

# UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO - CHILE



---

## Estimaciones de error a posteriori para esquemas de elementos finitos en problemas de control óptimo de la ecuación de Stokes

---

Memoria presentada por:  
DANIEL PATRICIO QUERO TANGOL

*Como requisito parcial  
Para optar al título profesional Ingeniero Civil Matemático*

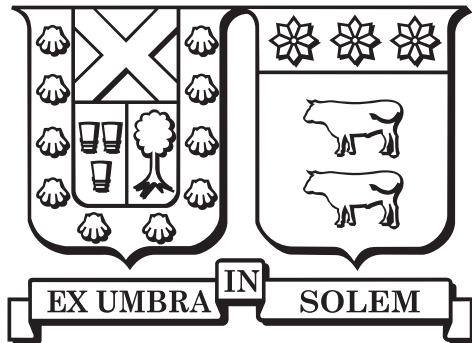
*Profesores guías:*  
ALEJANDRO ALLENDES  
ENRIQUE OTÁROLA

Enero, 2018



# UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO - CHILE



---

## Estimaciones de error a posteriori para esquemas de elementos finitos en problemas de control óptimo de la ecuación de Stokes

---

Memoria presentada por:  
DANIEL PATRICIO QUERO TANGOL

*Como requisito parcial  
Para optar al título profesional Ingeniero Civil Matemático*

*Profesores guías:*  
ALEJANDRO ALLENDES  
ENRIQUE OTÁROLA

*Examinador:*  
DIEGO PAREDES

Enero, 2018

Material de referencia, su uso no involucra responsabilidad del autor o de la institución.



TÍTULO DE LA MEMORIA: Estimaciones de error a posteriori sobre esquemas de elementos finitos para un problema de control óptimo de la ecuación de Stokes.

AUTOR: Daniel Patricio Quero Tangol.

TRABAJO DE MEMORIA, presentado como requisito parcial para optar al título profesional Ingeniero Civil Matemático de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EVALUADORA:

Integrantes:	Firma
Alejandro Allendes Universidad Técnica Federico Santa María	_____
Enrique Otárola Universidad Técnica Federico Santa María	_____
Diego Paredes Ponticia Universidad Católica de Chile	_____

Valparaíso, Enero 2018



# Agradecimientos

Primero que todo, le quiero dar las gracias a mi profesor guía, Alejandro, por los conocimientos y la ayuda entregada, pero sobretodo por su tiempo y paciencia conmigo. También agradezco a los profesores del departamento de matemáticas por sus enseñanzas y su ayuda brindada.

Le doy gracias a mi padre, Juan, y a mi madre, Ana, por todo el apoyo y el cariño que me han dado todo estos años, y sobretodo les agradezco el sacrificio que han hecho para que todos podamos salir adelante. A ellos y a mis dos hermanas, Chris y Nixia, les estoy agradecido por estar conmigo en mis primeros pasos. Gracias a mi abuela, Sonia, por recibirme en su casa y darme el cariño, la paciencia y sus sabios consejos. A mis primos, a mis tíos y a mi familia entera le doy las gracias por su ayuda y por querer compartir buenos momentos juntos.

Le quiero dar las gracias también a mis compañeros de carrera: a Pablo y a Franco por compartir el estudio, almuerzos, salidas, bromas y muchos buenos momentos durante mi estadía en la universidad; a mi compañero Eduardo por sus consejos y por ayudarme a estudiar en los primeros ramos de carrera; a Diego por compartir el estudio y por su paciencia conmigo; a Cesar y Esteban por compartir sus conocimientos y aptitudes que me han sido muy útiles; a Dana por su dedicación y empeño en la carrera, y por ser muy simpática con todos; a mis compañeros en general gracias por ser todos muy simpáticos y por dedicar su tiempo a compartir experiencias. También le agradezco a mis ex vecinos y amigos de la infancia, Andrés, Frank y a JoaquinySeba (el ente), por compartir juegos y buenos momentos durante mi estadía en el sur, espero mantener el contacto para vivir muchas experiencias más. Por último le doy las gracias a mis amigos del colegio: a Ignacio y Esteban O. (el Team ABC) por compartir buenas anécdotas, buenas bromas y buenas salidas; a Sebastian M. por compartir juegos y momentos agradables con nosotros; a Evelyn Z. por compartir su locura y sus anécdotas; a Lorena, por compartir anécdotas con nosotros, y sobretodo por hacernos reír mucho. A todos les doy gracias por darme ánimo, especialmente por ayudarme a pensar en cosas buenas.

No puedo dejar de dar las gracias a la entidad Coopeuch por brindarme financiamiento todos estos años de universidad, ya que fue parte fundamental para lograr terminar mis estudios. Le agradezco la gestión a Evelyn F. y también a mis padres para que esto fuese posible.



*Dedicado a  
mi familia y amigos*



# Resumen

En este trabajo se construyen estimadores de error a posteriori para un problema de control óptimo con restricciones en EDP. Parte de la restricción corresponde al problema de Stokes, por lo que se comienza por estudiar dicha temática y algunos resultados principales, como lo son su formulación mixta y restringida, existencia y unicidad, los esquemas de discretización por elementos finitos (inf - sup estables y estabilizados) y el correspondiente análisis de error a posteriori. De esto último se derivan 2 tipos de estimadores de error: computables y no computables.

Posteriormente se estudia el problema de control óptimo y, siguiendo los mismos pasos para abordar el problema de Stokes, se elaboran estimadores de error a posteriori, también del tipo computables y no computables, sobre la discretización del sistema de optimalidad obtenido.

Para cada problema se evalúa el desempeño del estimador no computable y se compara con el error de discretización, mediante una cierta norma. A su vez se elabora un algoritmo adaptativo de resolución que permite refinar el mallado del dominio bajo un criterio basado en el estimador de error.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. Espacios de funciones . . . . .	5
2.2. Diferenciabilidad . . . . .	7
2.3. Nomenclatura de elementos finitos . . . . .	7
2.4. Resultados preliminares . . . . .	9
<b>3. Ecuación de Stokes</b>	<b>11</b>
3.1. Modelo . . . . .	11
3.2. Problema débil: formulación mixta . . . . .	12
3.2.1. Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	13
3.3. Problema débil: formulación restringida . . . . .	14
3.4. Aproximación mediante el método de elementos finitos . . . . .	15
3.4.1. Esquemas de elementos finitos inf - sup estables . . . . .	15
3.4.2. Esquemas de elementos finitos estabilizados . . . . .	16
3.5. Análisis del error a posteriori . . . . .	18
3.5.1. Estimaciones completamente computables . . . . .	19
3.5.1.1. Análisis de Confiabilidad . . . . .	20
3.5.1.2. Análisis de Eficiencia Local . . . . .	25
3.5.2. Estimaciones no computables . . . . .	28
3.5.2.1. Análisis de Confiabilidad . . . . .	28
3.5.2.2. Análisis de eficiencia local . . . . .	32

3.6. Ejemplos numéricos . . . . .	33
<b>4. Problema de control óptimo</b>	<b>41</b>
4.1. Presentación del problema . . . . .	41
4.1.1. Existencia de soluciones óptimas . . . . .	42
4.2. Condiciones de optimalidad de primer orden . . . . .	44
4.2.1. Uso de lagrangianos y sistema de optimalidad . . . . .	44
4.2.2. Condiciones de optimalidad puntuales . . . . .	46
4.3. Discretización por elementos finitos . . . . .	47
4.4. Estimaciones de error a posteriori . . . . .	48
4.4.1. Estimaciones computables . . . . .	50
4.4.1.1. Análisis de confiabilidad . . . . .	50
4.4.1.2. Análisis de eficiencia local . . . . .	56
4.4.2. Estimaciones no computables . . . . .	59
4.4.2.1. Análisis de confiabilidad . . . . .	59
4.4.2.2. Análisis de eficiencia local . . . . .	61
4.5. Simulaciones numéricas . . . . .	62
4.5.1. Implementación de esquemas de elementos finitos . . . . .	63
4.5.2. Algoritmo de Active Set . . . . .	64
4.5.3. Algoritmo adaptativo de resolución . . . . .	66
4.5.4. Ejemplos numéricos . . . . .	66
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El propósito de este trabajo es construir y analizar estimadores de error a posteriori para un problema de control óptimo con restricciones, el cual involucra el problema de Stokes como ecuación de estado. Para precisar, dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , con  $d \in \{2, 3\}$ , un dominio abierto y acotado, cuya frontera  $\partial\Omega$  es Lipschitz con forma poligonal, y dadas  $\mathbf{f}, \mathbf{y}_\Omega \in [L^2(\Omega)]^d$  y un parámetro de regularización  $\alpha > 0$ , se define el funcional  $J$  por

$$J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_\Omega\|_{\mathbb{R}^d}^2 d\mathbf{x} + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^d}^2 d\mathbf{x},$$

donde  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$  corresponde a la norma euclídeana en  $\mathbb{R}^d$ .

El problema de optimización con restricciones en EDP corresponde a: Hallar la tupla  $((\mathbf{y}, p), \mathbf{u})$  tal que resuelve

$$\text{mín } J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \tag{1.1}$$

sujeto a la ecuación de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu\Delta\mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{u}, & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{y} = 0, & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{y} = \mathbf{0}, & \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1.2}$$

y a la restricción de caja

$$\mathbf{u}_a \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_b \quad \text{c.t.p. en } \Omega. \tag{1.3}$$

La restricción (1.3) corresponde a una desigualdad vectorial, la cual se entiende que aplica componente a componente. A su vez el parámetro  $\nu$  es una constante positiva.

En este contexto, una alternativa usual para aproximar la solución del problema (1.1) - (1.3) se basa en la estrategia de optimizar y luego discretizar. Esta técnica discretiza un sistema de optimalidad

asociado al problema, el cual se encuentra conformado por: la ecuación de estado, la ecuación adjunta y la desigualdad variacional que caracteriza el control óptimo  $\bar{\mathbf{u}}$ . Algunos métodos de resolución se encuentran en el Capítulo 4 y 5 del texto [13] y en [18].

Ahora bien, los esquemas de discretización del problema (1.1) - (1.3) pueden obtenerse en forma sencilla haciendo uso del método de discretización por diferencias finitas. Una descripción clara de este procedimiento se detalla, para el problema de Poisson, en la Sección 2.12.3 del texto [28]. Otra opción es hacer uso del método de elementos finitos, en base a la formulación débil de cada ecuación, definiendo una partición  $\mathcal{P}$  del dominio  $\Omega$  conformada por elementos  $K$ , tal como se lleva a cabo en el trabajo [24], donde además se obtienen algunas estimaciones a priori sobre la aproximación mediante estos esquemas.

Sin embargo, para esta última alternativa, existen 2 problemáticas provenientes del sistema (1.2):

- 1) La condición inf - sup sobre la formulación mixta del problema [16, 17], lo que restringe la elección del esquema de elementos finitos.
- 2) Los problemas de capa límite que se obtienen cuando el parámetro  $\nu$  es considerablemente pequeño, lo cual genera la presencia de oscilaciones y singularidades geométricas en la solución numérica, tanto en los bordes del dominio como en su interior.

Una primera alternativa es la implementación de esquemas de elementos finitos estabilizados, los cuales, a diferencia de un esquema estándar, permiten prescindir de la condición inf - sup y a su vez poseen la ventaja de permitir el trabajo con subespacios de discretización de bajos ordenes. Esto conlleva a una disminución considerable de los costos computacionales. En [23] se encuentra una extensa revisión de éstos.

No obstante, esto no basta para solventar la problemática descrita en el punto 2). Es por esto que se propone incorporar, adicionalmente, una estrategia que permita solventar las discrepancias generadas en determinados elementos  $K$  del mallado. Lo anterior motiva el uso de lo que denominaremos como métodos de elementos finitos adaptativos (AFEMs por sus siglas en inglés).

Un AFEM es un método iterativo que mejora la calidad de la solución obtenida mediante un esquema de elementos finitos. El principal ingrediente es lo que se denomina estimador de error a posteriori, el cual se construye en base al análisis de error a posteriori. Esta técnica posee sólidos fundamentos en la teoría de elementos finitos estándar sobre problemas elípticos [1, 29] y ha sido aplicada exitosamente sobre el mismo problema de Stokes [2]. Sin embargo no existe aún una teoría unificada para problemas de control óptimo con restricciones en EDP. La principal dificultad radica en las no linealidades generadas por las restricciones sobre el control. Un intento por unificar los resultados disponibles ha sido desarrollado en el trabajo [20], donde el autor deriva una relación importante entre el error del control óptimo y los

estimadores, bajo ciertos supuestos, para problemas asociados con la ecuación de estado y la ecuación adjunta.

En este trabajo se desarrollará el análisis que permitirá construir 2 tipos de estimadores de error, computables y no computables, tanto para el problema de Stokes como para el problema de control óptimo. A lo largo del trabajo se establecerán los supuestos necesarios para obtener estimadores globalmente confiables, esto es, se probará que forman parte de una cota inferior para el error como también de una cota superior. Esto permite, entre otras cosas, comparar las propiedades de convergencia entre el error de aproximación con la del estimador. Por último, en base al estimador se obtendrá un método iterativo de adaptatividad, el cual permitirá determinar en cuales elementos  $K$  de la partición  $\mathcal{P}$  se concentra mayormente el error. En base a esto último es posible generar una nueva partición donde sólo se refinan aquellos elementos que satisfagan un cierto criterio basado en el estimador.

La metodología de estudio es la siguiente: en el Capítulo 2 se introducirá la notación a utilizar (espacios de funciones y de elementos finitos), junto con algunos resultados de la teoría de EDP y de optimización. En el Capítulo 3 se presentará el modelo de Stokes y se estudiarán algunos resultados de existencia y unicidad y su discretización por elementos finitos, dejando de lado los detalles de las demostraciones, para luego ahondar en el análisis de error a posteriori. Ésto último conformará el pilar fundamental para llevar a cabo, en el Capítulo 4, el mismo análisis que nos permitirá obtener estimadores de error a posteriori sobre el problema de control óptimo, luego de entregar algunos resultados teóricos como existencia y unicidad y condiciones de optimalidad. Tanto el Capítulo 3 como el Capítulo 4 concluyen con una sección de simulaciones numéricas, donde se evalúa el desempeño de los estimadores de error no computables frente a la convergencia del error de aproximación. Finalmente, en el Capítulo 5 se darán las conclusiones del trabajo realizado, donde a su vez se entregarán algunos trabajos futuros que pueden desarrollarse en línea con el estudio realizado.



# Capítulo 2

## Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar elementos básicos empleados en la teoría de optimización y ecuaciones diferenciales parciales, tales como espacio de funciones y diferenciabilidad. A su vez se introducirá gran parte de la notación que se utilizará a lo largo de este trabajo. Por último se presentarán algunos resultados preliminares que serán usados a lo largo de este trabajo.

### 2.1. Espacios de funciones

Sea  $U$  un dominio abierto y acotado de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), con frontera  $\partial U$  y clausura  $\bar{U}$ . Se denota por  $L^2(U)$  el espacio de Lebesgue usual constituido por funciones que son cuadrado - integrables en  $U$ .  $L_0^2(U)$  representa el subespacio de  $L^2(U)$  en el cual las funciones poseen valor medio nulo en  $U$ .  $H^1(U)$  corresponde al espacio de Sobolev usual y  $H_0^1(U)$  a su subespacio en el cual las funciones poseen traza nula en  $\partial U$ .  $H^{-1}(U)$  representa el espacio dual de  $H_0^1(U)$ . Para entender más en detalle estos tópicos se sugiere revisar los textos [10] y [25].

Los espacios de funciones a valores vectoriales, y vectores en general, se encuentran resaltados en negrita, y para denotar espacios de funciones a valores matriciales, y matrices en general, se incluye además un doble tilde debajo. En particular los espacios  $[L^2(\Omega)]^d$  y  $[L^2(\Omega)]^{d \times d}$  se denotan por  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  y  $\mathbf{\tilde{\tilde{L}}^2}(\Omega)$ , respectivamente. De manera similar se introduce la notación  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  para el espacio de Sobolev usual conformado por funciones vectoriales.

Para cualquier par de funciones escalares  $u$  y  $v$ , se definen los operadores gradiente y laplaciano, respecto a la variable  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ , como

$$\nabla v = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_d} \right) \quad \text{y} \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_d^2},$$

respectivamente.

Se definen el producto interno y norma en  $L^2(U)$  como

$$(u, v)_{L^2(U)} := \int_U uv \, d\mathbf{x} \quad y \quad \|v\|_{L^2(U)} := \left( (u, u)_{L^2(U)} \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

respectivamente. De la misma forma se definen el producto interno y la norma en  $L^2(\partial U)$  como

$$(u, v)_{L^2(\partial U)} := \int_{\partial U} uv \, ds \quad y \quad \|v\|_{L^2(\partial U)} := \left( (u, u)_{L^2(\partial U)} \right)^{1/2}, \quad (2.2)$$

respectivamente.

Para funciones con valores vectoriales  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$  se definen su divergencia y gradiente como

$$\mathbf{div} \, \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_d}{\partial x_d} \quad y \quad \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_d}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_d}{\partial x_d} \end{pmatrix},$$

respectivamente.

En este caso el producto interno y norma en  $\mathbf{L}^2(U)$  se definen como

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(U)} := \int_U \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad y \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(U)} := \left( (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(U)} \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

respectivamente. De manera similar se define lo anterior en  $\mathbf{L}^2(\partial U)$ .

Por último, para funciones matriciales  $\underline{\underline{\mathbf{u}}} = (u_{ij})$  y  $\underline{\underline{\mathbf{v}}} = (v_{ij})$ , se define su divergencia como

$$\mathbf{div} \, \underline{\underline{\mathbf{u}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_{1d}}{\partial x_d} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_{d1}}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_{dd}}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

y su producto interno y norma en  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}^2(U)$  como

$$(\underline{\underline{\mathbf{u}}}, \underline{\underline{\mathbf{v}}})_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}^2(U)} = \sum_{i,j=1}^d \int_U u_{ij} v_{ij} \, d\mathbf{x} \quad y \quad \|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\|_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}^2(U)} := \left( (\underline{\underline{\mathbf{u}}}, \underline{\underline{\mathbf{u}}})_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}^2(U)} \right)^{1/2}, \quad (2.4)$$

respectivamente. De manera similar se definen el producto interno y la norma matricial en  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}^2(\partial U)$ .

En este estudio se trabajará con una norma de tipo energía, denotada por  $\|(\cdot, \cdot)\|_U^2$ . Dicha norma,

dadas dos funciones  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(U)$  y  $w \in L^2(U)$ , se calcula como:

$$\|(\mathbf{w}, w)\|_U^2 := \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V},U}^2 + \|w\|_{Q,U}^2, \quad (2.5)$$

siendo  $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V},U} := \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{w}\|_{\underline{\mathbb{L}}^2(U)}$  y  $\|w\|_{Q,U} := \rho \|w\|_{L^2(U)}$ , donde  $\nu$  y  $\rho$  son constantes positivas a definir.

## 2.2. Diferenciabilidad

Dados dos espacios de Banach  $\{X, \|\cdot\|_X\}$ ,  $\{Y, \|\cdot\|_Y\}$  y un mapeo  $F : \mathcal{O} \subset X \rightarrow Y$ , con  $\mathcal{O}$  abierto, se denota por  $\delta F(u)h$  la derivada direccional de  $F$  en el elemento  $u$  y en la dirección  $h$ , definida por la expresión:

$$\delta F(u)h := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u+th) - F(u)}{t}. \quad (2.6)$$

Si el límite existe para toda  $h \in \mathcal{O}$ , entonces el mapeo  $h \mapsto \delta F(u)h$  se denomina la primera variación de  $F$  en  $u$ . Si además existe un operador lineal continuo  $A : X \rightarrow Y$  tal que  $\delta F(u)h = A(h)$ , entonces dicho operador se define como la derivada de Gâteaux de  $F$  en  $u$ , denotada por  $A := DF(u)$ .

Cuando el operador  $A$  es tal que se cumple la relación:

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(u+h) - F(u) - A(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0, \quad (2.7)$$

entonces se denomina la derivada Fréchet de  $F$  en  $u$ . Si dicha derivada existe, entonces  $A$  coincide con la derivada Gâteaux. Sin embargo, no siempre hay igualdad en el otro sentido. Una condición suficiente para que la derivada Gâteaux coincida con la derivada Fréchet es que el límite en la relación (2.7) sea uniforme respecto a  $h$ , con  $\|h\|_X = 1$ , o que  $A$  sea continuo en  $X$  (Ver Capítulo 4 del texto [7]).

## 2.3. Nomenclatura de elementos finitos

A continuación se entregará la notación a utilizar en aquellas secciones que involucren el uso de elementos finitos.

En adelante  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  corresponde a un politopo, con frontera  $\partial\Omega$ , y  $\mathcal{P}$  a una partición regular de  $\Omega$  conformada por elementos  $K$ , correspondientes a triángulos (2D)/tetrahedros (3D) con lado (2D)/cara (3D)  $\gamma$ , en el sentido clásico de Ciarlet (ver Capítulo 2 del texto [11]).

Dada una partición  $\mathcal{P}$ , se denota por:

- $\mathcal{E}$  : conjunto de todos los lados/caras;
- $\mathcal{E}_I \subset \mathcal{E}$  : conjunto de lados/caras presentes en el interior de  $\Omega$ ;

- $\mathcal{E}_\Gamma \subset \mathcal{E}$  : conjunto de lados/caras presentes en la frontera de  $\Omega$ ;
- $\mathcal{V}$  : índice del conjunto  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathcal{V}}$  de todos los vértices de cada elemento;
- $\Omega_n = \{K \in \mathcal{P} : \mathbf{x}_n \in \overline{K}, \text{ con } n \in \mathcal{V} \text{ fijo}\}$  : patch constituido por elementos  $K$  cuyo vértice en común es  $\mathbf{x}_n$ ;
- $\mathcal{E}_n = \{\gamma \in \mathcal{E} : \mathbf{x}_n \in \overline{\gamma}, \text{ con } n \in \mathcal{V} \text{ fijo}\}$  : patch constituido por lados/caras cuyo vértice en común es  $\mathbf{x}_n$ ;
- $\lambda_n$ : función lineal definida en  $\mathcal{P}$  y que es nula en todo vértice excepto en  $\mathbf{x}_n$ , i.e.:

$$\lambda_n(\mathbf{x}_m) = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathcal{V},$$

donde  $\delta_{n,m}$  denota la función Delta de Kronecker.

Se definen a su vez las funciones vectoriales  $\boldsymbol{\lambda}_n^{(1)}$  y  $\boldsymbol{\lambda}_n^{(2)}$  en  $\mathbb{R}^2$ , como:

$$\boldsymbol{\lambda}_n^{(1)} = (\lambda_n, 0) \quad ; \quad \boldsymbol{\lambda}_n^{(2)} = (0, \lambda_n),$$

De manera similar es posible dar con una definición de  $\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)}$  en  $\mathbb{R}^3$ , para cada  $j = 1, 2, 3$ .

Para un elemento  $K \in \mathcal{P}$  denotamos por:

- $\mathbb{P}_l(K)$  : espacio de polinomios, definidos en  $K$ , de grado a lo sumo  $l$ ;
- $\mathcal{E}_K \subset \mathcal{E}$  : conjunto de lados/caras individuales del elemento  $K$ ;
- $\mathcal{V}_K$  : índices del conjunto  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathcal{V}_K}$  de vértices terminales del elemento  $K$ ;
- $\Omega_K = \{K' \in \mathcal{P} : \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'} \neq \emptyset\}$ ;
- $\hat{\Omega}_K = \{K' \in \mathcal{P} : \overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset\}$ ;
- $\tilde{\Omega}_K = \{K' \in \mathcal{P} : \mathcal{E}_{K'} \cap \mathcal{E}_{K''} \neq \emptyset, \text{ con } K'' \in \hat{\Omega}_K\}$ ;
- $|K|$  : área/volumen del elemento  $K$ ;
- $h_K$  : diámetro del elemento  $K$ ;
- $\mathbf{n}_\gamma^K$  : vector normal unitario exterior al lado/cara  $\gamma \in \mathcal{E}_K$ ;
- $v|_K$  : restricción de la función  $v$  sobre el elemento  $K$ ;

- $\bar{v}_K$  : valor medio de la función  $v$  sobre  $K$ , i.e.:

$$\bar{v}_K = \frac{1}{|K|} \int_K v \, d\mathbf{x}.$$

Para una función vectorial denotamos por  $\bar{\mathbf{v}}_K = (\bar{v}_{1_K}, \dots, \bar{v}_{d_K})$ .

Para un lado/cara  $\gamma \in \mathcal{E}$  sea:

- $\mathbb{P}_l(\gamma)$  : espacio de polinomios, definidos en  $\gamma$ , de grado a lo sumo  $l$ ;
- $\mathcal{V}_\gamma$  : índices del conjunto  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathcal{V}_\gamma}$  de vértices terminales pertenecientes a  $\gamma$ ;
- $\Omega_\gamma = \{K \in \mathcal{P} : \gamma \in \mathcal{E}_K\}$ ;
- $|\gamma|$  : longitud/área del elemento  $\gamma$ ;
- $v|_\gamma$  : restricción de la función  $v$  sobre  $\gamma$ ;
- $\bar{v}_\gamma$  : valor medio de la función  $v$  sobre  $\gamma$ , i.e.:

$$\bar{v}_\gamma = \frac{1}{|\gamma|} \int_\gamma v \, d\mathbf{s}.$$

Para una función vectorial denotamos  $\bar{\mathbf{v}}_\gamma = (\bar{v}_{1_\gamma}, \dots, \bar{v}_{d_\gamma})$ .

En este trabajo se hará uso de una cierta constante  $\mathcal{C}$  para establecer cotas superiores. Cada vez que se haga uso de ésta se aludirá al hecho de que la estimación correspondiente no depende de los parámetros característicos de cada elemento  $K$  o de sus lados, tales como el área  $|K|$  o el diámetro  $h_K$ , ni de los parámetros físicos del problema en cuestión, tales como  $\nu$  y  $\rho$ .

## 2.4. Resultados preliminares

Para cerrar este capítulo se presentarán algunos resultados que serán usados recurrentemente.

Se define  $\Pi_{K,l} : L^2(K) \rightarrow \mathbb{P}_l(K)$  el operador proyección caracterizado por:

$$(\phi - \Pi_{K,l}(\phi), p)_{L^2(K)} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{P}_l(K). \quad (2.8)$$

Se denota por  $\mathbf{\Pi}_{K,l}$  a su contraparte vectorial.

**Teorema 2.4.1** (*Constante de Poincaré óptima. Ver [9, 22]*): Sea  $K \in \mathcal{P}$ . Entonces:

$$\|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_K\|_{L^2(K)} \leq \frac{h_K}{\pi} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\underline{\mathbb{L}}^2(K)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(K). \quad (2.9)$$

**Teorema 2.4.2** (*Desigualdad de Poincaré. Ver Capítulo 7, Teorema 7.5 de [25]*): Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un dominio abierto y acotado. Entonces existe una constante  $C_\Omega > 0$  tal que, para cada función  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$ :

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.10)$$

Otro elemento a utilizar para el estudio de estimadores de error son las denominadas funciones burbuja, definidas por

$$\beta_K = \prod_{n \in \mathcal{V}_K} \lambda_n \quad ; \quad \beta_\gamma = \prod_{n \in \mathcal{V}_\gamma} \lambda_n. \quad (2.11)$$

Dichas funciones se caracterizan por preservar la norma de ciertas funciones, tal como se menciona en los siguientes resultados.

