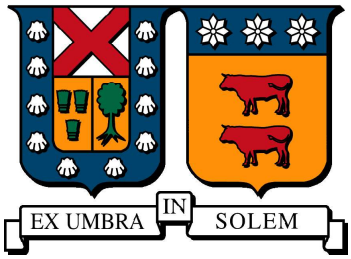
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO-CHILE



IMPLEMENTACIÓN Y VALIDACIÓN DE TÉCNICA DOPPLER-VECTORIAL EN ULTRASONIDO

Cristobal Gallegos J.

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

PROFESOR GUÍA: Dr. Joaquín Mura Mardones
PROFESOR CORREFERENTE 1: Dr. Julio Sotelo
PROFESOR CORREFERENTE 2: Ing. Gabriel Vásquez

agosto 2025

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título; ☐ Tesis de Postgrado;

Título del trabajo: Implementación y Validación de Técnica Doppler Vectorial en Ultrasonido

Nombre del candidato(a): Cristóbal Ignacio Gallegos Jaure

Carrera / Grado: Ingeniería Civil Mecánica

Campus: Santiago San Joaquin ; **Departamento**: Ingeniería Mecánica

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Joaquín Mura, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

☒ El trabajo **NO contiene información que amerite confidencialidad** y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

☐ 6 meses; ☐ 12 meses; ☐ 2 años; ☐ 3 años; ☐ 5 años; ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 18/08/2025 ; **Firma:** 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 18/08/2025 ; **Firma:** 

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mis padres y hermanos, quienes siempre tuvieron palabras de apoyo durante este camino y a quienes les debo gran parte de lo que soy hoy. A mi pareja, por levantarme el ánimo durante gran parte de este proceso. A mis amigos y compañeros, quienes me hicieron reír y con quienes he compartido la etapa más importante de mi vida (hasta ahora). Si comienzo a nombrar uno por uno, serían muchas páginas, pero con que se sientan incluidos ya me doy por satisfecho.

También, a todo aquel que me ha apoyado durante este camino, ya sea con conversaciones difíciles, palabras de apoyo, o con el solo hecho de desearme éxitos.

Además, el autor de este trabajo agradece a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo ANID por financiamiento parcial mediante el proyecto Fondecyt Regular #1230864.

Resumen

Las técnicas de Doppler-color y Doppler-espectral son herramientas comúnmente empleadas en ultrasonido para examinar el flujo cardiovascular de forma no invasiva. En la actualidad, ha surgido una nueva modalidad conocida como Doppler vectorial [8], la cual es capaz de calcular las componentes de velocidad del flujo sanguíneo para una región de interés.

El presente trabajo implementó la técnica Doppler vectorial en el equipo Verasonics Vantage 128, disponible en el Laboratorio de Ultrasonido Cuantitativo USM. La implementación consiste en un código desarrollado en el entorno de MATLAB, capaz de post procesar las señales adquiridas por el equipo mencionado, utilizando una mezcla de funciones presentes en la librería MUST y otras desarrolladas de manera propia.

Se validó el esquema propuesto con tres experimentos: uno con datos adquiridos de un fantoma sintético rotatorio, otro experimento en el cual se utilizó un fantoma cilíndrico, a través del cual se hizo pasar flujo con caudal controlado mediante la bomba PhysioPulse 100, también disponible en el Laboratorio de Ultrasonido Cuantitativo, y un tercer experimento in vivo en el cual se analizó el flujo sanguíneo de la carótida de un adulto sano.

Los resultados indican que el esquema propuesto es capaz de presentar de forma correcta la dirección y magnitud de la velocidad del flujo en los tres experimentos. Para el primer caso se obtuvo un error cuadrático medio total de 4.9 cm/s, equivalente a un 4 % de la velocidad máxima esperada como referencia. En el caso del segundo experimento se obtuvo velocidades 10-15 cm/s y 20-34 cm/s, las cuales son cercanas a los valores esperados de 18.34 cm/s y 31.28 cm/s respectivamente. En el último experimento, se obtuvo una velocidad en la carótida de entre 70-90 cm/s, la cual se encuentra dentro del rango normal de la velocidad sistólica máxima de un adulto sano, correspondiente a entre 70-100 cm/s [2].

Abstract

Color-Doppler and spectral-Doppler techniques are commonly used tools in ultrasound to noninvasively assess cardiovascular flow. Recently, a new modality known as vector Doppler has emerged [8], which is capable of calculating the velocity components of blood flow in a region of interest.

This work implemented the vector Doppler technique on the Verasonics Vantage 128 system, available at the USM Quantitative Ultrasound Laboratory. The implementation consists of a code developed in the MATLAB environment, capable of post-processing the signals acquired by the aforementioned system, using a combination of functions from the MUST library and others developed in-house.

The proposed scheme was validated with three experiments: one with data acquired from a rotating synthetic phantom, another experiment involving a cylindrical phantom through which controlled flow was introduced using the PhysioPulse 100 pump (also available at the Quantitative Ultrasound Laboratory), and a third in vivo experiment in which blood flow in the carotid artery of a healthy adult was analyzed.

The results indicate that the proposed scheme is capable of correctly displaying both the direction and magnitude of the flow velocity in all three experiments. In the first case, a total root-mean-square error of 4.9 cm/s was obtained, equivalent to 4 % of the maximum expected reference velocity. In the second experiment, measured velocities ranged from 10–15 cm/s and 20–34 cm/s, which are close to the expected values of 18.34 cm/s and 31.28 cm/s, respectively. In the final experiment, the velocity in the carotid artery ranged from 70–90 cm/s, which falls within the normal range for peak systolic velocity in a healthy adult, corresponding to 70–100 cm/s [2].

Índice general

1. Marco Teórico 2
   - 1.1. Imagen de ultrasonido . . . 2
     - 1.1.1. Parámetros típicos en el Ultrasonido Diagnóstico . . . 3
   - 1.2. Efecto Doppler . . . 4
   - 1.3. Aplicación del efecto Doppler en Ultrasonido . . . 4
   - 1.4. Doppler vectorial . . . 6
     - 1.4.1. Formulación física . . . 7
   - 1.5. Algunas nociones de procesamiento de señales . . . 9
     - 1.5.1. Señales RF . . . 9
     - 1.5.2. Procesamiento de señales en su banda de paso . . . 9
     - 1.5.3. Demodulación IQ . . . 10
     - 1.5.4. Beamforming . . . 12
   - 1.6. Matlab Ultrasound Toolbox . . . 14
   - 1.7. Equipo Verasonics Vantage . . . 15
   - 1.8. PhysioPulse 100 Flow System . . . 15

2. Métodos 16
   - 2.1. Esquema . . . 16
   - 2.2. Toma de datos . . . 17
     - 2.2.1. Almacenamiento de la información . . . 17
     - 2.2.2. Código de Clasificación . . . 19
   - 2.3. Demodulación . . . 20
   - 2.4. Beamforming . . . 22
     - 2.4.1. Generación de la región de interés . . . 22
     - 2.4.2. Función de Beamforming . . . 22
   - 2.5. Filtro de pared . . . 23

2.6. Correlación cruzada 24
2.7. Obtención de la velocidad por mínimos cuadrados 25
2.8. Ejecución del código 26

3. Mediciones y resultados 28
3.1. Evaluación del desempeño del código con respecto a un experimento validado 28
3.2. Evaluación de un flujo constante a través de un fantoma 30
3.2.1. Recomposición con región de 5x5 32
3.2.2. Recomposición con región de 11x11. 33
3.2.3. Campos vectoriales obtenidos. 34
3.3. Evaluación del código con adquisiciones in vivo 35

4. Análisis 38
4.1. Fantoma rotatorio 38
4.2. Flujo constante 38
4.3. Evaluación del código con adquisiciones in vivo 43

5. Discusión 46
5.1. Uso de MATLAB como plataforma de codificación 46
5.2. Uso de MUST 46
5.3. Codificación en base a funciones 47
5.4. Métodos de validación utilizados 47

6. Conclusión 49

A. Demostración de la expresión 1.6 51

Índice de figuras

1.1. Imagen en modo B de un fantoma rotatorio [4]. 3
1.2. Efecto Doppler 4
1.3. Interacción entre el flujo sanguíneo y la señal emitida. [7] 5
1.4. Imagen de Doppler Color. 6
1.5. Esquema de downmixing [3] 11
1.6. Esquema de funcionamiento de la técnica DAS [6] 13
1.7. Esquema de operación matricial para obtener la imagen. [6] 14

2.1. Diagrama de flujo del programa. 16
2.2. Variables de la estructura preSet. 17
2.3. Comparación entre la señal recibida para un piezoeléctrico. La figura superior muestra la señal sin ordenar, mientras que la figura inferior presenta la señal recibida en una adquisición específica. Notar la diferencia en el largo de la señal (eje x). 19
2.4. Respuesta al impulso del filtro mencionado, para una frecuencia central de 6.25 MHz y frecuencia de muestro de 12.5 MHz. 21
2.5. Filtrado de la señal recibida por un piezoeléctrico. La imagen superior presenta la señal cruda, mientras que la inferior presenta la señal luego de aplicar un filtrado de fase cero. Se puede apreciar que la atenuación comienza a partir de los 3 MHz. 21
2.6. Flujo de ejecución de funciones. 27

3.1. Resultados de la recomposición con 2 ángulos a la izquierda y 7 ángulos a la derecha. 29
3.2. Residuo. 29
3.3. Montaje experimental, posición del transductor. 30
3.4. Montaje experimental, conexiones de los equipos involucrados. 31

3.5. Resultados para recomposición de 5x5. La imagen superior presenta los resultados para un caudal de 11.62 ml/s y la imagen inferior para un caudal de 19.88 ml/s. 33
3.6. Recomposición con región de 11x11. La imagen superior presenta los resultados para un caudal de 11.62 ml/s y la imagen inferior para un caudal de 19.88 ml/s 34
3.7. Campo vectorial obtenido para el caudal de 11.62 ml/s. 35
3.8. Campo vectorial obtenido para el caudal de 19.88 ml/s. 35
3.9. Figura Doppler color para el cuadro 11. 36
3.10. Comparativa entre cuadro 11 para Doppler color y vectorial. 37

4.1. Secciones del fantoma utilizadas en el análisis, para caudal de 11.62 ml/s. 39
4.2. Velocidad promedio a lo largo del fantoma, para caudal de 11.62 ml/s. A la izquierda, se presentan las velocidades en el primer tercio, en el centro el segundo tercio y a la derecha el último tercio. Se grafica además el perfil parabólico esperado, según la Ecuación 4.2. 40
4.3. Secciones del fantoma utilizadas en el análisis, para caudal de 19.88 ml/s. 40
4.4. Velocidad promedio a lo largo del fantoma, para caudal de 19.88 ml/s. A la izquierda, se presentan las velocidades en el primer tercio, en el centro el segundo tercio y a la derecha el último tercio. Se grafica además el perfil parabólico esperado, según la Ecuación 4.2. 41
4.5. Comparación entre recomposición de 5x5 pixeles (imagen superior) y 11x11 pixeles (imagen inferior), caudal de 11.62 ml/s. 42
4.6. Comparación entre recomposición de 5x5 pixeles (imagen superior) y 11x11 pixeles (imagen inferior), caudal de 19.88 ml/s. 43
4.7. Secciones de la carótida utilizadas en el análisis. 44
4.8. Magnitud de la velocidad en la región de interés. La imagen de la izquierda presenta el primer tercio, la imagen central el segundo tercio y la imagen derecha el último tercio. 44

Índice de tablas

3.1. Parámetros utilizados en la aquisición de dato del primer experimento . 28
3.2. Resultados comparativa 30
3.3. Parámetros utilizados en la toma de datos del segundo experimento. . . 31
3.4. Parámetros utilizados en la toma de datos in vivo 36

4.1. Caudales y velocidades máximas estimadas 39

Índice de algoritmos

1. Demodulación y filtrado de datos RF 20
2. Generación de la grilla espacial de reconstrucción 22
3. Beamforming usando matrices DAS 23
4. Filtrado de señales reconstruidas 24
5. Estimación local de autocorrelación entre adquisiciones consecutivas . . 25
6. Estimación de velocidad vectorial a partir de mapas de autocorrelación . 26

Objetivos

El objetivo general de la presente memoria es desarrollar un código capaz de post procesar señales adquiridas mediante equipos de ultrasonido Doppler, aplicando un esquema de Doppler vectorial.

Los objetivos específicos son:

1. Implementar el método de Doppler-Vectorial en el equipo Verasonics Vantage-128 del Laboratorio de Ultrasonido Cuantitativo de la Universidad Técnica Federico Santa María.

2. Evaluar el desempeño del método en modelos fabricados en el laboratorio, sometido a condiciones de flujo fisiológicas.

Capítulo 1

Marco Teórico

1.1. Imagen de ultrasonido

El ultrasonido es una técnica no invasiva que utiliza ondas mecánicas de alta frecuencia (del orden de los MHz) para producir imágenes. Estas ondas son emitidas por un transductor que en su interior cuenta con piezoeléctricos, los cuales son elementos capaces de transformar señales eléctricas en ondas mecánicas y viceversa. La onda emitida por el transductor viaja hacia el interior del cuerpo o elemento que se esté analizando e interactúa con las distintas estructuras internas, las cuales reflejan y transmiten parte de la señal sonora. Es esta señal reflejada la que llega nuevamente al transductor y es procesada para lograr la formación de imágenes.

