestra caracterizada por el potencial $V(x)$.

Asumimos que las soluciones de la ecuación de Schrödinger a ambos lados son superposiciones de ondas planas

$$\Psi_L(x) = \Psi_L^+(x) + \Psi_L^-(x), \quad x \leq 0 \quad (2.3)$$

$$\Psi_R(x) = \Psi_R^+(x) + \Psi_R^-(x), \quad x \geq l \quad (2.4)$$

De esta forma, las componentes de las funciones de onda antes descritas pueden expresarse como:

$$\Psi_L^+(x) = Ae^{+iqx} \quad (2.5)$$

$$\Psi_L^-(x) = Be^{-iqx} \quad (2.6)$$

$$\Psi_R^+(x) = Ce^{+iqx} \quad (2.7)$$

$$\Psi_R^-(x) = De^{-iqx} \quad (2.8)$$

La matriz de transferencia \mathbf{M} expresa los coeficientes de la función de onda de la derecha en términos de los coeficientes de la izquierda [10]. De forma

matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} \Psi_R^+(x=l) \\ \Psi_R^-(x=l) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \Psi_L^+(x=0) \\ \Psi_L^-(x=0) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Además, los coeficientes de la matriz de transferencia \mathbf{M} se etiquetan como:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

A partir de este punto y en lo que sigue de este estudio, trabajaremos con matrices de transferencia que cumplen con la conservación de la densidad de corriente y que poseen simetría de inversión temporal [10], lo que se traduce (entre otras condiciones) en que $\text{Tr } \mathbf{M}$ toma valor real y

$$\det \mathbf{M} = 1 \quad (2.11)$$

2.2.2. Amplitudes de Reflexión y Transmisión

Asumamos que la partícula se aproxima a la muestra desde la derecha. Para esta situación y normalizando la incidencia tenemos:

$$\Psi_L^+ = 0 \quad (2.12)$$

$$|\Psi_R^-|^2 = 1 \quad (2.13)$$

Describiremos entonces la onda transmitida y la reflejada respectivamente como:

$$\Psi_L^-(x=0) = t\Psi_R^-(x=l) \quad (2.14)$$

$$\Psi_R^+(x=l) = r\Psi_R^-(x=l) \quad (2.15)$$

A los coeficientes t y r se les llama amplitudes de transmisión y de reflexión respectivamente [10] y cumplen:

$$|t|^2 + |r|^2 = 1 \quad (2.16)$$

Comparando esto con lo obtenido en la ecuación 2.9 obtenemos las siguientes relaciones:

$$t = \frac{1}{M_{22}} \quad (2.17)$$

$$r = \frac{M_{12}}{M_{22}} \quad (2.18)$$

Si analizamos ahora una dispersión por una partícula proveniente del lado izquierdo obtenemos que las nuevas amplitudes de transmisión y reflexión (t' y r') son:

$$t' = M_{11} - \frac{M_{21}M_{12}}{M_{22}} \quad (2.19)$$

$$r' = -\frac{M_{21}}{M_{22}} \quad (2.20)$$

Invirtiendo las relaciones obtenidas para las amplitudes podemos expresar la matriz de transferencia \mathbf{M} como:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} t' - \frac{rr'}{t} & \frac{r}{t} \\ -\frac{r'}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Por último, se definen los coeficientes de transmisión T y de reflexión R del sistema como la probabilidad de que la onda incidente se transmita o se refleje respectivamente, y se calculan como:

$$T = |t|^2 \quad (2.22)$$

$$R = |r|^2 \quad (2.23)$$

2.2.3. Multiplicación de Matrices de Transferencia

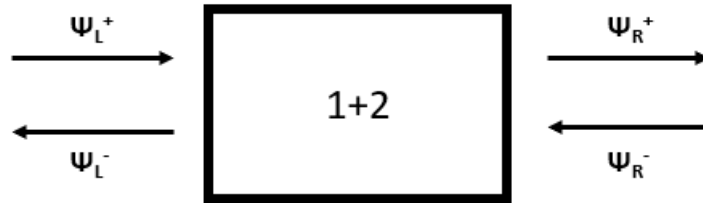


Figura 2.2.2: Dispersión en un sistema compuesto por dos muestras individuales.

Supongamos que un electrón atraviesa un sistema compuesto por dos muestras independientes. La primera muestra corresponde a un potencial $V_1(x)$ no nulo en $a < x \leq b$ y está matemáticamente representada por la matriz de transferencia \mathbf{M}_1 , mientras que la segunda muestra corresponde a un potencial $V_2(x)$ no nulo en $b \leq x < c$ y está matemáticamente representada por la matriz de transferencia \mathbf{M}_2 . Expresamos la función de onda en tres regiones de interés

$$\Psi_L(x) = \Psi_L^+(x) + \Psi_L^-(x), \quad x \leq a \quad (2.24)$$

$$\Psi(x=b) = \Psi^+(b) + \Psi^-(b), \quad x = b \quad (2.25)$$

$$\Psi_R(x) = \Psi_R^+(x) + \Psi_R^-(x), \quad x \geq c \quad (2.26)$$

Procedemos entonces a describir de forma matricial el proceso que experimenta la partícula al atravesar cada una de las muestras, siendo respectivamente para la primera y la segunda muestra de las formas:

$$\begin{pmatrix} \Psi^+(b) \\ \Psi^-(b) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} \Psi_L^+(a) \\ \Psi_L^-(a) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_R^+(c) \\ \Psi_R^-(c) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} \Psi^+(b) \\ \Psi^-(b) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Reemplazando lo expresado en 2.27 en el lado derecho de 2.28 tenemos

$$\begin{pmatrix} \Psi_R^+(c) \\ \Psi_R^-(c) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} \Psi_L^+(a) \\ \Psi_L^-(a) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Es decir, la matriz de transferencia \mathbf{M} que describe este sistema compuesto de dos muestras como el que se presenta en la Figura 2.2.2 es igual a el producto de las matrices \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 que describen cada una de las muestras de forma independientes. Expresado en forma de producto

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \quad (2.30)$$

De forma general, un sistema que esté compuesto por N muestras individuales, se representará con una matriz de transferencia \mathbf{M} que será igual al producto total de las N matrices de transferencia correspondientes a cada una de las

muestras estudiadas [10]. Expresado como producto matricial esto es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_N \quad (2.31)$$

2.2.4. Identidad de Chebyshev

Supondremos ahora un caso especial de lo mencionado anteriormente en que todas las matrices de transferencia son iguales, es decir:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = \dots = \mathbf{M}_N = \mathbf{M} \quad (2.32)$$

El objetivo es expresar los coeficientes de la matriz de transferencia general \mathbf{M}^N en términos de los coeficientes de la matriz \mathbf{M} para una sola de las muestras. Lo anterior se logra utilizando la Identidad de Chebyshev [11], la cual plantea que, dada una matriz de la forma:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

cuyos valores propios son:

$$\lambda_1 = e^{iql} \quad (2.34)$$

$$\lambda_2 = e^{-iql} \quad (2.35)$$

La N -ésima potencia de dicha matriz está dada por:

$$\mathbf{M}^N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} aU_{N-1} - U_{N-2} & bU_{N-1} \\ cU_{N-1} & dU_{N-1} - U_{N-2} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Donde U_N se define en función de q como:

$$U_N = \frac{\sin(N+1)ql}{\sin ql} \quad (2.37)$$

2.2.5. Transmisión a través de N Barreras Idénticas

De la relación planteada en 2.17 podemos reescribir el coeficiente de transmisión del sistema como:

$$T = |t|^2 = \frac{|t|^2}{|t|^2 + |r|^2} = \frac{1}{1 + \frac{|r|^2}{|t|^2}} \quad (2.38)$$

Además, de 2.21 se tiene que la relación entre los coeficientes de la matriz de transferencia y las amplitudes de reflexión y transmisión implican:

$$M_{12} = \frac{r}{t} \quad (2.39)$$

Luego, para una matriz de transferencia que resulta del producto de N matrices idénticas de transferencia individuales y utilizando lo mostrado en 2.36 podemos expresar el coeficiente de transmisión final como [10]:

$$T_N = \frac{1}{1 + |M_{12}|^2 U_{N-1}^2} \quad (2.40)$$

Donde M_{12} corresponde al coeficiente de la matriz de transferencia individual que representa una sola barrera.

Capítulo 3

Sistemas Estudiados

3.1. Una cruz

3.1.1. Modelo

Estudiamos un sistema compuesto por guías de onda unidimensionales en forma de cruz como se muestra en la Figura 3.1.1, considerando partículas que inciden desde el lado izquierdo del sistema. El sistema está abierto en sus brazos horizontales y permanece cerrado en las terminaciones de los brazos verticales, siendo los largos de estos últimos L^+ (superior) y L^- (inferior).