**Teorema 2.4.3** *Para toda función  $p \in \mathbb{P}_l(K)$ , con  $l \geq 0$ , existe una constante  $C$ , independiente de  $p$  y  $h_K$ , tal que:*

$$\|\beta_K p\|_{L^2(K)} \leq \|p\|_{L^2(K)} \leq C \|\beta_K^{1/2} p\|_{L^2(K)} \quad (2.12)$$

y

$$\|\nabla(\beta_K p)\|_{L^2(K)} \leq C h_K^{-1} \|p\|_{L^2(K)}. \quad (2.13)$$

**Teorema 2.4.4** *Para toda función  $p \in \mathbb{P}_l(\gamma)$ , con  $l \geq 0$ , existe una constante  $C$ , independiente de  $p$  y  $h_K$ , tal que:*

$$\|\beta_\gamma p\|_{L^2(\gamma)} \leq \|p\|_{L^2(\gamma)} \leq C \|\beta_\gamma^{1/2} p\|_{L^2(\gamma)} \quad (2.14)$$

y

$$h_K^{-1/2} \|\beta_\gamma p\|_{L^2(K)} + h_K^{1/2} \|\nabla(\beta_\gamma p)\|_{L^2(K)} \leq C h_K^{-1} \|p\|_{L^2(\gamma)}. \quad (2.15)$$

Los resultados anteriores aplican del mismo modo para funciones vectoriales. Los detalles de éstos pueden revisarse en el Capítulo 2, Sección 2.3.1 del texto [1], y en el Capítulo 10, Sección 10.1.1 del texto [16].

# Capítulo 3

## Ecuación de Stokes

En este capítulo se presentará la ecuación de Stokes y su correspondiente formulación variacional. Posteriormente mencionaremos algunos resultados de existencia y unicidad de soluciones para el problema débil obtenido, omitiendo los detalles de las demostraciones. Por último se presentará otra formulación variacional y algunos resultados relevantes. Ésta última nos será de gran importancia para dar con la existencia de soluciones del problema de control óptimo (Sección 4.1.1).

### 3.1. Modelo

Dada una función vectorial  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  y una constante  $\nu \in ]0, 1]$ , la ecuación de Stokes se escribe, en forma vectorial, como sigue:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{y} + \nabla p &= \mathbf{f}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{y} &= 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{y} &= 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

La primera ecuación se denomina la ecuación de momentum, mientras que la segunda corresponde a la ecuación de conservación de masa. En este caso se hace uso de un abuso de notación para denotar el laplaciano de la función vectorial  $\mathbf{y}$ , de modo que:  $\Delta \mathbf{y} = (\Delta y_1, \dots, \Delta y_d)$ .

El sistema permite modelar el comportamiento de un fluido incomprensible, a bajas velocidades, a lo largo de un dominio  $\Omega$ . El objetivo del problema es hallar un campo de velocidad  $\mathbf{y}$  del fluido, junto con la presión escalar asociada  $p$ , cuando en él interactúa una fuerza externa  $\mathbf{f}$  y existen ciertas condiciones de frontera.

### 3.2. Problema débil: formulación mixta

Consideremos las formas bilineales continuas  $a : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $b : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a : (\mathbf{y}, \mathbf{v}) &\mapsto a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{y}, \nabla \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \\ b : (\mathbf{v}, p) &\mapsto b(\mathbf{v}, p) = -(p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

La formulación variacional o problema débil del sistema (3.1) consiste en:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (\mathbf{y}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tal que :} \\ a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(\mathbf{y}, q) = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.2)$$

La deducción del sistema se puede ver en el Capítulo 4, Sección 4.1.2 del texto [16].

Notemos que si  $(\mathbf{y}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  fuese solución del problema (3.2), entonces, para una constante  $c \in \mathbb{R}$  arbitraria se tendría que  $(\mathbf{y}, p + c)$  sería otra solución. Esto indica que el problema no garantiza unicidad de soluciones para dicha elección de espacios. Lo anterior sugiere restringir el espacio asociado a la presión. Una elección natural resulta ser el espacio cociente  $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$  compuesto por clases de equivalencia  $\hat{v}$  de funciones en  $L^2(\Omega)$ , cuyos elementos son de la forma  $v + c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ . La norma en este espacio, denotada por  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}}$ , viene dada por:

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|v + c\|_{L^2(\Omega)}.$$

Se puede probar que dicho espacio es isomorfo al espacio  $L_0^2(\Omega)$ , con la norma usual de  $L^2$ , mencionado en la sección de preliminares (Ver Capítulo 2, Sección 2.2 del texto [17]).

Así, la formulación débil de Stokes a estudiar es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (\mathbf{y}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \text{ tal que :} \\ a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(\mathbf{y}, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.3)$$

La formulación de este problema se suele denominar formulación mixta del problema de Stokes.

### 3.2.1. Existencia y unicidad de soluciones

A continuación daremos a conocer condiciones necesarias y suficientes para probar que el sistema (3.3) constituye un problema bien puesto en el sentido de Hadamard. Esto es: existe una, y solo una solución y ésta depende continuamente de los datos del problema. Para esto se analizó el problema débil en un contexto más abstracto.

Sean  $X$  y  $M$  espacios de Banach reflexivos y  $f \in X'$ . Consideremos  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$  dos formas bilineales continuas. El problema a investigar consiste en:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } y \in X \text{ y } p \in M \text{ tales que :} \\ a(y, v) + b(v, p) = f(v), \quad \forall v \in X, \\ b(y, q) = 0, \quad \forall q \in M. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

O bien, en términos de operadores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } y \in X \text{ y } p \in M \text{ tales que :} \\ Ay + B^*p = f, \\ By = 0, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

donde  $A$  y  $B$  son tales que:  $A : X \rightarrow X'$  y  $B : X \rightarrow M'$ , los cuales se describen mediante la relación:

$$\langle Ay, v \rangle_{X', X} = a(y, v) \quad ; \quad \langle Bv, p \rangle_{M', M} = b(v, p).$$

A su vez  $B^* : M = M'' \rightarrow X$  corresponde al operador adjunto, es decir, aquel que satisface la relación:

$$\forall v \in X, \forall w' \in M', \quad \langle w', Bv \rangle_{M, M'} = \langle B^*w', v \rangle_{M', M}.$$

El sistema (3.5) se denomina problema de punto silla. Corresponde a una condición de optimalidad de un problema de optimización con restricciones de igualdad, la cual se obtiene a partir del uso de lagrangianos.

Denotemos por  $\text{Ker}(B) = \{v \in X : \forall q \in M, b(v, q) = 0\}$ . El siguiente resultado entrega condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones.

**Teorema 3.2.1** *Bajo las hipótesis descritas en el marco de referencia, el problema (3.4) está bien puesto si y solo si se satisfacen las 3 condiciones siguientes:*

$$1) \text{ Existe } \alpha > 0 \text{ tal que: } \inf_{y \in \text{Ker}(B)} \sup_{v \in \text{Ker}(B)} \frac{a(y, v)}{\|y\|_X \|v\|_X} \geq \alpha.$$

2) Para cada  $v \in \text{Ker}(B)$ , si  $a(y, v) = 0$ , para todo  $y \in \text{Ker}(B)$ , entonces  $v = 0$ .

$$3) \text{ Existe } \beta > 0 \text{ tal que: } \inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta.$$

Más aún, existen  $c_1, c_2$  constantes positivas tales que:

$$\|y\|_X \leq c_1 \|f\|_{X'} \quad ; \quad \|p\|_M \leq c_2 \|f\|_{X'}.$$

La demostración del resultado anterior se encuentra en el Capítulo 2, Sección 2.4.1, Teorema 2.34 del texto [16].

□

La condición 3) del teorema suele denominarse condición inf - sup, siendo  $\beta$  la constante inf - sup asociada.

El problema débil de Stokes constituye justamente un caso particular del problema (3.4). Más aún, es posible verificar que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.2.1 en la formulación mixta (Ver Capítulo 4, Sección 4.12, Teorema 4.3 del texto [16]).

### 3.3. Problema débil: formulación restringida

Una formulación alternativa del problema débil consiste en incluir la restricción sobre la divergencia de  $\mathbf{y}$  en el espacio de soluciones.

Sea  $\mathbf{X} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$ . El espacio en cuestión constituye el núcleo del operador divergencia, i.e.  $\mathbf{X} = \text{Ker}(\nabla \cdot)$ , por lo cual es un subespacio cerrado de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .

Luego la formulación restringida del problema débil consiste en:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{y} \in \mathbf{X} \text{ tal que:} \\ a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Este problema, a diferencia del anterior, no entrega directamente, como solución, una presión  $p$ , debido a que la forma  $b$  se anula en cada elemento de este espacio.

La existencia y unicidad de soluciones para el problema (3.6) viene garantizada gracias a las hipótesis del teorema de Lax - Milgram. Más aún, es posible establecer un nexo entre la formulación mixta y la formulación restringida mediante el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.1** *Sea  $\mathbf{y} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Son equivalentes:*

- 1) *Existe  $p \in L_0^2(\Omega)$  tal que el par  $(\mathbf{y}, p)$  resuelve (3.3).*
- 2)  *$\mathbf{y}$  resuelve (3.6).*

El resultado anterior es consecuencia del Teorema de Rham (Apéndices, Sección B, Teorema B.73 del texto [16]).

La formulación restringida es de mayor interés en el aspecto teórico del problema. Sin embargo los esquemas de elementos finitos derivados de dicha formulación resultan ser más complicados de implementar computacionalmente, puesto que para ello se requiere incorporar la restricción de divergencia nula sobre los subespacios discretos a utilizar.

### 3.4. Aproximación mediante el método de elementos finitos

Sea  $\mathcal{P}$  una partición del dominio  $\Omega$ , descrita al comienzo de la Sección 2.3. Dados  $l, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , denotamos por  $\mathbf{V}_l(\mathcal{P})$  y  $Q_s(\mathcal{P})$  dos subespacios cerrados, de dimensión finita, de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  y  $L_0^2(\Omega)$ , respectivamente. Dichos subespacios se encuentran conformados por funciones del tipo polinomial sobre cada elemento  $K \in \mathcal{P}$ .

Para el problema de Stokes existen dos tipos de esquemas de elementos finitos de mayor interés: esquemas inf - sup estables y esquemas estabilizados. A continuación se describirán cada uno de estos.

#### 3.4.1. Esquemas de elementos finitos inf - sup estables

La estructura de este problema es la siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (\mathbf{y}_h, p_h) \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}) \times Q_s(\mathcal{P}) \text{ tal que :} \\ a(\mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}), \\ b(\mathbf{y}_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_s(\mathcal{P}). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

La principal característica de un esquema inf - sup estable es que se satisfacen las mismas condiciones del Teorema 3.2.1, con lo cual el sistema (3.7) constituye un problema bien puesto.

Un ejemplo de éste es el denominado esquema de Taylor - Hood (Capítulo 4, Sección 4.2.5 del texto [16]), en el cual los espacios discretos vienen dados por:

$$\mathbf{V}_2(\mathcal{P}) := \{\mathbf{v} \in C(\overline{\Omega}) : \mathbf{v}|_K \in [\mathbb{P}_2(K)]^d, \forall K \in \mathcal{P}\} \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

$$Q_1(\mathcal{P}) := \{q \in C(\overline{\Omega}) : q|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{P}\} \cap L_0^2(\Omega).$$

### 3.4.2. Esquemas de elementos finitos estabilizados

En este caso el esquema discreto se formula de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (\mathbf{y}_h, p_h) \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}) \times Q_s(\mathcal{P}) \text{ tal que :} \\ a(\mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + \mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}), \\ b(\mathbf{y}_h, q_h) + \mathcal{H}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_s(\mathcal{P}), \end{array} \right. \quad (3.8)$$

donde  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{H}$  corresponden a los términos estabilizantes asociados a la ecuación de conservación de momentum y a la ecuación de conservación de masa, respectivamente.

La idea básica de los esquemas estabilizados es dejar a un lado el requerimiento inf-sup, el cual impone restricciones en la elección de espacios, y así poder trabajar con espacios de bajo orden polinomial. A diferencia del esquema anterior, si ambos términos son cero se tiene un problema mal puesto, debido que no se satisfacen todas las condiciones del Teorema 3.2.1 (por lo general la tercera). Dentro de las principales razones se encuentran: la constante inf - sup es 0; el subespacio asociado a la presión es más grande que aquel asociado a la velocidad; la constante inf - sup no es homogénea respecto al mallado  $\mathcal{P}$ , entre otras. Situaciones como estas se encuentran explicadas en el Capítulo 4, Sección 4.2.3 del texto [16].

**Supuesto 3.4.1** *Para este trabajo, los esquemas estabilizados a considerar deben satisfacer tres condiciones sobre el término estabilizante  $\mathcal{S}$ :*

- 1) *Para cada  $K \in \mathcal{P}$ , existe una contribución local  $\mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \mathbf{v}_h)$  de modo que  $\mathcal{S}$  se puede escribir como*

$$\mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \mathbf{v}_h), \quad (3.9)$$

*para toda función  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P})$ . Si  $\mathbf{v}_h$  corresponde a una función lineal  $\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, d$ ), descrita en la Sección (2.3), entonces  $\mathcal{S}$  se escribe como*

$$\mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \boldsymbol{\lambda}_n^{(j)}) = \sum_{K \in \Omega_n} \mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \boldsymbol{\lambda}_n^{(j)}), \quad \forall j = 1, \dots, d. \quad (3.10)$$

- 2) *Para cada  $K \in \mathcal{P}$  y para todo  $n \in \mathcal{V}_K$ , la contribución local  $\mathcal{S}_K$  satisface:*

$$\mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \mathbf{c}) = 0, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d \quad (3.11)$$

3) Para cada  $K \in \mathcal{P}$ , la contribución local  $\mathcal{S}_K$  satisface:

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \boldsymbol{\lambda}_n^{(j)})|^2 \leq & \sum_{T \in \Omega_n} C_{\mathcal{S}, T} h_T^{d-2} \left( \nu \|\nabla \cdot \mathbf{y}_h\|_{L^2(T)} + h_T^2 \|\mathbf{\Pi}_{T,1}(\mathbf{f}) - \mathbf{f}\|_{L^2(T)} \right. \\ & + h_T^2 \|\mathbf{\Pi}_{T,1}(\mathbf{f}) + \nu \Delta \mathbf{y}_h - \nabla p_h\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \\ & \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_I} h_T \|\llbracket \nu \nabla \mathbf{y}_h \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

con  $j = 1, \dots, d$ , donde

$$\llbracket \nabla \mathbf{y}_h \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket := \nabla \mathbf{y}_{h|K} \mathbf{n}_\gamma^K - p_{h|K} \mathbf{n}_\gamma^K + \nabla \mathbf{y}_{h|K'} \mathbf{n}_\gamma^{K'} - p_{h|K'} \mathbf{n}_\gamma^{K'}$$

para cada lado  $\gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'}$  ( $K \neq K'$ ). Dicho término corresponde al salto generado entre un elemento  $K$  y su elemento vecino  $K'$ . A su vez la constante  $C_{\mathcal{S}, T}$  depende de los parámetros de estabilización y de las características físicas del problema.

Nuestro interés se centra en el uso de 2 esquemas estabilizados en particular:

1) RELP (Residual Local Projection. Ver [6])

En este caso la expresión de cada termino estabilizante corresponde a:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \mathbf{v}_h) = & \sum_{K \in \mathcal{P}} \tau_K (\mathbf{f} - \nu \Delta \mathbf{y}_h + \nabla p_h, \nu \Delta \mathbf{y}_h)_{L^2(K)} \\ & + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_I} \tau_\gamma (\llbracket \nu \nabla \mathbf{y}_h \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket, \llbracket \nu \nabla \mathbf{v}_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket)_{L^2(\gamma)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; q_h) = & \sum_{K \in \mathcal{P}} \tau_K (\mathbf{f} - \Delta \mathbf{y}_h + \nabla p_h, \nabla q_h)_{L^2(K)} \\ & + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_I} \tau_\gamma (\llbracket \nu \nabla \mathbf{y}_h \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket, \llbracket q_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket)_{L^2(\gamma)}. \end{aligned}$$

Los parámetros de estabilización están dados por

$$\tau_K = a_1 \frac{h_K^2}{\nu} \quad \text{y} \quad \tau_\gamma = a_2 \frac{|\gamma|}{\nu},$$

siendo  $a_1, a_2$  constantes positivas.

2) LPS (Local Projection Stabilization. Ver [8] y el Capítulo 3, Sección 3.1 del texto [23])

Los términos estabilizantes para este esquema corresponden a:

$$\mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \mathbf{v}_h) = 0$$

y

$$\mathcal{H}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; q_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \delta_K (\mathbf{f} - \nu \Delta \mathbf{y}_h + \nabla p_h, \nabla q_h)_{\mathbf{L}^2(K)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_I} \tau_\gamma (\llbracket p_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket, \llbracket q_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket)_{\mathbf{L}^2(\gamma)},$$

donde  $\tau_\gamma = |\gamma|$ , mientras que  $\delta_K$  se escoge de tal modo satisfaga ciertas restricciones definidas por el usuario. Una elección usual es  $\delta_K = \min\{h_K, \nu^{-1} h_K^2\}$ .

En ambos esquemas es posible considerar los siguientes espacios de discretización:

$$\mathbf{V}_1(\mathcal{P}) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{C}(\overline{\Omega}) : \mathbf{v}|_K \in [\mathbb{P}_1(K)]^d, \forall K \in \mathcal{P}\} \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

$$Q_0(\mathcal{P}) := \{q : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : q|_K \in \mathbb{P}_0(K), \forall K \in \mathcal{P}\} \cap L_0^2(\Omega).$$

También es posible emplear el subespacio  $Q_1(\mathcal{P})$  en vez de  $Q_0(\mathcal{P})$ .

**Observación 3.4.2** *Claramente el esquema LPS satisface las condiciones (3.9) - (3.12), tomando  $\mathcal{S}_K \equiv 0$ , para cada  $K \in \mathcal{P}$ . En el caso del esquema RELP basta tomar la contribución  $\mathcal{S}_K$  dada por*

$$\mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \mathbf{v}_h) := \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} \tau_\gamma (\llbracket \nu \nabla \mathbf{y}_h \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket, \nabla \mathbf{v}_h|_K \mathbf{n}_\gamma^K)_{\mathbf{L}^2(\gamma)}$$

para cada  $K \in \mathcal{P}$ .

**Supuesto 3.4.3** *En lo que sigue, cada vez que se haga mención del uso del esquema RELP o del esquema LPS supondremos que se estará utilizando los subespacios  $\mathbf{V}_1(\mathcal{P})$  y  $Q_0(\mathcal{P})$  como subespacios de discretización.*

### 3.5. Análisis del error a posteriori

Dado un esquema de elementos finitos (inf - sup estable o estabilizado) del problema de Stokes, la idea es construir estimadores de error a posteriori, que dependan de la solución discreta y del tamaño de cada elemento  $K$ , los cuales cumplan con: constituir una cota explícita del error de discretización y dar cuenta de la proximidad entre la solución discreta y la solución real.

Dicho de otro modo, se desea obtener un estimador del error  $\eta$ , de tal modo que se satisfaga una relación del estilo:

$$\|(\mathbf{y} - \mathbf{y}_h, p - p_h)\|_{\Omega} \leq \eta(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}, \mathcal{P}) = \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_K^2 \right)^{1/2},$$

donde las funciones  $\eta_K$  son conocidas como indicadores del error.

Sean  $(\mathbf{y}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  y  $(\mathbf{y}_h, p_h) \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}) \times Q_s(\mathcal{P})$  los pares solución del problema débil mixto (3.3) y del esquema discreto (3.7) (o (3.8)), respectivamente. Definimos por  $(\mathbf{e}_y, e_p)$  el error de discretización de la siguiente manera:

$$\mathbf{e}_y := \mathbf{y} - \mathbf{y}_h \quad ; \quad e_p := p - p_h.$$

A partir del problema débil y el problema discreto, tomando una función  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  fija, y usando integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}_y, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, e_p) &= \nu(\nabla \mathbf{e}_y, \nabla \mathbf{v})_{\underline{\mathbb{L}}^2(\Omega)} - (e_p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} - \nu(\nabla \mathbf{y}_h, \nabla \mathbf{v})_{\underline{\mathbb{L}}^2(\Omega)} + (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{y}_h - \nabla p_h, \mathbf{v})_{L^2(K)} - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} ([\nu \nabla \mathbf{y}_h \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma], \mathbf{v})_{L^2(\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Por último, haciendo uso de la proyección ortogonal  $\mathbf{\Pi}_{K,1}$ , mencionada en la Sección 2.4, se tiene como resultado la siguiente ecuación del error:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}_y, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, e_p) &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{f} - \mathbf{\Pi}_{K,1}(\mathbf{f}), \mathbf{v})_{L^2(K)} + (\mathbf{\Pi}_{K,1}(\mathbf{f}) + \nu \Delta \mathbf{y}_h - \nabla p_h, \mathbf{v})_{L^2(K)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I} ([\nu \nabla \mathbf{y}_h \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma], \mathbf{v})_{L^2(\gamma)} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

En base a esta última expresión es posible obtener distintas estimaciones de error. En este trabajo se presentarán dos tipos: una de carácter explícita, implementable computacionalmente, y otra de carácter implícita, donde intervienen constantes desconocidas.

### 3.5.1. Estimaciones completamente computables

A continuación presentaremos un análisis de error a posteriori, el cual permite construir estimadores de error completamente computables. Éstos tienen la característica de no utilizar ningún tipo de interpolador, dentro del análisis de error. Primero se realizará un análisis de confiabilidad, y posteriormente un análisis de eficiencia local.

### 3.5.1.1. Análisis de Confiabilidad

Introduciremos dos conceptos que ayudarán al análisis del error. El primero es el conjunto de funciones  $\{\mathbf{g}_{\gamma,K} \in [\mathbb{P}_1(\gamma)]^d : K \in \mathcal{P}, \gamma \in \mathcal{E}_K\}$ , denominadas flujos equilibrados (ver Capítulo 6 del texto [1]), las cuales supondremos que satisfacen las siguientes condiciones:

- Consistencia:

$$\mathbf{g}_{\gamma,K} + \mathbf{g}_{\gamma,K'} = \mathbf{0}, \quad \text{si } \gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'} (K \neq K'). \quad (3.14)$$

- Balance de primer orden:

$$(\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta})_{\mathbf{L}^2(K)} - \mathcal{B}_K((\mathbf{y}_h, p_h), \boldsymbol{\theta}) + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} (\mathbf{g}_{\gamma,K}, \boldsymbol{\theta})_{\mathbf{L}^2(K)} - \mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \boldsymbol{\theta}) = 0, \quad (3.15)$$

para todo  $\boldsymbol{\theta} \in [\mathbb{P}_1(K)]^d$  y para todo  $K \in \mathcal{P}$ , donde

$$\mathcal{B}_K((\mathbf{y}_h, p_h), \boldsymbol{\theta}) = \nu(\nabla \mathbf{y}_h, \nabla \boldsymbol{\theta})_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} - (p_h, \nabla \cdot \boldsymbol{\theta})_{\mathbf{L}^2(K)}. \quad (3.16)$$

Notemos que en el caso en que el esquema utilizado sea inf - sup estable, el término  $\mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \boldsymbol{\theta})$  es 0.

A su vez denotamos por  $\mathbf{R}_K$  y  $\mathbf{R}_{\gamma,K}$  los denominados términos residuales, y por  $\mathbf{osc}_K$  los términos oscilatorios en  $K$ , descritos por:

$$\begin{cases} \mathbf{osc}_K = \mathbf{f} - \boldsymbol{\Pi}_{K,1}(\mathbf{f}), & \text{en } K, \\ \mathbf{R}_K = \boldsymbol{\Pi}_{K,1}(\mathbf{f}) + \nu \Delta \mathbf{y}_h - \nabla p_h, & \text{en } K, \\ \mathbf{R}_{\gamma,K} = \mathbf{g}_{\gamma,K} - \nu \nabla \mathbf{y}_h|_K \mathbf{n}_\gamma^K + p_h|_K \mathbf{n}_\gamma^K, & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{E}_K, \end{cases} \quad (3.17)$$

Con esto podemos reescribir la ecuación del error, descrita en (3.13), como

$$a(\mathbf{e}_y, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, e_p) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{R}_K, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} (\mathbf{R}_{\gamma,K}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} \right). \quad (3.18)$$

El segundo concepto a introducir es la siguiente función: supondremos que existe una solución, lo suficientemente suave, para el siguiente problema del tipo Neumann:

$$\begin{cases} -\underline{\mathbf{div}}_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} \boldsymbol{\sigma}_K = \mathbf{R}_K, & \text{en } K, \\ \boldsymbol{\sigma}_K \mathbf{n}_\gamma^K = \mathbf{R}_{\gamma,K}, & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{E}_K. \end{cases} \quad (3.19)$$

Este problema, bajo las condiciones de consistencia y balance de primer orden para los flujos, admite

una solución explícita en términos de las funciones lineales  $\lambda_n$ , y su construcción, para este problema, se encuentra detallada en la Sección 6.5 del trabajo [2].

A través del uso de integración por partes se observa que

$$\begin{aligned} (\underline{\boldsymbol{\sigma}}_K, \nabla \mathbf{v})_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} &= (-\mathbf{div} \underline{\boldsymbol{\sigma}}_K, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} (\underline{\boldsymbol{\sigma}}_K \mathbf{n}_\gamma^K, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \\ &= (\mathbf{R}_K, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} (\mathbf{R}_{\gamma, K}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)}. \end{aligned}$$

Usando esto último en (3.18) vemos que la ecuación del error se reescribe como

$$a(\mathbf{e}_y, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, e_p) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( (\underline{\boldsymbol{\sigma}}_K, \nabla \mathbf{v})_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_K)_{\mathbf{L}^2(K)} \right), \quad (3.20)$$

donde usamos la propiedad de la proyección ortogonal:

$$(\mathbf{osc}_K, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} = (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_K)_{\mathbf{L}^2(K)}.$$

Para poder obtener una estimación de  $\mathbf{e}_y$  haremos uso de una descomposición ortogonal de su gradiente, descrita en el siguiente resultado (ver [12, 15]).