En este contexto, las imágenes que son formadas a partir de los datos recibidos por el transductor y ordenados, de forma coherente, en base a los tiempos de envío y recepción de la señal se conocen como imágenes en modo B (B-mode). Un ejemplo de este tipo de imágenes se puede ver en la Figura 1.1

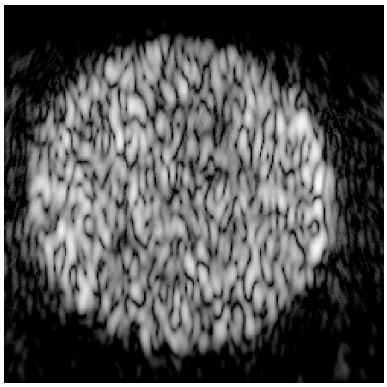


Figura 1.1: Imagen en modo B de un fantoma rotatorio [4].

1.1.1. Parámetros típicos en el Ultrasonido Diagnóstico

Al trabajar con equipos de ultrasonido médico, se deben manejar conceptos relacionados con el funcionamiento de los equipos. Algunos de los parámetros o variables más típicos utilizados al trabajar en esta área son:

1. Frecuencia central: corresponde a la frecuencia de la señal que es emitida por el transductor.

2. Frecuencia de muestreo: es la frecuencia a la cual se muestrea (adquiere) información de la señal reflejada. Se recomienda que sea al menos el doble de la frecuencia central, con el objetivo de que la información recibida sea fidedigna, de acuerdo con el teorema de Nyquist [5].

3. Frecuencia de repetición de pulsos (PRF): corresponde a un parámetro propio del ultrasonido. La señal emitida al tejido o fantoma a analizar se envía en pulsos. El PRF representa la frecuencia a la cual se envían estos pulsos. Es el recíproco del periodo de repeteición de pulsos (PRP), el cual es el tiempo entre adquisiciones Doppler.

4. Ancho de banda: es el intervalo de frecuencias en el cual opera un transductor de ultrasonido.

5. Kerf: corresponde al espacio que hay entre dos piezoeléctricos de un transductor.

6. Pitch: es la distancia entre los centros de los piezoeléctricos de un transductor.

1.2. Efecto Doppler

El Efecto Doppler es un fenómeno físico en el cual, debido al movimiento relativo de un objeto con respecto a otro, se produce un cambio en la frecuencia percibida de los frentes de onda emitidos por cualquiera de estos cuerpos. Este cambio de frecuencia depende de la velocidad del sonido en el medio por el cual se propagan las ondas, la velocidad relativa del cuerpo emisor con respecto al receptor y la frecuencia original de la onda emitida (ver Figura 1.2).

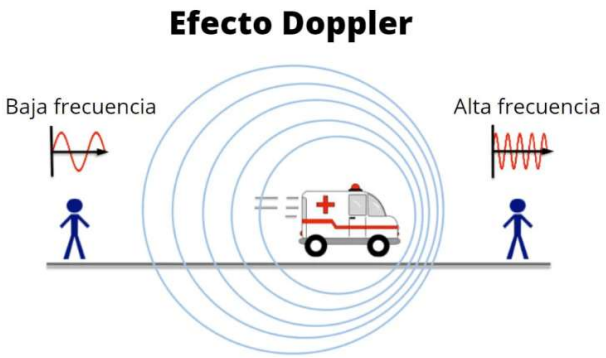


Figura 1.2: Efecto Doppler

Particularmente, si el cuerpo receptor se desplaza con velocidad $\vec{C}_s$, formando un ángulo θ con respecto a la dirección del frente de ondas emitido, la ecuación que rige el cambio de frecuencia Δf es

1.1.

$$\Delta f = f_0 \frac{C_s cos(\theta)}{C_0} \tag{1.1}$$

donde C_0 es la velocidad de propagación de la onda en el medio. Es importante destacar que, si el ángulo θ es 90° (la velocidad del cuerpo es perpendicular a la dirección del frente de ondas) el receptor no percibirá un cambio en la frecuencia de la señal.

1.3. Aplicación del efecto Doppler en Ultrasonido

El fenómeno anterior ha sido utilizado en el ultrasonido para determinar la velocidad del flujo sanguíneo. Las células sanguíneas (específicamente, los glóbulos rojos) son capaces de interactuar con la señal de ultrasonido emitida por el transductor, reflejando parte de esta. El equipo recibe esta señal reflejada, y luego de procesarla se

puede determinar la frecuencia de la misma. Si esta frecuencia es distinta a la de la señal emitida, quiere decir que hay implícitamente un desplazamiento de algún tejido u elemento, y su velocidad de desplazamiento se puede obtener mediante la ecuación 1.1.

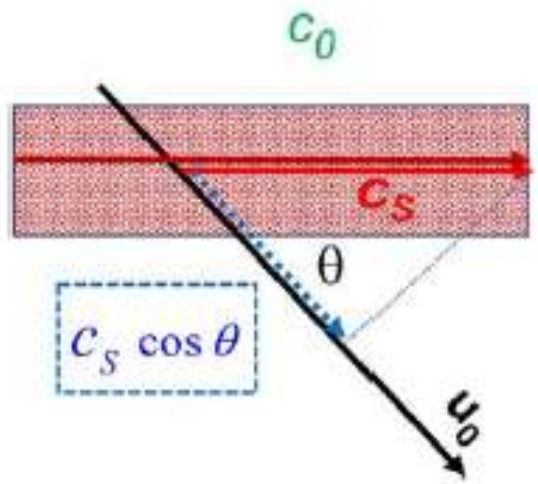


Figura 1.3: Interacción entre el flujo sanguíneo y la señal emitida. [7]

Con el objetivo de generar un ángulo distinto a 90° entre la velocidad del flujo y la onda emitida, se suele emitir la señal con una dirección distinta a 0° con respecto al eje vertical (ver Figura 1.3). Este ángulo puede obtenerse de dos maneras distintas:

- Modificación del ángulo de transmisión (Tx): cada piezoeléctrico emite una onda esférica al activarse, por lo cual, si se activan en secuencia con un desfase de tiempo controlado se puede generar una onda plana con una dirección definida mediante la superposición constructiva y destructiva de los frentes de todos los piezoeléctricos.

- Modificación del ángulo de recepción (Rx): esta vez, el desfase en vez de aplicarse al emitir la señal, se aplica al recomponerla.

Existen distintas maneras de mostrar la velocidad en la pantalla o ”display”, y por lo mismo existen distintos tipos de modalidades Doppler actualmente disponibles en el equipo Verasonics:

1. Doppler color: la manera de visualizar la velocidad del flujo es mediante colores, donde el color rojo más intenso indica que el flujo se está acercando al transductor

y mientras el azul es más intenso indica que se está alejando del mismo. La Figura 1.4 presenta una imagen de Doppler color.

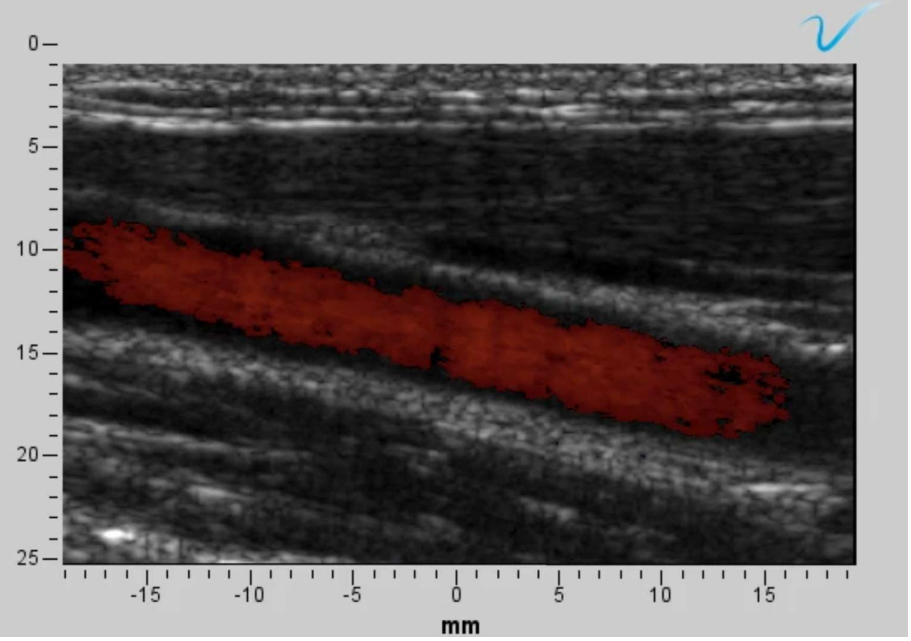


Figura 1.4: Imagen de Doppler Color.

2. Power Doppler: en esta modalidad no se presenta la dirección, sino que se centra en la magnitud de flujo presente en la región analizada.

1.4. Doppler vectorial

Una de las grandes desventajas de ambas modalidades anteriores es que presentan una alta variabilidad, tanto por su dependencia del ángulo utilizado, como la posibilidad de errores humanos [9]. Sin embargo, si se logra obtener información de la región insonorizada con distintos ángulos entre la dirección del frente de ondas y la velocidad real del flujo, es posible disminuir esta incertidumbre y tener información más fiable. Bajo este principio surge la modalidad de Doppler vectorial, una de las técnicas más recientes, la cual permite obtener, mediante la utilización de dos o más ángulos de insonorización distintos, las componentes verticales y horizontales de la velocidad en distintas regiones de estudio.

1.4.1. Formulación física

Estudios recientes [8], han demostrado que se pueden realizar estimaciones de flujo mediante Doppler en toda una región mediante la integración de tres principios:

1. Esquemas de transmisión no focalizados: se refiere a la emisión de una onda plana o esférica que permite la insonación de toda la imagen en un único evento de transmisión.

2. Beamforming: se reconstruye la señal para cada posición del espacio (píxel) utilizando las señales captadas por los piezoeléctricos del transductor.

3. Muestreo a través de múltiples eventos de transmisión: se realiza una sucesiva transmisión de señales con cierta frecuencia de adquisición para distintos ángulos, para luego aplicar principios de triangulación y obtener las componentes del flujo en dos ejes. Los ángulos pueden ser de transmisión (Tx) y/o de recepción (Rx).

Suponiendo una configuración con M ángulos Tx y N ángulos Rx, definidos con respecto a la normal a la superficie del transductor, se pueden conformar M x N pares de ángulos distintos para el cálculo de la velocidad.

Considerando que los M ángulos Tx deben realizarse en eventos de transmisión separados, y por tanto, realizarse intercaladamente, el periodo entre adquisiciones para un mismo ángulo será mayor que el periodo de repetición de pulsos (PRP), y por lo tanto, la frecuencia de adquisición de datos máxima f_{DAQ} será menor que la frecuencia de repetición de pulsos (PRF). La fórmula de f_{DAQ} se presenta en la Ecuación 1.2.

$$f_{DAQ} = \frac{f_{PRF}}{M} \tag{1.2}$$

Otra opción es adquirir la información en forma de ”bloques”, es decir, realizar un número de adquisiciones con un primer ángulo de transmisión, luego volver a adquirir los datos con un segundo ángulo, y así hasta completar la totalidad de ángulos Tx definidos. Dado que esto está fuera del alcance de este documento, no se realizará una comparativa entre las dos maneras de adquirir la información (manera alterna o en bloque).

Para facilitar la estimación de la velocidad, se suele determinar para cada par de ángulos Tx-Rx los valores de la frecuencia de corrimiento Doppler para cada píxel

de la región de estudio. Esto se realiza mediante correlación cruzada, cuyo principio consiste en comparar la señal de dos adquisiciones separadas por un instante de $\frac{1}{f_{DAQ}}$ para un mismo par de ángulos. El valor de la correlación se calcula con la Ecuación 1.3.

$$R_{mn}(1) = \frac{1}{P-1} \sum x^*_{mn}(i) x_{mn}(i+1) \tag{1.3}$$

A partir de esta correlación, se puede calcular la frecuencia Doppler con la Ecuación 1.4

$$f_{mn} = \frac{f_{DAQ}}{2\pi} arg(R_{mn}(1)) \tag{1.4}$$

Para cada par de ángulos Tx-Rx, la velocidad del flujo puede calcularse como muestra la Ecuación 1.5

$$f_{mn} = \frac{vcos(\theta_m - \alpha) + vcos(\phi_n - \alpha)}{c_0} f_0 \tag{1.5}$$

donde θ_m es el ángulo Tx utilizado, ϕ_n es el ángulo Rx seleccionado, α es el ángulo de la dirección del flujo sanguíneo con respecto al eje normal a la superficie del transductor y v es la magnitud de la velocidad del flujo. Esta expresión puede ser trabajada (detalle en Apéndice 1), obteniéndose la Ecuación 1.6

$$v_z(cos\theta_m + cos\phi_n) + v_x(sin\theta_m + sin\phi_n) = \frac{c_0}{f_0} f_{mn} \tag{1.6}$$

donde las incógnitas en este caso son v_z (componente vertical de la velocidad) y v_x (componente horizontal de la velocidad). Ambas ecuaciones requieren al menos dos pares de ángulos Tx-Rx para ser resueltas. Sin embargo, se debe tener en cuenta que los errores en cualquiera de las dos mediciones afectarán la calidad de la solución. Para subsanar esto, se puede trabajar con tres o más pares de ángulos Tx-Rx, para luego resolverlo como un problema de mínimos cuadrados. El sistema propuesto se presenta en la Ecuación 1.7.

$$\begin{bmatrix} cos\theta_1 + cos\phi_1 & sin\theta_1 + sin\phi_1 \\ ... & ... \\ cos\theta_M + cos\phi_N & sin\theta_M + sin\phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_z \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ ... \\ u_{MN} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

y puede ser resuelto mediante mínimos cuadrados en norma 2 según la Ecuación 1.8.

$$v = \begin{bmatrix} v_z \\ v_x \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T u \tag{1.8}$$

obteniéndose las componentes v_z y v_x de la velocidad del flujo en cada pixel de estudio. Notar que $(A^T A)^{-1} A^T$ corresponde a la pseudo inversa de Moore-Penrose de la matriz de ángulos Tx-Rx A.