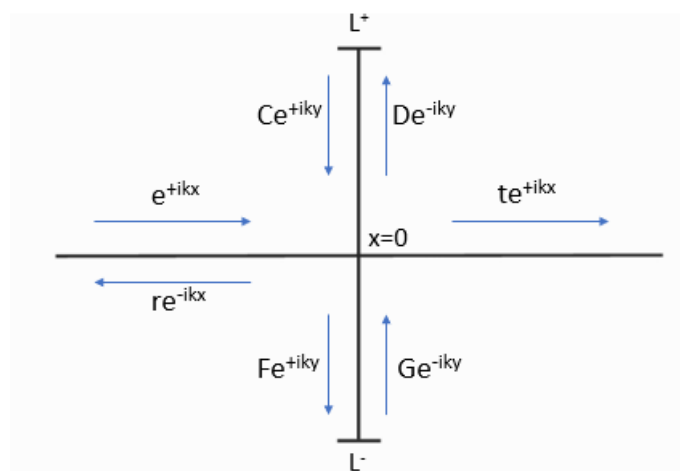


Figura 3.1.1: Sistema de guía de onda unidimensional en forma de cruz.

Para facilitar el estudio de este sistema lo dividiremos en cuatro secciones de interés: el brazo izquierdo corresponde a la sección 1, el derecho a la sección 2, el superior a la sección 3 y el inferior a la sección 4. Considerando soluciones

de onda plana podemos escribir las funciones de onda en cada una de las cuatro secciones como

$$\Psi_1(x) = e^{ikx} + re^{-ikx} \quad (3.1)$$

$$\Psi_2(x) = te^{ikx} \quad (3.2)$$

$$\Psi_3(y) = Ce^{iky} + De^{-iky} \quad (3.3)$$

$$\Psi_4(y) = Fe^{iky} + Ge^{-iky} \quad (3.4)$$

3.1.2. Desarrollo y Resultados

Para determinar los valores de los coeficientes en las funciones de onda enumeradas anteriormente utilizamos las condiciones de borde del problema. En primer lugar las funciones de ondas deben ser continuas en $x = y = 0$, es decir:

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = \Psi_3(0) = \Psi_4(0) \implies t = 1 + r = F + G = C + D \quad (3.5)$$

Además las funciones de ondas en las secciones 3 y 4 deben anularse en los extremos de los brazo correspondientes:

$$\Psi_3(L^+) = 0 \implies D = -Ce^{2ikL^+} \quad (3.6)$$

$$\Psi_4(-L^-) = 0 \implies F = -Ge^{2ikL^-} \quad (3.7)$$

Por último, la diferencia de las derivadas de las funciones de ondas en la dirección horizontal y la de las funciones de onda en dirección vertical, evaluadas en el punto de unión, deben ser iguales:

$$\left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right|_{0^+} - \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right|_{0^-} = \left. \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} \right|_{0^+} - \left. \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} \right|_{0^-} \implies t + r - 1 = C + G - D - F \quad (3.8)$$

Considerando las ecuaciones 3.5 a la 3.8 podemos resolver para los coeficientes t , r , A , B , C y D , obteniendo:

$$t = \frac{2}{2 - i[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]} \quad (3.9)$$

$$r = \frac{2}{2 - i[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]} - 1 \quad (3.10)$$

$$F = \frac{2e^{ikL^-}}{4i\sin(kL^-) + 2\sin(kL^-)[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]} \quad (3.11)$$

$$G = \frac{-2e^{-ikL^-}}{4i\sin(kL^-) + 2\sin(kL^-)[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]} \quad (3.12)$$

$$C = \frac{-2e^{-ikL^+}}{4i\sin(kL^+) + 2\sin(kL^+)[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]} \quad (3.13)$$

$$D = \frac{2e^{ikL^+}}{4i\sin(kL^+) + 2\sin(kL^+)[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]} \quad (3.14)$$

Una vez obtenidos los coeficientes podemos obtener la probabilidad total de transmisión del sistema como:

$$T = |t|^2 = \frac{4}{4 + [\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]^2} \quad (3.15)$$

Además calculamos la densidad de estados en los brazos verticales, siendo para el brazo superior (sección 3) y para el inferior (sección 4) respectivamente:

$$P_3 = \int_{y=0}^{y=L^+} |\Psi_3|^2 dy = \frac{-2\cot(kL^+) + 2kL^+ \csc(kL^+)^2}{k[4 + [\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]^2]} \quad (3.16)$$

$$P_4 = \int_{y=-L^-}^{y=0} |\Psi_4|^2 dy = \frac{-2\cot(kL^-) + 2kL^- \csc(kL^-)^2}{k[4 + [\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]^2]} \quad (3.17)$$

De esta forma se obtiene la densidad total de estados en la sección transversal del sistema como la suma de los dos resultados anteriores, con lo que se obtiene:

$$P_T = P_3 + P_4 = -\frac{2[\cot(kL^-) + \cot(kL^+) - k(L^- \csc(kL^-)^2 + L^+ \csc(kL^+)^2)]}{k[4 + [\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]^2]} \quad (3.18)$$

3.2. N cruces

3.2.1. Modelo

Trabajamos ahora con la generalización del sistema anterior de una cruz a N cruces. Se tiene un sistema compuesto por guías de onda unidimensionales en forma de cruces. En total el sistema descrito cuenta con N cruces idénticas separadas por una distancia a como se muestra en la Figura 3.2.1

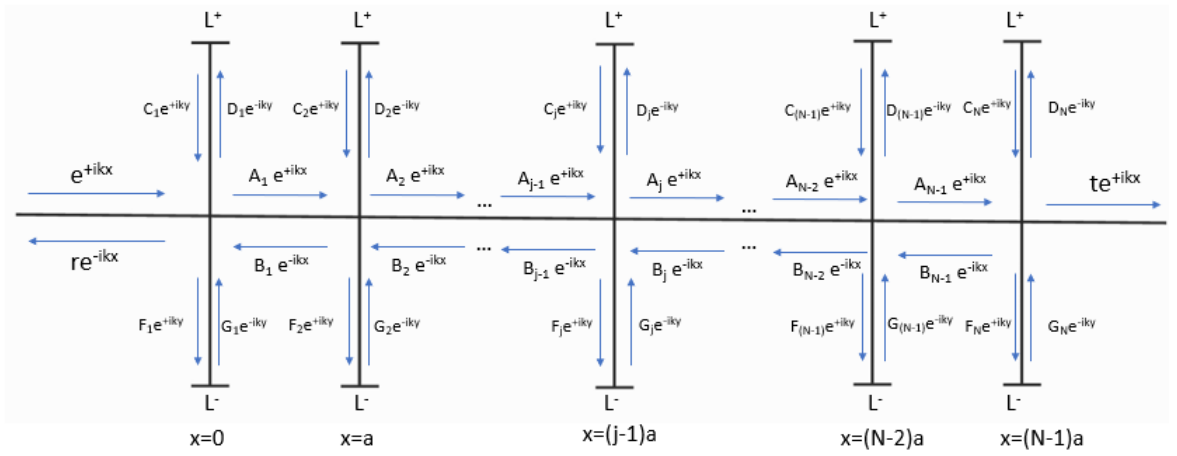


Figura 3.2.1: Sistema compuesto por N cruces idénticas separadas por una distancia a .

Al igual que en el caso ya estudiado, el sistema está abierto en sus brazos horizontales y permanece cerrado en las terminaciones de los brazos verticales, siendo los largos de estos últimos L^+ (superiores) y L^- (inferiores). Utilizaremos el método de la matriz de transferencia (vease el capítulo Conceptos Previos), por lo que centramos nuestro estudio en la j -ésima cruz del sistema (Figura 3.2.2) que se encuentra en la posición $x = (j - 1)a$.

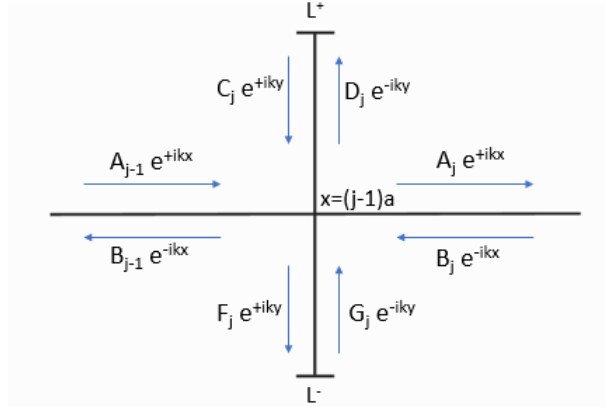


Figura 3.2.2: J-ésima cruz del sistema, en la posición $x=(j-1)a$.