**Teorema 3.5.1** *Para  $\mathbf{e}_V = \mathbf{y} - \mathbf{y}_h$ , introducido al comienzo de la sección, existe una descomposición de su gradiente, dada por:*

$$\nabla \mathbf{e}_y = \nabla \mathbf{e}_c + \underline{\mathbf{e}}_{nc}, \quad (3.21)$$

donde  $\mathbf{e}_c \in \mathbf{X}$  corresponde al error conforme, el cual satisface:

$$(\nabla \mathbf{e}_c, \nabla \mathbf{v}_c)_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} = (\nabla \mathbf{e}_y, \nabla \mathbf{v}_c)_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v}_c \in \mathbf{X}.$$

A su vez  $\underline{\mathbf{e}}_{nc}$  constituye el error no conforme perteneciente al siguiente subespacio de  $\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)$ :

$$\underline{\mathbf{Y}} = \left\{ \underline{\mathbf{w}}_{nc} \in \underline{\mathbf{L}}^2(\Omega) : (\underline{\mathbf{w}}_{nc}, \nabla \mathbf{v}_c)_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} = 0, \quad \forall \mathbf{v}_c \in \mathbf{X} \right\},$$

y se escribe como:

$$\underline{\mathbf{e}}_{nc} = -q \underline{\mathbf{I}} + \nabla \times \mathbf{s},$$

para alguna función  $q \in L_0^2(\Omega)$  y  $\mathbf{s} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , donde  $\underline{\mathbf{I}}$  denota la matriz identidad de tamaño  $d \times d$ .

Otra propiedad importante de esta descomposición viene dada por el siguiente teorema:

**Teorema 3.5.2** Para  $\underline{\mathbf{e}}_{nc} \in \underline{\mathbf{Y}}$ , dado en el teorema anterior, existe una función  $w \in L_0^2(\Omega)$ , tal que

$$(\underline{\mathbf{e}}_{nc}, \nabla \mathbf{v})_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} = (w, \nabla \cdot \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (3.22)$$

i.e.:  $\operatorname{div} \underline{\mathbf{e}}_{nc} = \nabla w$ . Dicha función  $w$  satisface a su vez:

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta} \|\underline{\mathbf{e}}_{nc}\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)}, \quad (3.23)$$

donde  $\beta$  corresponde a la constante inf - sup del Teorema 3.2.1.

Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_c$ , dado por el error conforme del Teorema 3.5.1, en la ecuación (3.20) se obtiene

$$\nu \|\nabla \mathbf{e}_c\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)}^2 = \|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V}, \Omega}^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\underline{\boldsymbol{\sigma}}_K, \nabla \mathbf{e}_c)_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{e}_c - \overline{(\mathbf{e}_c)_K})_{L^2(K)} \right).$$

Usando (2.9) y las desigualdades de Hölder y de Cauchy - Schwarz se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V}, \Omega}^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( \|\underline{\boldsymbol{\sigma}}_K\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} + \frac{h_K}{\pi} \|\mathbf{osc}_K\|_{L^2(K)} \right) \|\nabla \mathbf{e}_c\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} \\ &\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( \|\underline{\boldsymbol{\sigma}}_K\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} + \frac{h_K}{\pi} \|\mathbf{osc}_K\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \|\nabla \mathbf{e}_c\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \frac{1}{\nu} \left( \|\underline{\boldsymbol{\sigma}}_K\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} + \frac{h_K}{\pi} \|\mathbf{osc}_K\|_{L^2(K)} \right)^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V}, \Omega}. \end{aligned}$$

En base a lo anterior se puede establecer el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.3** Sea  $\mathbf{e}_c$  el error conforme en la descomposición ortogonal (3.21) de la velocidad. Entonces

$$\|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V}, \Omega}^2 \leq \eta_c^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_{c,K}^2, \quad (3.24)$$

donde  $\eta_c$ , que lo llamaremos estimador conforme, puede ser escrito en términos de los indicadores conformes como

$$\eta_{c,K} := \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left( \|\underline{\boldsymbol{\sigma}}_K\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} + \frac{h_K}{\pi} \|\mathbf{osc}_K\|_{L^2(K)} \right),$$

siendo  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_K$  solución de (3.19).

Con respecto a la estimación del error no conforme, usando el hecho de que  $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$  y que existe  $w \in L_0^2$

tal que satisface (3.22) y (3.23), y aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{nc}\|_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}^2(\Omega) &= (\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{nc}, \underline{\underline{\mathbf{e}}}_{nc})_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}(\Omega) = (\nabla \mathbf{e}_y - \nabla \mathbf{e}_c, \underline{\underline{\mathbf{e}}}_{nc})_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}(\Omega) \\
&= (\nabla \mathbf{y} - \nabla \mathbf{y}_h, \underline{\underline{\mathbf{e}}}_{nc})_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}(\Omega) = -(\nabla \mathbf{y}_h, \underline{\underline{\mathbf{e}}}_{nc})_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}(\Omega) \\
&= -(w, \nabla \cdot \mathbf{y}_h)_{L^2(\Omega)} \leq \|w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{y}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta} \|\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{nc}\|_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}(\Omega) \|\nabla \cdot \mathbf{y}_h\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Con esto podemos dar con el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.4** *Sea  $\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{nc}$  el error no conforme en la descomposición ortogonal (3.21) de la velocidad. Entonces*

$$\|\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{nc}\|_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}^2(\Omega) \leq \eta_{nc}^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_{nc,K}^2, \quad (3.25)$$

donde  $\eta_{nc}$ , que lo llamaremos estimador no conforme, puede ser escrito en términos de los indicadores no conformes como

$$\eta_{nc,K} := \frac{1}{\beta} \|\nabla \cdot \mathbf{y}_h\|_{L^2(K)}. \quad (3.26)$$

Finalmente, por identidad pitagórica se concluye que:

$$\|\mathbf{e}_y\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 = \|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 + \nu \|\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{nc}\|_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}^2(\Omega) \leq \eta_y^2, \quad \text{donde } \eta_y := (\eta_c^2 + \nu \eta_{nc}^2)^{1/2}.$$

En este caso denotamos por  $\eta_{y,K} := (\eta_{c,K}^2 + \nu \eta_{nc,K}^2)^{1/2}$ , con lo cual  $\eta_y^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_{y,K}^2$ .

Nos resta obtener un estimador de error para la presión.

Dada una función  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , consideremos su descomposición ortogonal,  $\nabla \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}_c + \underline{\underline{\mathbf{v}}}_{nc}$ , donde  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$  y  $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_{nc} \in \underline{\underline{\mathbf{Y}}}$ . Notemos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr}(\nabla \mathbf{v}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{v}_c + \underline{\underline{\mathbf{v}}}_{nc}) = \nabla \cdot \mathbf{v}_c + \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{v}}}_{nc}),$$

donde  $\text{tr}(\cdot)$  denota la traza de una matriz. A partir de esto último, junto con la condición inf - sup sobre la forma  $b$ , se deduce que para toda función  $q \in L_0^2(\Omega)$ :

$$\beta \|q\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{(q, \nabla \cdot \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{(q, \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{v}}}_{nc}))_{L^2(\Omega)}}{\left( \|\nabla \mathbf{v}_c\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\underline{\underline{\mathbf{v}}}_{nc}\|_{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}^2(\Omega) \right)^{1/2}},$$

con lo cual se sigue que

$$\|q\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_{nc} \in \mathbf{Y}} \frac{(q, \operatorname{tr}(\mathbf{v}_{nc}))_{L^2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}_{nc}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}. \quad (3.27)$$

Por otro lado, recordemos la ecuación del error (3.20), la cual establece que

$$\nu(\nabla \mathbf{e}_y, \nabla \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (e_p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = \sum_{K \in \mathcal{P}} (\boldsymbol{\sigma}_K, \nabla \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v})_{L^2(K)}.$$

Utilizando la descomposición ortogonal se sigue que:

$$\begin{aligned} -(e_p, \operatorname{tr}(\mathbf{v}_{nc}))_{L^2(\Omega)} &= -\nu(\nabla \mathbf{e}_c, \nabla \mathbf{v}_c)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \nu(\mathbf{e}_{nc}, \mathbf{v}_{nc})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{P}} (\boldsymbol{\sigma}_K, \nabla \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{nc})_{\mathbf{L}^2(K)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v})_{L^2(K)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A su vez notemos que el error conforme satisface

$$\nu(\nabla \mathbf{e}_c, \nabla \mathbf{v}_c)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{K \in \mathcal{P}} (\boldsymbol{\sigma}_K, \nabla \mathbf{v}_c)_{\mathbf{L}^2(K)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v}_c)_{L^2(K)}.$$

Reemplazando en la ecuación (3.28) y usando las propiedades de la descomposición ortogonal y de la proyección ortogonal sobre constantes (2.9), y la definición de los estimadores (3.24) y (3.25), se sigue que

$$\begin{aligned} -(e_p, \operatorname{tr}(\mathbf{v}_{nc}))_{L^2(\Omega)} &= -\nu(\mathbf{e}_{nc}, \mathbf{v}_{nc})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{K \in \mathcal{P}} (\boldsymbol{\sigma}_K, \mathbf{v}_{nc})_{\mathbf{L}^2(K)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v} - \mathbf{v}_c - \overline{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c)}_K)_{L^2(K)} \\ &\leq (\nu\eta_{nc} + \eta_c) \|\mathbf{v}_{nc}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad (3.27) y la desigualdad de Young concluimos que

$$\|e_p\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{2}}{\beta} (\nu^2 \eta_{nc}^2 + \eta_c^2)^{1/2}.$$

En virtud de los resultados anteriores se puede formular, a modo de resumen, el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.5** *Sea  $(\mathbf{y}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  solución del problema débil (3.3) y  $(\mathbf{y}_h, p_h) \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}) \times Q_s(\mathcal{P})$  solución del (3.7) o (3.8) de elementos finitos. A su vez sean  $\{\mathbf{g}_{\gamma, K} : K \in \mathcal{P}, \gamma \in \mathcal{E}_K\}$  los flujos equilibrados que satisfacen las condiciones (3.14) y (3.15) y  $\{\boldsymbol{\sigma}_K\}_{K \in \mathcal{P}}$  las funciones matriciales que resuelven el problema (3.19). Entonces:*

$$\|(\mathbf{e}_y, e_p)\|_{\Omega}^2 \leq \eta^2,$$

donde el estimador de error  $\eta$  viene dado por:

$$\eta^2 = \left(1 + \frac{2\rho^2}{\beta^2}\right) \eta_c^2 + \left(1 + \frac{2\rho^2\nu}{\beta^2}\right) \nu\eta_{nc}^2. \quad (3.29)$$

A su vez  $\eta_c$  y  $\eta_{nc}$  vienen dados por (3.24) y (3.25) respectivamente.

### 3.5.1.2. Análisis de Eficiencia Local

Una vez obtenido el estimador de error, lo usual es determinar una cota superior, que dependa del error local, para el indicador de error asociado. Dado que el estimador computable depende de los estimadores conforme y no conforme, se procederá a establecer una cota superior para cada uno de estos.

Para acotar el indicador  $\eta_{nc,K}$  basta ver que si  $\mathbf{y} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  es solución del problema mixto (3.3), por Teorema 3.3.1 pertenece al espacio  $\mathbf{X}$ . Luego

$$\eta_{nc,K}^2 = \frac{1}{\beta^2} \|\nabla \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_h)\|_{\underline{\underline{L}}^2(K)}^2 \leq \frac{d}{\beta^2\nu} \|\mathbf{e}_y\|_{\mathbf{V},K}^2 \leq \frac{d}{\beta^2\nu} \|(\mathbf{e}_y, e_p)\|_K^2. \quad (3.30)$$

Para estimar el término  $\|\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_K\|_{\underline{\underline{L}}^2(K)}$  del indicador conforme se hará uso de un resultado que se obtiene luego de encontrar una solución en particular del problema de Neumann (3.19), en términos de las funciones lineales  $\lambda_n$ . Dicho resultado se encuentra detallado en la Sección 5 del trabajo [2], en el cual se establece que:

$$\|\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_K\|_{\underline{\underline{L}}^2(K)} \leq \mathcal{C} \left( h_K \|\mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} h_K^{1/2} \|\mathbf{R}_{\gamma,K}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right). \quad (3.31)$$

A continuación introduciremos los siguientes términos

$$\mathbf{J}_{\gamma,K} = \nu \nabla \mathbf{y}_h|_K \mathbf{n}_\gamma^K - p_h|_K \mathbf{n}_\gamma^K, \quad (3.32)$$

$$\langle \mathbf{J} \rangle_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2} (\mathbf{J}_{\gamma,K} - \mathbf{J}_{\gamma,K'}), & \text{si } \gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'} (K \neq K'), \\ \mathbf{J}_{\gamma,K}, & \text{si } \gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_\Gamma, \end{cases} \quad (3.33)$$

$$[\mathbf{J}]_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2} (\mathbf{J}_{\gamma,K} + \mathbf{J}_{\gamma,K'}), & \text{si } \gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'} (K \neq K'), \\ \mathbf{0}, & \text{si } \gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_\Gamma. \end{cases} \quad (3.34)$$

Notemos que  $\mathbf{J}_{\gamma,K} = \langle \mathbf{J} \rangle_\gamma + [\mathbf{J}]_\gamma$  y  $\mathbf{R}_{\gamma,K} = \mathbf{g}_{\gamma,K} - \mathbf{J}_{\gamma,K}$ . Con esto la desigualdad (3.31) queda descrita

de la siguiente manera

$$\|\underline{\boldsymbol{\sigma}}_K\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} \leq \mathcal{C} \left( h_K \|\mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} h_K^{1/2} \left( \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} + \|\mathbf{g}_{\gamma,K} - \langle \mathbf{J} \rangle_\gamma\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right) \right). \quad (3.35)$$

Los términos residuales  $\mathbf{R}_K$  y los términos  $[\mathbf{J}]_\gamma$  se pueden estimar mediante el uso de las funciones burbuja, introducidas en la Sección 2.4, tal como se lleva a cabo en el siguiente resultado.

**Lema 3.5.6** *Para todo elemento  $K \in \mathcal{P}$ , los términos residuales  $\mathbf{R}_K$ , introducidos en (3.17), cumplen con la siguiente estimación:*

$$h_K^2 \|\mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \leq \mathcal{C} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|(\mathbf{e}_y, e_p)\|_K^2 + h_K^2 \|\mathbf{osc}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \right). \quad (3.36)$$

A su vez, para cada  $\gamma \in \partial K$ , los términos  $[\mathbf{J}]_\gamma$ , descritos en (3.34), satisfacen

$$h_K \|[\mathbf{J}]_\gamma\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 \leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_\gamma} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|(\mathbf{e}_y, e_p)\|_T^2 + h_T^2 \|\mathbf{osc}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right), \quad (3.37)$$

donde  $C_{\mathbf{R}} = \max \left\{ \sqrt{\nu}, \frac{\sqrt{d}}{\rho} \right\}$ .

*Dem:* Recordemos la ecuación del error (3.13), la cual puede reescribirse como

$$a(\mathbf{e}_y, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, e_p) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{R}_K, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} - \sum_{\gamma \in \partial K} ([\mathbf{J}]_\gamma, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} \right).$$

Sea  $\beta_K$  la función burbuja descrita en (2.11). Tomando  $\mathbf{v} = \beta_K \mathbf{R}_K$  en esta expresión se llega a que

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_K, \beta_K \mathbf{R}_K)_{\mathbf{L}^2(K)} &= \|\beta_K^{1/2} \mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 = \nu (\nabla \mathbf{e}_y, \nabla (\beta_K \mathbf{R}_K))_{\underline{\mathbf{L}}^2(K)} - (e_p, \nabla \cdot (\beta_K \mathbf{R}_K))_{\mathbf{L}^2(K)} \\ &\quad - (\mathbf{osc}_K, \beta_K \mathbf{R}_K)_{\mathbf{L}^2(K)}. \end{aligned}$$

Usando la propiedad de la proyección ortogonal (2.8) y la desigualdad de Hölder se llega a que

$$\|\beta_K^{1/2} \mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \leq \left( \sqrt{\nu} \|\mathbf{e}_y\|_{\mathbf{V},K} + \frac{\sqrt{d}}{\rho} \|e_p\|_{Q,K} + \frac{h_K}{\pi} \|\mathbf{osc}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)} \right) \|\nabla (\beta_K \mathbf{R}_K)\|_{\mathbf{L}^2(K)},$$

y por desigualdades (2.12) y (2.13) y desigualdad de Young se concluye la primera desigualdad.

De manera similar, tomando ahora  $\mathbf{v} = \beta_\gamma [\mathbf{J}]_\gamma$  en la ecuación del error, se obtiene

$$\begin{aligned} \|\beta_\gamma^{1/2} [\mathbf{J}]_\gamma\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 &= \nu(\nabla \mathbf{e}_\mathbf{y}, \nabla(\beta_\gamma [\mathbf{J}]_\gamma))_{\mathbf{L}^2(\Omega_\gamma)} - (e_p, \nabla \cdot (\beta_\gamma [\mathbf{J}]_\gamma))_{\mathbf{L}^2(\Omega_\gamma)} \\ &\quad - (\mathbf{osc}_K, \beta_\gamma [\mathbf{J}]_\gamma)_{\mathbf{L}^2(\Omega_\gamma)} \\ &\leq \sum_{T \in \Omega_\gamma} \left( \sqrt{\nu} \|\mathbf{e}_\mathbf{y}\|_{\mathbf{V}, T} + \frac{\sqrt{d}}{\rho} \|e_p\|_{Q, T} + \frac{h_T}{\pi} \|\mathbf{osc}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)} \right) \|\nabla(\beta_\gamma [\mathbf{J}]_\gamma)\|_{\mathbf{L}^2(T)}, \end{aligned}$$

y por desigualdades (2.14) y (2.15) y desigualdad de Young se concluye la segunda desigualdad.  $\square$

Por último, el término faltante  $\|\mathbf{g}_{\gamma, K} - \langle \mathbf{J} \rangle_\gamma\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}$  se puede acotar haciendo usando los mismos argumentos descritos en la Sección 6.5 del texto [1], con lo cual se deduce que:

$$h_K^{d-1} \|\mathbf{g}_{\gamma, K} - \langle \mathbf{J} \rangle_\gamma\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \leq \mathcal{C} \sum_{i=1}^d \sum_{n \in \mathcal{V}_\gamma} \sum_{T \in \Omega_n} |\Delta_K(\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)})|^2, \quad (3.38)$$

donde

$$\Delta_K(\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)}) = \mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \boldsymbol{\lambda}_n^{(j)}) - \left( (\mathbf{R}_K, \boldsymbol{\lambda}_n^{(j)})_{\mathbf{L}^2(K)} - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_n} ([\mathbf{J}]_\gamma, \boldsymbol{\lambda}_n^{(j)})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right),$$

para cada  $j = 1, \dots, d$ .

Con esto es posible obtener el siguiente resultado sobre el indicador conforme.

**Teorema 3.5.7** *Bajo el Supuesto 3.4.1 existe una constante  $\mathcal{C}$  tal que para todo elemento  $K \in \mathcal{P}$*

$$\eta_{c, K} \leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_K} (\|(\mathbf{e}_\mathbf{y}, e_p)\|_T + h_T \|\mathbf{osc}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}). \quad (3.39)$$

*Dem:* Usando desigualdad de Hölder sobre cada término  $\Delta_K(\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)})$ , con  $j = 1, \dots, d$ , se obtiene

$$|\Delta_K(\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)})|^2 \leq \mathcal{C} \left( h_K^d \|\mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_n} h_K^{d-1} \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 + |\mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \boldsymbol{\lambda}_n^{(j)})|^2 \right). \quad (3.40)$$

En base a la condición (3.12), establecida en el Supuesto 3.4.1, y usando el hecho de que

$\|\nabla \cdot \mathbf{y}_h\|_{\mathbf{L}^2(K)} \leq d \|\nabla \mathbf{e}_\mathbf{y}\|_{\mathbf{L}^2(K)}$  vemos que:

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_K(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \boldsymbol{\lambda}_n^{(j)})|^2 &\leq \sum_{T \in \Omega_n} C_{\mathcal{S}, T} h_T^{d-2} \left( h_T^2 (\|\mathbf{R}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \|\mathbf{osc}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_T} h_T \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 + d \|(\mathbf{e}_\mathbf{y}, e_p)\|_T^2 \right). \end{aligned}$$

Usando esta estimación y las desigualdades (3.36) y (3.37) sobre la estimación (3.40) y el resultado (3.38) se obtiene

$$\begin{aligned}
h_K \|\mathbf{g}_{\gamma,K} - \langle \mathbf{J} \rangle_{\gamma}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 &\leq \mathcal{C} \sum_{n \in \mathcal{V}_{\gamma}} \sum_{T \in \Omega_n} \left( (1 + C_{\mathcal{S},K}) \left( h_T^2 \|\mathbf{R}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_T} h_T \|\langle \mathbf{J} \rangle_{\gamma}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right) \right. \\
&\quad \left. + C_{\mathcal{S},T} (h_T^2 \|\mathbf{osc}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + d \|\langle \mathbf{e}_y, e_p \rangle\|_T) \right) \\
&\leq \mathcal{C} \sum_{n \in \mathcal{V}_{\gamma}} \sum_{T \in \Omega_n} \left( (1 + C_{\mathcal{S},T}) \left( C_{\mathbf{R}} \|\langle \mathbf{e}_y, e_p \rangle\|_T^2 + h_T^2 \|\mathbf{osc}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_T} \sum_{T' \in \Omega_{\gamma}} \left( C_{\mathcal{S},T'} \|\langle \mathbf{e}_y, e_p \rangle\|_{T'}^2 + h_{T'}^2 \|\mathbf{osc}_{T'}\|_{\mathbf{L}^2(T')}^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + C_{\mathcal{S},T} \|\langle \mathbf{e}_y, e_p \rangle\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right) \\
&\leq \mathcal{C} \sum_{n \in \mathcal{V}_{\gamma}} \sum_{T \in \Omega_n} \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_T} \sum_{T' \in \Omega_{\gamma}} \left( C_{\mathcal{R},T'} \|\langle \mathbf{e}_y, e_p \rangle\|_{T'}^2 \right. \\
&\quad \left. + h_{T'}^2 (1 + C_{\mathcal{S},T'}) \|\mathbf{osc}_{T'}\|_{\mathbf{L}^2(T')}^2 \right) \\
&\leq \mathcal{C} \sum_{T \in \tilde{\Omega}_K} \left( C_{\mathcal{R},T} \|\langle \mathbf{e}_y, e_p \rangle\|_T^2 + h_T^2 (1 + C_{\mathcal{S},T}) \|\mathbf{osc}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right)
\end{aligned}$$

La desigualdad (3.39) se obtiene usando esta última estimación, junto con las desigualdades (3.36), (3.37), sobre la desigualdad (3.35) y sobreestimando en términos de los elementos en  $\tilde{\Omega}_K$ .

□

### 3.5.2. Estimaciones no computables

Es posible obtener un estimador de error distinto al anterior a partir de los mismos pasos realizados para obtener el estimador computable. El desarrollo para esta parte se llevará a cabo en base a un esquema de elementos finitos del tipo estabilizado. En el caso en que se utilice un esquema inf - sup estable, basta considerar los términos estabilizantes iguales a 0.

#### 3.5.2.1. Análisis de Confiabilidad

Tal como se planteó en pasos anteriores, la ecuación del error (3.13) puede ser reescrita en función de los términos de  $\mathbf{J}_{\gamma,K}$  de la siguiente manera:

$$a(\mathbf{e}_y, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, e_p) = \sum_{K \in \mathcal{E}} \left( (\mathbf{R}_K, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} - \sum_{\gamma \in \partial K} (\langle \mathbf{J} \rangle_{\gamma}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} \right), \quad (3.41)$$

siendo  $\mathbf{R}_K$  el término residual descrito en (3.17) y  $\langle \mathbf{J} \rangle_{\gamma}$  el salto entre dos elementos vecinos  $K$  y  $K'$  definidos en (3.34).

Usando la descomposición ortogonal del error  $\mathbf{e}_y$  y tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_c$  en (3.41) se obtiene

$$\|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{R}_K, \mathbf{e}_c)_{\mathbf{L}^2(K)} - \sum_{\gamma \in \partial K} ([\mathbf{J}]_\gamma, \mathbf{e}_c)_{\mathbf{L}^2(\gamma)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{e}_c)_{\mathbf{L}^2(K)} \right).$$

Para estimar el lado derecho de esta última expresión, haremos uso del interpolador de Clément descrito por  $I_h : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{V}_l(\mathcal{P})$  (ver [5]), el cual, para cada función  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , satisface las siguientes estimaciones:

$$\|\mathbf{v} - I_h(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(K)} \leq C_I h_K \|\nabla \mathbf{v}\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega_K)}, \quad (3.42)$$

$$\|\mathbf{v} - I_h(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\partial K)} \leq C_I h_K^{1/2} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega_\gamma)}, \quad (3.43)$$

$$\|I_h(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(K)} \leq C_I \|\nabla \mathbf{v}\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega_K)}, \quad (3.44)$$

donde  $C_I$  no depende de  $h_K$  ni los parámetros  $\nu$  y  $\beta$ .

A su vez, notemos que la ecuación del error satisface la siguiente propiedad, denominada ortogonalidad de Galerkin:

$$a(\mathbf{e}_y, \mathbf{v}_h) + b(e_p, \mathbf{v}_h) - \mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \mathbf{v}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}). \quad (3.45)$$

Con esto se observa que el error conforme satisface la siguiente relación

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 &= \nu(\nabla \mathbf{e}_y, \nabla \mathbf{e}_c)_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} - (e_p, \nabla \cdot \mathbf{e}_c)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \nu(\nabla \mathbf{e}_y, \nabla(\mathbf{e}_c - I_h(\mathbf{e}_c)))_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} - (e_p, \nabla \cdot (\mathbf{e}_c - I_h(\mathbf{e}_c)))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; I_h(\mathbf{e}_c)) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{R}_K, \mathbf{e}_c - I_h(\mathbf{e}_c))_{\mathbf{L}^2(K)} - \sum_{\gamma \in \partial K} ([\mathbf{J}]_\gamma, \mathbf{e}_c - I_h(\mathbf{e}_c))_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{e}_c - I_h(\mathbf{e}_c))_{\mathbf{L}^2(K)} \right) + \mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; I_h(\mathbf{e}_c)). \end{aligned}$$

Usando las desigualdades de Hölder y Cauchy - Schwarz, y las estimaciones (3.42) y (3.43) se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 &\leq C_I \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( \frac{h_K}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)} \|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V},\Omega_K} + \sum_{\gamma \in \partial K} \sqrt{\frac{h_K}{\nu}} \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V},\Omega_\gamma} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_K}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{osc}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)} \|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V},\Omega_K} \right) + |\mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; I_h(\mathbf{e}_c))| \\ &\leq C_I \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( \frac{h_K}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)} + \sum_{\gamma \in \partial K} \sqrt{\frac{h_K}{\nu}} \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{h_K}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{osc}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)} \right)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V},\Omega_K}^2 \right)^{1/2} + |\mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; I_h(\mathbf{e}_c))|. \end{aligned}$$

Dada una cantidad definida de elementos en un conjunto  $\Omega_K$  es posible verificar que

$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V},\Omega_K} \leq m\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V},K}$ . A su vez el término estabilizante se puede estimar de la siguiente manera

$$|\mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; I_h(\mathbf{v}))| \leq \|\mathcal{S}\|_* \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V},\Omega}, \quad (3.46)$$

donde:

$$\|\mathcal{S}\|_* := \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; I_h(\boldsymbol{\xi}))|}{\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{V},\Omega}}. \quad (3.47)$$

Usando estas estimaciones, y la desigualdad de Young se concluye que

$$\|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \mathcal{C} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \frac{h_K^2}{\nu} \left( \|\mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + \|\mathbf{osc}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \right) + \sum_{\gamma \in \partial K} \frac{h_K}{\nu} \|\mathbf{J}]_\gamma\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 \right) + \|\mathcal{S}\|_*^2 \right),$$

En base a esta estimación se puede dar con el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.8** *Sea  $\mathbf{e}_c$  el error conforme en la descomposición ortogonal (3.21). Entonces*

$$\|\mathbf{e}_c\|_{\mathbf{V},\Omega} \leq \mathcal{C} (\eta_R^2 + \|\mathcal{S}\|_*^2)^{1/2},$$

donde

$$\eta_R := \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_{R,K}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.48)$$

corresponde al estimador residual, el cual puede describirse en términos de sus indicadores residuales  $\eta_{R,K}$  definidos como

$$\eta_{R,K} := \left( \frac{h_K^2}{\nu} \left( \|\mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + \|\mathbf{osc}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \right) + \sum_{\gamma \in \partial K} \frac{h_K}{\nu} \|\mathbf{J}]_\gamma\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.49)$$

A su vez el término  $\|\mathcal{S}\|_*$  viene dado por la definición (3.47).