1.5. Algunas nociones de procesamiento de señales

Si bien la piedra angular de las estimaciones de velocidad en flujo sanguíneo es el efecto Doppler, antes de poder llegar a este cálculo se deben procesar las señales recibidas por el transductor, de manera que sea posible realizar todo el cálculo posterior. En este inciso se explicarán, de manera general, distintos procedimientos y fórmulas básicas asociadas al procesamiento de señales [3], en beneficio del lector no especialista en esta área.

1.5.1. Señales RF

El término señal RF hace referencia a las señales que contienen información en el dominio del tiempo en una banda (rango) de frecuencias utilizada para comunicación por radio. La industria del ultrasonido adoptó este término, el cual se utiliza para referirse a datos sin procesar, donde la información en frecuencia está intacta (raw data).

Estas señales son posteriormente procesadas para luego ser utilizadas de distintas maneras, como por ejemplo, en la formación de imágenes en modo B, o en la estimación de velocidades mediante el cambio en frecuencia con respecto a la señal original emitida por el transductor (efecto Doppler).

1.5.2. Procesamiento de señales en su banda de paso

El transductor emite una señal con cierta frecuencia base, la cual es transmitida y reflejada por el tejido el cual se está analizando. Debido a la interacción entre el tejido y la señal, la señal reflejada no posee exactamente la misma frecuencia que la señal original, sino que está compuesta por la superposición de señales en un amplio espectro de frecuencias. Sin embargo, el transductor no es capaz de captar con la misma precisión todas estas frecuencias, sino que este es más sensible a algunas, mientras que

otras se ven atenuadas. Este rango en el que el transductor puede captar las frecuencias con una relación señal/ruido aceptable ocurre en cierto ancho de banda, y su límite se encuentra en una atenuación de 3 dB con respecto a la intensidad de la máxima frecuencia.

Supongamos que un transductor emite una señal de 5 MHz, y que su banda de recepción tiene como límites los 3 MHz y 7 MHz. Esto quiere decir:

1. Que su ancho de banda es de 4 MHz (la diferencia entre el límite superior e inferior), o bien 80 porciento (el cociente entre el ancho de banda y la frecuencia central).

2. Que las frecuencias menores a 3 MHz y mayores a 7 MHz tienen una atenuación mayor a 3 dB.

3. Que solo nos interesarán las frecuencias entre 3 y 7 MHz, por lo cual se podría aplicar un filtro pasabandas que elimine todo el ruido (frecuencias fuera de rango).

1.5.3. Demodulación IQ

Una técnica fundamental en el procesamiento de señales es la demodulación IQ. Lo que se busca obtener con esta aplicación es una señal compleja, donde la parte real de la señal se encuentra en fase con la señal original, y su parte compleja se encuentra desfasada 90° con respecto a la señal real. Esta nueva señal IQ mantiene la información de la frecuencia de la señal, y una de sus principales propiedades es que si se suman las componentes real y compleja, se obtiene la señal original.

Este procedimiento entrega distintas ventajas, entre las cuales se destacan la simplificación de los cálculos a realizar con números complejos y la reducción de la frecuencia de muestreo necesaria (se profundizará en este inciso posteriormente).

Los pasos para llevar a cabo la demodulación se explican a continuación.

- Downmixing

  El primer paso para poder realizar la demodulación es el mezclado o ”downmixing”. Lleva este nombre dado que la señal RF se ve multiplicada por una señal compleja cuya frecuencia es la frecuencia central del transductor, lo que provoca un corrimiento en frecuencia (Ecuación 1.9).

$$x_{IQ} = x_{RF} \cdot exp(-2i\pi f_c t) \tag{1.9}$$

donde x_{IQ} es la señal IQ, x_{RF} es la señal original, f_c es la frecuencia central del transductor.

Mediante propiedades de los números complejos se puede demostrar la Ecuación 1.10.

$$exp(-iwt) = cos(wt) - isin(wt) \tag{1.10}$$

es decir, el proceso consiste en mezclar la señal RF original con dos señales iguales desfasadas en 90°.

Esta nueva señal resultante tiene una frecuencia central de 0 MHz, con límites mínimos y máximos equivalentes a la mitad del ancho de banda, en positivo y negativo, como se indica en la Figura 1.5.

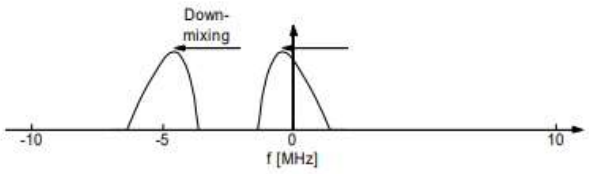


Figura 1.5: Esquema de downmixing [3]

- Filtrado

  El filtrado corresponde al proceso en el cual se eliminan las componentes de la señal cuya frecuencia está fuera de un rango de interés, por lo cual son consideradas ruido. Existen distintos tipos de filtros, pero los utilizados en la memoria de título son:

  1. Filtro para la señal RF: se encarga de filtrar las frecuencias que están fuera de la banda de recepción del transductor.
  2. Filtro para movimientos de pared (clutter filtering): este filtro se utiliza para eliminar las frecuencias asociadas a elementos que no son del flujo, como lo son movimientos de la pared de los vasos sanguíneos, musculares, etc.

  El primero se utiliza luego del proceso de ”down-mixing”. Si llamamos A al ancho de banda, la banda de frecuencias es $[\frac{-A}{2}, \frac{A}{2}]$, por lo cual basta con aplicar

un filtro pasabajos con frecuencia de corte $\frac{A}{2}$ para filtrar todo el ruido y obtener solo las frecuencias que se encuentran en la banda de paso del transductor. Este proceso suele realizarse mediante un filtro de respuesta finita al impulso (FIR).

El segundo filtro corresponde a un filtro pasa altos, debido a que el ruido asociado a movimientos de pared es ruido de baja frecuencia, muy inferiores en relación al cambio de frecuencia percibido por el efecto Doppler. También suele realizarse mediante un FIR.

- Eliminación

  Este último paso surge como una consecuencia del ”down-mixing”. Es sabido que, por el teorema de Nyquist, para asegurar una buena reconstrucción de la señal la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima presente en la señal. Suponiendo que, por ejemplo, la frecuencia esperada de una señal es de 7 MHz, la señal original debe ser muestreada con una frecuencia de al menos 14 MHz.

  Posterior al proceso de down-mixing, se explicó que la nueva frecuencia máxima de la señal compleja es $\frac{A}{2}$. Esta disminución de la frecuencia de la señal permite que la misma pueda ser muestreada a frecuencias menores, lo que a su vez permite mayor velocidad en los cálculos al tener una menor cantidad de datos que procesar, sin perder precisión en los resultados [4]. Esto se puede lograr mediante la eliminación de ciertos datos capturados con una frecuencia de muestreo mayor; suponiendo una frecuencia de muestreo f_s, si de esta señal seleccionamos el primer elemento, luego el tercero, y así sucesivamente (considerando sólo los valores en posiciones impares), se reduce de manera forzada la frecuencia de muestreo a $\frac{f_s}{2}$, disminuyendo la cantidad de puntos en la señal, aumentando la velocidad de procesamiento.

1.5.4. Beamforming

Como cada piezoeléctrico recibe información de todos los puntos de la región la cual se está analizando, se hace necesario definir un método el cual se encargue de recomponer la imagen mediante la superposición de estas señales. Este proceso se denomina Beamforming, y puede realizarse mediante distintas técnicas. Se profundizará en la técnica delay and sum (DAS), dado que es la utilizada en este trabajo.

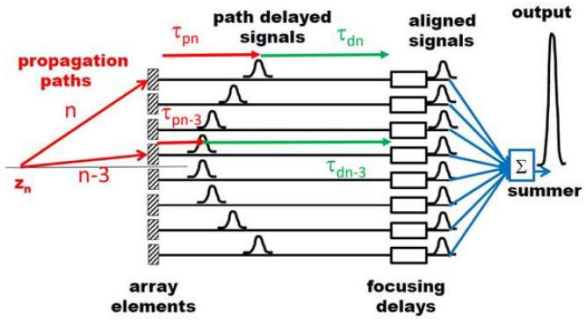


Figura 1.6: Esquema de funcionamiento de la técnica DAS [6]

La técnica DAS ha sido utilizada por los sistemas de ultrasonido. Su principio, en líneas generales, consiste en aplicar un desfase (delay) a la señal recibida por cada piezoeléctrico según la distancia a la cual se encuentra la región que se está analizando, siendo un desfase mayor en aquellos piezoeléctricos que se encuentran a una distancia mayor del pixel que se quiere formar, y luego sumar (sum) las aportaciones de cada piezoeléctrico, obteniendo una señal resultante para la región de estudio. Un esquema de este procedimiento se muestra en la Figura 1.6.

Matemáticamente, es posible formar una matriz compleja sparse que contenga los coeficientes requeridos para lograr el DAS [6]. Esta matriz, al ser multiplicada por otra que contenga de manera ordenada las señales RF, resulta en la imagen luego de realizar el beamforming (ver Ecuación 1.11 y Figura 1.7)

$$IQ_{BF} = M_{DAS} \cdot IQ_{RF} \tag{1.11}$$

donde IQ_{BF} es la señal luego del beamforming, M_{DAS} es la matriz que contiene los coeficientes para realizar el esquema DAS y IQ_{RF} es la señal IQ, obtenida luego de la demodulación y filtrado de la señal RF.

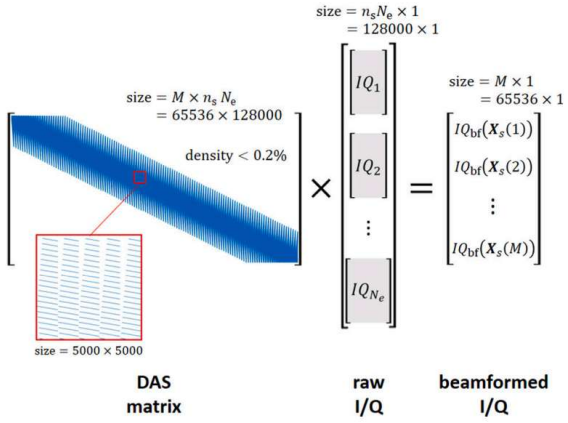


Figura 1.7: Esquema de operación matricial para obtener la imagen. [6]

1.6. Matlab Ultrasound Toolbox

Matlab Ultrasound Toolbox (MUST) es una librería de MATLAB gratuita que permite simular, postprocesar y demodular señales RF, realizar beamforming, generar imágenes, estimar velocidades Doppler, entre otras amplias funciones. Ha sido utilizada en gran cantidad de investigaciones, artículos científicos, simposios, etc. Algunas de las funciones de interés para este trabajo son:

1. getparam: se utiliza para obtener los parámetros del transductor utilizado.

2. rf2iq: se encarga de demodular las señales RF recibidas.

3. txdelay: entrega los desfases en tiempo que se requieren en cada piezoeléctrico para obtener una señal con la dirección (ángulo) requerida.

4. dasmtx: recupera la matriz necesaria para realizar el beamforming de las señales, mediante la técnica de Delay and Sum.

5. wfilt: aplica un filtro de pared para eliminar el ruido que se encuentra en las señales, facilitando el análisis para Doppler.

6. vplot: utilizado para facilitar la visualización de los vectores resultantes.

1.7. Equipo Verasonics Vantage

El equipo Verasonics Vantage 128 es un equipo de investigación que se encuentra en el Laboratorio de Ultrasonido Cuantitativo. Cuenta con 128 canales independientes para la transmisión y recepción de datos, los cuales se pueden adquirir en un rango de frecuencias amplio que va desde los 0.5 a 25 MHz. Destaca por su capacidad para adquirir, almacenar y procesar datos en tiempo real tanto en modo B como Doppler, pudiendo intercalar entre ambos tipos de adquisiciones, lo que asegura una transición fluida entre ambos modos. Además, permite controlar distintos parámetros de transmisión, como pueden ser la duración del pulso, frecuencia central del transductor, frecuencia de muestreo, PRF, entre otros, lo que lo convierte en un equipo altamente personalizable.