Análogamente a lo realizado en el caso de una cruz dividimos en cuatro secciones de interés: el brazo izquierdo está descrito por la función de onda $\Psi_{j-1}(x)$, el derecho por la función de onda $\Psi_j(x)$, el superior por la función de onda $\Phi_j^u(y)$ y el inferior por la función de onda $\Phi_j^d(y)$. Considerando soluciones de onda plana podemos escribir las funciones de onda en cada una de las cuatro secciones como

$$\Psi_{j-1}(x) = A_{j-1}e^{ikx} + B_{j-1}e^{-ikx} \quad (3.19)$$

$$\Psi_j(x) = A_j e^{ikx} + B_j e^{-ikx} \quad (3.20)$$

$$\Phi_j^u(y) = C_j e^{iky} + D_j e^{-iky} \quad (3.21)$$

$$\Phi_j^d(y) = F_j e^{iky} + G_j e^{-iky} \quad (3.22)$$

3.2.2. Desarrollo y Resultados

Nuevamente utilizamos las condiciones de borde del problema. La primera condición implica que las funciones de onda deben ser continuas en $x = (j-1)a$ e $y = 0$, es decir:

$$A_{j-1}e^{ik(j-1)a} + B_{j-1}e^{ik(j-1)a} = A_j e^{ik(j-1)a} + B_j e^{ik(j-1)a} = F_j + G_j = C_j + D_j \quad (3.23)$$

Las funciones de ondas en las secciones 3 y 4 deben anularse en los extremos de los brazo correspondientes:

$$\Phi_j^u(L^+) = 0 \implies D_j = -C_j e^{2ikL^+} \quad (3.24)$$

$$\Phi_j^d(-L^-) = 0 \implies F_j = -G_j e^{2ikL^-} \quad (3.25)$$

Por último, la diferencia de las derivadas de las funciones de ondas en la dirección horizontal y la de las funciones de onda en dirección vertical, evaluadas en el punto de unión, deben ser iguales:

$$A_j e^{ik(j-1)a} - B_j e^{ik(j-1)a} - A_{j-1} e^{ik(j-1)a} + B_{j-1} e^{ik(j-1)a} = C_j - D_j - F_j + G_j \quad (3.26)$$

Hacemos los siguientes cambios de variable de tal forma que tendremos:

$$A_j e^{ikja} = A'_j \quad \forall j \quad (3.27)$$

$$B_j e^{ikja} = B'_j \quad \forall j \quad (3.28)$$

De esta forma podemos reescribir el sistema de ecuaciones formado por 3.23 y 3.26 en forma matricial utilizando el método de la matriz de transferencia:

$$\begin{pmatrix} A'_j \\ B'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{\alpha}{2})e^{ika} & \frac{\alpha}{2}e^{ika} \\ -\frac{\alpha}{2}e^{-ika} & (1 - \frac{\alpha}{2})e^{-ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_{j-1} \\ B'_{j-1} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Así, la matriz de transferencia que caracteriza este sistema es:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} (1 + \frac{\alpha}{2})e^{ika} & \frac{\alpha}{2}e^{ika} \\ -\frac{\alpha}{2}e^{-ika} & (1 - \frac{\alpha}{2})e^{-ika} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Donde hemos utilizado por simplicidad la expresión

$$\alpha = \frac{1 + e^{2ikL^+}}{1 - e^{2ikL^+}} + \frac{1 + e^{2ikL^-}}{1 - e^{2ikL^-}} = -i[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)] \quad (3.31)$$

Para un sistema compuesto por N de estas cruces como el mostrado en la Figura 3.2.1 la matriz de transferencia total será igual a la N-ésima potencia

de la matriz \mathbf{M}_1 :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1^N = \begin{pmatrix} (1 + \frac{\alpha}{2})e^{ika} & \frac{\alpha}{2}e^{ika} \\ -\frac{\alpha}{2}e^{-ika} & (1 - \frac{\alpha}{2})e^{-ika} \end{pmatrix}^N \quad (3.32)$$

De esta expresión determinamos que $\det \mathbf{M}_1 = 1$ y que los valores propios son:

$$\lambda = \cos(ka) + \frac{i\alpha \sin(ka)}{2} \pm \sqrt{[\cos(ka) - \frac{|\alpha| \sin(ka)}{2}]^2 - 1} \quad (3.33)$$

Comparando esta expresión con la esperada para los valores propios de la matriz de transferencia:

$$\lambda = e^{\pm iqa} \quad (3.34)$$

Podemos expresar el coseno de qa como:

$$\cos(qa) = \cos(ka) + \frac{i\alpha \sin(ka)}{2} = \cos(ka) + \frac{[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)] \sin(ka)}{2} \quad (3.35)$$

Por ende, tenemos que

$$qa = \cos^{-1}[\cos(ka) + \frac{[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)] \sin(ka)}{2}] \quad (3.36)$$

Utilizando la identidad de Chebyshev (vease el capítulo Conceptos Previos) obtenemos la siguiente expresión para la matriz de transferencia final:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{\alpha}{2})e^{ika}U_{N-1} - U_{N-2} & \frac{\alpha}{2}e^{ika}U_{N-1} \\ -\frac{\alpha}{2}e^{-ika}U_{N-1} & (1 - \frac{\alpha}{2})e^{-ika}U_{N-1} - U_{N-2} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Donde U_N está definido como:

$$U_N = \frac{\sin(N+1)qa}{\sin qa} \quad (3.38)$$

Luego, utilizando la ecuación 2.40 obtenemos la transmisión final para un sistema compuesto por N cruces:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1 + \left[\frac{|\alpha| \sin(Nqa)}{2 \sin(qa)} \right]^2} \\ &= \frac{1}{\frac{(\cot(kL^+) + \cot(kL^-))^2 \sin^2\left(N \cos^{-1}\left(\frac{1}{2} \sin(ak)(\cot(kL^+) + \cot(kL^-)) + \cos(ak)\right)\right)}{4\left(1 - \left(\frac{1}{2} \sin(ak)(\cot(kL^+) + \cot(kL^-)) + \cos(ak)\right)^2\right)} + 1} \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.2.3. Caso Particular: Dos Cruces

Consideramos ahora un caso particular del sistema anterior donde $N=2$. El sistema general se reduce al que se muestra en la Figura 3.2.3.

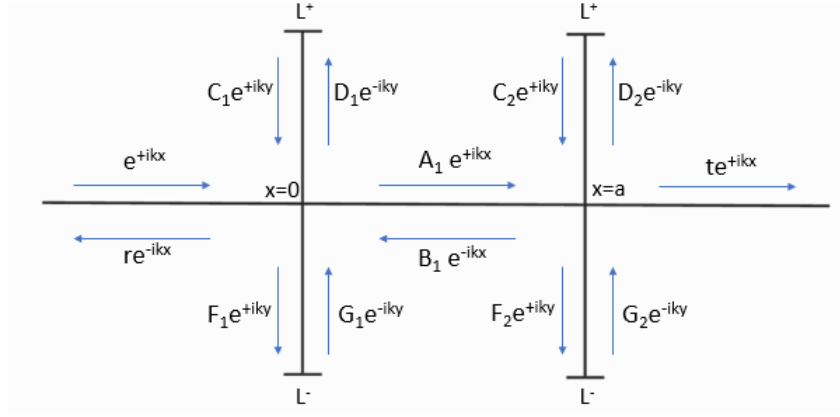


Figura 3.2.3: Sistema formado por dos cruces idénticas separadas por una distancia a .

De acuerdo con la ecuación 3.39 la transmisión de este sistema se reduce a:

$$T = |t|^2 = \frac{1}{1 + (\cos(ka)[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)] + \frac{[\cot(kL^+) + \cot(kL^-)]^2 \sin(ka)}{2})^2} \quad (3.40)$$

Nos proponemos ahora calcular la densidad de estados en cada una de las dos cruces y en la región intermedia de las mismas. Utilizando las condiciones de borde planteadas en las ecuaciones 3.23 a la 3.26 y adaptándolas para el nuevo sistema, despejamos los coeficientes necesarios obteniendo:

$$A = t \left(\frac{2 - \alpha}{2} \right) \quad (3.41)$$

$$B = \frac{\alpha}{2} t e^{2ika} \quad (3.42)$$

$$C_1 = \frac{t(2 - \alpha + \alpha e^{2ika})}{2(1 - e^{2ikL_+})} \quad (3.43)$$

$$D_1 = \frac{-t e^{2ikL_+} (2 - \alpha + \alpha e^{2ika})}{2(1 - e^{2ikL_+})} \quad (3.44)$$

$$G_1 = \frac{t(2 - \alpha + \alpha e^{2ika})}{2(1 - e^{2ikL_{-+}})} \quad (3.45)$$

$$F_1 = \frac{-te^{2ikL^-}(2 - \alpha + \alpha e^{2ika})}{2(1 - e^{2ikL^-})} \quad (3.46)$$

$$C_2 = \frac{te^{ika}}{1 - e^{2ikL^+}} \quad (3.47)$$

$$D_2 = \frac{-te^{2ikL^+}e^{ika}}{1 - e^{2ikL^+}} \quad (3.48)$$

$$G_2 = \frac{te^{ika}}{1 - e^{2ikL^-}} \quad (3.49)$$

$$D_2 = \frac{-te^{2ikL^-}e^{ika}}{1 - e^{2ikL^-}} \quad (3.50)$$

Notamos que, si bien todos estos coeficientes están escritos en función de t , no es necesario conocer este parámetro para calcular las densidades de estado, ya que utilizamos $|t|^2$. Así, la densidad de estados en la región intermedia de las dos cruces está dada por:

$$D_m = \int_{x=0}^{x=a} \left[\frac{2 + |\alpha|^2}{2} + \frac{-|\alpha|^2 - 2\alpha}{4} e^{2ik(x-a)} + \frac{-|\alpha|^2 + 2\alpha}{4} e^{-2ik(x-a)} \right] |t|^2 dx \quad (3.51)$$

(Por simplicidad, las fórmulas completas de estas densidades de estado no han sido incluidas en el texto principal, referase a la sección Apéndice.) La densidad de estados en la primera cruz viene dada por:

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_{y=-L^-}^{y=L^+} |\Psi_1|^2 dy \\ &= \int_{y=0}^{y=L^+} |\Psi_1^A|^2 dy + \int_{y=-L^-}^{y=0} |\Psi_1^B|^2 dy \end{aligned} \quad (3.52)$$