Para estimar el error no conforme, basta con realizar el mismo procedimiento efectuado en la Sección 3.5.1, con lo cual se tiene que

$$\|\mathbf{e}_{nc}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta} \|\nabla \cdot \mathbf{y}_h\|_{L^2(\Omega)} = \eta_{nc}$$

Luego, por fórmula pitagórica:

$$\|\mathbf{e}_y\| \leq \mathcal{C} (\eta_R^2 + \nu \eta_{nc}^2 + \|\mathcal{S}\|_*^2)^{1/2}. \quad (3.50)$$

Nos resta estimar el error en presión. Dado  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , usando su descomposición ortogonal y despejando el término  $e_p$  de (3.41) se obtiene

$$\begin{aligned} -(e_p, \text{tr}(\underline{\mathbf{v}}_{nc}))_{L^2(\Omega)} &= -\nu(\nabla \mathbf{e}_c, \nabla \mathbf{v}_c)_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} - \nu(\underline{\mathbf{e}}_{nc}, \underline{\mathbf{v}}_{nc})_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( (\mathbf{R}_K, \mathbf{v})_{L^2(K)} - \sum_{\gamma \in \partial K} ([\mathbf{J}]_\gamma, \mathbf{v})_{L^2(\gamma)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v})_{L^2(K)} \right). \end{aligned}$$

Notemos que el error conforme, a través de la ecuación del error (3.41), satisface la siguiente relación:

$$\nu(\nabla \mathbf{e}_c, \nabla \mathbf{v}_c)_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} = \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( (\mathbf{R}_K, \mathbf{v}_c)_{L^2(K)} - \sum_{\gamma \in \partial K} ([\mathbf{J}]_\gamma, \mathbf{v}_c)_{L^2(\gamma)} + (\mathbf{osc}_K, \mathbf{v}_c)_{L^2(K)} \right).$$

Usando lo anterior, y la ortogonalidad de Galerkin (3.45) se tiene que

$$\begin{aligned} -(e_p, \text{tr}(\underline{\mathbf{v}}_{nc}))_{L^2(\Omega)} &= -\nu(\underline{\mathbf{e}}_{nc}, \underline{\mathbf{v}}_{nc})_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)} + \mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; I_h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c)) \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( (\mathbf{R}_K + \mathbf{osc}_K, \mathbf{v} - \mathbf{v}_c - I_h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c))_{L^2(K)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\gamma \in \partial K} ([\mathbf{J}]_\gamma, \mathbf{v} - \mathbf{v}_c - I_h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c))_{L^2(\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Aplicando las desigualdades (3.42) y (3.43), y la estimación (3.46), se deduce que

$$(e_p, \text{tr}(\underline{\mathbf{v}}_{nc}))_{L^2(\Omega)} \leq (\nu \eta_{nc} + \mathcal{C} \eta_R + \|\mathcal{S}\|_*) \|\underline{\mathbf{v}}_{nc}\|_{\underline{\mathbf{L}}^2(\Omega)},$$

y por la condición inf - sup sobre  $b$ , y usando desigualdad de Young, se concluye finalmente que

$$\beta^2 \|e_p\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{C} (\eta_R^2 + \nu^2 \eta_{nc}^2 + \|\mathcal{S}\|_*^2)$$

Por último es posible hacer uso del supuesto sobre  $\nu$ , mencionado al inicio de la Sección 3.1, donde se establece que  $\nu \leq 1$ , de modo que

$$\beta^2 \|e_p\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{C} (\eta_R^2 + \nu \eta_{nc}^2 + \|\mathcal{S}\|_*^2) \tag{3.51}$$

En base a las estimaciones (3.50) y (3.51) se establece el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.9** *Sea  $(\mathbf{y}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  solución del problema débil (3.3) y  $(\mathbf{y}_h, p_h) \in \mathbf{V}_l(\mathcal{T}) \times$*

$Q_s(\mathcal{P})$  solución del esquema (3.7) o (3.8). Entonces:

$$\|(\mathbf{e}_y, e_p)\|_{\Omega}^2 \leq \mathcal{C} \max \left\{ 1, \frac{\rho^2}{\beta^2} \right\} (\tilde{\eta}^2 + \|\mathcal{S}\|_*^2)$$

donde  $\tilde{\eta} := \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \tilde{\eta}_K^2 \right)^{1/2}$ . En este caso los indicadores  $\tilde{\eta}_K$  se definen como

$$\tilde{\eta}_K := (\eta_{R,K}^2 + \nu \eta_{nc,K}^2)^{1/2}, \quad (3.52)$$

siendo  $\eta_{R,K}$  el indicador residual definido en (3.49) y  $\eta_{nc,K}$  el indicador no conforme definido en (3.26).

**Observación 3.5.10** Notemos que el estimador no computable depende explícitamente de la elección del esquema de elementos finitos, a diferencia del estimador computable (3.29), donde la dependencia queda implícita en el término en el término  $\underline{\sigma}_K$ . Más aún, la dependencia se genera únicamente por el término estabilizante  $\mathcal{S}$ . En este sentido se dice que la expresión  $\|\mathcal{S}\|_*$  constituye lo que se denomina error de consistencia, el cual afecta la estimación obtenida y con ello confiabilidad de ésta. Lo anterior no ocurre cuando el esquema utilizado es del tipo *inf - sup* estable, o bien cuando  $\mathcal{S} \equiv 0$  (como en el esquema LPS).

**Supuesto 3.5.11** En base a la observación realizada es que debemos recalcar que este estudio irá orientado al uso de esquemas estabilizados tales que el término  $\mathcal{S}$  pueda ser acotado por una parte del estimador de error  $\tilde{\eta}$ , y que sus contribuciones locales  $\mathcal{S}_K$  queden acodadas por una parte de los indicadores  $\tilde{\eta}_K$ . Esto nos permite garantizar la confiabilidad de la estimación realizada.

Existe una amplia gama de esquemas estabilizados que satisfacen este supuesto (ver [27]). En particular, notemos que el esquema LPS cumple trivialmente este supuesto. Lo mismo ocurre con el esquema RELP en base a lo establecido en el Supuesto 3.4.3. En efecto, notemos que el término  $\mathcal{S}$  se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \sum_{\gamma \in \partial K} \tau_{\gamma}([\mathbf{J}]_{\gamma}, \llbracket \nu \nabla \mathbf{v}_h |_{K \mathbf{n}_{\gamma}} \rrbracket)_{\mathbf{L}^2(\gamma)}.$$

Usando desigualdad de Hölder se concluye que  $\|\mathcal{S}\|_* \leq \mathcal{C} \eta_R$ .

### 3.5.2.2. Análisis de eficiencia local

Notemos que el estimador no computable  $\tilde{\eta}$  depende del estimador no conforme y de los términos  $\mathbf{R}_K$ ,  $[\mathbf{J}]_{\gamma}$  y el término estabilizante  $\mathcal{S}$ . En base al análisis de eficiencia local realizado en la Sección 3.5.1.2

es posible obtener un estudio similar para el indicador (3.52).

Recordemos la estimación obtenida en (3.30) para el estimador no conforme, la cual establece que

$$\eta_{nc,K}^2 \leq \frac{d}{\beta^2 \nu} \|\!(\mathbf{e}_y, e_p)\!\|_K^2.$$

A su vez recordemos que las cotas superiores de los términos  $\mathbf{R}_K$ ,  $[\mathbf{J}]_\gamma$  vienen dadas por las estimaciones realizadas en el Lema 3.5.6, donde se establece que

$$\begin{aligned} h_K^2 \|\mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 &\leq \mathcal{C} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|\!(\mathbf{e}_y, e_p)\!\|_K^2 + h_K^2 \|\mathbf{osc}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \right), \\ h_K \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} &\leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_\gamma} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|\!(\mathbf{e}_y, e_p)\!\|_T^2 + h_T^2 \|\mathbf{osc}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right). \end{aligned}$$

En base a estas dos desigualdades se obtiene la siguiente estimación para el indicador residual  $\eta_{R,K}$  definido en (3.49)

$$\eta_{R,K} \leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_K} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|\!(\mathbf{e}_y, e_p)\!\|_T^2 + h_T^2 \|\mathbf{osc}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right)$$

Por último, bajo el Supuesto 3.5.11, y usando los mismos argumentos empleados para acotar el término  $\|\mathcal{S}\|_*$ , es posible obtener que en cada elemento  $K$  se cumple que

$$\sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{S}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; I_h(\boldsymbol{\xi}|_K))|}{\|\boldsymbol{\xi}|_K\|_{\mathbf{V},K}} \leq \mathcal{C} \eta_{R,K}$$

**Observación 3.5.12** *Otro aspecto que se puede apreciar es la incidencia del término estabilizante sobre el análisis a posteriori.*

*Para la estimación computable vemos que las propiedades de  $\mathcal{S}$  afectan el análisis de eficiencia local realizado sobre el estimador, lo que no ocurre en el análisis de confiabilidad de éste. Por el contrario, para la estimación no computable, el uso de un esquemas estabilizados genera una dependencia explícita del término  $\mathcal{S}$  sobre el análisis de confiabilidad, pero no sobre análisis de eficiencia local (bajo el Supuesto 3.5.11).*

### 3.6. Ejemplos numéricos

Para cerrar este capítulo se exhibirá la resolución de algunos ejemplos representativos del problema de Stokes para el caso bidimensional ( $d = 2$ ). El dominio a considerar en cada ejemplo corresponde a  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ .

En este trabajo el interés es estudiar el desempeño del estimador de error no computable, descrito en el

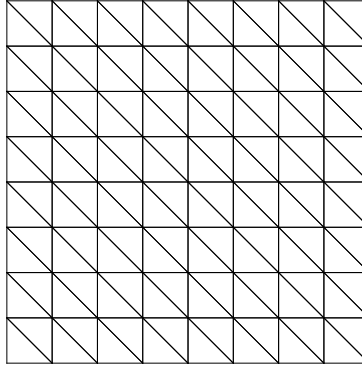


Figura 3.1: Malla inicial  $\mathcal{P}_0$ . En este caso:  $\dim(Q_0(\mathcal{P})) = 128$  y  $\dim(\mathbf{V}_1(\mathcal{P}_0)) = 81$ .

Teorema 3.5.9, utilizando los esquemas de discretización RELP y LPS, considerando  $\mathbf{V}_1(\mathcal{P})$  y  $Q_0(\mathcal{P})$  como espacios de discretización. Esto conlleva a una simplificación de los términos estabilizantes  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{H}$ . En este caso se considera  $a_2 = \frac{1}{12}$  para el esquema RELP.

La resolución numérica de cada problema se llevó a cabo mediante la implementación de un código computacional en C++. El cálculo de integrales se realizó mediante una regla de 73 puntos de cuadratura. Para resolver los sistemas lineales resultantes se utilizó una herramienta computacional denominada MUMPS (multifrontal massively parallel sparse direct solver), descrita en los trabajos [3] y [4].

En cada ejemplo se exhibirá el error exacto, obtenido mediante la norma de la energía, y el estimador de error no computable, ambos en función del número de grados de libertad dado por  $\text{Ndofs} = 2 \dim(\mathbf{V}_1(\mathcal{P})) + \dim(Q_0(\mathcal{P})) + 1$ . En este caso la norma de la energía se calcula considerando  $\rho = \beta$ , con lo cual:

$$\|(\mathbf{w}, w)\|_{\Omega}^2 = \nu \|\nabla \mathbf{w}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \beta^2 \|w\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Existen numerosos trabajos dedicados al estudio de la constante inf - sup. Para muchos dominios sólo existe una estimación del valor real de dicha constante, esto es, una cota inferior y una cota superior. En este caso se hizo uso de un valor cercano a la cota inferior obtenida en el trabajo [26], en la Sección 2.2. En base a esto se consideró  $\beta = 0,38$ .

En una primera instancia se exhibirá el desempeño del estimador en la medida en que el mallado inicial  $\mathcal{P}_0$  del dominio  $\Omega$  (descrito en la Figura 3.1) es refinado de manera uniforme, lo que corresponde a subdividir todos y cada uno de los elementos  $K$ . Posteriormente se hará uso de un algoritmo de adaptividad que permita refinar aquellos elementos de la malla que satisfacen un criterio a definir. Dicho algoritmo consiste en una secuencia cíclica compuesta por 4 pasos principales: resolver, estimar, marcar y refinar. La descripción completa se encuentra en el Cuadro 3.1.

Para describir cada ejemplo se indicará el valor del parámetro  $\nu$  y la solución resultante, con lo cual

---

**Algoritmo de refinamiento adaptativo**


---

- 1: Introducir  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  y  $\nu > 0$ . Fijar  $i = 0$  y construir la malla  $\mathcal{P}_0$ .
  - 2: Para la malla  $\mathcal{P}_i$ , obtener el esquema de elementos finitos (inf - sup estable o estabilizado) y obtener la solución discreta  $(\mathbf{y}_h, p_h)$ .
  - 3: Para cada elemento  $K \in \mathcal{P}_i$ :
    - Calcular  $\|\mathbf{R}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}$ , donde  $\mathbf{R}_K$  viene dado en (3.17),
    - Calcular  $\|\mathbf{osc}_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}$ , donde  $\mathbf{osc}_K$  viene dado en (3.17),
    - Para cada lado  $\gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I$ , calcular  $\|[\mathbf{J}]_\gamma\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}$ , donde  $[\mathbf{J}]_\gamma$  viene dado en (3.34),
    - Calcular  $\tilde{\eta}_K$  usando el resultado del Teorema 3.5.9.
  - 4: Marcar el elemento  $K$  si  $\tilde{\eta}_K \geq \frac{1}{2} \max_{T \in \mathcal{P}_i} \tilde{\eta}_T$ .
  - 5: Del paso 4 obtener la nueva malla, refinando los elementos marcados.
  - 6: Fijar  $i \leftarrow i + 1$  y volver al paso 2.
- 

Tabla 3.1: Descripción del algoritmo de refinamiento adaptativo basado en el estimador  $\tilde{\eta}$

se puede determinar  $\mathbf{f}$ .

**Ejemplo 1:** Fijando  $\nu = 1$  y tomando como solución:

$$\mathbf{y}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 (x_1 - 1)^2 (x_2 - 1) (2x_2 - 1) \\ -x_1 x_2^2 (x_1 - 1) (x_2 - 1)^2 (2x_1 - 1) \end{pmatrix}; \quad p(x_1, x_2) = x_1 x_2 (1 - x_1) (1 - x_2) - \frac{1}{36}$$

**Ejemplo 2:** Fijando  $\nu = 1$  y tomando como solución:

$$\mathbf{y}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 \cos(2\pi x_2) \sin^2(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) \\ -2 \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_1) \sin^2(2\pi x_2) \end{pmatrix}; \quad p(x_1, x_2) = \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2)$$

**Ejemplo 3:** Fijando  $\nu = 0,01$  y tomando como solución:

$$\mathbf{y}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1) \frac{\left(x_1 + e^{\frac{x_1}{\nu}} - x_1 e^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)^2}{\left(e^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)^2} \\ -2x_2^2(x_2 - 1)^2 \left(x_1 + \frac{e^{\frac{x_1-1}{\nu}} - e^{\frac{-1}{\nu}}}{e^{\frac{-1}{\nu}} - 1}\right) \left(1 + \frac{e^{\frac{x_1-1}{\nu}}}{\nu \left(e^{\frac{-1}{\nu}} - 1\right)}\right) \end{pmatrix};$$

$$p(x_1, x_2) = x_1 x_2 (1 - x_1) (1 - x_2) - \frac{1}{36}$$

En los resultados obtenidos se aprecia que en los ejemplos 1 y 2, el decaimiento del error y del estimador es similar para ambos tipos de refinamiento (Figuras 3.2 y 3.4). Esto no ocurre en el ejemplo 3. En este

caso se está en presencia de un problema de capa límite en el cual se tiene un mal comportamiento en una parte del dominio (lado derecho del cuadrado) cuando se trabaja con refinamiento uniforme (Figura 3.6).

Por otro lado, en cada ejemplo se aprecia que hay un mayor número de elementos refinados, para el esquema adaptativo, hacia donde se presentan mayores cambios en el comportamiento de la solución (Figuras 3.3 - 3.7), lo cual es más notorio en el ejemplo 2, y con mayor claridad en el ejemplo 3.

Es posible inferir que los problemas donde se generan cambios abruptos en la solución no son apropiados para ser resueltos mediante el uso del método de elementos finitos usuales. Para estos casos es plausible utilizar esquemas adaptativos.

En cuanto al desempeño de los esquemas RELP y LPS, se observa que ambos entregan un error y una estimación similar en cada ejemplo.

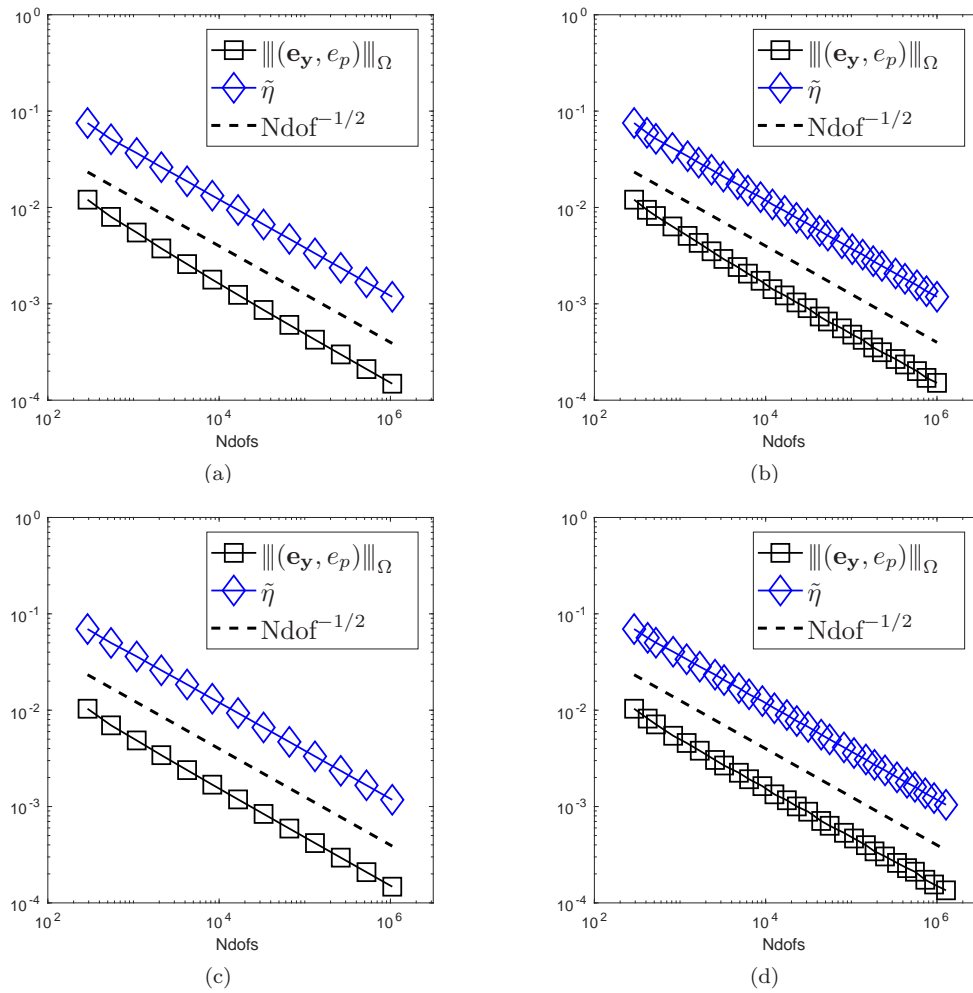


Figura 3.2: Ejemplo 1: Convergencia en  $\|(\cdot, \cdot)\|_\Omega$  y del estimador  $\tilde{\eta}$  para los esquemas (a) LPS con mallado uniforme, (b) LPS con mallado adaptativo, (c) RELP con mallado uniforme y (d) RELP con mallado adaptativo.

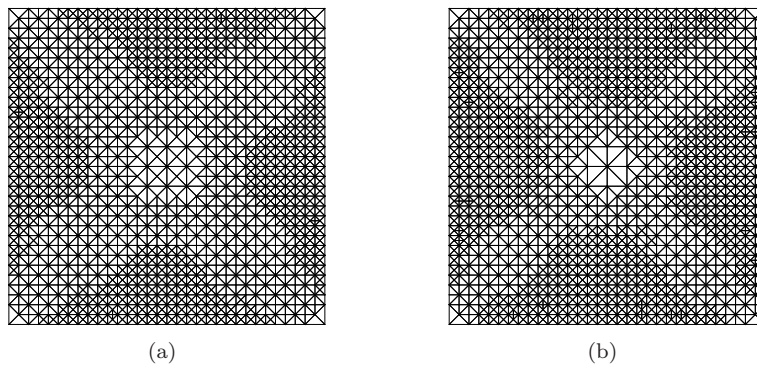


Figura 3.3: Mallado obtenido, en el ejemplo 1, con el algoritmo adaptativo luego de (a) 10 iteraciones con el esquema LPS y (b) 10 iteraciones con el esquema RELP.

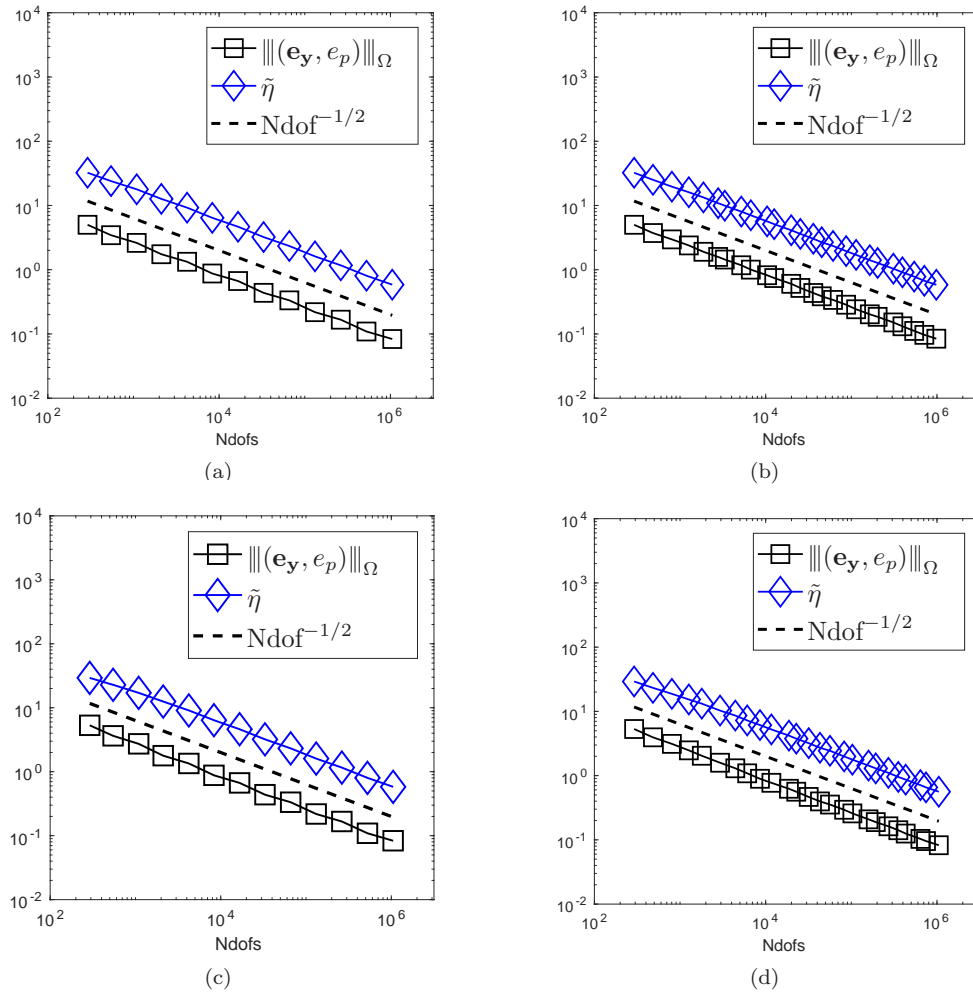


Figura 3.4: Ejemplo 2: Convergencia en  $\|\cdot\|_\Omega$  y del estimador  $\tilde{\eta}$  para los esquemas (a) LPS con mallado uniforme, (b) LPS con mallado adaptativo, (c) RELP con mallado uniforme y (d) RELP con mallado adaptativo.

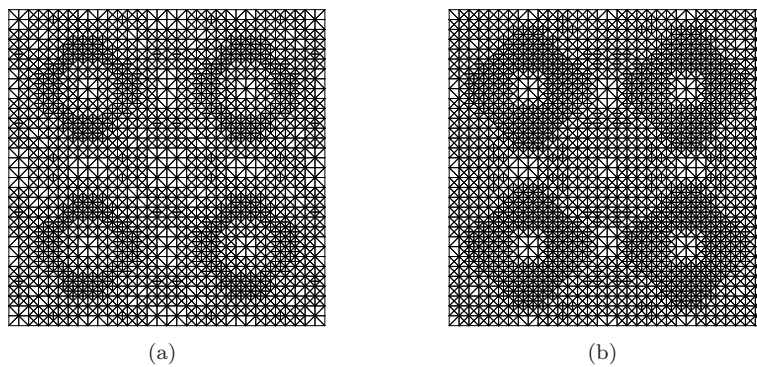


Figura 3.5: Mallado obtenido, en el ejemplo 2, con el algoritmo adaptativo luego de (a) 10 iteraciones con el esquema LPS y (b) 10 iteraciones con el esquema RELP.