1.8. PhysioPulse 100 Flow System

El equipo PhysioPulse 100 Flow System está diseñado para generar de manera precisa, realista y repetible flujos fisiológicos. El sistema se encuentra programado con formas de onda predefinidas y permite la personalización del flujo. Algunas de las características del equipo son:

- Caudal de 1 ml/s a 100 ml/s
- Flujos fisiológicos realistas
- Se puede escoger entre un flujo pulsátil o constante
- Reproducible y programable
- Certificado de calibración

Entre otras.

Capítulo 2

Métodos

2.1. Esquema

La implementación de la técnica de Doppler vectorial involucra una serie de pasos, los cuales se indican a continuación.

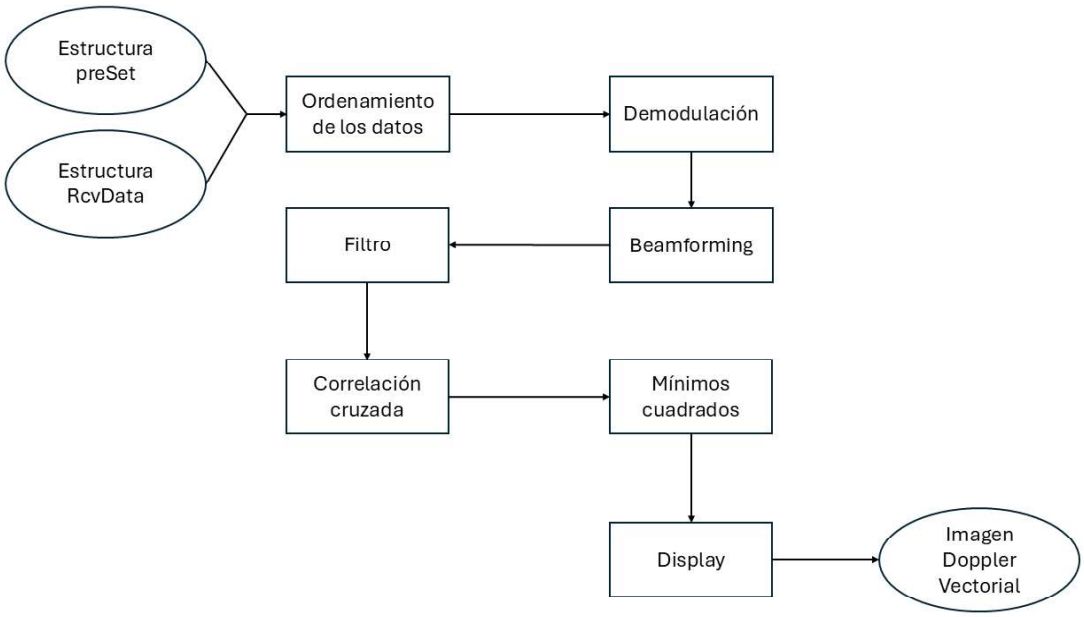


Figura 2.1: Diagrama de flujo del programa.

Además, se escoge MATLAB como lenguaje de programación, ya que es el utilizado por el equipo Verasonics y dado que cuenta con librerías gratuitas que facilitan el

proceso de programación.

A continuación, se revisará cada punto explicado a detalle, junto con el pseudocódigo diseñado para cada fin.

2.2. Toma de datos

2.2.1. Almacenamiento de la información

Para poder aplicar la técnica Doppler Vectorial, es necesario comprender la manera en la que el equipo Verasonics almacena los datos adquiridos. Esta información se encuentra en el archivo preSet, generado antes de la adquisición de datos y que puede ser guardado posteriormente.

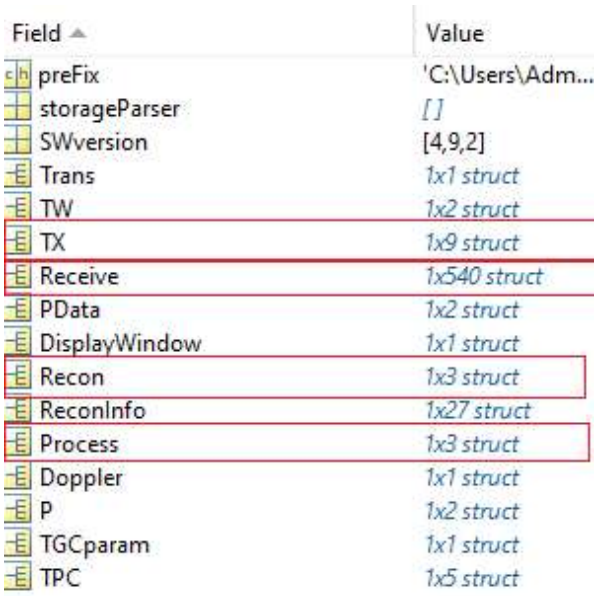


Figura 2.2: Variables de la estructura *preSet*.

Algunas de las variables de interés se encuentran en las siguientes rutas (ver Figura 2.2):

1. PRF [Hz]: $\mathrm{preSet.Process(2).Parameters(10)}$
2. Adquisiciones para formación de la imagen en modo B: $\mathrm{preSet.Recon(1).RINums}$
3. Adquisiciones para formación de señales Doppler: $\mathrm{preSet.Recon(i+1).RINums}$, donde i es el número del ángulo TX utilizado.

4. Ángulos Doppler utilizados: $\mathrm{preSet.TX(na+i).Steer(1)}$, donde na es la cantidad de adquisiciones realizadas para formar imágenes en modo B e i es el número del ángulo Doppler utilizado.

Por otro lado, los datos recibidos por el transductor se encuentran en otra estructura llamada $\mathrm{RcvData}$, la cual contiene una celda que en su interior guarda una estructura 3D, en la que en su primera dimensión se encuentra la señal reflejada hacia el transductor, la segunda dimensión corresponde a la cantidad de piezoeléctricos del mismo (en el caso del L11-5V son 128) y la tercera corresponde a la cantidad de fotogramas almacenados (normalmente 20).

Para entender el orden de la información almacenada (el cual no se puede deducir de manera simple) se hace necesario revisar la estructura $\mathrm{preSet.Receive}$.

En ella se puede ver información relativa a la profundidad de inicio y fin de la adquisición de datos (columnas 2 y 3, $\mathrm{startDepth}$ y $\mathrm{endDepth}$ respectivamente), número del cuadro del cual se adquiere la data (columna 6, $\mathrm{framenum}$), número de adquisición (columna 7, acqNum) y los índices de la estructura $\mathrm{RcvData}$ que corresponden para cada toma de datos en las columnas $\mathrm{startSample}$ y $\mathrm{endSample}$ (ver Figura 2.3). Por ejemplo, en el caso de que se necesite la información de la octava adquisición, para el piezoeléctrico número 20 del cuadro 12, los índices que corresponden para la primera dimensión son desde el 16129 al 17152, la segunda dimensión corresponde a 20 y la tercera a 12, es decir, $\mathrm{RcvData\{1,1\}(16129{:}17152,\ 20,\ 12)}$.

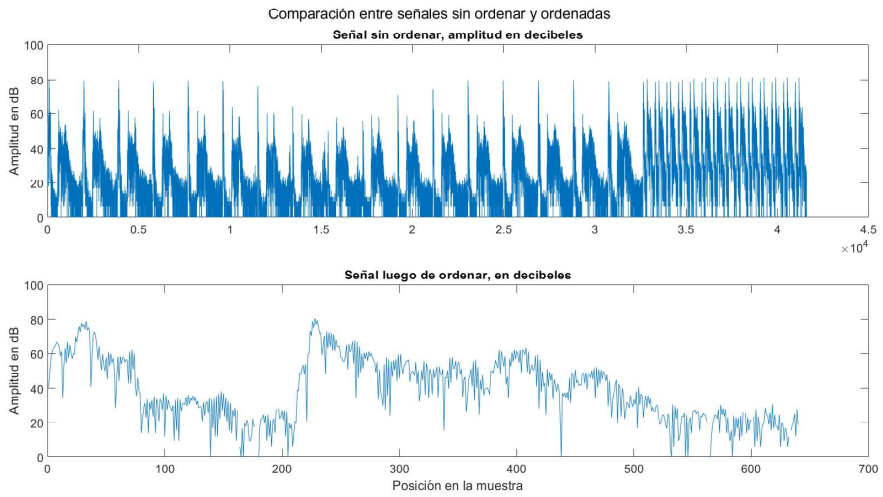


Figura 2.3: Comparación entre la señal recibida para un piezoeléctrico. La figura superior muestra la señal sin ordenar, mientras que la figura inferior presenta la señal recibida en una adquisición específica. Notar la diferencia en el largo de la señal (eje x).

2.2.2. Código de Clasificación

La primera función del código se denomina $\mathrm{Ord}(\mathrm{preSet},\ \mathrm{RcvData},\ \mathrm{tipo})$, y se encarga de ordenar la información de la estructura generada al adquirir los datos con el equipo Verasonics, de manera que sea más simple acceder a la información requerida. Esta se almacena en una nueva estructura, la cual se organiza dependiendo del tipo de información a la que se quiera acceder.

La variable tipo es un string que puede ser ”bloque” o ”alternado”, según cómo se hayan adquirido los datos.

Los campos de la estructura ”Data” generada son:

1. $\mathrm{Bangles}$: En este campo se encuentran los ángulos utilizados para las adquisiciones en modo B, ordenados de manera secuencial.

2. $\mathrm{Dangles}$: Aquí se encuentran los ángulos Tx utilizados para las adquisiciones Doppler, ordenados de manera secuencial.

3. bmode: Contiene la señal recibida por el transductor para todas las adquisiciones y frames. Se ordenan de tal manera que, en el eje de las filas, se encuentran las adquisiciones, y en el eje de las columnas, se encuentran los cuadros.

4. Doppler: Almacena las señales recibidas por el transductor para las adquisiciones Doppler. Dentro de este campo se encuentran otros sub campos dependiendo del ángulo Doppler que se haya utilizado (Ang1, Ang2, etc), en los cuales se encuentra la información ordenada de manera equivalente al campo bmode.

2.3. Demodulación

La demodulación es el paso siguiente a realizar luego de tener los datos ordenados, y se aplica siguiendo los lineamientos mencionados en la introducción teórica. La función se denomina IQ(Data, param), donde Data es la estructura resultante luego de ordenar los datos y param es una estructura que almacena los parámetros necesarios para procesar la información, como lo son el transductor, su frecuencia central, PRF, etc. Se presenta un pseudocódigo que describe, de manera general, la secuencia de dicha función.

Algoritmo 1 Demodulación y filtrado de datos RF

RF: Señal RF almacenada

IQ: Matriz para almacenar datos IQ

Algoritmo:

Obtener coeficientes b y a del filtro de orden 5.

Para todos los canales:

$IQ(i) = RF_i \cdot exp(-2i\pi f_c t)$

$IQ(i)$ =filtfilt($b, a, IQ(i)$)

Guardar cada set como $Data.IQ.IQ_i\{acq, c\}$

El algoritmo se encarga de recorrer la estructura Data.Doppler y transformar toda la información de cada ángulo Doppler recibida por el transductor en señales IQ, utilizando la función rf2iq presente en MUST, la cual internamente se encarga de aplicar el esquema indicado en el algoritmo anterior. Las señales resultantes son luego almacenadas en un nuevo campo Data.IQ, en el cual en su interior cuenta con la información de las señales en fase y cuadratura para todos los ángulos utilizados.

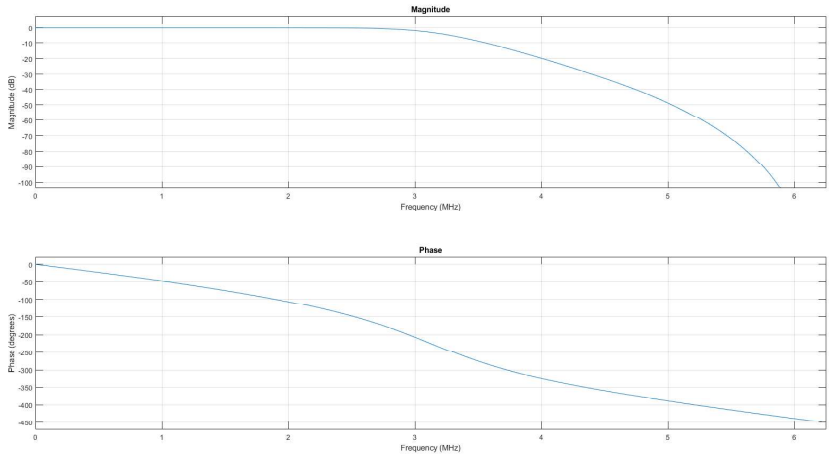


Figura 2.4: Respuesta al impulso del filtro mencionado, para una frecuencia central de 6.25 MHz y frecuencia de muestro de 12.5 MHz.

La función aplica el proceso de down-mixing explicado en capítulos anteriores a las señales recibidas por los piezoeléctricos y luego aplica un filtro pasabajo de butterworth de orden 5, donde la frecuencia de corte normalizada es el menor valor entre $2F_c/F_s$ y 0.5. La respuesta de este filtro se puede apreciar en la Figura 2.4 y una señal real filtrada se presenta en la Figura 2.5.