Donde Ψ_1^A corresponde a la función de onda en el brazo superior y Ψ_1^B a la función de onda en el brazo inferior, siendo sus valores cuadráticos respectivos:

$$|\Psi_1^A|^2 = \frac{|t|^2 [2 - 2\cos(2k(y - L^+))] [2 - 2|\alpha|\sin(2ka) + |\alpha|^2(1 - \cos(2ka))]}{2[2 - 2\cos(2kL^+)]} \quad (3.53)$$

$$|\Psi_1^B|^2 = \frac{|t|^2 [2 - 2\cos(2k(y - L^-))] [2 - 2|\alpha|\sin(2ka) + |\alpha|^2(1 - \cos(2ka))]}{2[2 - 2\cos(2kL^-)]} \quad (3.54)$$

Por último la densidad de estados en la segunda cruz viene dada por:

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \int_{y=-L^-}^{y=L^+} |\Psi_2|^2 dy \\
 &= \int_{y=0}^{y=L^+} |\Psi_2^A|^2 dy + \int_{y=-L^-}^{y=0} |\Psi_2^B|^2 dy
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Donde nuevamente Ψ_2^A corresponde a la función de onda en el brazo superior y Ψ_2^B a la función de onda en el brazo inferior, siendo sus valores cuadráticos respectivos:

$$|\Psi_2^A|^2 = \frac{|t|^2 [1 - \cos(2k(y - L^+))]}{1 - \cos(2kL^+)} \tag{3.56}$$

$$|\Psi_2^B|^2 = \frac{|t|^2 [1 - \cos(2k(y - L^-))]}{1 - \cos(2kL^-)} \tag{3.57}$$

Capítulo 4

Análisis y Discusiones

Para analizar los resultados obtenidos haremos los siguientes cambios de variable:

$$L^+ = n + \frac{\Delta}{2} \quad (4.1)$$

$$L^- = m - \frac{\Delta}{2} \quad (4.2)$$

$$a = l \pm \nu \quad (4.3)$$

Siendo n, m, l números enteros. Con los cambios de variable mencionados podremos trabajar la conmensurabilidad de los largos superior e inferior y estudiar el efecto de la distancia entre las cruces. Además, por simplicidad, trabajaremos con $\frac{k}{\pi}$.

4.0.1. Una Cruz

Para el sistema estudiado compuesto por una cruz obtuvimos las ecuaciones 3.15 para la transmisión total del sistema y 3.18 para la densidad de estados en la sección transversal. Con los cambios correspondientes podemos reescribir la ecuación 3.15 como:

$$T = |t|^2 = \frac{4\sin^2(\pi k(n + \frac{\Delta}{2}))\sin^2(\pi k(m - \frac{\Delta}{2}))}{4\sin^2(\pi k(n + \frac{\Delta}{2}))\sin^2(\pi k(m - \frac{\Delta}{2})) + \sin^2(\pi k(n + m))} \quad (4.4)$$

De la expresión anterior podemos deducir que, cuando Δ es cero habrá resonancias de Fano simétricas para los valores de k tales que:

$$k = \frac{s}{n} \quad \mathbf{y/o} \quad k = \frac{p}{m} \quad \text{con} \quad \frac{s}{n} \neq \frac{p}{m} \quad \forall s, p \quad (4.5)$$

Donde s y p son números enteros. Por otro lado, el valor de la transmisión será indeterminado para $\Delta = 0$ (un BIC) e igual a 1 para $\Delta \approx 0$ (un cuasi-BIC) en los valores de k que cumplan:

$$k = \frac{s}{n} = \frac{p}{m} \quad (4.6)$$

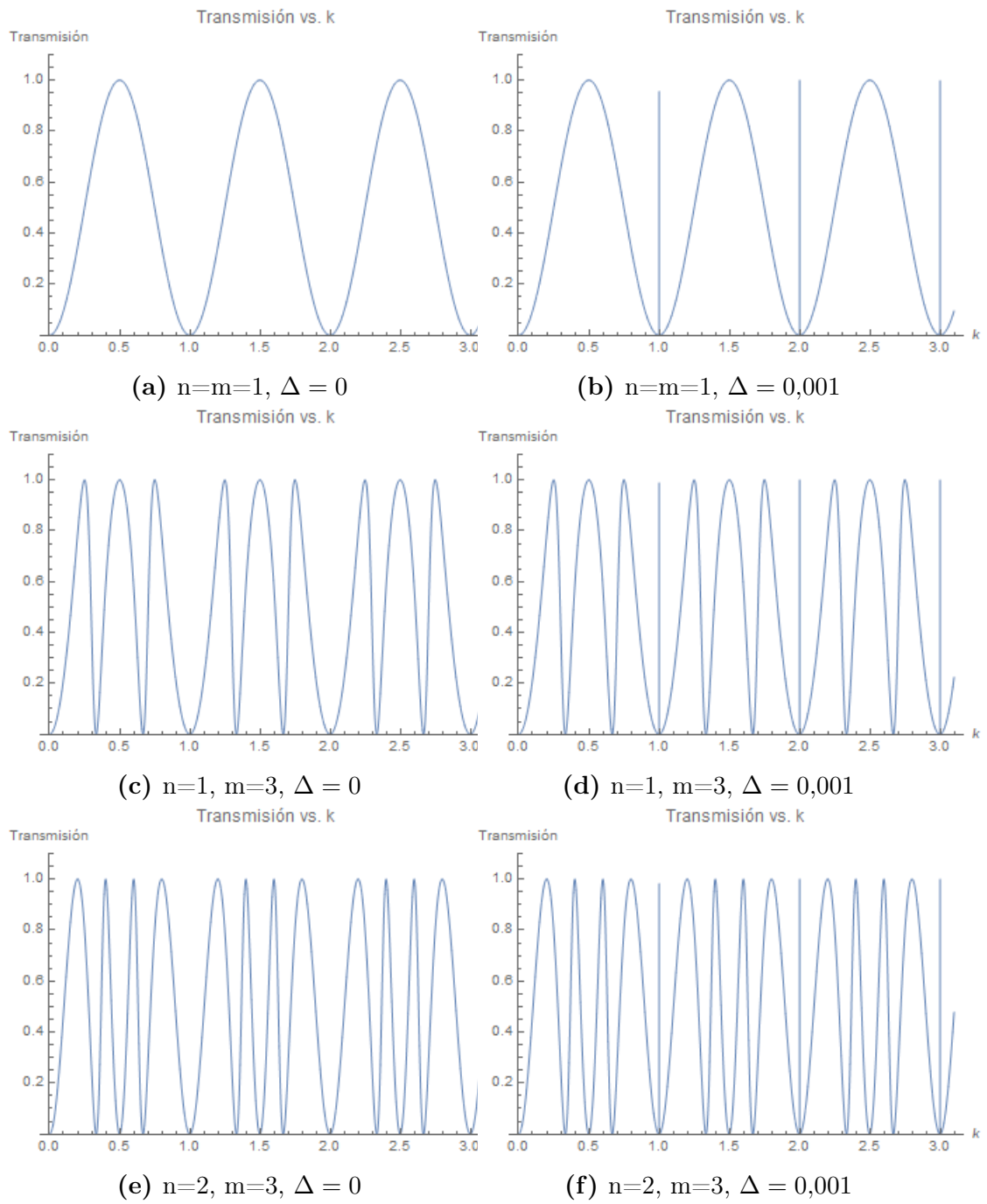


Figura 4.0.1: Gráficos de Transmisión vs. k para el sistema compuesto por una cruz.

En estas imágenes se aprecian tanto las resonancias de Fano en los valores de k que cumplen con lo planteado en la ecuación 4.5 como las BICs para aquellos valores de k que cumplen con lo planteado en 4.6, las cuales aparecen como antiresonancias normales para largos totalmente conmensurable (la razón entre ambos largos es exactas) pero al romper levemente la conmensurabilidad muestran resonancias agudas (cuasi-BICs). Analizando por otro lado las gráficas mostradas en la Figura 4.0.2 que muestran las densidades de estados en la sección transversal del sistema para los mismos arreglos mostrados en la Figura 4.0.1 se distinguen picos agudos en los mismos valores de k para los cuales se generan BICs. Estos picos corresponden a deltas de Dirac cuyo espesor es nulo, por lo que no son apreciables al tener conmensurabilidad perfecta de los largos. Al romper levemente la conmensurabilidad ($\Delta = 0,001$) los picos se vuelven visibles. El hecho de que estos picos agudos e infinitos en la densidad de estados aparezcan en el espectro permite identificar la formación de estados ligados en el continuo para este sistema en que los largos superior e inferior son conmensurables entre sí.

4.0.2. N Cruces

Para el sistema estudiado compuesto por N cruces obtuvimos la ecuación 3.39 que expresa la transmisión total del sistema. Analizamos de forma gráfica dicho resultado, aplicando los cambios de variables mencionados en las ecuaciones 4.1 a 4.3. En primer lugar estudiamos cómo afecta la cantidad N de cruces presentes en el sistema al resultado obtenido.