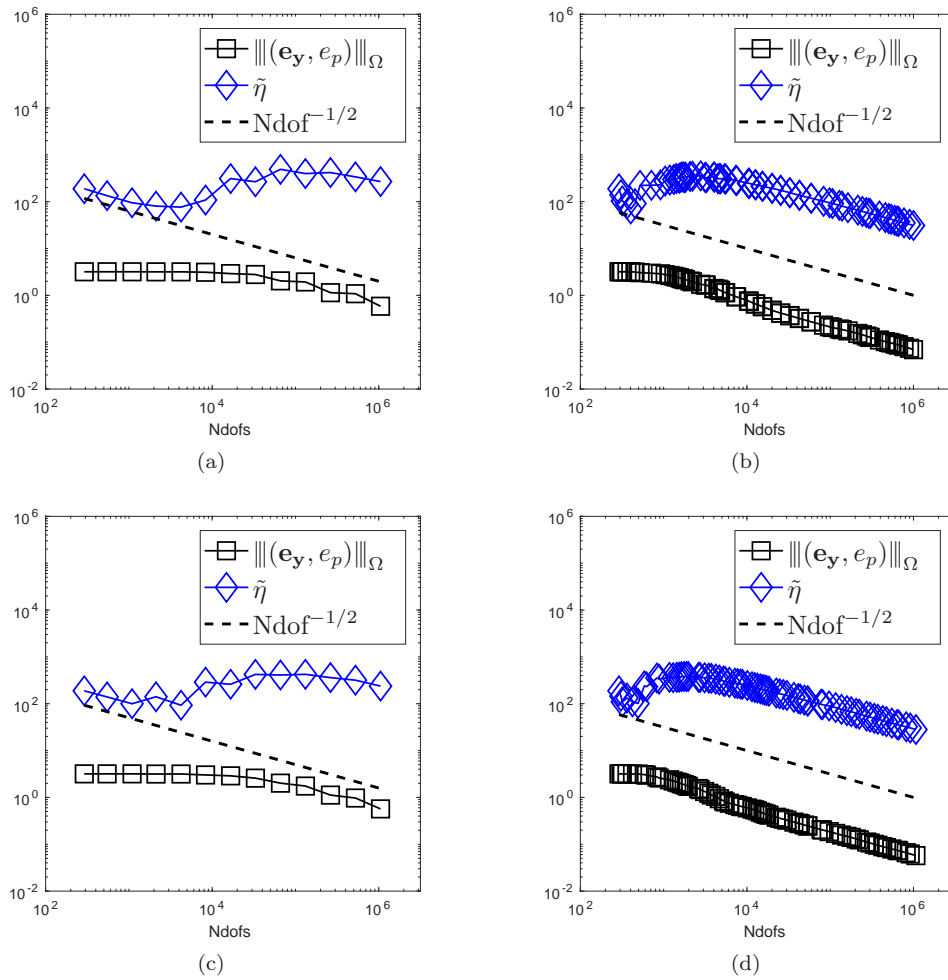


Figura 3.6: Ejemplo 3: Convergencia en  $\| \cdot \|_{\Omega}$  y del estimador  $\tilde{\eta}$  para los esquemas (a) LPS con mallaado uniforme, (b) LPS con mallaado adaptativo, (c) RELP con mallaado uniforme y (d) RELP con mallaado adaptativo.

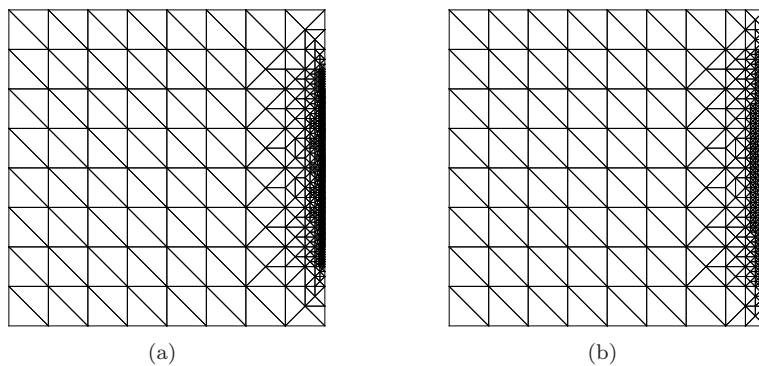


Figura 3.7: Mallaado obtenido, en el ejemplo 3, con el algoritmo adaptativo luego de (a) 30 iteraciones con el esquema LPS y (b) 30 iteraciones con el esquema RELP.



# Capítulo 4

## Problema de control óptimo

A continuación presentaremos el problema de control óptimo, junto con sus componentes y características principales. Posteriormente daremos a conocer algunos resultados concernientes al problema, tales como existencia y unicidad de soluciones y condiciones de optimalidad. A partir de esto último se obtendrá un sistema de optimalidad que permita hallar soluciones. Dicho sistema será implementado numéricamente, mediante el uso de elementos finitos. Sobre este esquema se hará un análisis de error a posteriori, tal como se realizó en la Sección 3.5 para el problema de Stokes. Por último se mostrarán algunos resultados numéricos, implementando un algoritmo que incorpore un método de búsqueda de soluciones y una componente de adaptividad basada en el análisis a posteriori.

### 4.1. Presentación del problema

Sea  $\Omega$  un dominio abierto y acotado de  $\mathbb{R}^2$  con frontera  $\partial\Omega$  Lipschitz. Dada las funciones  $\mathbf{y}_\Omega, \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  y un coeficiente  $\alpha > 0$  se plantea el siguiente problema de optimización: Hallar  $((\mathbf{y}, p), \mathbf{u}) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  que resuelve:

$$\min J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) := \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_\Omega\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \quad (4.1)$$

sujeto al problema débil de Stokes

$$\begin{cases} a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f} + \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(\mathbf{y}, q) = 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (4.2)$$

y a la restricción de caja

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{ad}. \quad (4.3)$$

En este problema el estado está constituido por el par  $(\mathbf{y}, p)$ , mientras que  $\mathbf{u}$  corresponde al control. El sistema (4.2) constituye la ecuación de estado, la cual relaciona cada variable. Por último,  $\mathbf{U}_{ad}$  es el conjunto de controles admisibles, o simplemente conjunto admisible, descrito por:

$$\mathbf{U}_{ad} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{u}_a \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_b \text{ c.t.p. en } \Omega\}, \quad (4.4)$$

donde  $\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b$  son vectores en  $\mathbb{R}^d$  tales que  $\mathbf{u}_a < \mathbf{u}_b$  (las desigualdades son componente a componente). El problema en cuestión consiste en minimizar un funcional de costo, definido por  $J$ , que depende de la velocidad  $(\mathbf{y})$  de un fluido y de una fuerza externa  $(\mathbf{f} + \mathbf{u})$  ejercida sobre éste. El objetivo es conseguir que la velocidad resultante se acerque lo más posible a un estado deseado  $\mathbf{y}_\Omega$  por medio del control, el cual generalmente se encuentra limitado (mediante la condición (4.3)) debido a ciertas condiciones físicas. Dado que este último tiene un costo asociado  $\alpha$  se requiere restringir su uso, razón por la cual es preferible que forme parte del funcional.

#### 4.1.1. Existencia de soluciones óptimas

Tal como se hizo en la Sección 3.2.1, comenzaremos por estudiar el problema en un contexto más general.

Sean  $\{\mathbf{H}, \|\cdot\|_{\mathbf{H}}\}, \{\mathbf{U}, \|\cdot\|_{\mathbf{U}}\}$  dos espacios de Hilbert. Sea  $\mathbf{U}_{ad} \subset \mathbf{U}$  un conjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío, y  $\mathbf{y}_\Omega \in \mathbf{H}, \alpha \geq 0$  elementos dados. Consideremos  $S : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{H}$  un operador lineal continuo y  $F : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional dado por:

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|S\mathbf{u} - \mathbf{y}_\Omega\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}}^2. \quad (4.5)$$

Con estas consideraciones es posible obtener el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.1** *Bajo las hipótesis descritas para este contexto, existe al menos una solución  $\bar{\mathbf{u}}$  que satisface:*

$$F(\bar{\mathbf{u}}) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{ad}} F(\mathbf{u}),$$

donde  $F$  corresponde al funcional definido en (4.5). Más aún, si  $\alpha > 0$ , o si  $S$  es inyectivo, entonces la solución queda determinada únicamente.

*Dem:* Ver Capítulo 2, Sección 2.5.1, Teorema 2.14 del texto [28].

□

A continuación veremos que se verifican las mismas condiciones del Teorema 4.1.1 en nuestro problema de control óptimo. Para esto se comenzará por efectuar una reformulación de éste, de modo tal que se obtenga dependencia únicamente del control  $\mathbf{u}$ .

Consideremos el siguiente problema: Hallar  $(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  que resuelve:

$$\begin{aligned} & \text{mín } J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ & \text{s.t. } \begin{cases} a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f} + \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \\ \mathbf{u} \in \mathbf{U}_{ad}, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $\mathbf{X}$  es el subespacio cerrado de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  definido en la Sección 3.3. Notemos que el problema anterior es equivalente al problema (4.1) - (4.3) debido a la equivalencia entre la formulación mixta y la formulación restringida.

Dadas  $\mathbf{f}, \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , denotemos por  $\bar{\mathbf{y}}$  la solución del problema restringido (3.6) con lado derecho  $(\mathbf{f} + \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  (la cual está bien definida, dado que el problema restringido está bien puesto). Por superposición de soluciones es posible establecer que dicha solución es de la forma  $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{\mathbf{f}} + \mathbf{y}_{\bar{\mathbf{u}}}$ , donde  $\mathbf{y}_{\mathbf{f}}$  corresponde a la solución del problema débil (3.6) con  $\bar{\mathbf{u}} = 0$ , mientras que  $\mathbf{y}_{\bar{\mathbf{u}}}$  se obtiene al establecer que  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ . Con esto, el funcional de costo  $J$ , evaluado en  $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{u}})$ , se escribe de la siguiente manera:

$$J(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_{\bar{\mathbf{u}}} - \tilde{\mathbf{y}}_{\Omega}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2,$$

donde  $\tilde{\mathbf{y}}_{\Omega} = \mathbf{y}_{\Omega} - \mathbf{y}_{\mathbf{f}}$ .

En base a lo anterior se define el operador  $G : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}$  como:

$$G(\mathbf{u}) = \mathbf{y}_{\mathbf{u}},$$

donde  $\mathbf{y}_{\mathbf{u}}$  corresponde a la solución del problema restringido (3.6), con lado derecho  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ .

El operador  $G$  se denomina operador control a estado. Dada la linealidad y continuidad de la forma  $a$  se deduce que  $G$  es lineal y continuo.

Es claro que la estimación  $\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  se cumple para toda función  $\mathbf{y} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Por lo tanto el espacio  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  se encuentra indexado lineal y continuamente en el espacio  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Lo anterior también es válido para toda función en  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  y  $\mathbf{X}$ , puesto que ambos corresponden a subespacios cerrados de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ .

Lo anterior nos indica que  $G$  puede ser visto como un operador cuyo recorrido es  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Una manera de formalizar esta situación es la siguiente: consideremos el operador inyección definido por  $E_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ , es decir, un mapeo lineal tal que asigna a cada  $\mathbf{y}_{\mathbf{u}} \in \mathbf{X}$  la misma función en  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  (dada la estimación mencionada anteriormente se deduce que  $E_{\mathbf{X}}$  es continuo). Así, el operador  $S := E_{\mathbf{X}}G$  queda definido como:

$$S : \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mapsto S\mathbf{u} = \mathbf{y}_{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^2(\Omega),$$

donde  $S\mathbf{u}$  representa la parte del estado  $\mathbf{y}$  que actúa sobre el funcional  $J$ . Dicho estado corresponde a la función  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_f + \mathbf{y}_u$  que resuelve el problema restringido (3.6), con lado derecho  $(\mathbf{f} + \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ . Existen otros trabajos donde, por ejemplo, el control se aplica sobre las condiciones de borde, con lo cual el operador  $S$  entrega un estado  $\mathbf{y}|_{\partial\Omega}$  (ver [13]).

En base a esto vemos que el problema de control óptimo (4.6) se reduce al siguiente problema de optimización en  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ :

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{ad}} F(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \|S\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{y}}_\Omega\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2,$$

donde  $F : \mathbf{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$  se define como el funcional reducido asociado al problema (4.1) - (4.3).

De este modo obtenemos un caso particular del problema asociado al Teorema 4.5. En efecto, para esta ocasión se tiene que  $\mathbf{H} = \mathbf{U} = \mathbf{L}^2(\Omega)$  son espacios de Hilbert reales y  $\alpha \geq 0$ . A su vez, el conjunto  $\mathbf{U}_{ad}$  resulta ser convexo, cerrado y no vacío y  $\tilde{\mathbf{y}}_\Omega$  es un elemento de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . De este modo se concluye que el problema (4.1) - (4.3) admite una única solución.

## 4.2. Condiciones de optimalidad de primer orden

La idea de esta sección es estudiar las condiciones de optimalidad que permitan caracterizar a una solución del problema (4.1) - (4.3) siguiendo la metodología de optimizar y después discretizar.

### 4.2.1. Uso de lagrangianos y sistema de optimalidad

Una primera condición necesaria y suficiente se obtiene a partir del uso de métodos lagrangianos, en el contexto de dimensión infinita. Los fundamentos de esto se encuentran detallados en el Capítulo 8 de [21].

Denotemos por  $\mathbf{Y} = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ , cuyo espacio dual corresponde a  $\mathbf{Y}' = (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega))'$ .

Dada una tupla  $((\mathbf{y}, p), \mathbf{u}, (\mathbf{z}, r)) \in \mathbf{Y} \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{Y}$ , se define el funcional lagrangiano como

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, p, \mathbf{u}, \mathbf{z}, r) := J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) - \nu(\nabla \mathbf{y}, \nabla \mathbf{z})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (p, \nabla \cdot \mathbf{z})_{L^2(\Omega)} + (\mathbf{f} + \mathbf{u}, \mathbf{z})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - (r, \nabla \cdot \mathbf{y})_{L^2(\Omega)},$$

donde el par  $(\mathbf{z}, r)$  constituyen los multiplicadores de Lagrange.

De este modo se tiene que la tupla  $((\mathbf{y}, p), \mathbf{u})$  es solución de (4.1) - (4.3) si y solo si la tupla

$((\mathbf{y}, p), \mathbf{u}, (\mathbf{z}, r))$  resuelve el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f} + \mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(\mathbf{y}, q) = 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ \langle \delta_{(\mathbf{y}, p)} \mathcal{L}(\mathbf{y}, p, \mathbf{u}, \mathbf{z}, r), (\boldsymbol{\xi}, \eta) \rangle_{\mathbf{Y}', \mathbf{Y}} = 0, & \forall (\boldsymbol{\xi}, \psi) \in \mathbf{Y} \\ \langle \delta_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{y}, p, \mathbf{u}, \mathbf{z}, r), \mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle_{L^2(\Omega), L^2(\Omega)} \geq 0, & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{U}_{ad} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

(Ver Capítulo 2, Sección 2.10 de [28] y el Capítulo 3, Sección 3.3 de [14]).

A continuación desarrollaremos cada una de las expresiones anteriores, usando la definición de primera variación, descrita en (2.6).

- Sea  $(\boldsymbol{\xi}, \psi) \in \mathbf{Y}$  fijo y arbitrario. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{(\mathbf{y}, p)} \mathcal{L}(\mathbf{y}, p, \mathbf{u}, \mathbf{z}, r), (\boldsymbol{\xi}, \psi) \rangle_{\mathbf{Y}', \mathbf{Y}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathcal{L}(\mathbf{y} + t\boldsymbol{\xi}, p + t\psi, \mathbf{u}, \mathbf{z}, r) - \mathcal{L}(\mathbf{y}, p, \mathbf{u}, \mathbf{z}, r)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{2t(\mathbf{y} - \mathbf{y}_\Omega, \boldsymbol{\xi})_{L^2(\Omega)} + t^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})_{L^2(\Omega)}}{2t} \right. \\ &\quad \left. - \frac{t\nu(\nabla \boldsymbol{\xi}, \nabla \mathbf{z})_{L^2(\Omega)} - t(\psi, \nabla \cdot \mathbf{z})_{L^2(\Omega)} + t(r, \nabla \cdot \boldsymbol{\xi})_{L^2(\Omega)}}{t} \right) \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{y}_\Omega, \boldsymbol{\xi})_{L^2(\Omega)} - \nu(\nabla \boldsymbol{\xi}, \nabla \mathbf{z})_{L^2(\Omega)} + (\psi, \nabla \cdot \mathbf{z})_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - (r, \nabla \cdot \boldsymbol{\xi})_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Luego, la primera condición del sistema (4.7) es equivalente a que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nu(\nabla \mathbf{z}, \nabla \boldsymbol{\xi})_{L^2(\Omega)} + (r, \nabla \cdot \boldsymbol{\xi})_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_\Omega, \boldsymbol{\xi})_{L^2(\Omega)}, & \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ (\psi, \nabla \cdot \mathbf{z})_{L^2(\Omega)} = 0, & \forall \psi \in L_0^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.8)$$

El sistema obtenido corresponde a la ecuación adjunta asociada al problema (4.2), cuya solución  $(\mathbf{z}, r)$  constituye el par estado adjunto, siendo  $\mathbf{z}$  la velocidad adjunta y  $r$  la presión adjunta.

- Sea  $\mathbf{w} \in \mathbf{U}_{ad}$  fijo y arbitrario. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{y}, p, \mathbf{u}, \mathbf{z}, r), \mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle_{L^2(\Omega), L^2(\Omega)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathcal{L}(\mathbf{y}, p, \mathbf{u} + t(\mathbf{w} - \mathbf{u}), \mathbf{z}, r) - \mathcal{L}(\mathbf{y}, p, \mathbf{u}, \mathbf{z}, r)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{J(\mathbf{y}, \mathbf{u} + t(\mathbf{w} - \mathbf{u})) - J(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{t} \right. \\ &\quad \left. - \frac{-t(\mathbf{z}, \mathbf{w} - \mathbf{u})_{L^2(\Omega)}}{t} \right) \\ &= (\alpha \mathbf{u} + \mathbf{z}, \mathbf{w} - \mathbf{u})_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Luego, la segunda condición del sistema (4.7) es equivalente a que

$$(\mathbf{z} + \alpha \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall \mathbf{w} \in U_{ad}. \quad (4.9)$$

Dicha condición se conoce comúnmente como desigualdad variacional.

Notemos que el operador lagrangeano es un funcional lineal y continuo sobre  $\mathbf{Y} \times U_{ad} \times \mathbf{Y}$ , por lo que su primera variación coincide con la derivada Gâteaux.

Con esto, juntando los resultados obtenidos en (4.8) - (4.9) y la ecuación de estado (4.2), se tiene que una solución  $((\mathbf{y}, p), \mathbf{u}, (\mathbf{z}, r))$  del problema (4.1) - (4.3) corresponde a la solución única del siguiente sistema de optimalidad:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f} + \mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(\mathbf{y}, q) = 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ a(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi}, r) = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_\Omega, \boldsymbol{\xi})_{L^2(\Omega)}, & \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(\mathbf{z}, \psi) = 0, & \forall \psi \in L_0^2(\Omega), \\ (\mathbf{z} + \alpha \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0, & \forall \mathbf{w} \in U_{ad}. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

#### 4.2.2. Condiciones de optimalidad puntuales

A través de un análisis sobre la desigualdad variacional es posible obtener una expresión que permite caracterizar al control óptimo  $\bar{\mathbf{u}}$  del sistema (4.10) en casi todo punto de  $\Omega$ .

Se puede probar que dicha desigualdad puede ser expresada de manera puntual, para casi todo punto  $\mathbf{x} \in \Omega$ , lo cual se intuye del hecho de estar planteada en  $L^2$ . Dicha desigualdad permite dar con una fórmula del óptimo en términos de sus restricciones de caja y el estado adjunto  $\bar{\mathbf{z}}$  asociado. Ésta consiste en una fórmula de proyección, la cual viene dada por:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \Pi_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) \right\}. \quad (4.11)$$

donde  $\Pi_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]}$  corresponde a una proyección sobre la restricción de caja, la cual viene dada por:

$$\Pi_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]} \{\mathbf{v}\} := \min\{\mathbf{u}_b, \max\{\mathbf{u}_a, \mathbf{v}\}\}.$$

En este caso el mínimo se aplica sobre las componentes de un vector.

Otra propiedad que satisface  $\bar{\mathbf{u}}$  es la siguiente formulación por tramos:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_a, & \text{si } \bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) + \alpha \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\alpha} \bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}), & \text{si } \bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) + \alpha \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_b, & \text{si } \bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) + \alpha \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) < \mathbf{0} \end{cases}$$

Los detalles sobre esto se encuentra en la Sección 2.8 del texto [28].

Veremos en secciones posteriores que cada una de estas propiedades sobre el control óptimo permiten comprender el uso de ciertos métodos de resolución para el problema de control óptimo, como lo son los métodos de descenso del gradiente o la estrategia primal dual de conjunto activo.

No es difícil ver que para dos funciones  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  se tiene que la siguiente condición de Lipschitz:

$$\|\Pi_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]} \{\mathbf{v}_1\} - \Pi_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]} \{\mathbf{v}_2\}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (4.12)$$

### 4.3. Discretización por elementos finitos

Consideremos una partición  $\mathcal{P}$  del dominio  $\Omega$ , descrita al inicio de la Sección 2.4, y los subespacios de discretización  $\mathbf{V}_l(\mathcal{P})$  y  $Q_s(\mathcal{P})$  definidos en la Sección 3.4. Denotamos por  $\mathbf{Y}_{l,s}(\mathcal{P}) := \mathbf{V}_l(\mathcal{P}) \times Q_s(\mathcal{P}) \subset \mathbf{Y}$  el subespacio de discretización para el estado y el estado adjunto. A su vez definimos por  $\mathbf{U}_{ad,t}(\mathcal{P}) \subset \mathbf{U}_{ad}$  la discretización del conjunto admisible, introducido en (4.4), cuya descripción es la siguiente

$$\mathbf{U}_{ad,t}(\mathcal{P}) := \begin{cases} \{\mathbf{v} \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) : \mathbf{v}|_K \in [\mathbb{P}_t(K)]^d, \forall K \in \mathcal{P}\} \cap \mathbf{U}_{ad}, & t > 0, \\ \{\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d : \mathbf{v}|_K \in [\mathbb{P}_0(K)]^d, \forall K \in \mathcal{P}\} \cap \mathbf{U}_{ad}, & t = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

En base a lo anterior introducimos la siguiente discretización del problema de control óptimo: Hallar  $((\mathbf{y}_h, p_h), \mathbf{u}_h, (\mathbf{z}_h, r_h)) \in \mathbf{Y}_{l,s}(\mathcal{P}) \times \mathbf{U}_{ad,t}(\mathcal{P}) \times \mathbf{Y}_{l,s}(\mathcal{P})$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(\mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + \mathcal{S}^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f} + \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}), \\ b(\mathbf{y}_h, q_h) + \mathcal{H}^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_s(\mathcal{P}), \\ a(\mathbf{z}_h, \boldsymbol{\xi}_h) - b(\boldsymbol{\xi}_h, r_h) + \mathcal{S}^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega; \boldsymbol{\xi}_h) = (\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega, \boldsymbol{\xi}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \forall \boldsymbol{\xi}_h \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}), \\ b(\mathbf{z}_h, \psi_h) + \mathcal{H}^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega; \psi_h) = 0, & \forall \psi_h \in Q_s(\mathcal{P}), \\ (\mathbf{z}_h + \alpha \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \geq 0, & \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_{ad,t}(\mathcal{P}). \end{array} \right. \quad (4.14)$$

El sistema anterior se plantea en términos de los elementos estabilizantes  $\mathcal{S}^{\text{st}}, \mathcal{H}^{\text{st}}, \mathcal{S}^{\text{ad}}$  y  $\mathcal{H}^{\text{ad}}$  en caso de estar trabajando con esquemas estabilizados (de lo contrario se tiene que dichos términos son nulos). Los dos primeros corresponden a los términos estabilizantes asociados al estado, mientras que los dos últimos van asociados al estado adjunto. Para este trabajo se asume que dichos términos

satisfacen las condiciones descritas en los Supuestos 3.4.1 y 3.5.11).

#### 4.4. Estimaciones de error a posteriori

A continuación se confeccionará un análisis de error a posteriori para el problema discreto de control óptimo. Para esto se trabajará con el sistema de optimalidad (4.10), con el cuál se obtendrán estimadores de error sobre cada una de las variables involucradas, tal como se realizó en la Sección 3.5 para el problema de Stokes.

Denotemos por  $((\mathbf{y}, p), \mathbf{u}, (\mathbf{z}, r)) \in \mathbf{Y} \times \mathbf{U}_{ad} \times \mathbf{Y}$  la solución del sistema (4.10), y por  $((\mathbf{y}_h, p_h), \mathbf{u}_h, (\mathbf{z}_h, r_h)) \in \mathbf{Y}_{l,s}(\mathcal{P}) \times \mathbf{U}_{ad,t}(\mathcal{P}) \times \mathbf{Y}_{l,s}(\mathcal{P})$  la tupla solución del problema discreto (4.14) (de momento se asume esta última existe). Para dar con los estimadores de error asociados a las variables de estado y a las variables de estado adjunto, respectivamente, introduciremos las siguientes variables auxiliares:

- $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{p}) \in \mathbf{Y}$  tal que:

$$\begin{cases} a(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \tilde{p}) &= (\mathbf{f} + \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(\tilde{\mathbf{y}}, q) &= 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.15)$$

donde  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{\Pi}_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \mathbf{z}_h \right\}$ , siendo  $\mathbf{\Pi}_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]}$  la proyección en  $\mathbf{U}_{ad}$  definida en (4.11).

- $(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{r}) \in \mathbf{Y}$  tal que:

$$\begin{cases} a(\tilde{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi}, \tilde{r}) &= (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_\Omega, \boldsymbol{\xi})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(\tilde{\mathbf{z}}, \psi) &= 0, & \forall \psi \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.16)$$

- $(\hat{\mathbf{y}}, \hat{p}) \in \mathbf{Y}$  tal que:

$$\begin{cases} a(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \hat{p}) &= (\mathbf{f} + \mathbf{u}_h, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(\hat{\mathbf{y}}, q) &= 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (4.17)$$

- $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{r}) \in \mathbf{Y}$  tal que:

$$\begin{cases} a(\hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi}, \hat{r}) &= (\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega, \boldsymbol{\xi})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(\hat{\mathbf{z}}, \psi) &= 0, & \forall \psi \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.18)$$

Recordemos que los pares  $(\mathbf{y}_h, p_h)$  y  $(\mathbf{z}_h, r_h)$  satisfacen

$$\begin{aligned} a(\mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + \mathcal{S}^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f} + \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}), \\ b(\mathbf{y}_h, q_h) + \mathcal{H}^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; q_h) &= 0, & \forall q_h \in Q_s(\mathcal{P}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a(\mathbf{z}_h, \boldsymbol{\xi}_h) - b(\boldsymbol{\xi}_h, r_h) + \mathcal{S}^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega; \boldsymbol{\xi}_h) &= (\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega, \boldsymbol{\xi}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, & \forall \boldsymbol{\xi}_h \in \mathbf{V}_l(\mathcal{P}), \\ b(\mathbf{z}_h, \psi_h) + \mathcal{H}^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega; \psi_h) &= 0, & \forall \psi_h \in Q_s(\mathcal{P}), \end{aligned}$$

respectivamente. Lo anterior indica dichos pares pueden ser vistos como una discretización de los respectivos pares  $(\hat{\mathbf{y}}, \hat{p})$  y  $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{r})$ . Con esto en mente es posible llevar a cabo los procedimientos realizados en la Sección 3.5 para construir estimadores de error para el problema (4.1) - (4.3).