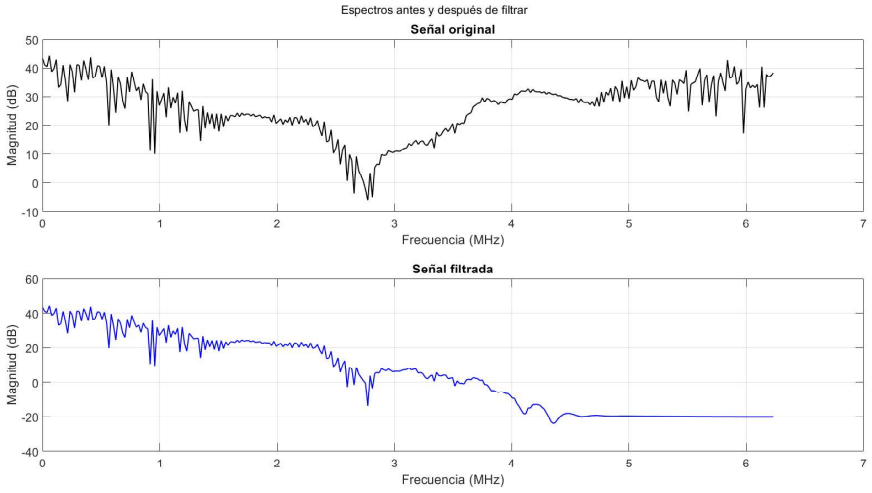


Figura 2.5: Filtrado de la señal recibida por un piezoeléctrico. La imagen superior presenta la señal cruda, mientras que la inferior presenta la señal luego de aplicar un filtrado de fase cero. Se puede apreciar que la atenuación comienza a partir de los 3 MHz.

2.4. Beamforming

Para poder realizar el beamforming de los datos IQ se utilizan dos funciones, una dedicada a generar una región que representa nuestra zona de interés, y una segunda función que se encarga de hacer el beamforming propiamente tal.

2.4.1. Generación de la región de interés

Para definir los límites de la región de interés se utiliza la función $\mathrm{pix}(\mathrm{preSet})$:

Algoritmo 2 Generación de la grilla espacial de reconstrucción

Input: Estructura `preSet` con parámetros del sistema
scale: factor de conversión de unidades
dz: paso de grilla en eje z usando `PData.PDelta(3)` y el factor de escala
dx: paso de grilla en eje x usando `PData.PDelta(1)` y el factor de escala
$limX$: origen del eje x escalado desde `PData.Origin(1)`
$limZ$: origen del eje z escalado desde `PData.Origin(3)`
$limZsup$: límite superior del eje z usando `PData.Size(1)` y paso de grilla
Algoritmo:
$[x, z]$ =meshgrid$(limX : dx : -limX,\ limZ : dz : limZsup)$
Output: x, z

Esta se encarga de recuperar la información de la región de análisis de la medición realizada, como lo son el tamaño del píxel en el eje vertical (z) y en el eje horizontal (x), además de definir el origen del sistema coordenado mediante las variables limX y limZ. La variable scale corresponde a un factor que se encarga de transformar las distancias almacenadas en el preSet en unidades de longitud de onda a metros.

2.4.2. Función de Beamforming

El beamforming es realizado utilizando la función $\mathrm{BF}(\mathrm{Data},\ \mathrm{param},\ \mathrm{x},\ \mathrm{z})$:

Algoritmo 3 Beamforming usando matrices DAS

Input: Estructura $Data$ con información geométrica y señales

$param$: parámetros necesarios para el beamforming

x, z: grillas espaciales obtenidas previamente

IQ: matriz para almacenar datos IQ

M es la matriz de coeficientes de beamforming

BF es la señal luego del beamforming

Algoritmo:

$TXdelay =$ txdelay($param, TX$)

$M =$ dasmtx(x, z, $param$)

$BF = M \cdot IQ$

Almacenar M en $Data.Matrix$

Almacenar BF en $Data.Beamformed$

Output: Estructura $Data$ con resultado del beamforming

La función se encarga de realizar el beamforming para cada par de ángulos Tx-Rx, recorriendo primero los ángulos Rx y luego los ángulos Tx. Primero, determina la matriz a utilizar para el beamforming utilizando la función $dasmtx$ presente en MUST y la guarda en el campo $Data.Matrix.RX_n.Dasm_m$, donde m y n son subíndices que indican los ángulos Tx y Rx utilizados, según el orden que se almacenan en $Data.Dangles$ y $Data.RXangles$, respectivamente. La información luego del beamforming es almacenada en $Data.Beamformed$.

2.5. Filtro de pared

Para realizar el filtrado se utiliza la función $\mathrm{filtrar(Data.tipo.grado)}$, donde tipo es un string que define el tipo de filtro a utilizar, y grado define el grado del filtro.

Los tipos de filtros que soporta la función son:

1. Polinomial: se aplica mediante el string ”poly”
2. SVD: se aplica mediante el string ”svd”
3. DCT: se aplica mediante el string ”dct”
4. No filtrar: se aplica mediante el string ”no”

Es importante destacar que, dada la forma en la cual está hecho el programa, la función filtro debe ejecutarse sí o sí, de lo contrario, el código no podrá ejecutar la correlación cruzada. Es por esto que, en caso de no requerirse un filtro de pared, se debe ejecutar la función filtro con tipo ”no”.

El algoritmo del filtro se detalla a continuación:

Algoritmo 4 Filtrado de señales reconstruidas

Input: Estructura `Data` con señales reconstruidas en `Beamformed`
$tipo$: string que indica el tipo de filtro a aplicar
$grado$: parámetro del filtro
IQ: señal a filtrar
IQ_f: señal filtrada
Algoritmo:
IQ_f = wfilt($IQ, tipo, grado$)
Almacenar IQ_f
Output: Estructura $Data$ con señales filtradas

La función se encarga de, para cada campo presente en $Data.Beamformed$, aplicar un filtro utilizando la función $wfilt$ presente en MUST. La información filtrada se guarda en el campo $Data.Filt.RX_n.Filt_m$, donde m y n son subíndices que indican los ángulos Tx y Rx utilizados, respectivamente.

2.6. Correlación cruzada

La función que aplica la correlación cruzada se denomina $AutoCorr(Data, vecin)$. El vector $vecin$ debe ser de dimensión 1x2 y sus valores deben ser impares positivos. Este indica el tamaño de la región del espacio que se considerará para obtener la correlación cruzada en cierta posición. Por ejemplo, para un píxel en la posición [fila, columna], si el valor de $vecin$ es [3,5], se considerará una región de 3 filas y 5 columnas para obtener la correlación cruzada, siendo la posición central de esta región el píxel de interés (de coordenadas [fila, columna]). El pseudocódigo es el siguiente:

Algoritmo 5 Estimación local de autocorrelación entre adquisiciones consecutivas

Input: Estructura `Data` con señales filtradas en `Filt`

$vecin$: tamaño de la región de interés `[v, h]`, donde v y h son impares

S: señal dentro de la vecindad de interés

M: matriz de tamaño [v, h] que contiene las correlaciones para cada pixel de la región de interés

R: valor de la correlación resultante

Algoritmo:

$M_k = \frac{1}{N-1} \cdot \text{conj}(S_k) \cdot S_{k+1}$ para $k = 1 \dots N-1$

$M = \sum_{k=1}^{N-1} M_k$

$R = \text{mean}(M)$

Almacenar R en `Data.AutoCorr`

Output: Estructura $Data$ con mapas de autocorrelación

La función se encarga de, para cada par de ángulos Tx-Rx utilizados, recorrer los píxeles y calcular la correlación cruzada mediante la ecuación 1.3 para la región definida. Requiere que en la estructura $Data$ esté presente el campo $Data.Filt$.

2.7. Obtención de la velocidad por mínimos cuadrados

La función que aplica el esquema de mínimos cuadrados para obtener la velocidad del flujo se denomina $Vel(data, param)$, y opera como se indica a continuación:

Algoritmo 6 Estimación de velocidad vectorial a partir de mapas de autocorrelación

Input: Estructura $Data$ con mapas de autocorrelación, parámetros $param$ del sistema

A: matriz de mínimos cuadrados

b: vector con valores de correlación cruzada

PRF, fc, c: frecuencia de repetición, frecuencia central y velocidad del sonido

R: valor de la correlación obtenida en el Algoritmo 5

Algoritmo:

Construir matriz A con:

$A_{k,1} = \cos(\theta_{\text{RX, k}}) + \cos(\theta_{\text{TX, k}})$

$A_{k,2} = \sin(\theta_{\text{RX, k}}) + \sin(\theta_{\text{TX, k}})$

Para cada píxel (i, j) y cada cuadro:

Formar vector b con valores R_{ij} de autocorrelación:

$b_k = \text{R}_k(i, j)$

$b = \dfrac{\text{PRF} \cdot b \cdot c}{2\pi f_c}$

Si b contiene ceros: $\vec{v} = [0,\ 0]$

Si no: resolver $\vec{v} = A^{\dagger} b$

Asignar $\vec{v}$ a $Data.Velocidades$

Output: Estructura $Data$ con mapas de velocidad $\vec{v} = [v_z,\ v_x]$

Se encarga de resolver el problema de mínimos cuadrados, como se explica en la ecuación 1.8. Los resultados (velocidades) son almacenados en un nuevo campo de la estructura $Data$.

2.8. Ejecución del código

Una vez definidas las funciones, la ejecución del código es simple. Los pasos a seguir son:

1. Cargar los datos obtenidos luego de la medición con el equipo Verasonics (RF-data y preSet).

2. Definición de los parámetros utilizados en la medición (con la función getparam o directamente desde preSet).

3. Definir los ángulos Rx (en radianes) que se utilizarán para la reconstrucción.

4. Ejecutar las funciones en el orden que fueron presentadas (ver esquema en Figura 2.6).

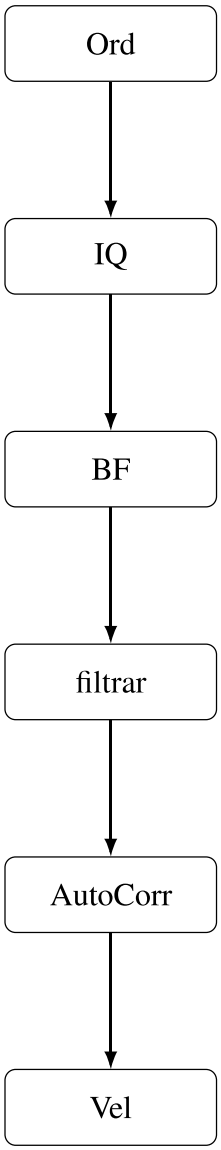


Figura 2.6: Flujo de ejecución de funciones.

5. Mostrar los resultados gráficamente, de ser requerido (utilizando la función vplot).

Capítulo 3

Mediciones y resultados

3.1. Evaluación del desempeño del código con respecto a un experimento validado

Con el fin de verificar la precisión en los cálculos del código propuesto, se realiza una comparación con los resultados obtenidos de un estudio de Doppler vectorial [4]. En dicho experimento se realizaron adquisiciones Doppler con un ángulo Tx de 0° de un fantoma rotatorio montado en un motor paso a paso, en el cual se reguló la velocidad de rotación.

Tabla 3.1: Parámetros utilizados en la aquisición de dato del primer experimento

Parámetro	Unidad	Valor
Transductor	-	ATL L7-4
Número de piezoeléctricos activos	u	128
Frecuencia central	MHz	5
Número de ciclos por pulso	u	7
Frecuencia de muestreo	MHz	6.67
PRF	kHz	10
Ángulo TX	°	0
Adquisiciones Doppler	u	32

Este experimento es utilizado como ejemplo de aplicación de Doppler vectorial en la librería MUST, donde se recompone el campo de velocidades mediante la solución de un sistema lineal al recomponer dicha señal RF obtenida con dos ángulos Rx, de 15° y -15°.

Para comparar el desempeño del código propuesto con la solución obtenida por el autor del estudio, se ejecuta el código realizado, utilizando 7 ángulos Rx de -15°, -10°, -5°, 0°, 5°, 10° y 15° (ver Figura 3.1). Posteriormente, una vez obtenido el campo vectorial, se calcula el error cuadrático medio (RMSE) de la recomposición con 7 ángulos Rx con respecto a la recomposición con 2 ángulos para las velocidades en el eje vertical (Vz), horizontal (Vx) y magnitud total de la velocidad ($\left|\vec{V}\right|$). Se presenta además la diferencia (resta) entre los dos cálculos (ver Figura 3.2).

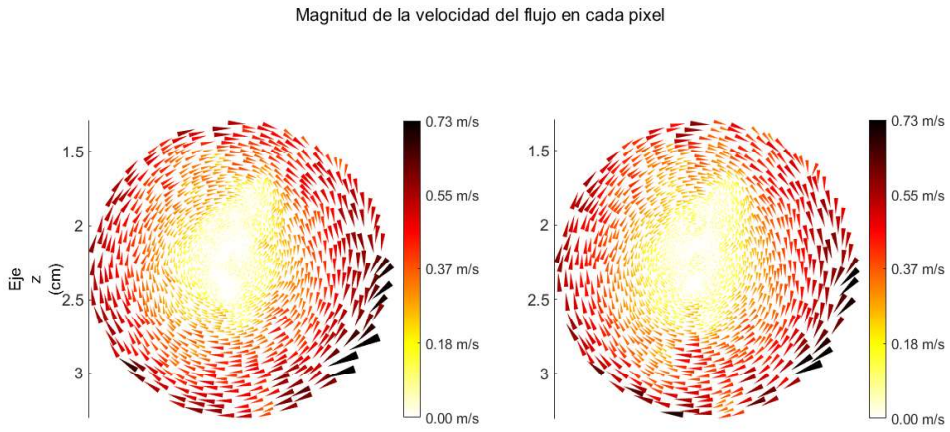


Figura 3.1: Resultados de la recomposición con 2 ángulos a la izquierda y 7 ángulos a la derecha.