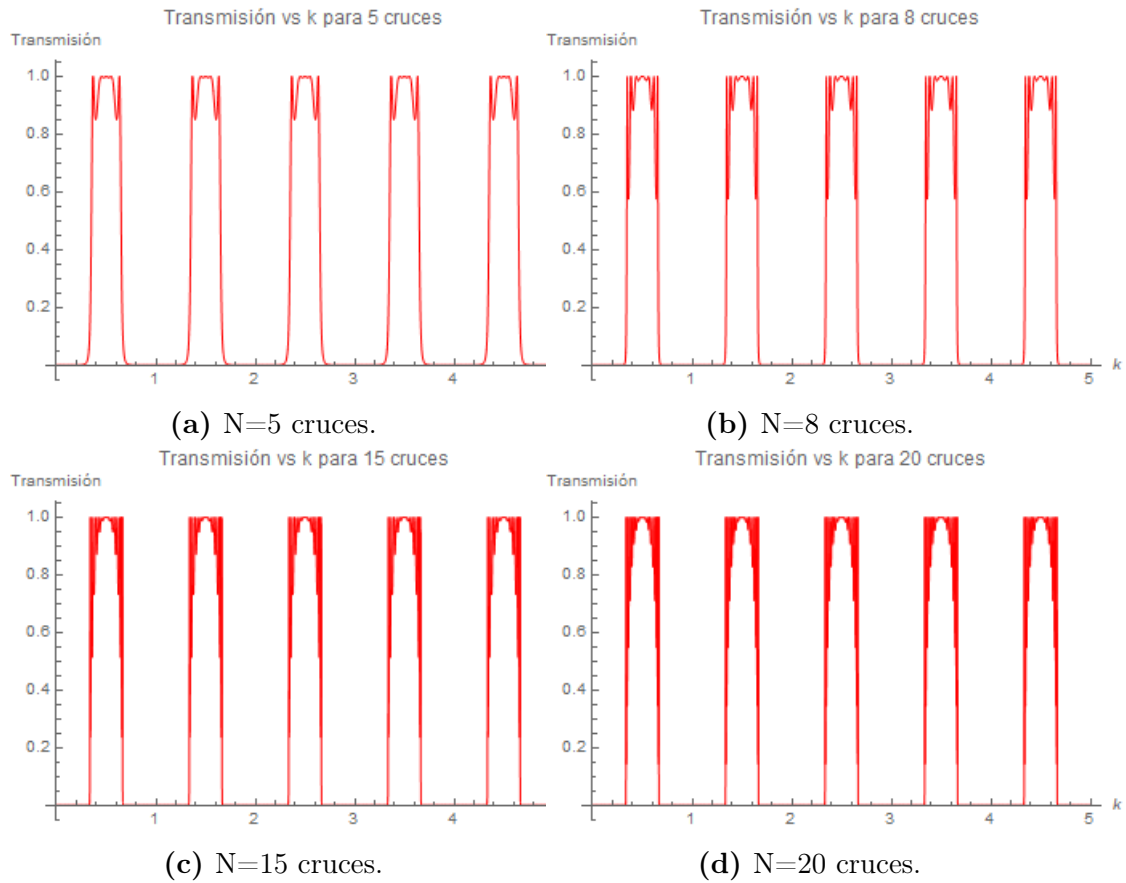


Figura 4.0.3: Gráficos de Transmisión vs. k para el sistema compuesto por N cruces con $\Delta = \nu = 0$. Se aprecia la formación de bandas de transmisión.

En la Figura 4.0.3 se muestra la transmisión para un sistema compuesto por distinta cantidad de cruces (5, 8, 15 y 20) manteniendo constantes y simétricos los largos superiores e inferiores y la distancia entre cada intersección ($n = m = l = 1$, $\Delta = \nu = 0$). Se observa que, a diferencia de lo que ocurre para el caso del sistema compuesto por una cruz donde aparecen resonancias y antiresonancias simples, la transmisión presenta una estructura de bandas, las cuales aumentan su definición al aumentar la cantidad de cruces del sistema. Estas bandas muestran valores de k (energía) para los que la transmisión ocurre en valores cercanos o iguales a 1 y otros valores de k para los que la transmisión será cercana o igual a 0.

En segundo lugar estudiamos el efecto de la conmensurabilidad de los largos de los brazos superiores e inferiores en la transmisión total del sistema. Para esto mantenemos la distancia entre las intersecciones constante ($l = 1$, $\nu = 0$) y trabajamos con $N = 10$ cruces.

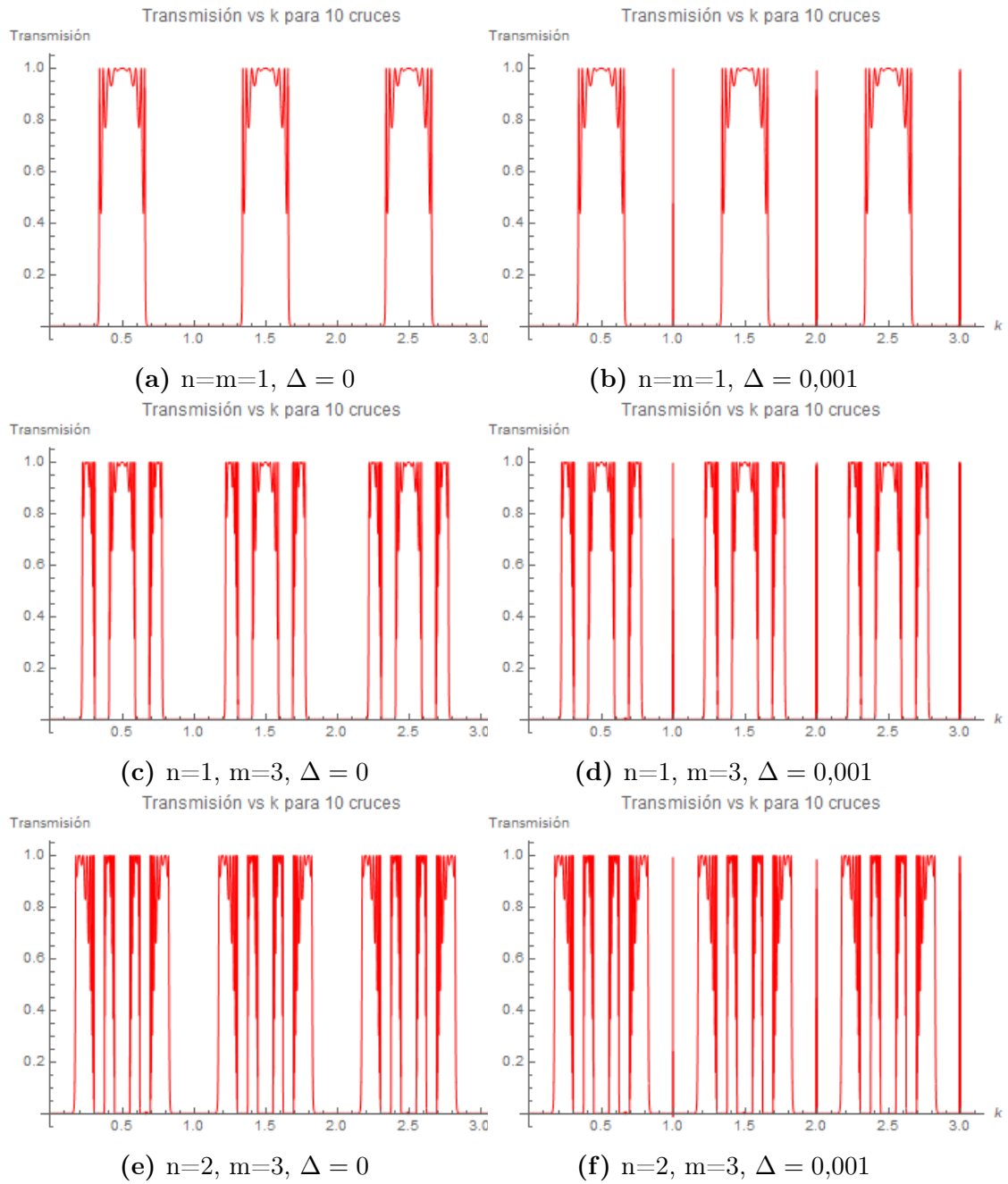


Figura 4.0.4: Gráficos de Transmisión vs. k para el sistema compuesto por $N=10$ cruces. Se ha mantenido constante la distancia entre cruces ($l=1, \nu = 0$).

En la Figura 4.0.4 se observan los gráficos de transmisión en función de k para las mismas tres combinaciones de largos superiores e inferiores que trabajamos en el caso anterior: (1:1), (1:3) y (2:3). Por cada combinación se muestran dos gráficos: las imágenes de la izquierda corresponden a aquellas en que la razón entre los largos es exacta, mientras que en las imágenes de la derecha la razón ha sido levemente alterada ($\Delta = 0,001$). Al comparar estas

gráficas con las presentadas en la Figura 4.0.1 se aprecia que aquellos valores de k que en el sistema de una cruz mostraban antirresonancias ahora presentan bandas de transmisión prohibida, mientras que aquellos valores de k que antes mostraban resonancias ahora presentan bandas de transmisión permitida. Además, se mantiene la presencia de las BICs para los mismos valores de k que en el sistema de una sola cruz, las cuales nuevamente aparecen como antirresonancias normales para largos totalmente conmensurables (la razón entre ambos largos es exacta) pero al romper levemente la conmensurabilidad muestran resonancias agudas (cuasi-BICs).