Denotemos por

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}} := \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_h \quad \text{y} \quad \hat{e}_p := \hat{p} - p_h$$

los errores auxiliares asociados al par estado. A partir de la ecuación de estado del sistema (4.10) y el sistema (4.15) es posible obtener la siguiente relación

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \hat{e}_p) &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{f} - \boldsymbol{\Pi}_{K,1}(\mathbf{f}), \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} + (\boldsymbol{\Pi}_{K,1}(\mathbf{f}) + \mathbf{u}_h + \nu \Delta \mathbf{y}_h - \nabla p_h, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} ([\nu \nabla \mathbf{y}_h \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma], \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

De manera similar, denotando por

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} := \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_h \quad \text{y} \quad \hat{e}_r := \hat{r} - r_h$$

los errores auxiliares asociados al par estado adjunto, y usando la ecuación del estado adjunto del sistema (4.10) y el sistema (4.16) se obtiene

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, \hat{e}_r) &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\boldsymbol{\Pi}_{K,1}(\mathbf{y}_\Omega) - \mathbf{y}_\Omega, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} + (\boldsymbol{\Pi}_{K,1}(\mathbf{y}_\Omega) + \mathbf{y}_h + \nu \Delta \mathbf{z}_h + \nabla r_h, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} ([\nu \nabla \mathbf{z}_h \mathbf{n}_\gamma + r_h \mathbf{n}_\gamma], \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

En base a estas identidades es posible obtener un estimador de error del tipo computable y otro no computable.

### 4.4.1. Estimaciones computables

Comenzaremos por elaborar un estimador de error cuyas constantes involucradas son todas explícitas y que no requiera del uso de interpoladores.

#### 4.4.1.1. Análisis de confiabilidad

Primero introduciremos los siguientes términos residuales y oscilatorios

$$\begin{cases} \mathbf{R}_K^{\text{st}} := \mathbf{\Pi}_{K,1}(\mathbf{f}) + \mathbf{u}_h + \nu \Delta \mathbf{y}_h - \nabla p_h, & \text{en } K, \\ \mathbf{R}_{\gamma,K}^{\text{st}} := \mathbf{g}_{\gamma,K}^{\text{st}} - \mathbf{J}_{\gamma,K}^{\text{st}}, & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{E}_K, \\ \text{osc}_K^{\text{st}} := \mathbf{f} - \mathbf{\Pi}_{K,1}(\mathbf{f}), & \text{en } K, \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} \mathbf{R}_K^{\text{ad}} := \mathbf{y}_h - \mathbf{\Pi}_{K,1}(\mathbf{y}_\Omega) + \nu \Delta \mathbf{z}_h + \nabla r_h, & \text{en } K, \\ \mathbf{R}_{\gamma,K}^{\text{ad}} := \mathbf{g}_{\gamma,K}^{\text{ad}} - \mathbf{J}_{\gamma,K}^{\text{ad}}, & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{E}_K, \\ \text{osc}_K^{\text{ad}} := \mathbf{\Pi}_{K,1}(\mathbf{y}_\Omega) - \mathbf{y}_\Omega, & \text{en } K, \end{cases} \quad (4.22)$$

donde

$$\mathbf{J}_{\gamma,K}^{\text{st}} := \nu \nabla \mathbf{y}_h|_K \mathbf{n}_\gamma^K - p_h|_K \mathbf{n}_\gamma^K, \quad \mathbf{J}_{\gamma,K}^{\text{ad}} := \nu \nabla \mathbf{z}_h|_K \mathbf{n}_\gamma^K + r_h|_K \mathbf{n}_\gamma^K. \quad (4.23)$$

A su vez, para cada  $\tau = \text{st}, \text{ad}$ , los términos  $\{\mathbf{g}_{\gamma,K}^\tau\}$  corresponden a los flujos equilibrados, los cuales se construyen de tal modo que se cumpla

- Consistencia:

$$\mathbf{g}_{\gamma,K}^\tau + \mathbf{g}_{\gamma,K'}^\tau = \mathbf{0}, \quad \text{si } \gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'} \ (K \neq K').$$

- Balance de primer orden:

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} + \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\theta})_{L^2(K)} - \mathcal{B}_K^{\text{st}}((\mathbf{y}_h, p_h), \boldsymbol{\theta}) + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} (\mathbf{g}_{\gamma,K}^{\text{st}}, \boldsymbol{\theta})_{L^2(K)} - \mathcal{S}_K^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; \boldsymbol{\theta}) &= 0, \\ (\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega, \boldsymbol{\theta})_{L^2(K)} - \mathcal{B}_K^{\text{ad}}((\mathbf{z}_h, r_h), \boldsymbol{\theta}) + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} (\mathbf{g}_{\gamma,K}^{\text{ad}}, \boldsymbol{\theta})_{L^2(K)} - \mathcal{S}_K^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_\Omega - \mathbf{y}_h; \boldsymbol{\theta}) &= 0, \end{aligned}$$

para todo  $\boldsymbol{\theta} \in [\mathbb{P}_1(K)]^d$  y para todo  $K \in \mathcal{P}$ , donde  $\mathcal{B}_K^{\text{st}}((\mathbf{y}_h, p_h), \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{B}_K((\mathbf{y}_h, p_h), \boldsymbol{\theta})$  y  $\mathcal{B}_K^{\text{ad}}((\mathbf{z}_h, r_h), \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{B}_K((\mathbf{z}_h, -r_h), \boldsymbol{\theta})$ , siendo  $\mathcal{B}_K$  el término descrito en (3.16).

Con esto es posible reescribir las ecuaciones (4.19) y (4.20), de modo que

$$a(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \hat{e}_p) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\boldsymbol{\sigma}_K^{\text{st}}, \nabla \mathbf{v})_{L^2(K)} + (\text{osc}_K^{\text{st}}, \mathbf{v})_{L^2(K)} \right). \quad (4.24)$$

$$a(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, \hat{e}_r) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\boldsymbol{\sigma}_K^{\text{ad}}, \nabla \mathbf{v})_{L^2(K)} + (\text{osc}_K^{\text{ad}}, \mathbf{v})_{L^2(K)} \right). \quad (4.25)$$

En este caso, para cada elemento  $K \in \mathcal{P}$ , las funciones matriciales  $\boldsymbol{\sigma}_K^\tau$  corresponden a una solución del problema de Neumann:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_K^\tau = \mathbf{R}_K^\tau, & \text{en } K, \\ \boldsymbol{\sigma}_K^\tau \mathbf{n}_\gamma^K = \mathbf{R}_{\gamma,K}^\tau, & \text{en cada } \gamma \in \mathcal{E}_K, \end{cases} \quad (4.26)$$

para cada  $\tau = \mathbf{st}, \mathbf{ad}$ , donde  $\mathbf{R}_K^\tau, \mathbf{R}_{\gamma,K}^\tau$  vienen descritos en (4.21) - (4.22).

En base a las ecuaciones (4.24) y (4.25), usando los mismos pasos realizados en la Sección 3.5.1.1 es posible obtener las siguientes estimaciones de error computables

$$\|\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{V},\Omega} \leq \eta_{\mathbf{y}}, \quad (4.27)$$

$$\|\hat{\mathbf{e}}_p\|_{Q,\Omega} \leq \frac{\sqrt{2}\rho}{\beta} \eta_p. \quad (4.28)$$

$$\|\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{V},\Omega} \leq \eta_{\mathbf{z}}, \quad (4.29)$$

$$\|\hat{\mathbf{e}}_r\|_{Q,\Omega} \leq \frac{\sqrt{2}\rho}{\beta} \eta_r. \quad (4.30)$$

Cada uno de los estimadores viene dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{y}} &:= \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_{\mathbf{y},K}^2 \right)^{1/2} & \text{donde } \eta_{\mathbf{y},K} &:= \left( \eta_{\mathbf{y}_{c,K}}^2 + \nu \eta_{\mathbf{y}_{nc,K}}^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_{\mathbf{z}} &:= \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_{\mathbf{z},K}^2 \right)^{1/2} & \text{donde } \eta_{\mathbf{z},K} &:= \left( \eta_{\mathbf{z}_{c,K}}^2 + \nu \eta_{\mathbf{z}_{nc,K}}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \eta_p &:= \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_{p,K}^2 \right)^{1/2} & \text{donde } \eta_{p,K} &:= \left( \eta_{\mathbf{y}_{c,K}}^2 + \nu^2 \eta_{\mathbf{y}_{nc,K}}^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_r &:= \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_{r,K}^2 \right)^{1/2} & \text{donde } \eta_{r,K} &:= \left( \eta_{\mathbf{z}_{c,K}}^2 + \nu^2 \eta_{\mathbf{z}_{nc,K}}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

A su vez, los respectivos indicadores de error vienen dados por:

$$\eta_{\mathbf{y}_{c,K}} := \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left( \|\boldsymbol{\sigma}_K^{\mathbf{st}}\|_{\mathbf{L}^2(K)} + \frac{h_K}{\pi} \|\mathbf{osc}_K^{\mathbf{st}}\|_{\mathbf{L}^2(K)} \right), \quad \eta_{\mathbf{y}_{nc,K}} = \frac{1}{\beta} \|\nabla \cdot \mathbf{y}_h\|_{\mathbf{L}^2(K)}, \quad (4.33)$$

$$\eta_{\mathbf{z}_{c,K}} := \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left( \|\boldsymbol{\sigma}_K^{\mathbf{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(K)} + \frac{h_K}{\pi} \|\mathbf{osc}_K^{\mathbf{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(K)} \right), \quad \eta_{\mathbf{z}_{nc,K}} = \frac{1}{\beta} \|\nabla \cdot \mathbf{z}_h\|_{\mathbf{L}^2(K)}, \quad (4.34)$$

donde los términos  $\boldsymbol{\sigma}_K^\tau$  y  $\mathbf{osc}_K^\tau$  vienen descritos en (4.26) y (4.21) - (4.22), respectivamente.

Por último, el estimador de error asociado al control óptimo se define como:

$$\eta_{\text{ct}} := \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \eta_{\text{ct},K}^2 \right)^{1/2}, \quad \text{donde } \eta_{\text{ct},K} := \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(K)}. \quad (4.35)$$

En base a lo anterior presentaremos el análisis a través del cual se obtiene una cota para el error de discretización a posteriori sobre el problema de control óptimo. En lo que sigue denotamos los errores de cada variable por

$$\mathbf{e}_y := \mathbf{y} - \mathbf{y}_h \quad ; \quad \mathbf{e}_z := \mathbf{z} - \mathbf{z}_h \quad ; \quad \mathbf{e}_u := \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \quad ; \quad e_p = p - p_h \quad ; \quad e_r = r - r_h.$$

A su vez denotamos por  $E$  el error total definido por

$$E := ((\mathbf{e}_y, e_p), \mathbf{e}_u, (\mathbf{e}_z, e_r)). \quad (4.36)$$

**Teorema 4.4.1** Sean  $((\mathbf{y}, p), \mathbf{u}, (\mathbf{z}, r)) \in \mathbf{Y} \times \mathbf{U}_{\text{ad}} \times \mathbf{Y}$  solución de (4.10) y  $((\mathbf{y}_h, p_h), \mathbf{u}_h, (\mathbf{z}_h, r_h)) \in \mathbf{Y}_{l,s} \times \mathbf{U}_{\text{ad},t} \times \mathbf{Y}_{l,s}$  la solución del sistema (4.14). Entonces el error total  $E$ , definido en (4.36), satisface la siguiente estimación computable

$$\|E\|_{\Omega} := \left( \|(\mathbf{e}_y, e_p)\|_{\Omega}^2 + \|(\mathbf{e}_z, e_r)\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{e}_u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \Upsilon_C, \quad (4.37)$$

donde el término  $\Upsilon_C$  denota el estimador total computable (TCE), el cual puede expresarse, en términos de sus indicadores de error  $\Upsilon_{C,K}$ , del siguiente modo

$$\Upsilon_C := \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \Upsilon_{C,K}^2 \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \Upsilon_{C,K} := \left( C_{\text{st}} \eta_{\mathbf{y},K}^2 + C_{\text{ad}} \eta_{\mathbf{z},K}^2 + C_{\text{ct}} \eta_{\text{ct},K}^2 + \frac{4\rho^2}{\beta^2} (\eta_{p,K}^2 + \eta_{r,K}^2) \right)^{1/2}, \quad (4.38)$$

donde  $\eta_{\mathbf{y},K}$ ,  $\eta_{\mathbf{z},K}$ ,  $\eta_{p,K}$ ,  $\eta_{r,K}$  están dados por (4.31) - (4.34), mientras que  $\eta_{\mathbf{u},K}$  se define en (4.35).

A su vez las constantes involucradas vienen dadas por

$$\begin{aligned} C_{\text{st}} &:= 2 + \frac{8C_{\Omega}^6}{\alpha^2\nu^3} + 4(1 + \rho^2 C_S) \left( \frac{C_{\Omega}^4}{\nu^2} + \frac{4C_{\Omega}^8}{\alpha^2\nu^4} + \frac{8C_{\Omega}^{12}}{\alpha^2\nu^6} \right), \\ C_{\text{ad}} &:= 2 + \frac{4C_{\Omega}^2}{\alpha^2\nu} + \frac{8}{\alpha^2} (1 + \rho^2 C_S) \left( \frac{C_{\Omega}^4}{\nu^2} + \frac{2C_{\Omega}^8}{\nu^4} \right), \\ C_{\text{ct}} &:= 2 + \frac{8C_{\Omega}^8}{\alpha^2\nu^4} + 4(1 + \rho^2 C_S) \left( \frac{C_{\Omega}^2}{\nu} + \frac{2C_{\Omega}^6}{\nu^3} + \frac{4C_{\Omega}^{10}}{\alpha^2\nu^5} + \frac{8C_{\Omega}^{14}}{\alpha^2\nu^7} \right), \end{aligned}$$

donde  $C_\Omega$  corresponde a la constante de Poincaré, mencionada en el Teorema 2.4.2 y  $C_S = \frac{4\nu}{\beta^2}$ .

*Dem:* A continuación describiremos el procedimiento en 5 pasos principales.

**Paso 1** El objetivo de este paso es controlar el error  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ .

A partir de la desigualdad triangular se tiene que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left( \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) \quad (4.39)$$

El segundo término del lado derecho corresponde a  $\eta_{\text{ct}}^2$  (por (4.35)), por lo que ahora nos centraremos en el primer término. Dado que  $\tilde{\mathbf{u}}$  se describe en términos de una proyección se tiene que satisface la siguiente desigualdad variacional

$$(\mathbf{z}_h + \alpha\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{u}})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{U}_{ad}. \quad (4.40)$$

Tomando  $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{u}}$  en la desigualdad variacional (4.9) y tomando  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$  en (4.40) se obtiene

$$(\mathbf{z} + \alpha\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \geq 0 \quad \text{y} \quad (\mathbf{z}_h + \alpha\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \geq 0,$$

con lo cual se sigue que

$$\alpha\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq (\mathbf{z} - \mathbf{z}_h, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

A continuación haremos uso de las variables auxiliares  $\tilde{\mathbf{z}}$  y  $\hat{\mathbf{z}}$ , definidas en (4.16) y (4.18) respectivamente, de la siguiente forma

$$\alpha\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq (\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_h, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Usando las desigualdades de Hölder y de Young se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &\leq (\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq (\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha} \|\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\alpha} \|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

con lo cual resulta

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{\alpha} (\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{2}{\alpha^2} \|\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\alpha^2} \|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \quad (4.41)$$

Usando desigualdad de Poincaré y (4.29) se tiene que  $\|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_\Omega^2}{\nu} \eta_{\mathbf{z}}^2$ .

Ahora procederemos a acotar el primer término mediante las variables auxiliares  $\tilde{\mathbf{y}}$  y  $\tilde{\mathbf{z}}$  definidas en

(4.15) - (4.16). Puesto que  $\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{X}$  se tiene que  $a(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}, \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}) = (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}})_{L^2(\Omega)}$  (usando el sistema (4.10) y las ecuaciones en (4.15)) y  $a(\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y})_{L^2(\Omega)}$  (usando el sistema (4.10) y las ecuaciones en (4.16)). Con esto se deduce que

$$(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}})_{L^2(\Omega)} = a(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}, \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}) = a(\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y})_{L^2(\Omega)} = -\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$$

De este modo la desigualdad (4.41) equivale a

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{\alpha^2} \|\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2C_\Omega^2}{\alpha^2\nu} \eta_{\mathbf{z}}^2 \quad (4.42)$$

Nos resta acotar el término  $\|\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}\|_{L^2(\Omega)}$ . Dado que  $\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{X}$  se tiene que  $a(\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}) = (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_h, \tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}})_{L^2(\Omega)}$  (usando (4.16) y (4.18)). Luego

$$\|\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 = (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_h, \tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}})_{L^2(\Omega)},$$

Usando las desigualdades de Hölder y de Poincaré se sigue que

$$\|\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \frac{C_\Omega^4}{\nu^2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_h\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \frac{2C_\Omega^4}{\nu^2} \left( \|\tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 + \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_h\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \right) \quad (4.43)$$

Por (4.27) se tiene que  $\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_h\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \eta_{\mathbf{y}}^2$ . Para estimar el término  $\|\tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{V},\Omega}$  basta con usar las ecuaciones (4.15) y (4.17), de manera similar como se trabajó con el término  $\|\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{V},\Omega}$ , con lo cual se tiene

$$\|\tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \frac{C_\Omega^2}{\nu} \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{C_\Omega^2}{\nu} \eta_{\text{ct}}^2.$$

Usando esto último en la desigualdad (4.43) se obtiene

$$\frac{C_\Omega^2}{\nu} \|\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \frac{2C_\Omega^6}{\nu^3} \left( \frac{C_\Omega^2}{\nu} \eta_{\text{ct}}^2 + \eta_{\mathbf{y}}^2 \right). \quad (4.44)$$

Usando desigualdad de Poincaré en (4.42) y el resultado obtenido en (4.44) se determina que

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{4C_\Omega^6}{\alpha^2\nu^3} \eta_{\mathbf{y}}^2 + \frac{2C_\Omega^2}{\alpha^2\nu} \eta_{\mathbf{z}}^2 + \frac{4C_\Omega^8}{\alpha^2\nu^4} \eta_{\text{ct}}^2,$$

y por (4.39) se concluye que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{8C_\Omega^6}{\alpha^2\nu^3} \eta_{\mathbf{y}}^2 + \frac{4C_\Omega^2}{\alpha^2\nu} \eta_{\mathbf{z}}^2 + \left( 2 + \frac{8C_\Omega^8}{\alpha^2\nu^4} \right) \eta_{\text{ct}}^2. \quad (4.45)$$

**Paso 2** El objetivo de este paso es controlar el error  $\mathbf{y} - \mathbf{y}_h$ . En este caso se tiene

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_h\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq 2 \left( \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 + \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_h\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \right) \quad (4.46)$$

El segundo término de la desigualdad se estima mediante (4.27), con lo cual nos resta estimar el primer término.

Puesto que  $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \in \mathbf{X}$ , usando (4.17) y las dos primeras ecuaciones de (4.10) se tiene que

$$a(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})_{L^2(\Omega)},$$

y por desigualdad de Hölder y de Poincaré se tiene

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \frac{C_\Omega^2}{\nu} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.47)$$

Usando esta desigualdad y la estimación (4.45) en (4.46), se concluye que

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_h\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \left( 2 + \frac{16C_\Omega^8}{\alpha^2\nu^4} \right) \eta_{\mathbf{y}}^2 + \frac{8C_\Omega^4}{\alpha^2\nu^2} \eta_{\mathbf{z}}^2 + \left( \frac{4C_\Omega^2}{\nu} + \frac{16C_\Omega^{10}}{\alpha^2\nu^5} \right) \eta_{\text{ct}}^2. \quad (4.48)$$

**Paso 3** El objetivo de este paso es estimar el error  $\mathbf{z} - \mathbf{z}_h$ .

En este caso se tiene

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq 2 \left( \|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 + \|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \right) \quad (4.49)$$

El segundo término de la desigualdad se estima mediante (4.29), por lo que nos resta estimar el primer término.

Puesto que  $\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{X}$ , usando (4.18) y las dos últimas ecuaciones de (4.10) se tiene que

$$a(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_h, \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}})_{L^2(\Omega)},$$

y por desigualdad de Hölder y de Poincaré se tiene

$$\|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \frac{C_\Omega^4}{\nu^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_h\|_{\mathbf{V},\Omega}^2. \quad (4.50)$$

Usando esta desigualdad y la estimación (4.48) en (4.49) se concluye que

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \left( \frac{4C_\Omega^4}{\nu^2} + \frac{32C_\Omega^{12}}{\alpha^2\nu^6} \right) \eta_{\mathbf{y}}^2 + \left( 2 + \frac{16C_\Omega^8}{\alpha^2\nu^4} \right) \eta_{\mathbf{z}}^2 + \left( \frac{8C_\Omega^6}{\nu^3} + \frac{32C_\Omega^{14}}{\alpha^2\nu^7} \right) \eta_{\text{ct}}^2. \quad (4.51)$$

**Paso 4** El objetivo de este paso es estimar  $\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$  y  $\|r - r_h\|_{L^2(\Omega)}$ . En esta oportunidad solo

mostraremos los pasos para estimar la primera cantidad, ya que la segunda se estima de manera similar. Usando la definición de  $\hat{p}$  en (4.17) y la desigualdad triangular se tiene que:

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left( \|p - \hat{p}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{p} - p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (4.52)$$

El segundo término se estima mediante (4.28).

A partir de las dos primeras ecuaciones del sistema (4.10) y las ecuaciones (4.17) se obtiene

$$(p - \hat{p}, \nabla \cdot \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = \nu(\nabla(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \nabla \mathbf{v})_{\underline{\mathbb{L}}^2(\Omega)} - (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)},$$

y mediante la condición inf - sup sobre  $\mathbf{b}$ , usando desigualdad de Hölder y de Poincaré, se llega a que

$$\|p - \hat{p}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta} \left( \sqrt{\nu} \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{V}, \Omega} + C_\Omega \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

Usando la estimación obtenida en (4.47) obtenemos que

$$\|p - \hat{p}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{4}{\beta^2} C_\Omega^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

Finalmente, usando esta desigualdad y la estimación obtenida en (4.45), de (4.52) se concluye que

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{64C_\Omega^8}{\alpha^2 \beta^2 \nu^3} \eta_{\mathbf{y}}^2 + \frac{32C_\Omega^4}{\alpha^2 \beta^2 \nu} \eta_{\mathbf{z}}^2 + \left( \frac{16C_\Omega^2}{\beta^2} + \frac{64C_\Omega^{10}}{\alpha^2 \beta^2 \nu^4} \right) \eta_{\text{ct}}^2 + \frac{4}{\beta^2} \eta_p^2 \quad (4.53)$$

Como se mencionó anteriormente, el procedimiento para estimar  $\|r - r_h\|_{L^2(\Omega)}^2$  es bastante similar, utilizando las mismas desigualdades y las estimaciones (4.30) (4.50). En este caso se llega al siguiente resultado

$$\|r - r_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left( \frac{16C_\Omega^4}{\beta^2 \nu} + \frac{128C_\Omega^{12}}{\alpha^2 \beta^2 \nu^5} \right) \eta_{\mathbf{y}}^2 + \frac{64C_\Omega^8}{\alpha^2 \beta^2 \nu^3} \eta_{\mathbf{z}}^2 + \left( \frac{32C_\Omega^6}{\beta^2 \nu^2} + \frac{128C_\Omega^{14}}{\alpha^2 \beta^2 \nu^6} \right) \eta_{\text{ct}}^2 + \frac{4}{\beta^2} \eta_r^2. \quad (4.54)$$

**Paso 5** El resultado (4.37) - (4.38) se obtiene a partir de las estimaciones (4.45), (4.48), (4.51), (4.53) y (4.54). □

#### 4.4.1.2. Análisis de eficiencia local

En esta sección se obtendrá una cota superior para el TCE descrito en el Teorema 4.4.1. En este caso vemos que éste depende de cada uno de los estimadores construidos, los cuales, a su vez, dependen de los estimadores conformes y de los no conformes, definidos en (4.33) y (4.34).

Notemos que es posible obtener la misma estimación obtenida en (3.30), para los estimadores no conformes. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}\eta_{\mathbf{y}_{nc,K}}^2 &\leq \frac{d}{\beta^2\nu} \|(\mathbf{e}_y, e_p)\|_K^2, \\ \eta_{\mathbf{z}_{nc,K}}^2 &\leq \frac{d}{\beta^2\nu} \|(\mathbf{e}_z, e_\tau)\|_K^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, para acotar los estimadores conformes haremos uso nuevamente del resultado detallado en la Sección 5 del texto [2], con lo cual, para cada  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{st}, \mathbf{ad}$ , la solución del problema de Neumann (4.26) satisfice

$$\|\boldsymbol{\sigma}_K^\tau\|_{\underline{\mathbb{L}}^2(K)} \leq \mathcal{C} \left( h_K \|\mathbf{R}_K^\tau\|_{\mathbf{L}^2(K)} + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} h_K^{1/2} \left( \|\mathbf{J}_\gamma^\tau\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} + \|\mathbf{g}_{\gamma,K}^\tau - \langle \mathbf{J} \rangle_\gamma^\tau\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right) \right),$$

donde

$$[\mathbf{J}]_\gamma^\tau := \begin{cases} \frac{1}{2} (\mathbf{J}_{\gamma,K}^\tau + \mathbf{J}_{\gamma,K'}^\tau), & \text{si } \gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'} (K \neq K'), \\ \mathbf{0}, & \text{si } \gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_\Gamma, \end{cases} \quad (4.55)$$

$$\langle \mathbf{J} \rangle_\gamma^\tau := \begin{cases} \frac{1}{2} (\mathbf{J}_{\gamma,K}^\tau - \mathbf{J}_{\gamma,K'}^\tau), & \text{si } \gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'} (K \neq K'), \\ \mathbf{J}_{\gamma,K}^\tau, & \text{si } \gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_\Gamma, \end{cases} \quad (4.56)$$

siendo  $\mathbf{J}_{\gamma,K}^\tau$  los términos definidos en (4.23) y  $\mathbf{R}_K^\tau$  los términos residuales definidos en (4.21) -(4.22) (para cada  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{st}, \mathbf{ad}$ ).