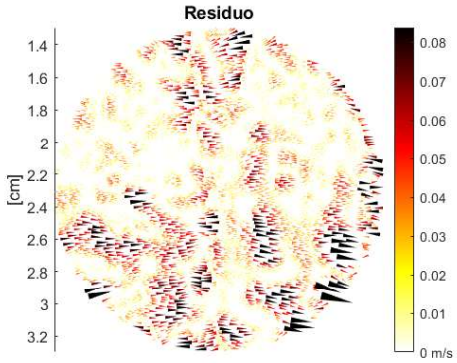


Figura 3.2: Residuo.

A continuación, se presentan los principales resultados:

Tabla 3.2: Resultados comparativa

Variable	Referencia	Código desarrollado
$\lvert\vec{V_z}\rvert$ máx [cm/s]	58.40	58.28
$\lvert\vec{V_x}\rvert$ máx [cm/s]	123.00	104.42
RMSE $\vec{V_z}$ [cm/s]	-	0.89
RMSE $\vec{V_x}$ [cm/s]	-	4.82
RMSE $\lvert\vec{V}\rvert$ [cm/s]	-	4.90

3.2. Evaluación de un flujo constante a través de un fantoma

El objetivo de este experimento es evaluar la capacidad del código de Doppler Vectorial de captar la velocidad del flujo en la región apropiada, además de evaluar si detecta un perfil parabólico acorde a la condición simulada. Para esto, se utilizó el equipo PhysioPulse 100 Flow System con un voltaje de 500 mV y 1000 mV, lo cual corresponde a un caudal de 11.62 ml/s y 19.88 ml/s, respectivamente, para 20 fotogramas. Para adquirir los datos se utilizó un código de Color Doppler, diseñado por el Ing. Gabriel Vásquez para el Laboratorio de Ultrasonido Cuantitativo de la Universidad Técnica Federico Santa María.

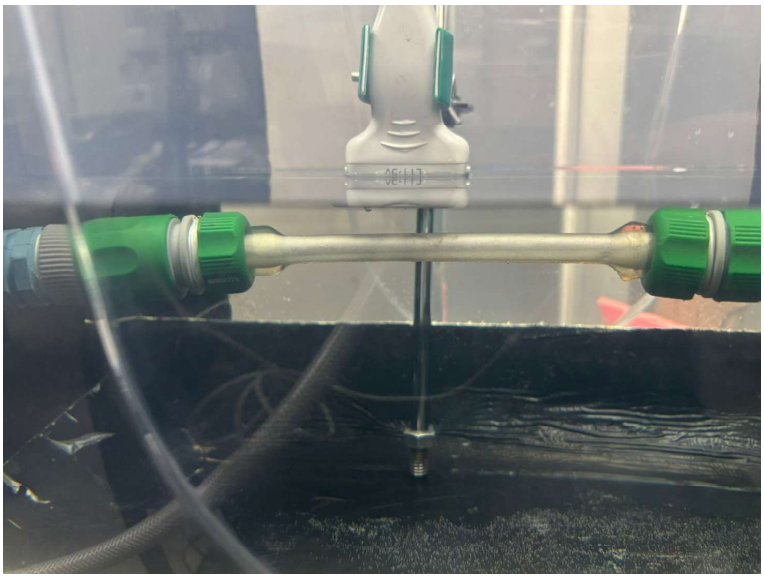


Figura 3.3: Montaje experimental, posición del transductor.



Figura 3.4: Montaje experimental, conexiones de los equipos involucrados.

En la Figura 3.3 se puede apreciar la ubicación del transductor sobre el fantoma, mientras que en la Figura 3.4 se puede ver la conexión con los equipos involucrados. Los detalles de la configuración se entregan en la Tabla 3.3

Tabla 3.3: Parámetros utilizados en la toma de datos del segundo experimento.

Parámetro	Valor	Unidad
Transductor	L11-5V	-
Número de piezoeléctricos activos	128	u
Frecuencia central	6.25	MHz
Número de pulsos por ciclo	8	u
Frecuencia de muestreo	25	MHz
PRF	5	kHz
Ángulo TX	12	°
Adquisiciones Doppler	14	u

En cuanto a los parámetros utilizados para la reconstrucción mediante el código de Doppler Vectorial, la imagen se recompuso utilizando 7 ángulos RX, siendo estos -15°, -10°, 5°, 0°, 5°, 10° y 15°. Además, la correlación cruzada fue calculada mediante una región de 5x5 y de 11x11, con el fin de ver qué nivel de variación se obtiene con cada configuración. No se aplicó un filtro de pared, ya que no se esperan movimientos de pared que puedan interferir con o atenuar las señales Doppler al ser un caudal fijo. Luego de obtener los valores de la velocidad en el eje vertical y horizontal, se calculó para cada pixel de cada fotograma la magnitud de la velocidad obtenida y el ángulo con respecto al eje horizontal.

Bajo el supuesto de que el flujo a través del fantoma es estacionario, para cada pixel se promediaron los valores de velocidad en los ejes vertical y horizontal y el ángulo de dirección del flujo a lo largo de los 20 fotogramas, con tal de obtener un valor promedio.

Para facilitar el análisis de los resultados, se grafican para distintas secciones del fantoma la magnitud de la velocidad y la dirección del flujo.

3.2.1. Recomposición con región de 5x5

En la Figura 3.5 se presentan los resultados de la recomposición utilizando una región de 5x5 pixeles, para caudales de 11.62 ml/s y 19.88 ml/s.

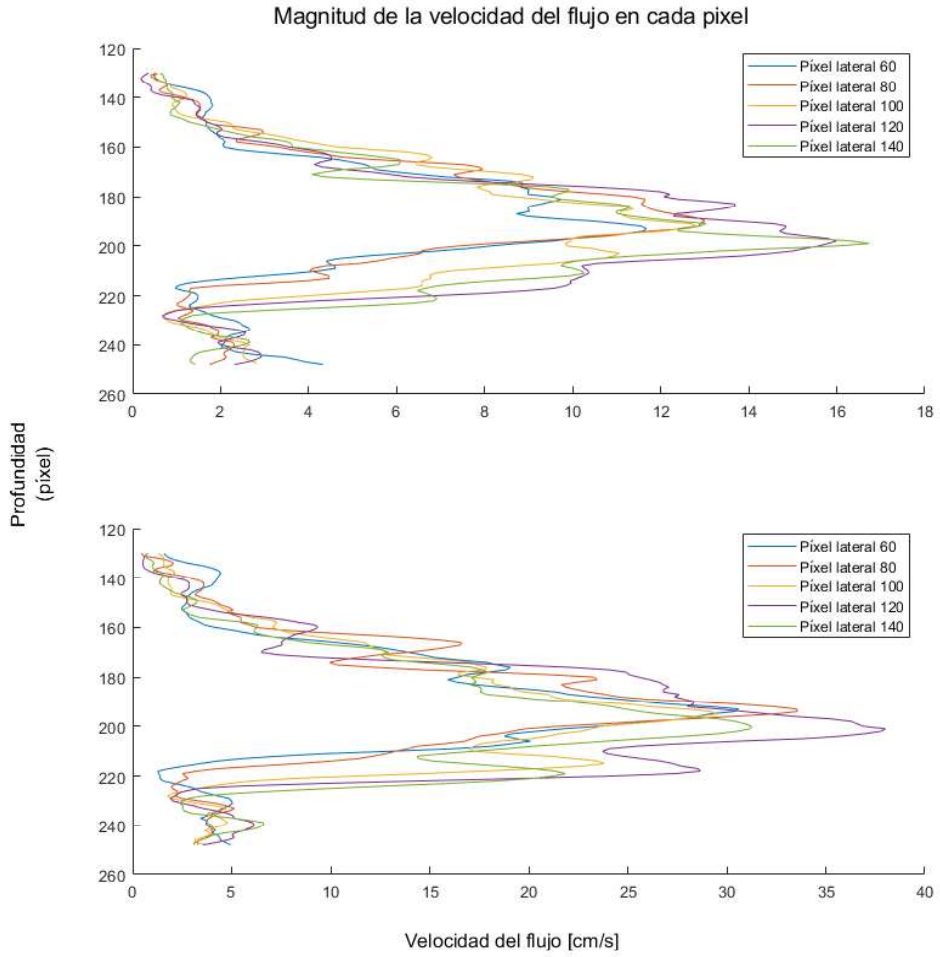


Figura 3.5: Resultados para recomposición de 5x5. La imagen superior presenta los resultados para un caudal de 11.62 ml/s y la imagen inferior para un caudal de 19.88 ml/s.

3.2.2. Recomposición con región de 11x11.

En la Figura 3.6 se presentan los resultados de la recomposición utilizando una región de 11x11 pixeles, para 500 mV y 1000 mV.

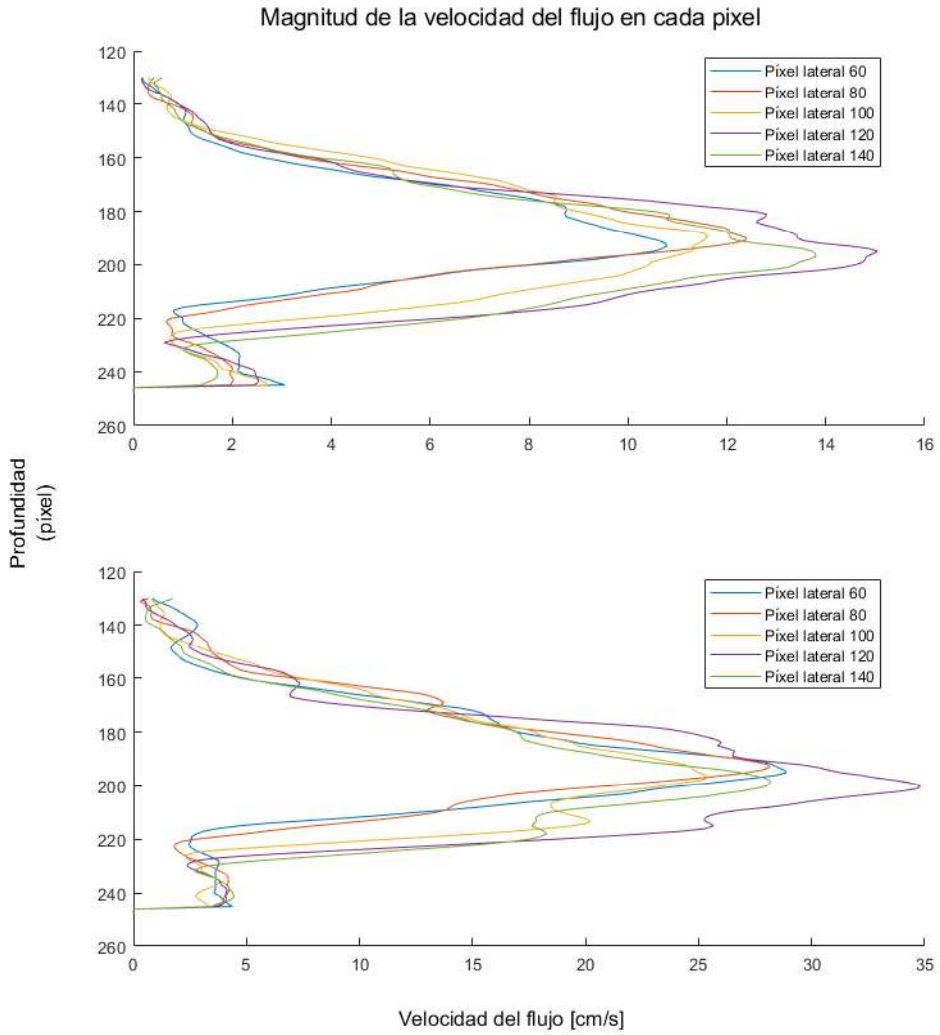


Figura 3.6: Recomposición con región de 11x11. La imagen superior presenta los resultados para un caudal de 11.62 ml/s y la imagen inferior para un caudal de 19.88 ml/s

3.2.3. Campos vectoriales obtenidos.

Finalmente, las Figuras 3.7 y 3.8 presentan los campos vectoriales resultantes, de manera gráfica.

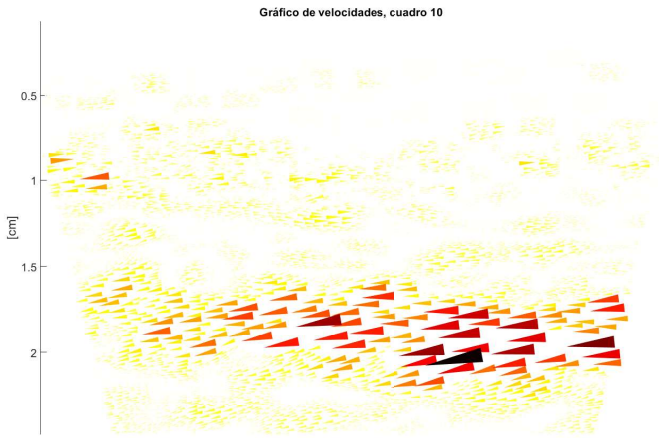


Figura 3.7: Campo vectorial obtenido para el caudal de 11.62 ml/s.