Por último estudiamos el efecto de la conmensurabilidad del largo de los brazos con la distancia entre las cruces. Para esto mantenemos los largos superiores e inferiores iguales y constantes ($n = m = 1$, $\Delta = 0$) y trabajamos con $N = 10$ cruces.

En la Figura 4.0.5 se observan los gráficos de transmisión en función de k para tres distancias entre intersecciones distintas: $l = 1$, $l = 2$ y $l = 3$. Para cada caso se muestran dos gráficos: las imágenes de la izquierda corresponden a aquellas en que la conmensurabilidad entre la distancia a y los largos superiores e inferiores es exacta ($\nu = 0$), mientras que en las imágenes de la derecha la conmensurabilidad ha sido levemente alterada ($\nu = 0,001$). De las imágenes presentadas en la Figura 4.0.5 notamos que al variar a la estructura de bandas se mantiene junto con la presencia de los BICs para los mismos valores de k que al mantener a constante y variar los largos superiores e inferiores (caso anterior). En este caso los BICs se muestran como antirresonancias para valores de a totalmente conmensurables a los largos ($\nu = 0$) y al romper levemente la conmensurabilidad ($\nu = 0,001$) aparecen resonancias agudas (cuasi-BICs).

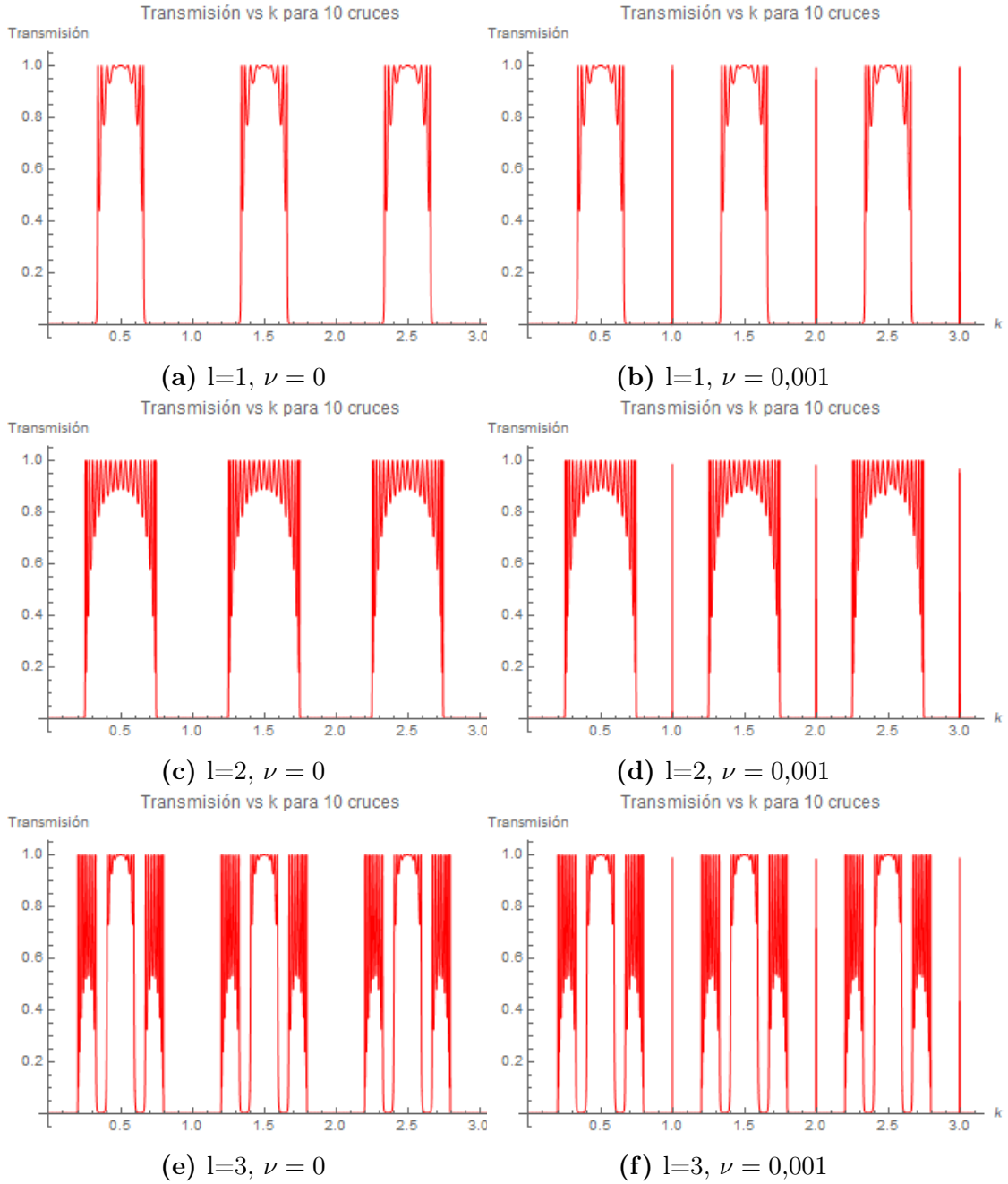


Figura 4.0.5: Gráficos de Transmisión vs. k para el sistema compuesto por $N=10$ cruces. Se han mantenido iguales y constantes los largos de los brazos superiores e inferiores ($n=m=1, \Delta = 0$).

4.0.3. Dos Cruces

Para el caso particular del sistema compuesto por dos cruces obtuvimos las ecuaciones 3.40 para la transmisión total del sistema y 3.51, 3.52 y 3.55 para las densidades de estado, en la sección intermedia, la primera y la segunda

cruz respectivamente. Analizamos de forma gráfica dichos resultados, aplicando los cambios de variables mencionados en las ecuaciones 4.1 a 4.3 para el caso $n = m = l = 1$. En primer lugar estudiamos la transmisión total del sistema a partir de las gráficas mostradas en la Figura 4.0.6.

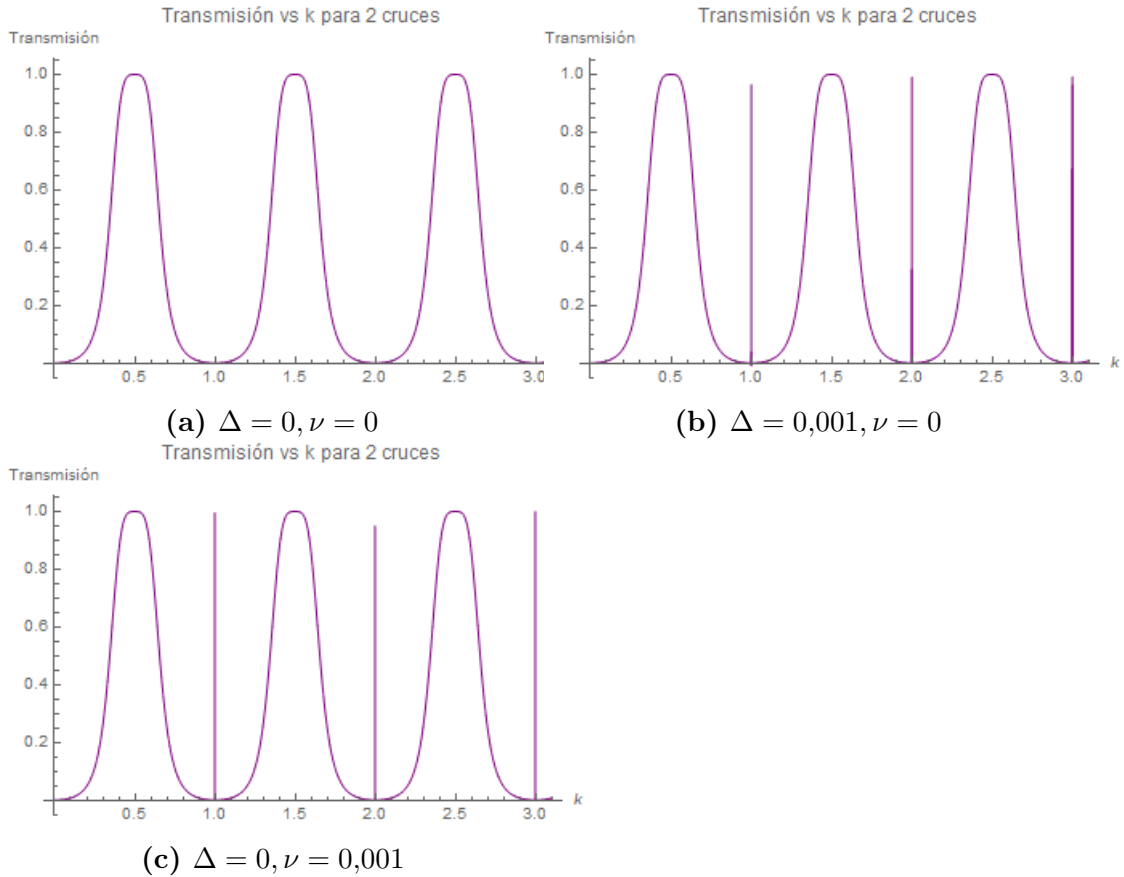


Figura 4.0.6: Gráficos de Transmisión vs. k para el sistema compuesto por 2 cruces, para el caso $n = m = l = 1$.