A continuación estimaremos los términos residuales  $\mathbf{R}_K^\tau$ , para cada  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{st}, \mathbf{ad}$ . En el caso del estado notemos que, de (4.2), el error  $\mathbf{e}_y$  satisfice la siguiente ecuación de error:

$$\begin{aligned}a(\mathbf{e}_y, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, e_p) &= (\mathbf{f} + \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \nu(\nabla \mathbf{y}_h, \nabla \mathbf{v})_{\underline{\mathbb{L}}^2(\Omega)} - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\boldsymbol{\Pi}_{K,1}(\mathbf{f}) + \mathbf{u}_h + \nu \Delta \mathbf{y}_h - \nabla p_h, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} + (\mathbf{f} - \boldsymbol{\Pi}_{K,1}(\mathbf{f}), \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} ([\nu \nabla \mathbf{y}_h \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma], \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right) + (\mathbf{e}_u, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Dicha ecuación se puede reescribir en función de los términos  $\mathbf{R}_K^{\mathbf{st}}$ ,  $[\mathbf{J}]_\gamma^{\mathbf{st}}$  y  $\mathbf{osc}_K^{\mathbf{st}}$ , de modo que:

$$\sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{R}_K^{\mathbf{st}}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} - \sum_{\gamma \in \partial K} ([\mathbf{J}]_\gamma^{\mathbf{st}}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right) = a(\mathbf{e}_y, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, e_p) - (\mathbf{e}_u, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \sum_{K \in \mathcal{P}} (\mathbf{osc}_K^{\mathbf{st}}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)}. \quad (4.57)$$

Del mismo modo que en el Lema 3.5.6, tomando  $\mathbf{v} = \beta_K \mathbf{R}_K^{\text{st}}$  y usando desigualdad de Hölder y las desigualdades (2.12) y (2.13) se llega a que

$$h_K^2 \|\mathbf{R}_K^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \leq \mathcal{C} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|(\mathbf{e}_y, e_p)\|_K^2 + h_K^2 \|\mathbf{osc}_K^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + h_K^2 \|\mathbf{e}_u\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \right), \quad (4.58)$$

donde  $C_{\mathbf{R}} = \max \left\{ \sqrt{\nu}, \frac{\sqrt{d}}{\rho} \right\}$ .

Por otro lado, tomando  $\mathbf{v} = \beta_\gamma [\mathbf{J}]_\gamma^{\text{st}}$  en (4.57), y usando desigualdad de Hölder y las desigualdades (2.14) y (2.15), se obtiene

$$h_K \|\mathbf{J}_\gamma^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 \leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_\gamma} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|(\mathbf{e}_y, e_p)\|_T^2 + h_T^2 \|\mathbf{osc}_T^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + h_T^2 \|\mathbf{e}_u\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right). \quad (4.59)$$

Nos resta estimar el término residual  $\mathbf{R}_{\gamma,K}^{\text{st}}$ . En base a la construcción descrita en (4.55) y (4.56) se tiene que  $\mathbf{J}_{\gamma,K}^{\text{st}} = \langle \mathbf{J} \rangle_\gamma^{\text{st}} + [\mathbf{J}]_\gamma^{\text{st}}$  y  $\mathbf{R}_{\gamma,K}^{\text{st}} = \mathbf{g}_{\gamma,K}^{\text{st}} - \mathbf{J}_{\gamma,K}^{\text{st}}$ , con lo cual

$$\|\mathbf{R}_{\gamma,K}^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \leq \|[\mathbf{J}]_\gamma^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} + \|\mathbf{g}_\gamma^{\text{st}} - \langle \mathbf{J} \rangle_\gamma^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}.$$

Para estimar la parte  $\|\mathbf{g}_\gamma^{\text{st}} - \langle \mathbf{J} \rangle_\gamma^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}$  utilizamos los mismos pasos empleados en la demostración del Teorema 3.5.7. Con esto se llega a que

$$\|\mathbf{g}_\gamma^{\text{st}} - \langle \mathbf{J} \rangle_\gamma^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 \leq h_K^{-1} \mathcal{C} \sum_{T \in \tilde{\Omega}_K} \left( C_{\mathcal{A},T} \|(\mathbf{e}_y, e_p)\|_T^2 + h_T^2 (1 + C_{\mathcal{J},K}) \|\mathbf{osc}_T^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right).$$

Para el estado adjunto se obtiene la siguiente ecuación del error

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}_z, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, e_r) &= \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{\Pi}_{K,1}(\mathbf{y}_\Omega) + \mathbf{y}_h + \nu \Delta \mathbf{z}_h + \nabla r_h, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} - (\mathbf{y}_\Omega - \mathbf{\Pi}_{K,1}(\mathbf{y}_\Omega), \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} \right) \\ &\quad - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} \left( ([\nu \nabla \mathbf{z}_h \mathbf{n}_\gamma + r_h \mathbf{n}_\gamma], \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right) + (\mathbf{e}_y, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Realizando el mismo procedimiento para el estado adjunto, usando (4.8), (4.22) y (4.55) - (4.56), se llega a que los términos  $\mathbf{R}_K^{\text{ad}}$  y  $[\mathbf{J}]_\gamma^{\text{ad}}$  satisfacen las siguientes estimaciones

$$h_K^2 \|\mathbf{R}_K^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \leq \mathcal{C} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|(\mathbf{e}_z, e_r)\|_K^2 + h_K^2 \|\mathbf{osc}_K^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + h_K^2 \|\mathbf{e}_y\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \right), \quad (4.60)$$

$$h_K \|\mathbf{J}_\gamma^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 \leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_\gamma} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|(\mathbf{e}_z, e_r)\|_T^2 + h_T^2 \|\mathbf{osc}_T^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + h_T^2 \|\mathbf{e}_y\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right). \quad (4.61)$$

A su vez, usando estas dos últimas desigualdades, se llega a que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_{\gamma,K}^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} &\leq \|[\mathbf{J}]_{\gamma}^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)} + \|\mathbf{g}_{\gamma}^{\text{ad}} - \langle \mathbf{J} \rangle_{\gamma}^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}, \\ \|\mathbf{g}_{\gamma}^{\text{ad}} - \langle \mathbf{J} \rangle_{\gamma}^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 &\leq h_K^{-1} \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_K} \left( C_{\mathcal{B},T} \|(\mathbf{e}_{\mathbf{z}}, e_r)\|_T^2 + h_T^2 (1 + C_{\mathcal{S},K}) \|\text{osc}_T^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(T)} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, para el estimador del error asociado al control, basta con sumar y restar la solución  $\mathbf{u}$  y usar desigualdad triangular y la propiedad de continuidad de Lipschitz del operador proyección  $\Pi_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]}$  (mencionada en (4.12)), con lo cual se llega a que

$$\eta_{\mathbf{u}} \leq \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(K)} + \left\| \Pi_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \mathbf{z} \right\} - \Pi_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \mathbf{z}_h \right\} \right\|_{\mathbf{L}^2(K)} \leq \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(K)} + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}$$

En base a estas estimaciones es posible probar el siguiente resultado.

**Teorema 4.4.2** *Sea  $K \in \mathcal{P}$  un elemento de la partición se tiene que los indicadores de error computables  $\Upsilon_{C,K}$  satisfacen la siguiente desigualdad*

$$\begin{aligned} \Upsilon_{C,K} \leq & \mathcal{C} \left( \sum_{T \in \tilde{\Omega}_K} \left( \|E\|_T^2 + h_T^2 (\|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + \|\mathbf{e}_{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + \|\text{osc}_T^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \|\text{osc}_T^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2) \right) \right. \\ & \left. \|\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \right), \end{aligned}$$

#### 4.4.2. Estimaciones no computables

A continuación se llevará a cabo la construcción de otro estimador, del tipo no computable, para el problema (4.1) - (4.3).

##### 4.4.2.1. Análisis de confiabilidad

En este caso reescribiremos las ecuaciones (4.19) y (4.20) en función de los términos residuales  $\mathbf{R}_K^{\tau}$  (descritos en (4.21) - (4.22)) y  $[\mathbf{J}]_{\gamma}^{\tau}$  (descritos en (4.55)), para  $\tau = \text{st}, \text{ad}$ , con lo cual se obtiene

$$a(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \hat{e}_p) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{R}_K^{\text{st}}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} + (\text{osc}_K^{\text{st}}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} ([\mathbf{J}]_{\gamma}^{\text{st}}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right), \quad (4.62)$$

$$a(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, \hat{e}_r) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \left( (\mathbf{R}_K^{\text{ad}}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} + (\text{osc}_K^{\text{ad}}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(K)} - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_K} ([\mathbf{J}]_{\gamma}^{\text{ad}}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\gamma)} \right). \quad (4.63)$$

A través del mismo procedimiento expuesto en la Sección 2.5.2, mediante las ecuaciones (4.62) y (4.63) se obtienen las siguientes estimaciones no computables para  $\mathbf{y}, p, \mathbf{z}, r$ :

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \mathcal{C} (\eta_{\mathbf{st}}^2 + \|\mathcal{S}^{\mathbf{st}}\|_*^2), \quad (4.64)$$

$$\beta^2 \|\tilde{e}_p\|_{Q,\Omega}^2 \leq \mathcal{C} (\eta_{\mathbf{st}}^2 + \|\mathcal{S}^{\mathbf{st}}\|_*^2), \quad (4.65)$$

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{V},\Omega}^2 \leq \mathcal{C} (\eta_{\mathbf{ad}}^2 + \|\mathcal{S}^{\mathbf{ad}}\|_*^2), \quad (4.66)$$

$$\beta^2 \|\tilde{e}_r\|_{Q,\Omega}^2 \leq \mathcal{C} (\eta_{\mathbf{ad}}^2 + \|\mathcal{S}^{\mathbf{ad}}\|_*^2), \quad (4.67)$$

donde

$$\|\mathcal{S}^{\mathbf{st}}\|_* = \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{S}^{\mathbf{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; I_h(\boldsymbol{\xi}|_K))|}{\|\boldsymbol{\xi}|_K\|_{\mathbf{V},K}}, \quad (4.68)$$

$$\|\mathcal{S}^{\mathbf{ad}}\|_* = \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{S}^{\mathbf{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{f}; I_h(\boldsymbol{\xi}|_K))|}{\|\boldsymbol{\xi}|_K\|_{\mathbf{V},K}}. \quad (4.69)$$

Para  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{st}, \mathbf{ad}$ , los estimadores  $\eta_{\boldsymbol{\tau}}$  se definen, en términos de sus indicadores de error  $\eta_{\boldsymbol{\tau},K}$  de la siguiente manera

$$\eta_{\boldsymbol{\tau}} := \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_{\boldsymbol{\tau},K}^2 \right)^{1/2} \quad \text{donde} \quad \eta_{\boldsymbol{\tau},K} := \left( \eta_{\boldsymbol{\tau},R,K}^2 + \nu \eta_{\boldsymbol{\tau},nc,K}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.70)$$

En este caso los indicadores de error residuales ( $\eta_{\boldsymbol{\tau},R,K}$ ) y no conformes ( $\eta_{\boldsymbol{\tau},nc,K}$ ) se definen como

$$\eta_{\boldsymbol{\tau},R,K} := \left( \frac{h_K^2}{\nu} \left( \|\mathbf{R}_K^{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + \|\mathbf{osc}_K^{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \right) + \sum_{\gamma \in \partial K} \frac{h_K}{\nu} \|\mathbf{J}[\boldsymbol{\tau}]_{\gamma}^{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.71)$$

$$\eta_{\boldsymbol{\tau},nc,K} := \frac{1}{\beta} \begin{cases} \|\nabla \cdot \mathbf{y}_h\|_{L^2(K)}, & \text{si } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{st}, \\ \|\nabla \cdot \mathbf{z}_h\|_{L^2(K)}, & \text{si } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{ad}. \end{cases} \quad (4.72)$$

A partir de esta construcción, junto con el estimador de control  $\eta_{\mathbf{ct}}$ , es posible dar con el siguiente resultado.

**Teorema 4.4.3** *Bajo las hipótesis del Teorema 4.4.1 existe una constante  $C_{up} > 0$ , que depende de los parámetros  $\nu, \beta, \rho, \alpha$ , tal que se tiene la siguiente estimación no computable del error total  $E$ :*

$$\|E\|_{\Omega} \leq C_{up} (\Upsilon_{NC} + \|\mathcal{S}^{\mathbf{st}}\|_* + \|\mathcal{S}^{\mathbf{ad}}\|_*)$$

donde el término  $\Upsilon_{NC}$  denota el estimador total no computable (TNCE), el cual puede expresarse, en

términos de sus indicadores de error  $\Upsilon_{NC,K}$ , del siguiente modo

$$\Upsilon_{NC} := \left( \sum_{K \in \mathcal{P}} \Upsilon_{NC,K}^2 \right)^{1/2} \quad y \quad \Upsilon_{NC,K} := (\eta_{\text{st},K}^2 + \eta_{\text{ad},K}^2 + \eta_{\text{ct},K}^2)^{1/2}, \quad (4.73)$$

con  $\eta_{\tau,K}$  descrito en (4.70) - (4.72), para cada  $\tau = \text{st}, \text{ad}$ . A su vez los términos  $\|\mathcal{S}^{\text{st}}\|_*$  y  $\|\mathcal{S}^{\text{ad}}\|_*$  vienen dados por (4.68) y (4.69), respectivamente.

Dem: La demostración se lleva a cabo mediante los mismos pasos descritos en el Teorema 4.4.1, usando las estimaciones (4.64) - (4.67) en vez de (4.27) - (4.30), considerando que  $\eta_{\text{st}}$  cumple el mismo rol que  $\eta_{\mathbf{y}}$  y que  $\eta_p$ , al igual que  $\eta_{\text{ad}}$  frente a  $\eta_{\mathbf{z}}$  y  $\eta_r$ . Al final del paso 5 se debe sobreestimar para obtener la constante  $C_{up}$ .

□

#### 4.4.2.2. Análisis de eficiencia local

Al igual que el estimador no computable obtenido en la Sección 3.5.2.2, el TNCE depende de los estimadores no conformes, definidos en (4.72), como también de los términos residuales  $\mathbf{R}_K^\tau$  y  $[\mathbf{J}]_\gamma^\tau$ , los cuales vienen dados por (4.21) - (4.22) y (4.55), para cada  $\tau = \text{st}, \text{ad}$ . A su vez también está presente el estimador del control  $\eta_{\text{ct}}$ . Notemos que en la Sección 4.4.1.2 se obtuvo una cota superior, en términos de los errores de discretización, para todos y cada uno de estos términos.

Del mismo modo que en secciones anteriores, para los estimadores no conformes, del tipo no computable, es posible obtener

$$\eta_{\text{st}_{nc},K}^2 \leq \frac{d}{\beta^2 \nu} \|\|(\mathbf{e}_{\mathbf{y}}, e_p)\|_K^2,$$

$$\eta_{\text{ad}_{nc},K}^2 \leq \frac{d}{\beta^2 \nu} \|\|(\mathbf{e}_{\mathbf{z}}, e_r)\|_K^2.$$

Por otro lado, notemos que en la Sección 4.4.1.2 obtuvimos una cota para cada término residual mediante el uso de funciones burbuja. En el caso de las variables de estado, en (4.58) y (4.59) obtuvimos

$$h_K^2 \|\mathbf{R}_K^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \leq \mathcal{C} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|\|(\mathbf{e}_{\mathbf{y}}, e_p)\|_K^2 + h_K^2 \|\text{osc}_K^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + h_K^2 \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \right),$$

$$h_K \|\mathbf{J}_\gamma^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 \leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_\gamma} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|\|(\mathbf{e}_{\mathbf{z}}, e_r)\|_T^2 + h_T^2 \|\text{osc}_T^{\text{st}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + h_T^2 \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right),$$

A su vez, para las variables de estado adjunto, en (4.60) y (4.61) vimos que

$$h_K^2 \|\mathbf{R}_K^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \leq \mathcal{C} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|\|(\mathbf{e}_{\mathbf{z}}, e_r)\|_K^2 + h_K^2 \|\text{osc}_K^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 + h_K^2 \|\mathbf{e}_{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \right),$$

$$h_K \|\mathbf{J}_\gamma^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2(\gamma)}^2 \leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_\gamma} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|\|(\mathbf{e}_{\mathbf{z}}, e_r)\|_T^2 + h_T^2 \|\text{osc}_T^{\text{ad}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + h_T^2 \|\mathbf{e}_{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \right),$$

De este modo se tiene que los estimadores  $\eta_{\boldsymbol{\tau}_{R,K}}$ , definidos en (4.71), para cada  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{st}, \mathbf{ad}$ , satisfacen la siguiente estimación

$$\begin{aligned}\eta_{\mathbf{st}_{R,K}}^2 &\leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_K} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|(\mathbf{e}_{\mathbf{y}}, e_p)\|_T^2 + h_T^2 \|\mathbf{osc}_T^{\mathbf{st}}\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2 \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(T)} \right) \\ \eta_{\mathbf{ad}_{R,K}}^2 &\leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_K} \left( C_{\mathbf{R}}^2 \|(\mathbf{e}_{\mathbf{z}}, e_r)\|_T^2 + h_T^2 \|\mathbf{osc}_T^{\mathbf{ad}}\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2 \|\mathbf{e}_{\mathbf{y}}\|_{L^2(T)} \right)\end{aligned}$$

Dado que en este caso  $\eta_{\mathbf{u}} = \eta_{\mathbf{ct}}$  se verifica entonces que

$$\eta_{\mathbf{ct}} \leq \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(K)} + \left\| \Pi_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \mathbf{z} \right\} - \Pi_{[\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b]} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \mathbf{z}_h \right\} \right\|_{L^2(K)} \leq \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(K)} + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{e}_{\mathbf{z}}\|_{L^2(K)}$$

Por último, bajo supuesto mencionado al final de la Sección 4.3, sobre los términos estabilizantes, se tiene que

$$\begin{aligned}\sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{J}^{\mathbf{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f}; I_h(\boldsymbol{\xi}|_K))|}{\|\boldsymbol{\xi}|_K\|_{\mathbf{V},K}} &\leq \mathcal{C} \eta_{\mathbf{st}_{R,K}}, \\ \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{J}^{\mathbf{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_\Omega; I_h(\boldsymbol{\xi}|_K))|}{\|\boldsymbol{\xi}|_K\|_{\mathbf{V},K}} &\leq \mathcal{C} \eta_{\mathbf{ad}_{R,K}}.\end{aligned}$$

Con esto podemos establecer el siguiente resultado de eficiencia local.

**Teorema 4.4.4** *Para cada  $K \in \mathcal{P}$ , el indicador  $\Upsilon_{NC,K}$  satisface la siguiente estimación*

$$\begin{aligned}\Upsilon_{NC,K}^2 &\leq \mathcal{C} \sum_{T \in \Omega_K} \left( \|E\|_K^2 + h_T^2 (\|\mathbf{e}_{\mathbf{y}}\|_{L^2(T)} + \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(T)} + \|\mathbf{osc}_T^{\mathbf{st}}\|_{L^2(T)} + \|\mathbf{osc}_T^{\mathbf{ad}}\|_{L^2(T)}) \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{L^2(T)}^2 + \|\mathbf{e}_{\mathbf{y}}\|_{L^2(T)}^2 \right).\end{aligned}$$

## 4.5. Simulaciones numéricas

A partir del estudio sobre el problema de control óptimo se procederá a exhibir algunos resultados correspondientes a ejemplos de solución del problema. Nuestra intención en este caso es llevar a cabo los mismos procedimientos utilizados en la resolución de ejemplos concretos del problema de Stokes, en la Sección 3.6.

A continuación se procederá a detallar algunos aspectos a implementar en la obtención de resultados, estos son: los esquemas de elementos finitos a implementar, un método de búsqueda de soluciones factibles, un algoritmo adaptativo de resolución y, por último, algunos aspectos generales para la presentación de los resultados.

### 4.5.1. Implementación de esquemas de elementos finitos

Para esta ocasión se usarán los esquemas RELP y LPS para resolver el sistema (4.14), empleando  $\mathbf{V}_1(\mathcal{P})$  y  $Q_0(\mathcal{P})$  como subespacios de discretización, para una partición  $\mathcal{P}$  del dominio  $\Omega$  dada. Los términos estabilizantes que resultan de esta elección son los siguientes:

- En el esquema LPS, los términos estabilizantes para la ecuación de estado son:

$$\mathcal{S}^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) := 0$$

y

$$\mathcal{H}^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; q_h) := - \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_I} \tau_\gamma \llbracket p_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket, \llbracket q_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket_{\mathbf{L}^2(\gamma)}.$$

Para la ecuación de estado adjunto, en cambio, los términos vienen dados por:

$$\mathcal{S}^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_\Omega - \mathbf{y}_h; \mathbf{v}_h) := 0$$

y

$$\mathcal{H}^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_\Omega + \mathbf{y}_h; q_h) := \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_I} \tau_\gamma \llbracket r_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket, \llbracket q_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket_{\mathbf{L}^2(\gamma)}.$$

- En el esquema RELP, los términos estabilizantes para la ecuación de estado son:

$$\mathcal{S}^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) := \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_I} \tau_\gamma (\llbracket \nu \nabla \mathbf{y}_h \cdot \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket, \llbracket \nu \nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_\gamma \rrbracket)_{\mathbf{L}^2(\gamma)}$$

y

$$\mathcal{H}^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; q_h) := \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_I} \tau_\gamma (\llbracket \nu \nabla \mathbf{y}_h \cdot \mathbf{n}_\gamma - p_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket, \llbracket q_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket)_{\mathbf{L}^2(\gamma)}.$$

Para la ecuación de estado adjunto, en cambio, los términos vienen dados por:

$$\mathcal{S}^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_\Omega - \mathbf{y}_h; \mathbf{v}_h) := \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_I} \tau_\gamma (\llbracket \nu \nabla \mathbf{z}_h \cdot \mathbf{n}_\gamma + r_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket, \llbracket \nu \nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_\gamma \rrbracket)_{\mathbf{L}^2(\gamma)}$$

y

$$\mathcal{H}^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_\Omega - \mathbf{y}_h; q_h) = \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_I} \tau_\gamma (\llbracket \nu \nabla \mathbf{z}_h \cdot \mathbf{n}_\gamma + r_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket, \llbracket q_h \mathbf{n}_\gamma \rrbracket)_{\mathbf{L}^2(\gamma)}.$$

En el caso del conjunto admisible se hará uso del subespacio  $\mathbf{U}_{ad,0}$ , esto es, con  $t = 0$  en la fórmula (4.13).

Introduciremos algo de notación adicional para la implementación del método de elementos finitos

sobre el sistema (4.14). Denotemos la dimensión de los subespacios  $Q_0(\mathcal{P})$  y  $V_1(\mathcal{P})$  por

$$M := \dim Q_0(\mathcal{P}) \quad ; \quad N := \frac{1}{d} \dim V_1(\mathcal{P}),$$

respectivamente.

Consideremos las base de  $V_1(\mathcal{P})$  y  $Q_0(\mathcal{P})$  dadas por  $\{\lambda_n^{(j)} : n = 1, \dots, N \quad ; \quad j = 1, \dots, d\}$  y  $\{\mathbb{1}_k : k = 1, \dots, M\}$  respectivamente, siendo  $\lambda_n^{(j)}$  la función lineal, descrita en la Sección 2.3, y  $\mathbb{1}_k$  la función indicatriz que vale 1 si se evalúa en el elemento  $K_k$ , y 0 en otro caso. Con esto, cada variable queda discretizada de la siguiente manera:

$$y_h^{(j)} = \sum_{n=1}^N y_n^{(j)} \lambda_n \quad ; \quad z_h^{(j)} = \sum_{n=1}^N z_n^{(j)} \lambda_n \quad ; \quad u_h^{(j)} = \sum_{k=1}^M u_k^{(j)} \mathbb{1}_n \quad (\text{con } j = 1, \dots, d);$$

$$p_h = \sum_{k=1}^M p_k \mathbb{1}_k \quad ; \quad r_h = \sum_{k=1}^M r_k \mathbb{1}_k.$$

#### 4.5.2. Algoritmo de Active Set

En esta subsección se presentará un método que permite dar con una solución óptima a partir de un algoritmo de búsqueda que utiliza dos funciones iniciales.

El algoritmo a describir se conoce por sus siglas PDAS (Primal - dual active set), no obstante lo denominaremos simplemente algoritmo de Active Set. Esta estrategia consiste en una recursividad que, en cada iteración, va entregando soluciones factibles del problema (4.1) - (4.3), con lo cual se obtiene un control óptimo que satisface las restricciones de caja. Para ello se utilizan funciones indicadoras que dan cuenta justamente de la factibilidad de la solución.

El estudio del algoritmo de Active Set, en un contexto más amplio, puede hallarse en el trabajo [18]. Lo anterior puede ser llevado a cabo tanto sobre el problema continuo (en espacios de dimensión infinita) como en su versión discreta (en espacios de dimensión finita). En ambos casos es posible probar que el algoritmo se detiene luego de realizar una cantidad finita de pasos (ver [19]). Por último, se sugiere revisar el Capítulo 2, Sección 2.12.4 del texto [28] o el Capítulo 5, Sección 5.4 del texto [12] para ver una descripción simple y genérica de los pasos a mencionar.

Para nuestro problema en particular, los pasos que describen la implementación del algoritmo de Active Set son los siguientes:

##### Paso 0 Inicialización.

- ▷ Ingresar las funciones  $\mathbf{f}, \mathbf{y}_\Omega \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  del lado derecho; los parámetros  $\nu, \alpha > 0$  y los vectores  $\mathbf{u}_a = (u_a^{(1)}, \dots, u_a^{(d)})$ ,  $\mathbf{u}_b = (u_b^{(1)}, \dots, u_b^{(d)})$  de la restricción de caja.

▷ Definir la función matricial

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z}} = \left( \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{(1)} \mid \dots \mid \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{(d)} \right) \in \mathbb{R}^{M \times d},$$

donde

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{(j)} = \left( P_{\mathbf{z},1}^{(j)}, \dots, P_{\mathbf{z},M}^{(j)} \right)$$

para cada  $j = 1, \dots, d$ . Inicializar cada componente  $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{(j)}$  con algún valor (por ejemplo  $\mathbf{0}_{M \times 1}$ ).

▷ Para cada  $j = 1, \dots, d$ , definir las funciones características

$$\boldsymbol{\chi}_a^{(j)} = \left( \chi_{a,1}^{(j)}, \dots, \chi_{a,M}^{(j)} \right) \quad ; \quad \boldsymbol{\chi}_b^{(j)} = \left( \chi_{b,1}^{(j)}, \dots, \chi_{b,M}^{(j)} \right)$$

e inicializar cada una por  $\mathbf{0}_{M \times 1}$ .

▷ Definir e inicializar los contadores:

$$\text{cont}^{(1)} = 1; \quad \dots \quad ; \quad \text{cont}^{(d)} = 1.$$

**Paso 1** Para cada  $j = 1, \dots, d$ :

Para cada  $k = 1, \dots, M$ ,

▷ Si  $-\alpha^{-1}P_{\mathbf{z},k}^{(j)} < u_a^{(j)}$ , fijar  $\chi_{a,k}^{(j)} = 1$ .

▷ Si  $-\alpha^{-1}P_{\mathbf{z},k}^{(j)} > u_b^{(j)}$ , fijar  $\chi_{b,k}^{(j)} = 1$ .