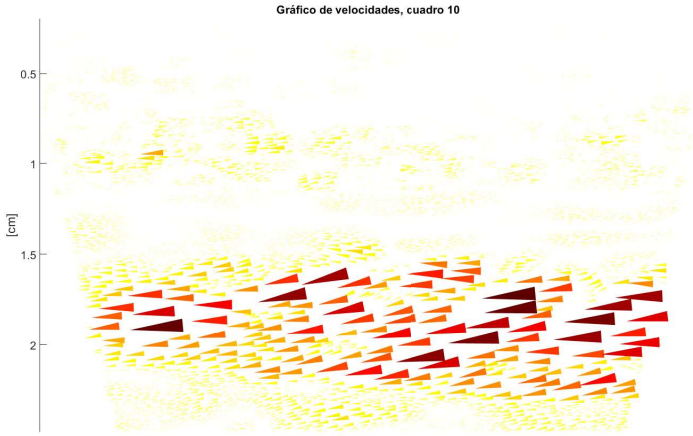


Figura 3.8: Campo vectorial obtenido para el caudal de 19.88 ml/s.

3.3. Evaluación del código con adquisiciones in vivo

Para validar si el programa es capaz de obtener un campo de velocidades coherente en condiciones de flujo fisiológicas, se realiza la adquisición de datos de la arteria carótida en un modelo in vivo.

La adquisición de datos se realizó mediante la ejecución de un código de Doppler Vectorial modificado, el cual es capaz de realizar una sucesión de adquisiciones para

un ángulo de transmisión, luego la misma cantidad de adquisiciones con un segundo ángulo, y así con todos los ángulos de transmisión definidos.

Los parámetros utilizados se indican en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4: Parámetros utilizados en la toma de datos in vivo

Parámetro	Valor	Unidad
Transductor	L11-5V	-
Número de piezoeléctricos activos	128	u
Frecuencia central	6.25	MHz
Número de pulsos por ciclo	4	u
Frecuencia de muestreo	25	MHz
PRF	3.5	kHz
Ángulo TX	-10, -5, 0, 5, 10	°
Adquisiciones Doppler	14	u

Además de la adquisición de los datos de ultrasonido, se capturó un video para visualizar específicamente en cuál fotograma se presentaba una dilatación de la arteria, lo cual es sinónimo del peak sistólico del pulso. Mediante un análisis visual, se determinó que en el cuadro 11 (Figura 3.9) se producía el pulso cardíaco, por lo cual se presenta la información obtenida para este cuadro.

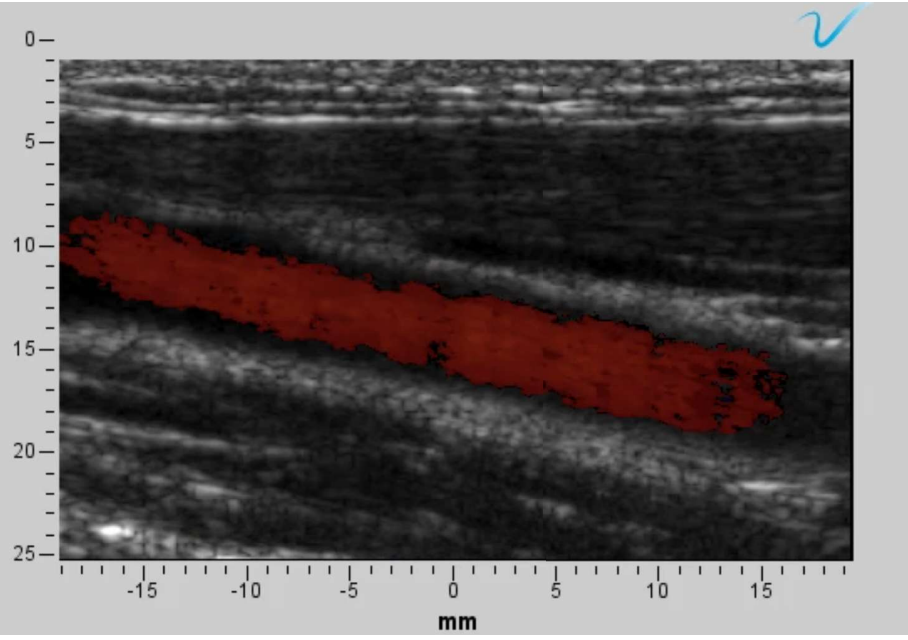


Figura 3.9: Figura Doppler color para el cuadro 11.

Los ángulos RX utilizados para la recomposición de la imagen fueron -15°, -10°,

5°, 0°, 5°, 10° y 15°, lo cual, junto a los 5 ángulos TX utilizados, permitió formar 35 pares de ángulos y, en consecuencia, la misma cantidad de ecuaciones para el sistema de dos incógnitas. Además, se aplicó un filtro de pared polinomial de grado 2, el cual fue obtenido mediante un ajuste por polinomios de Legendre y fue restado a la señal original. Para estimar el desfase en cada píxel se utilizó una vecindad de 7x7 píxeles alrededor del punto de interés.

Los resultados obtenidos de la recomposición realizada se presentan en la Figura 3.10.

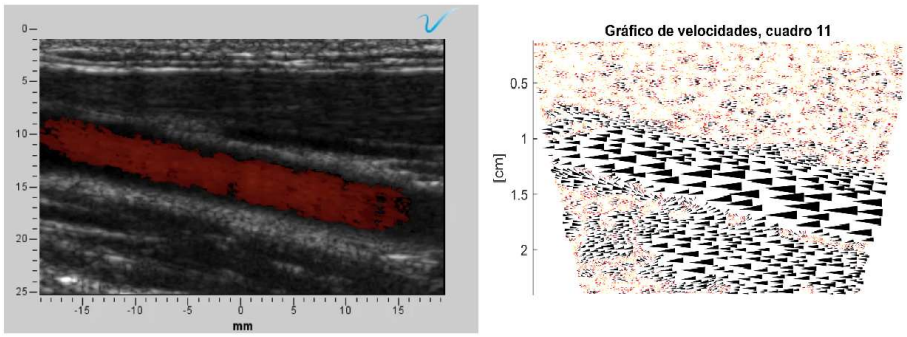


Figura 3.10: Comparativa entre cuadro 11 para Doppler color y vectorial.

Capítulo 4

Análisis

4.1. Fantoma rotatorio

Los resultados obtenidos con el código desarrollado son cercanos a los que se obtuvieron en el documento utilizado como base, con un error cuadrático medio de 0.89 cm/s para la velocidad del eje vertical y de 4.82 cm/s para el eje horizontal, lo cual, en relación a los máximos estimados por el documento de referencia, son un 1.5 % y 8 % respectivamente.

Observando la Figura 3.2 se puede notar que las principales diferencias entre las velocidades de uno y otro método son en el eje horizontal.

4.2. Flujo constante

Para analizar los resultados obtenidos en la prueba de flujo constante, se hace necesario establecer un marco de referencia para los resultados obtenidos. Para esto, se supondrá que el perfil del flujo al interior del fantoma es estacionario y parabólico.

$$Q = \int_0^R 2\pi r v(r)\, dr = \pi R^2 \frac{v_{\max}}{2} \tag{4.1}$$

$$v(r) = v_{\max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \tag{4.2}$$

Dado los supuestos anteriores, la velocidad máxima del flujo al interior del fantoma de radio 1.27 [cm] se puede obtener mediante la ecuación 4.1 y la distribución de

velocidades por la Ecuación 4.2. Los caudales y velocidades máximas calculadas se encuentran en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Caudales y velocidades máximas estimadas

Voltaje [V]	Caudal [ml/s]	Velocidad máxima [cm/s]
0.5	11.62	18.34
1	19.88	31.38

Al comparar los resultados de la velocidad máxima estimada en la Tabla 4.1 anterior con los obtenidos en los gráficos del Capítulo 3.2, se puede ver, a medida que se avanza a lo largo del fantoma, que la velocidad obtenida varía. Con el fin de visualizar esto con mayor claridad, se presentan gráficos de la recomposición de 11 píxeles para ambos caudales, dividiendo el fantoma en tres tercios (Figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4).

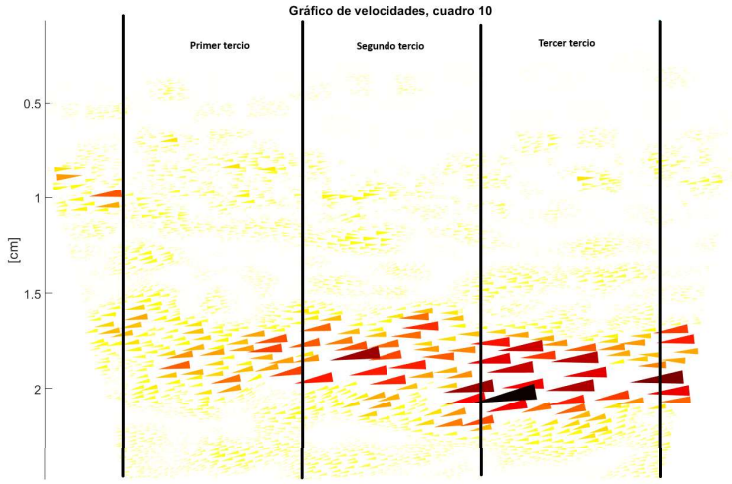


Figura 4.1: Secciones del fantoma utilizadas en el análisis, para caudal de 11.62 ml/s.

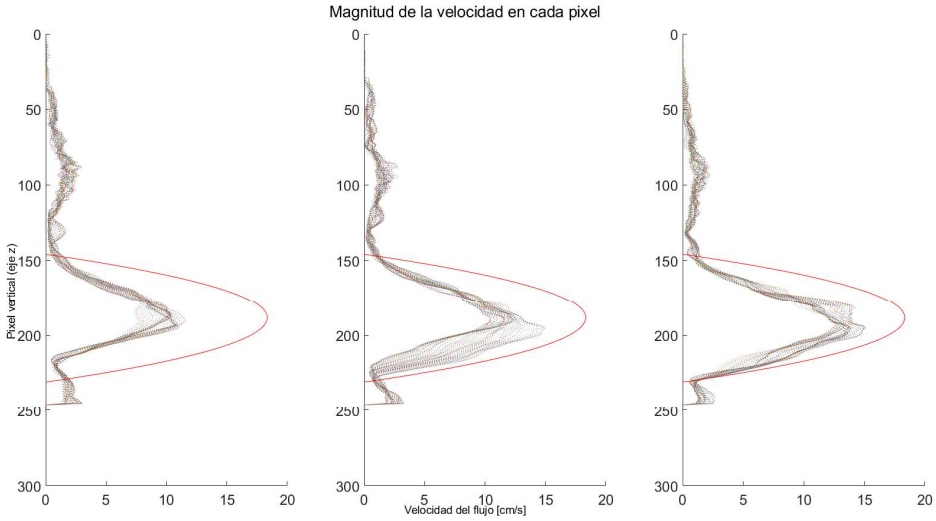


Figura 4.2: Velocidad promedio a lo largo del fantoma, para caudal de 11.62 ml/s. A la izquierda, se presentan las velocidades en el primer tercio, en el centro el segundo tercio y a la derecha el último tercio. Se grafica además el perfil parabólico esperado, según la Ecuación 4.2.

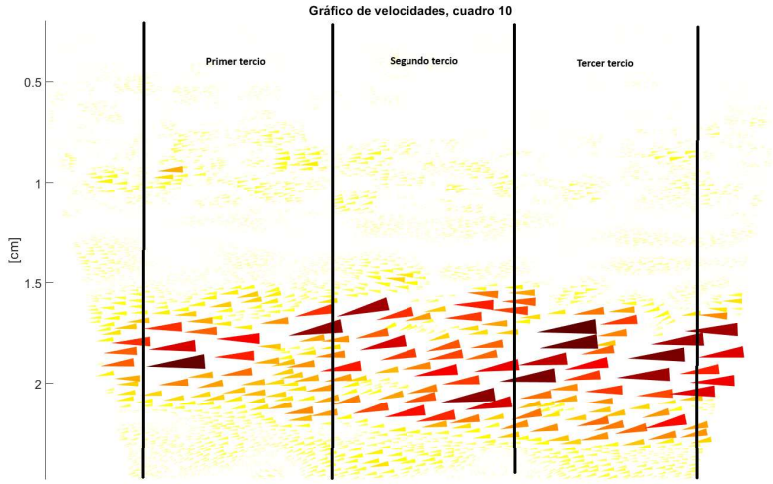


Figura 4.3: Secciones del fantoma utilizadas en el análisis, para caudal de 19.88 ml/s.