En la Figura 4.0.6 se muestran los espectros de transmisión para el sistema con conmensurabilidad absoluta ($\Delta = \nu = 0$), con la conmensurabilidad de los brazos superiores e inferiores levemente rota ($\Delta = 0,001, \nu = 0$) y con la conmensurabilidad de la distancia entre cruces con el largo de los brazo levemente rota ($\Delta = 0, \nu = 0,001$). En estas imágenes se aprecian BICs debido tanto a la conmensurabilidad de los largos superiores e inferiores entre sí como a la conmensurabilidad de la distancia entre las cruces con los largos antes mencionados.

Estudiamos también las densidades de estado en las regiones correspondientes a la sección entre cruces, la primera y la segunda cruz. En las Figuras 4.0.7, 4.0.8

y 4.0.9 se exponen de forma respectiva las densidades de estados en las regiones correspondientes la primera cruz, la segunda cruz y la sección entre cruces, mostrando cada una las densidades para el sistema con commensurabilidad absoluta ($\Delta = \nu = 0$), con la commensurabilidad de los brazos superiores e inferiores levemente rota ($\Delta = 0,001, \nu = 0$) y con la commensurabilidad de la distancia entre cruces con el largo de los brazo levemente rota ($\Delta = 0, \nu = 0,001$).

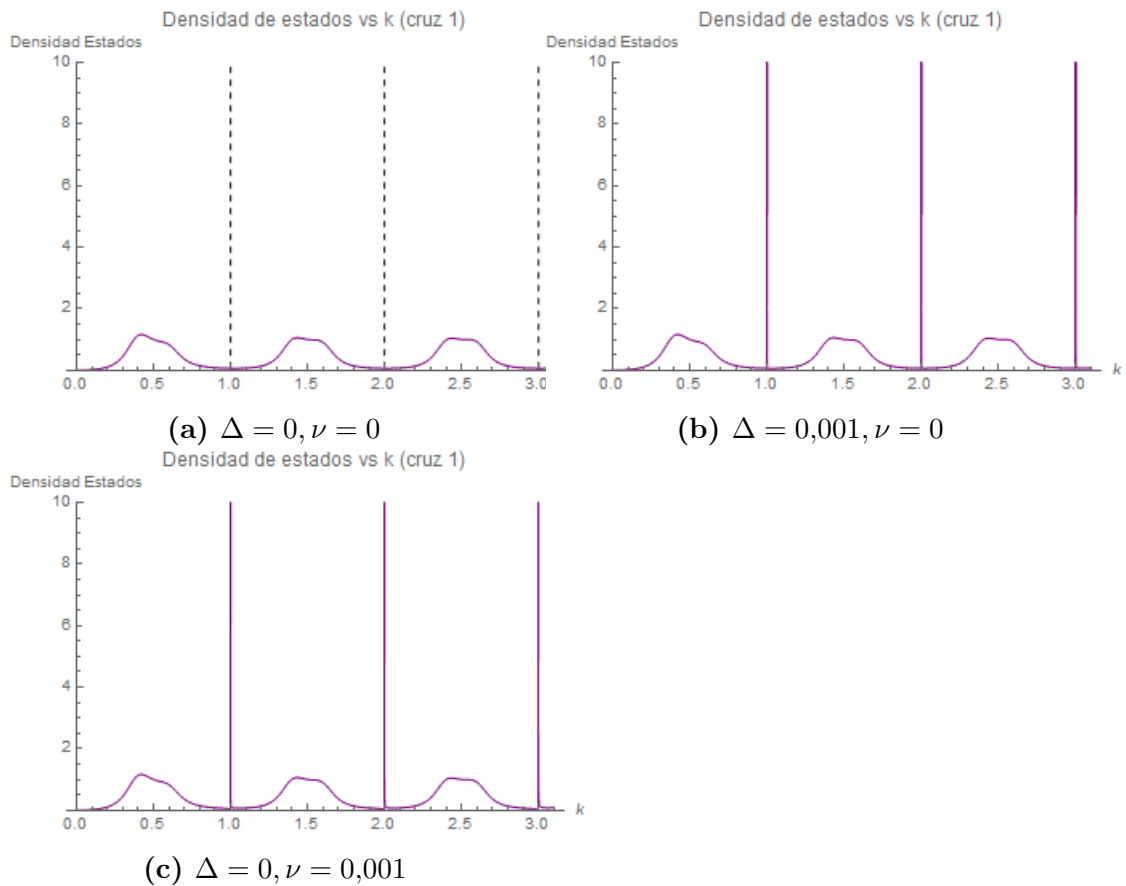


Figura 4.0.7: Gráficos de Densidad de Estado vs. k de la primera cruz del sistema compuesto por dos cruces, para el caso $n = m = l = 1$. Con línea punteada se muestran las deltas de Dirac de espesor nulo.

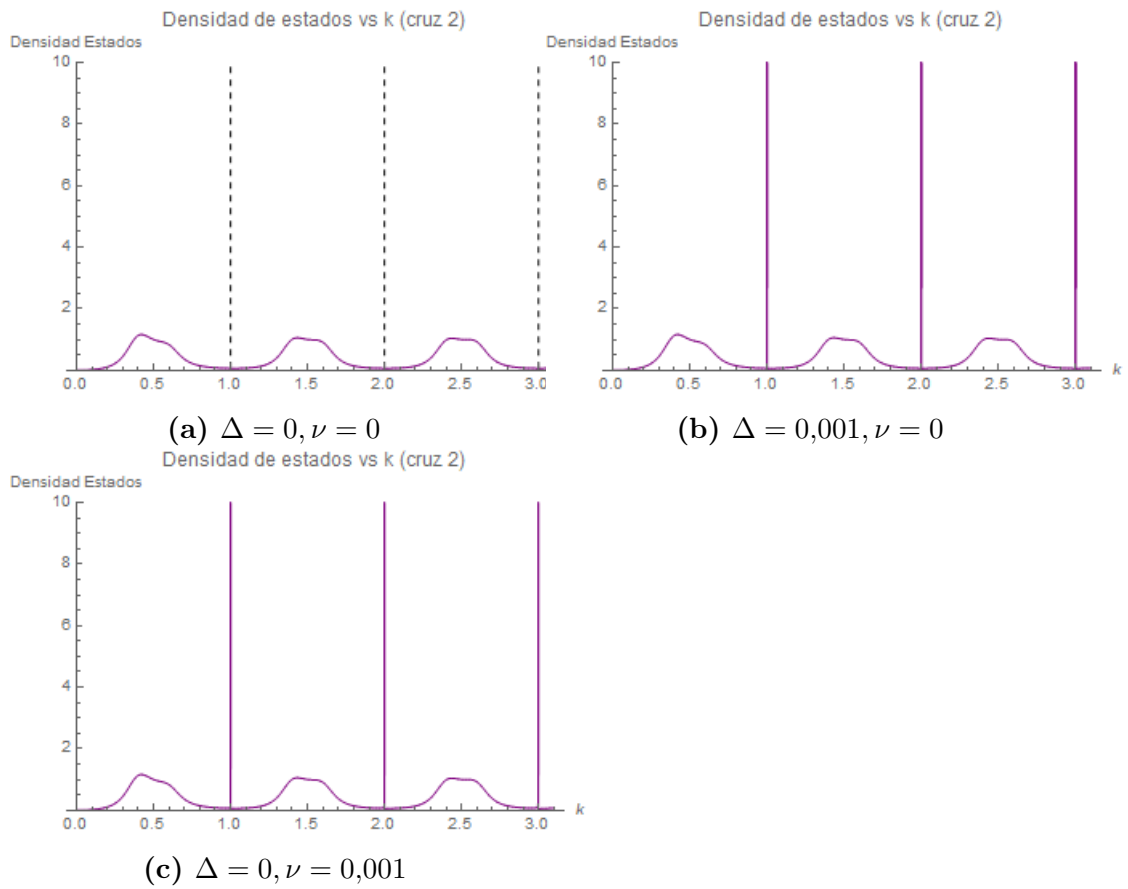


Figura 4.0.8: Gráficos de Densidad de Estado vs. k de la segunda cruz del sistema compuesto por dos cruces, para el caso $n = m = l = 1$. Con línea punteada se muestran las deltas de Dirac de espesor nulo.