**Paso 2** Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(\mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + \mathcal{S}^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f} + \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_1(\mathcal{P}), \\ b(\mathbf{y}_h, q_h) + \mathcal{H}^{\text{st}}(\mathbf{y}_h, p_h, \mathbf{f} + \mathbf{u}_h; q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_0(\mathcal{P}), \\ a(\mathbf{z}_h, \boldsymbol{\xi}_h) - b(\boldsymbol{\xi}_h, r_h) + \mathcal{S}^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega; \boldsymbol{\xi}_h) &= (\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega, \boldsymbol{\xi}_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{\xi}_h \in \mathbf{V}_1(\mathcal{P}), \\ b(\mathbf{z}_h, \psi_h) + \mathcal{H}^{\text{ad}}(\mathbf{z}_h, r_h, \mathbf{y}_h - \mathbf{y}_\Omega; \psi_h) &= 0, \quad \forall \psi_h \in Q_0(\mathcal{P}), \end{array} \right.$$

$$\text{sueto a: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Para cada } j = 1, \dots, d \\ \text{Para cada } k = 1, \dots, M \\ (1 - \chi_{a,k}^{(j)} - \chi_{b,k}^{(j)})\alpha^{-1}\bar{P}_{\mathbf{z},k}^{(j)} + u_k^{(j)} = u_a^{(j)}\chi_{a,k}^{(j)} + u_b^{(j)}\chi_{b,k}^{(j)} \end{array} \right.$$

donde

$$\bar{P}_{\mathbf{z},k}^{(j)} = \sum_{l \in \mathcal{V}_{K_k}} \frac{1}{d+1} z_l^{(j)}$$

**Paso 3** Para cada componente  $j = 1, \dots, d$ :

- ▷ Definir las funciones características  $\bar{\chi}_a^{(j)}, \bar{\chi}_b^{(j)} \in \mathbb{R}^M$  e inicializar cada una en  $\mathbf{0}_{M \times 1}$ .
- ▷ Fijar los contadores  $\text{cont}^{(j)}$  en 0.

**Paso 4** Para cada  $j = 1, \dots, d$ :

- Para cada  $k = 1, \dots, M$ ,
- ▷ Si  $-\frac{1}{\alpha} \bar{P}_{\mathbf{z},k}^{(j)} < u_a^{(j)}$ , fijar  $\bar{\chi}_{a,k}^{(j)} = 1$ .
- ▷ Si  $-\frac{1}{\alpha} \bar{P}_{\mathbf{z},k}^{(j)} > u_b^{(j)}$ , fijar  $\bar{\chi}_{b,k}^{(j)} = 1$ .
- ▷  $\text{cont}_j = \text{cont}_j + \left| \bar{\chi}_{a,k}^{(j)} - \chi_{a,j}^{(i)} \right| + \left| \bar{\chi}_{b,k}^{(j)} - \chi_{b,k}^{(j)} \right|$ .

**Paso 5** Si  $\text{cont}^{(j)} \geq 1$ , para todo  $j = 1, \dots, d$ , fijar  $\chi_a^{(j)} = \bar{\chi}_a^{(j)}$  y  $\chi_b^{(j)} = \bar{\chi}_b^{(j)}$  y volver al **Paso 2**.

Sino, detener.

### 4.5.3. Algoritmo adaptativo de resolución

Al igual que en el capítulo de Stokes se desea estudiar el desempeño del estimador de error no computable, obtenido en la Sección 4.4.2.1. En vista de esto es que se hará uso de un algoritmo de resolución del sistema discreto (4.14), incorporando una componente de adaptatividad, basado en el estimador  $\Upsilon_{NC}$ , definido en (4.73).

En el Cuadro 4.1 se resume el procedimiento iterativo que permite calcular el estimador, junto con generar un refinamiento adaptativo de cada partición  $\mathcal{P}$  de  $\Omega$ .

### 4.5.4. Ejemplos numéricos

Al igual que en la Sección 3.6, para describir cada ejemplo se presentarán la solución exacta, junto con el parámetro  $\nu$  y los vectores reales  $\mathbf{u}_a$  y  $\mathbf{u}_b$  de la restricción de caja, lo cual permite obtener las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{y}_\Omega$ . En esta parte se tomará el parámetro  $\alpha$  con un valor fijo de 1.

**Ejemplo 1:** Fijando  $\nu = 1$  y tomando como solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x_1, x_2) = \mathbf{z}(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 (x_1 - 1)^2 (x_2 - 1) (2x_2 - 1) \\ -x_1 x_2^2 (x_1 - 1) (x_2 - 1)^2 (2x_1 - 1) \end{pmatrix}; \\ p(x_1, x_2) = r(x_1, x_2) &= x_1 x_2 (1 - x_1) (1 - x_2) - \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Los vectores  $\mathbf{u}_a$  y  $\mathbf{u}_b$  vienen dados por

$$\mathbf{u}_a = (-0, 2; -0, 3) \quad ; \quad \mathbf{u}_b = (0, 3; 0, 2)$$

<b>Algoritmo adaptativo de resolución</b>	
<b>1:</b>	Ingresar las funciones $\mathbf{f}, \mathbf{y}_\Omega \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , los parámetros positivos $\alpha, \nu > 0$ y los vectores $\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b \in \mathbf{R}^d$ de la restricción de caja. Fijar $i = 0$ y construir la malla $\mathcal{P}_0$ .
<b>2:</b>	Para la malla $\mathcal{P}_i$ , construir el esquema (4.14) y obtener la tupla $((\mathbf{y}_h, p_h), \mathbf{u}_h, (\mathbf{z}_h, r_h))$ mediante Active Set.
<b>3:</b>	Para cada elemento $K \in \mathcal{P}_i$ , <ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcular <math>\ \mathbf{R}_K^{\text{st}}\ _{\mathbf{L}^2(K)}</math> y <math>\ \mathbf{R}_K^{\text{ad}}\ _{\mathbf{L}^2(K)}</math> usando (4.21) - (4.22),</li> <li>- Calcular <math>\ \text{osc}_K^{\text{st}}\ _{\mathbf{L}^2(K)}</math> y <math>\ \text{osc}_K^{\text{ad}}\ _{\mathbf{L}^2(K)}</math> usando (4.21) - (4.22),</li> <li>- Para cada lado <math>\gamma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_I</math>, calcular <math>\ [\mathbf{J}]_\gamma^{\text{st}}\ _{\mathbf{L}^2(\gamma)}</math> y <math>\ [\mathbf{J}]_\gamma^{\text{ad}}\ _{\mathbf{L}^2(\gamma)}</math> usando (4.55),</li> <li>- Calcular <math>\eta_{\text{st},K}</math> y <math>\eta_{\text{ad},K}</math>, usando (4.70), y <math>\eta_{\text{ct},K}</math> usando (4.35). Finalmente calcular <math>\Upsilon_{NC,K}</math> usando el resultado del Teorema 4.73.</li> </ul>
<b>4:</b>	Marcar el elemento $K$ si $\Upsilon_{NC,K} \geq \frac{1}{2} \max_{T \in \mathcal{P}_i} \Upsilon_{NC,T}$ .
<b>5:</b>	Del paso 4 obtener la nueva malla.
<b>6:</b>	Fijar $i \leftarrow i + 1$ y volver al paso 2.

Tabla 4.1: Descripción del algoritmo de refinamiento adaptativo basado en el estimador  $\Upsilon_{NC}$ 

**Ejemplo 2:** Fijando  $\nu = 0,01$  y tomando como solución:

$$\mathbf{y}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 (x_1 - 1)^2 (x_2 - 1) (2x_2 - 1) \\ -x_1 x_2^2 (x_1 - 1) (x_2 - 1)^2 (2x_1 - 1) \end{pmatrix};$$

$$p(x_1, x_2) = r(x_1, x_2) = x_1 x_2 (1 - x_1) (1 - x_2) - \frac{1}{36};$$

$$\mathbf{z}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1) \frac{\left(x_1 + e^{\frac{x_1}{\nu}} - x_1 e^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)^2}{\left(e^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)^2} \\ -2x_2^2(x_2 - 1)^2 \left(x_1 + \frac{e^{\frac{x_1-1}{\nu}} - e^{\frac{-1}{\nu}}}{e^{\frac{-1}{\nu}} - 1}\right) \left(1 + \frac{e^{\frac{x_1-1}{\nu}}}{\nu \left(e^{\frac{-1}{\nu}} - 1\right)}\right) \end{pmatrix}.$$

Los vectores  $\mathbf{u}_a$  y  $\mathbf{u}_b$  vienen dados por

$$\mathbf{u}_a = (-0,005; -0,01) \quad ; \quad \mathbf{u}_b = (0,005; 0,005)$$

El código a utilizar corresponde a una extensión de aquel utilizado en la misma sección numérica de Stokes, bajo las mismas consideraciones para su implementación (en cuanto a la aproximación de las integrales y la resolución de sistemas lineales)

Para mostrar los resultados se presentarán los gráficos de convergencia de los errores asociados a cada variable (estado, estado adjunto y control), junto con la convergencia de sus respectivos estimadores.

Para las variables de estado y adjuntas se usará la norma de la energía (tomando  $\rho = \beta$  y  $\beta = 0,38$ ) para medir el error, mientras que para el control se usará la norma en  $L^2$  vectorial. También se exhibirá la convergencia del error total, mediante la norma descrita en (4.37), junto con la convergencia del TNCE. Cada convergencia se medirá en función del número de grados de libertad, que en este caso vendrá dado por  $\text{Ndof} = 2(2 \dim(\mathbf{V}_1(\mathcal{P})) + \dim(Q_0(\mathcal{P})) + 1) + 2 \dim(Q_0(\mathcal{P}))$ .

Para mostrar los resultados se presentarán los gráficos de convergencia del error, en norma de la energía (tomando  $\rho = \beta$  y  $\beta = 0,38$ ), para las variables de estado y adjuntas, junto con la convergencia de sus respectivos estimadores  $\eta_{\text{st}}$  y  $\eta_{\text{ad}}$ . Para la variable de control se mostrará la convergencia de la norma en  $L^2$  del error y de su estimador  $\eta_{\text{ct}}$  asociado. Por último se mostrará la convergencia del error total  $E$ , mediante la norma descrita en (4.37), junto con la convergencia del TNCE.

Para el ejemplo 1 se observa que la convergencia de cada error posee un orden cercano a 0,5 (Figura 4.1), y que el mallado adaptativo se asemeja a un refinamiento uniforme (Figura 4.2).

Para el ejemplo 2, en cambio, se observa que las variables de estado y la variable de control no poseen un decaimiento notorio en norma y estimador, sino después de los  $10^4$  grados de libertad (Ver Figura 4.3), donde comienzan a converger con orden cercano a 0,5. Lo anterior es más complicado de ver para el caso de la variable de control. En ambos casos se observa que el mayor peso en el error total y el estimador viene dado por las variables de estado adjunto, donde se presenta el fenómeno de capa límite. Por último se observa que el refinamiento adaptativo es acorde con lo modelado por dicho fenómeno, dado que sólo se refina hacia un lado del cuadrado (Ver Figura 4.4). Todo lo anterior permite concluir que el algoritmo adaptativo de resolución posee un desempeño aceptable para este tipo de situaciones. Un último aspecto a mencionar es respecto al desempeño de cada esquema estabilizado. Se aprecia que el esquema RELP entrega, significativamente, menos error para las variables de estado y adjunta en el ejemplo 2, tanto para el estado como para el estado adjunto. Lo anterior permite inferir que este esquema, para este caso particular, posee un mejor desempeño que el esquema LPS.

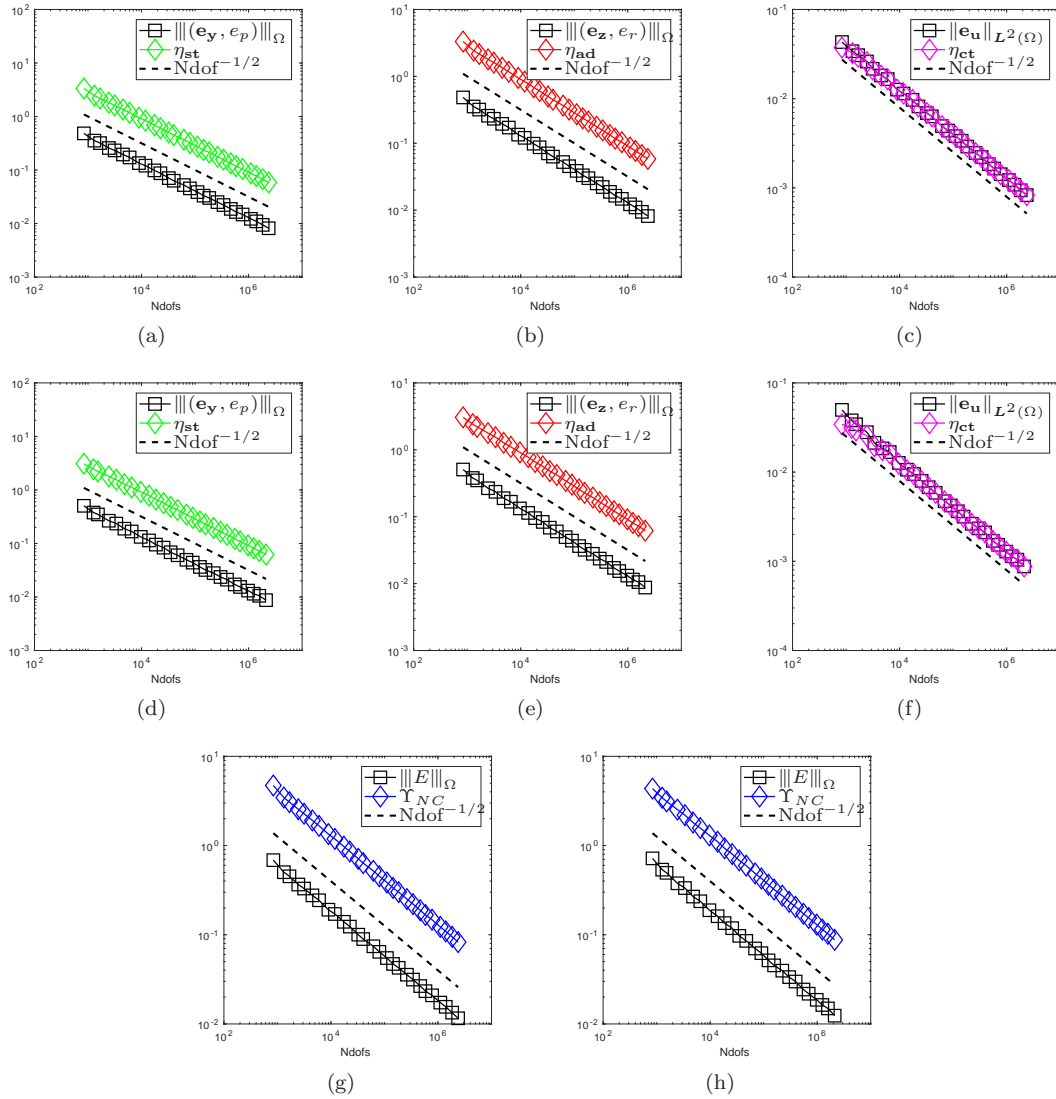


Figura 4.1: Convergencia del ejemplo “burbuja - burbuja”, con el esquema LPS, de (a) el estado, (b) el estado adjunto, (c) el control y (g) la tupla completa, y con el esquema RELP de (d) el estado, (e) el estado adjunto, (f) el control y (h) la tupla completa.

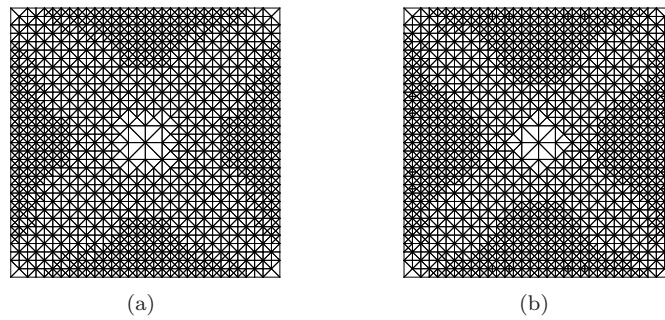


Figura 4.2: Malla obtenida después de (a) 10 iteraciones con el esquema LPS y (b) 10 iteraciones con el esquema RELP

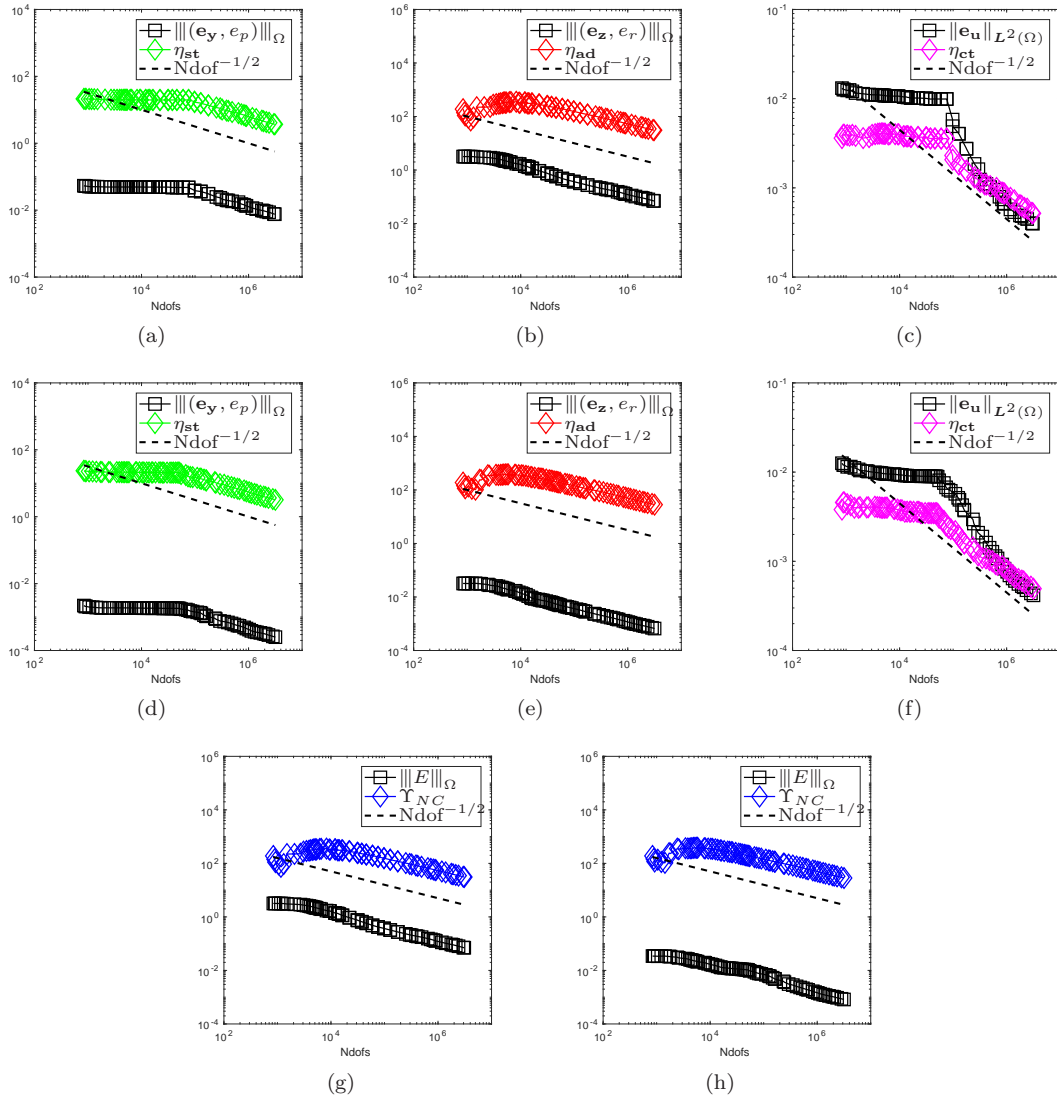


Figura 4.3: Convergencia del ejemplo “burbuja - burbuja”, con el esquema LPS, de (a) el estado, (b) el estado adjunto, (c) el control y (g) la tupla completa, y con el esquema RELP de (d) el estado, (e) el estado adjunto, (f) el control y (h) la tupla completa.

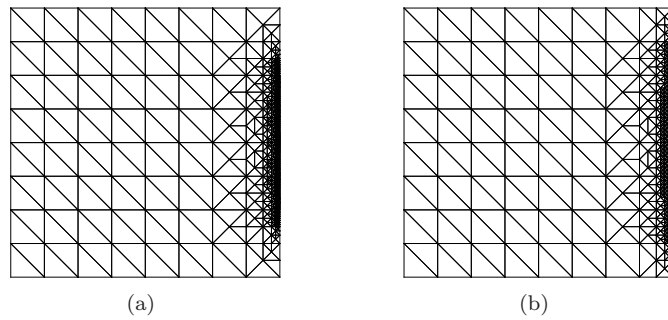


Figura 4.4: Malla obtenida después de (a) 30 iteraciones con el esquema LPS y (b) 30 iteraciones con el esquema RELP

## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se obtuvieron dos tipos de estimador de error, uno caracter totalmente explícito y otro conformado por constantes desconocidas, para el problema de Stokes. En base al análisis de cada estimador fue posible llevar a cabo, posteriormente, nuestro objetivo principal consistente en obtener estimadores de las mismas características para el problema de control óptimo. En la construcción resultó ser de gran importancia realizar primeramente el estudio del problema de Stokes, junto con sus dos formulaciones débiles y el análisis de error a posteriori, ya que con esto fue posible replicar, de manera paralela, los resultados obtenidos. Un aspecto destacable es el estudio realizado sobre dos tipos de esquemas: inf - sup estables y estabilizados. Aún cuando el segundo requieren supuestos adicionales, para este trabajo resultó ser un elemento crucial en la implementación numérica, esto en vista del gran tamaño que posee el sistema de optimalidad obtenido.

También es importante destacar que, tanto en Stokes como en control óptimo, el algoritmo adaptativo posee un buen desempeño en la resolución numérica. Más aún, resulta ser muy práctico en la medición del error de discretización cuando no se dispone de información alguna acerca de la solución real del problema.

Dentro de una gran variedad de elementos a desarrollar en estudios posteriores, y que vayan en línea con lo desarrollado en esta memoria, podemos mencionar:

- Si bien el aspecto numérico en los dos problemas fue realizado mediante los estimadores no computables, en vista de los resultados obtenidos es posible inferir que el desempeño que este realizaría podría llegar a ser bastante similar. En este caso se esperaría que la similitud entre el estimador computable y el error de discretización sean más parecidos en cuanto a la tasa de convergencia, y que también posean un mayor grado de proximidad que aquel obtenido con el estimador no computable.

No obstante no deja de ser un punto importante a desarrollar en un trabajo futuro. La razón

principal es que el estimador computable del control óptimo posee dependencia del parámetro  $\alpha$ , lo que permitiría a su vez analizar el caso en que dicho parámetro es considerablemente pequeño, lo cual es de interés en múltiples ramas de la matemática, como lo son la teoría de control y problemas inversos.

- Como se mencionó en el capítulo de introducción, en la literatura existe una gran variedad de esquemas estabilizados. En este estudio en particular se consideraron tan solo 2 esquemas con distinto grado de complejidad. Más allá de llevar a cabo el análisis sobre otro esquema de elementos finitos (inf - sup estable o estabilizado) sería más interesante aún mencionar que ventajas posee cada uno de estos y bajo que contexto sería factible implementarlos.

# Bibliografía

- [1] Mark Ainsworth and J. Tinsley Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000.
- [2] Alejandro Allendes, Francisco Durán, and Richard Rankin. Error estimation for low-order adaptive finite element approximations for fluid flow problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 36(4):1715–1747, 2016.
- [3] Patrick R. Amestoy, Iain S. Duff, Jean-Yves L’Excellent, and Jacko Koster. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23(1):15–41, 2001.
- [4] Patrick R. Amestoy, Abdou Guermouche, Jean-Yves L’Excellent, and Stéphane Pralet. Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Comput.*, 32(2):136–156, 2006.
- [5] Rodolfo Araya, Gabriel R. Barrenechea, and Abner Poza. An adaptive stabilized finite element method for the generalized Stokes problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 214(2):457–479, 2008.
- [6] Rodolfo Araya, Gabriel R. Barrenechea, and Frédéric Valentin. A stabilized finite-element method for the Stokes problem including element and edge residuals. *IMA J. Numer. Anal.*, 27(1):172–197, 2007.
- [7] Kendall Atkinson and Weimin Han. *Theoretical numerical analysis*, volume 39 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001. A functional analysis framework.
- [8] Gabriel R. Barrenechea and Frédéric Valentin. Beyond pressure stabilization: a low-order local projection method for the Oseen equation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 86(7):801–815, 2011.
- [9] M. Bebendorf. A note on the Poincaré inequality for convex domains. *Z. Anal. Anwendungen*, 22(4):751–756, 2003.

- [10] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [11] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [12] E. Dari, R. Duran, C. Padra, and V. Vampa. A posteriori error estimators for nonconforming finite element methods. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 30(4):385–400, 1996.
- [13] J. C. De Los Reyes. Primal-dual active set method for control constrained optimal control of the Stokes equations. *Optim. Methods Softw.*, 21(2):267–293, 2006.
- [14] Juan Carlos De los Reyes. *Numerical PDE-constrained optimization*. Springer Briefs in Optimization. Springer, Cham, 2015.
- [15] W. Dörfler and M. Ainsworth. Reliable a posteriori error control for nonconformal finite element approximation of Stokes flow. *Math. Comp.*, 74(252):1599–1619 (electronic), 2005.
- [16] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [17] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [18] Kazufumi Ito and Karl Kunisch. Augmented Lagrangian methods for nonsmooth, convex optimization in Hilbert spaces. *Nonlinear Anal.*, 41(5-6, Ser. A: Theory Methods):591–616, 2000.
- [19] Kazufumi Ito and Karl Kunisch. The primal-dual active set method for nonlinear optimal control problems with bilateral constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 43(1):357–376, 2004.
- [20] Kristina Kohls, Arnd Rösch, and Kunibert G. Siebert. A posteriori error analysis of optimal control problems with control constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 52(3):1832–1861, 2014.
- [21] David G. Luenberger. *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.
- [22] L. E. Payne and H. F. Weinberger. An optimal Poincaré inequality for convex domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 5:286–292 (1960), 1960.
- [23] Hans-Görg Roos, Martin Stynes, and Lutz Tobiska. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations*, volume 24 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008. Convection-diffusion-reaction and flow problems.

- [24] Arnd Rösch and Boris Vexler. Optimal control of the Stokes equations: a priori error analysis for finite element discretization with postprocessing. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(5):1903–1920, 2006.
- [25] Sandro Salsa. *Partial differential equations in action*. Universitext. Springer-Verlag Italia, Milan, 2008. From modelling to theory.
- [26] G. Stoyan. Towards discrete Velté decompositions and narrow bounds for inf-sup constants. *Comput. Math. Appl.*, 38(7-8):243–261, 1999.
- [27] L. Tobiska and R. Verfürth. Robust *a posteriori* error estimates for stabilized finite element methods. *IMA J. Numer. Anal.*, 35(4):1652–1671, 2015.
- [28] Fredi Tröltzsch. *Optimal control of partial differential equations*, volume 112 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. Theory, methods and applications, Translated from the 2005 German original by Jürgen Sprekels.
- [29] R. Verfürth. A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. In *Proceedings of the Fifth International Congress on Computational and Applied Mathematics (Leuven, 1992)*, volume 50, pages 67–83, 1994.