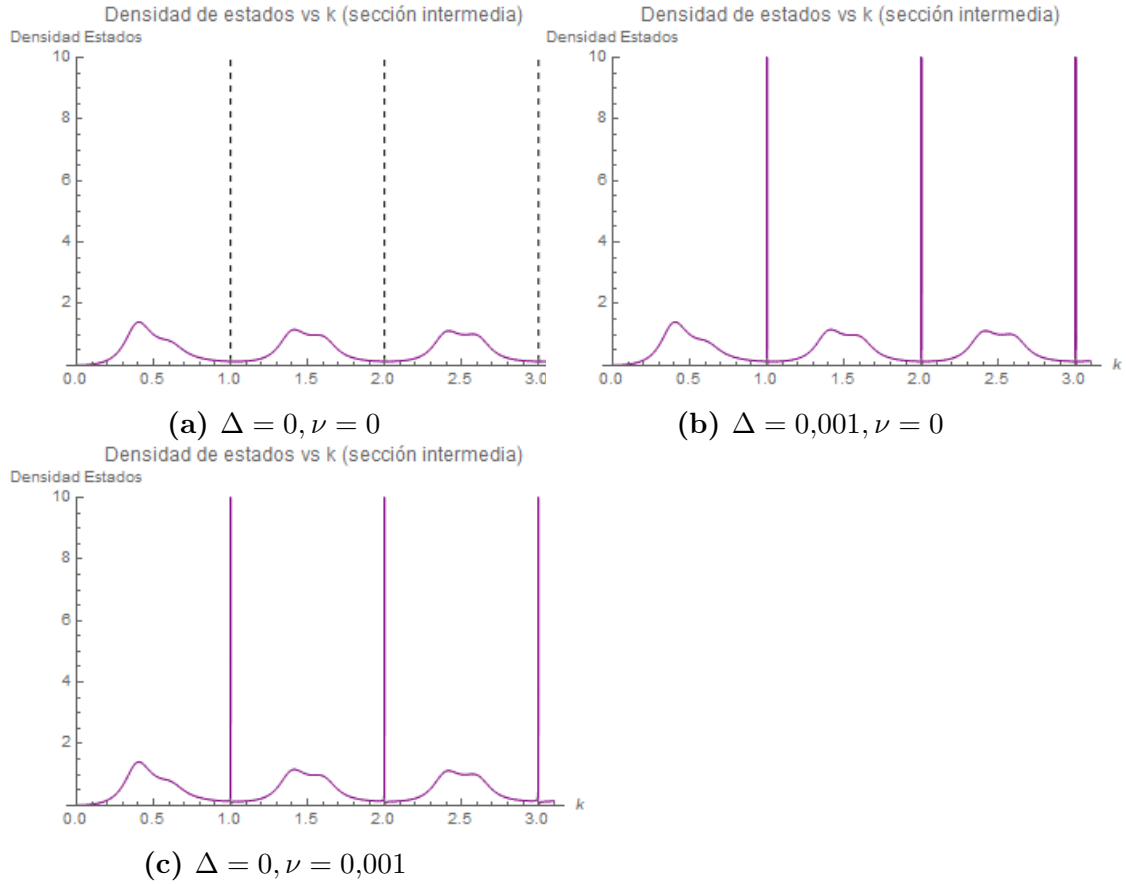


Figura 4.0.9: Gráficos de Densidad de Estado vs. k de la sección entre cruces del sistema compuesto por dos cruces, para el caso $n = m = l = 1$. Con línea punteada se muestran las deltas de Dirac de espesor nulo.

En las imágenes mostradas en las Figuras 4.0.7, 4.0.8 y 4.0.9 se distinguen, al igual que para el caso de una sola cruz, picos agudos (correspondientes a deltas de Dirac) en los mismos valores de k para los cuales se generan BICs. Estos picos no son apreciables al tener conmensurabilidad absoluta entre los tres parámetros ($\Delta = 0, \nu = 0$). Al romper levemente la conmensurabilidad ($\Delta = 0,001$ o $\nu = 0,001$) los picos se vuelven visibles. Nuevamente el hecho de que estos picos aparezcan en la densidad de estados permite identificar la formación de estados ligados en el continuo, esta vez para dos situaciones: cuando los largos superiores e inferiores de las cruces son conmensurables entre sí o cuando la distancia entre las cruces es conmensurable con los largos.

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente trabajo se ha estudiado la formación de BICs en un sistema de guías de onda unidimensionales particular compuesto por estructuras en forma de cruz. Se han estudiado de forma numérica y gráfica las transmisiones y las densidades de estado para los casos particulares de una cruz y dos cruces y se ha realizado una generalización a un sistema compuesto por N cruces idénticas e igualmente espaciadas entre sí.

A partir de los resultados obtenidos y los análisis realizados se puede concluir que, en los sistemas estudiados, se formarán estados ligados en el continuo si los largos de los brazos superiores e inferiores de las cruces son conmensurables entre sí (en este caso se formarán BICs para los valores de k que cumplan con lo planteado en la ecuación 4.6) o en el caso de que el largo de dichos brazos (iguales) sea conmensurable a la distancia entre las cruces. Por último, concluimos que al aumentar la cantidad N de cruces en el sistema la formación de los BICs no se ve afectada, sino que aumenta la definición de las bandas presentes en el espectro de transmisión.

Para trabajos futuros se propone agregar variaciones de potencial al sistema presentado (las que pudiesen resultar en una forma distinta de romper la simetría del sistema) para estudiar la formación de BICs y/o utilizar largos (superiores y/o inferiores) diferentes para cada una de las N cruces del sistema. Además, se propone realizar una investigación experimental donde pudiesen observarse los BICs propuestos en este trabajo como ondas estacionarias en guías de ondas acústicas con cavidades resonantes, basándose en el trabajo realizado por Lujun Huan, Yan Kei Chiang, Sibó Huang, et al. [12].

Bibliografía

- [1] Yuze Hu, Mingyu Tong, Siyang Hu, Weibao He, Xiang'ai Cheng, and Tian Jiang. Spatiotemporal lineshape tailoring in bic-mediated reconfigurable metamaterials. *Advances Functional Materials*, 2022.
- [2] John von Neumann and Eugene Wigner. Über merkwürdige diskrete eigenwerte. 1929.
- [3] Kirill Koshelev, Andrey Bogdanov, and Yuri Kivshar. Engineering with bound states in the continuum. *Optics and Photonics News*, 2020.
- [4] Federico Capasso, Carlo Sirtori, Jerome Fist, and et al. Observation of an electronic bound state above a potential well. *Nature*, 1992.
- [5] D. C. Marinica, A. G. Borisov, and S. V. Shabanov. Bound states in the continuum in photonics. *Phys. Rev. Lett.*, 2008.
- [6] Tan Shi, Zi-Lan Deng, Guangzhou Geng, and et al. Planar chiral metasurfaces with maximal and tunable chiroptical response driven by bound states in the continuum. *Nature Communications*, 2022.
- [7] Chia Wei Hsu, Bo Zhen, A. Douglas Stone, Jhon D. Joannopoulos, and Marin Soljacic. Bound states in the continuum. *Nature Reviews Materials*, 2016.
- [8] Linpeng Gu, Binbin Wang, and et al. Qingchen Yuan. Fano resonance from a one-dimensional topological photonic crystal. *APL Optics*, 2021.
- [9] Mikhail F. Limonov. Fano resonance for applications. *Advances in Optics and Photonics*, 2021.
- [10] Peter Markos and Costas M Soukoulis. Wave propagation. In *Wave Propagation*. Princeton University Press, 2008.
- [11] YARIVA YEHP. Hongc. *Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. general theory*, 1977.
- [12] Lujun Huan, Yan Kei Chiang, Sibio Huang, and et al. Sound trapping in an open resonator. *Nature Communication*, 2021.

- [13] M. L. Ladrón de Guevara, F. Claro, and Pedro A. Orellana. Ghost fano resonance in a double quantum dot molecule attached to leads. *Phys. Rev. B*, 2003.
- [14] M. L. Ladrón de Guevara and P. A. Orellana. Electronic transport through a parallel-coupled triple quantum dot molecule: Fano resonances and bound states in the continuum. *Phys. Rev. B*, 2006.
- [15] Jordi Mur-Petit and Rafael A. Molina. Chiral bound states in the continuum. *Phys. Rev. B*, 2014.

Apéndice A

Otras Ecuaciones

A1. Dos cruces: Densidades de Estado

$$D_m = \frac{1}{\left(\cos(ak)(\cot(kL^+) + \cot(kL^-)) + \frac{1}{2}\sin(ak)(\cot(kL^+) + \cot(kL^-))^2\right)^2 + 1} \\ * \left(\frac{i(-1 + e^{2iak})(\cot(kL^+) + \cot(kL^-))(\cot(kL^+) + \cot(kL^-) + 2i)}{8k} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}a((\cot(kL^+) + \cot(kL^-))^2 + 2) \right. \\ \left. - \frac{i(1 - e^{-2iak})(-(\cot(kL^+) + \cot(kL^-))^2 + 2i(\cot(kL^+) + \cot(kL^-)))}{8k} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$D_1 = -\frac{1}{4k \left((\cos(ak)(\cot(kL^+) + \cot(kL^-)) + \frac{1}{2}\sin(ak)(\cot(kL^+) + \cot(kL^-))^2)^2 + 1 \right)} \\ * \left(-k(L^+ \csc^2(kL^+) + L^- \csc^2(kL^-)) + \cot(kL^+) - 2\sin(2kL^-) + \cot(kL^-) \right) \\ * \left(-(\cos(2ak) - 1)(\cot(kL^+) + \cot(kL^-))^2 - 2\sin(2ak)(\cot(kL^+) + \cot(kL^-)) + 2 \right) \quad (\text{A.2})$$

$$D_2 = -\frac{-k(L^+ \csc^2(kL^+) + L^- \csc^2(kL^-)) + \cot(kL^+) - 2\sin(2kL^-) + \cot(kL^-)}{2k \left((\cos(ak)(\cot(kL^+) + \cot(kL^-)) + \frac{1}{2}\sin(ak)(\cot(kL^+) + \cot(kL^-))^2)^2 + 1 \right)} \quad (\text{A.3})$$