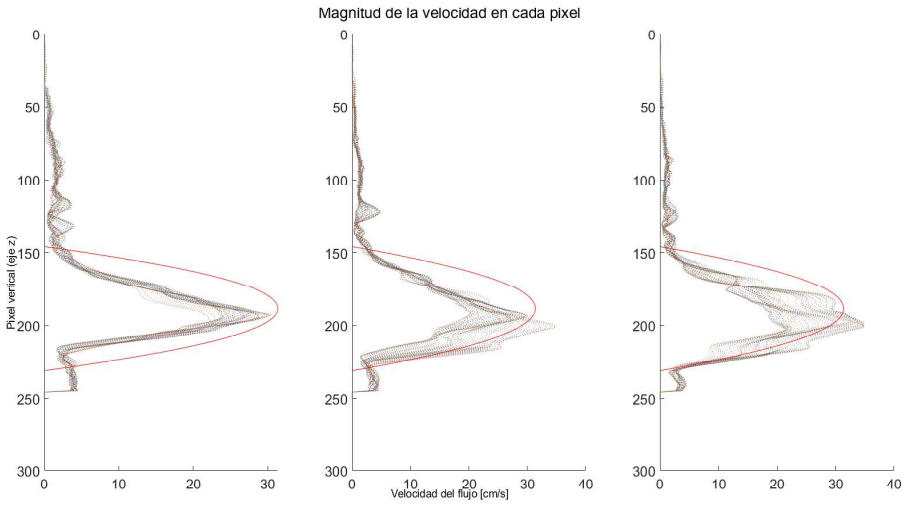


Figura 4.4: Velocidad promedio a lo largo del fantoma, para caudal de 19.88 ml/s. A la izquierda, se presentan las velocidades en el primer tercio, en el centro el segundo tercio y a la derecha el último tercio. Se grafica además el perfil parabólico esperado, según la Ecuación 4.2.

Se puede apreciar que para el voltaje de 500 mV, a medida que se evalúan las velocidades en el último tercio del fantoma el valor peak de la velocidad captada es alrededor de 15 cm/s, cercano al máximo establecido como referencia (los 18.34 [cm/s]). A lo largo de todo el fantoma se puede apreciar un perfil parabólico.

El mismo comportamiento se encuentra con el voltaje de 1000 mV; en el segundo y último tercio del fantoma, el valor peak de la velocidad captada es de entre 31 cm/s y 34 cm/s, cercano al máximo establecido como referencia (para este caso, 31.38 [cm/s]). De igual manera, a lo largo de todo el fantoma se puede apreciar un perfil parabólico.

Se puede apreciar de manera clara cuál es la región donde se ubica la parte central del fantoma (a una profundidad de entre 180 y 200 pixeles) y los bordes del mismo (el borde superior está a una profundidad de 150 pixeles y el borde inferior a 240, aproximadamente).

En cuanto a los efectos de reconstruir con diferentes tamaños de región de interés (5x5 y 11x11), se puede ver que el utilizar una región más extensa provoca un perfil de velocidad más suave, mientras que una región más pequeña presenta mayores irregularidades, como se aprecia en las Figuras 4.5 y 4.6.

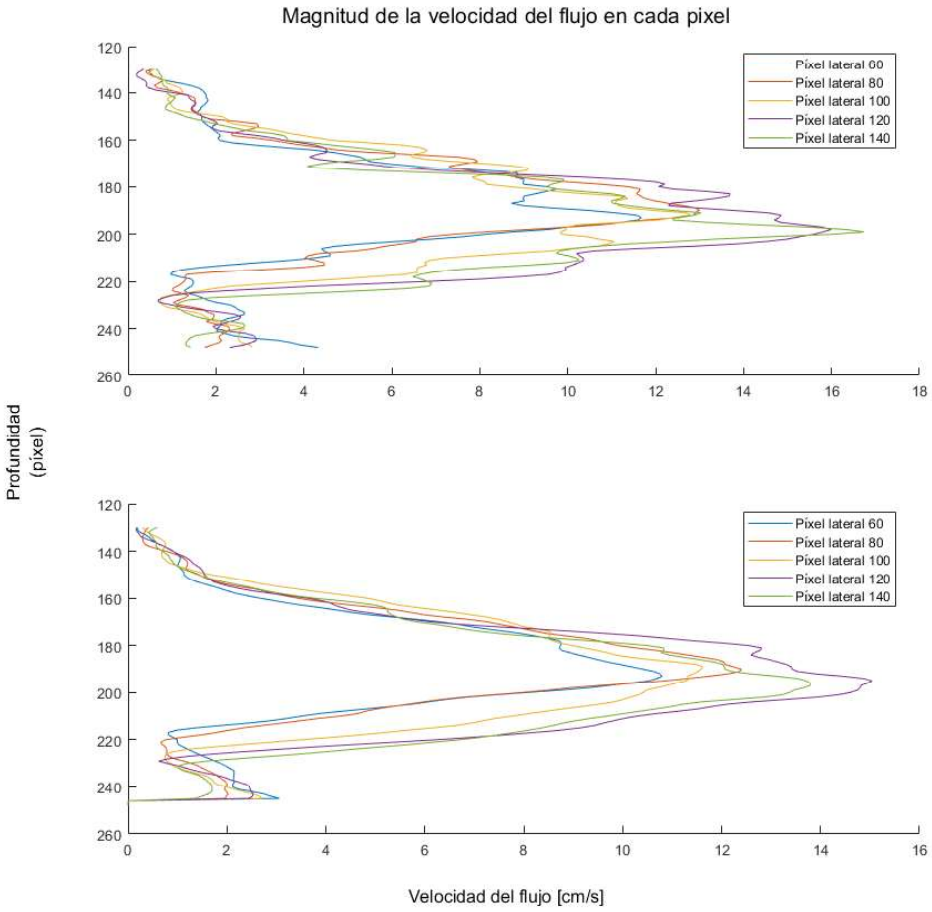


Figura 4.5: Comparación entre recomposición de 5x5 pixeles (imagen superior) y 11x11 pixeles (imagen inferior), caudal de 11.62 ml/s.

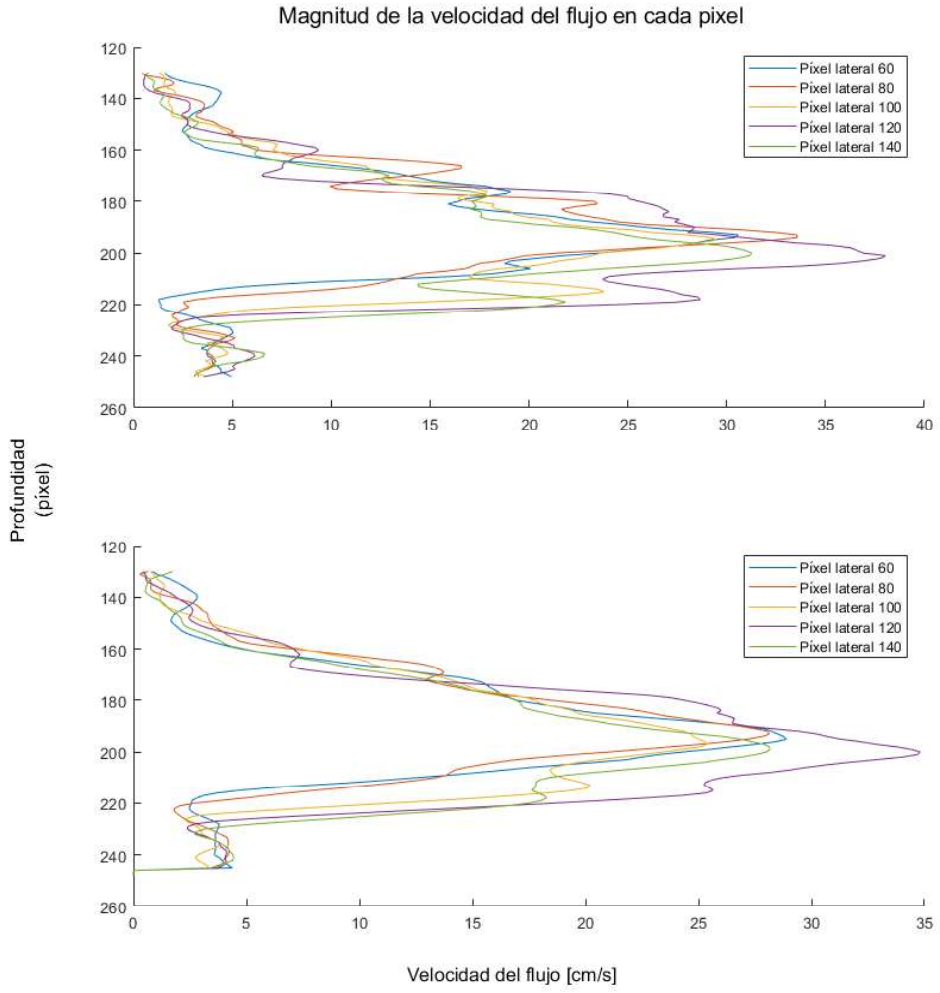


Figura 4.6: Comparación entre recomposición de 5x5 pixeles (imagen superior) y 11x11 pixeles (imagen inferior), caudal de 19.88 ml/s.

4.3. Evaluación del código con adquisiciones in vivo

Para facilitar el análisis de los resultados, a continuación se presentan los resultados de las velocidades obtenidas para toda la región de análisis, dividida en tercios (ver Figura 4.7).

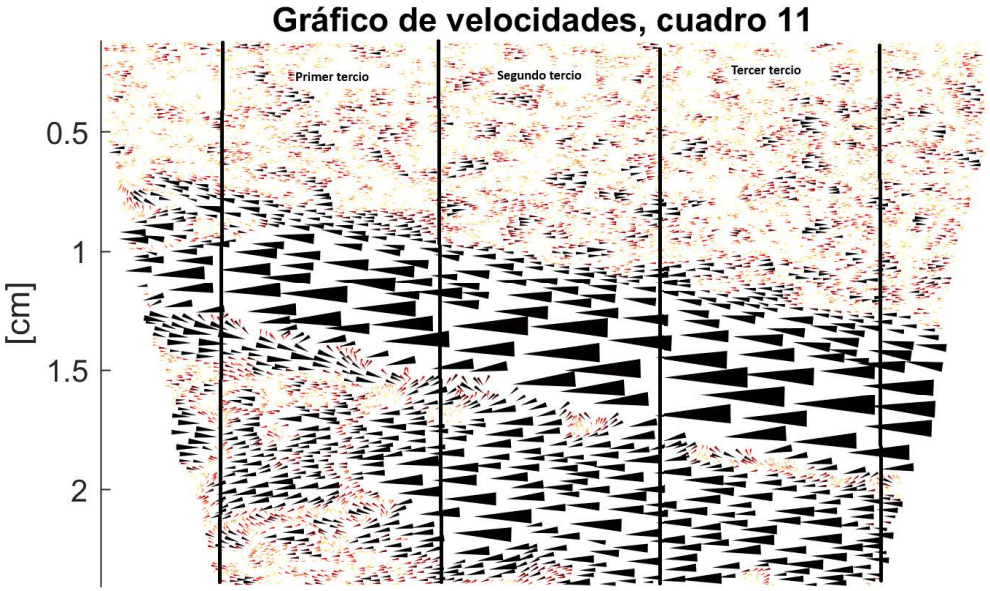


Figura 4.7: Secciones de la carótida utilizadas en el análisis.

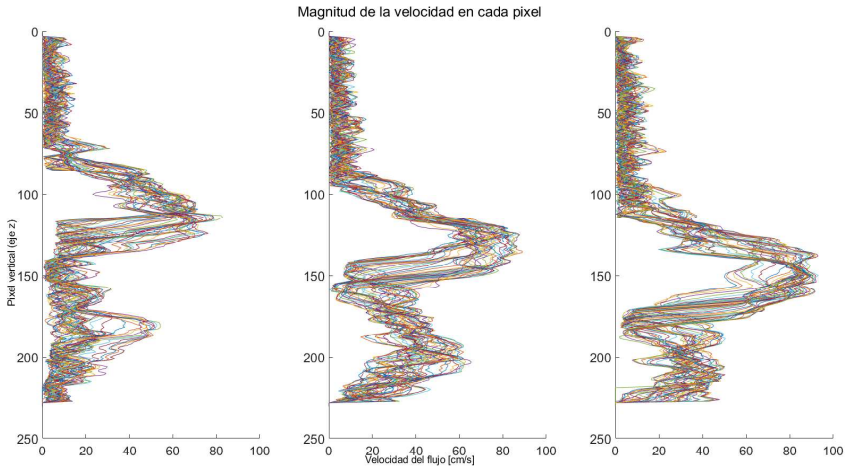


Figura 4.8: Magnitud de la velocidad en la región de interés. La imagen de la izquierda presenta el primer tercio, la imagen central el segundo tercio y la imagen derecha el último tercio.

Es posible ver cómo el peak de velocidad, a medida que se avanza hacia la derecha en la imagen, se encuentra a mayor profundidad, lo cual es congruente con lo exhibido en la Figura 4.8, donde se puede ver claramente que la carótida se encuentra a mayor

profundidad en la derecha de la región de interés.

También es posible ver que alrededor de la región carotídea se presenta ruido, el cual en la porción más superficial es de menor magnitud que en el sector que se encuentra a mayor profundidad. Esto puede deberse a que el filtro de pared aplicado no es el óptimo, lo cual puede verificarse de distintas maneras, pero dado que no es el foco principal de este trabajo la optimización del filtro utilizado, no se profundizará en ello. Aún así, se puede confirmar en trabajos posteriores, como por ejemplo con la selección de un filtro de pared mediante la optimización del criterio de información de Akaike.

Por último, se puede ver que el peak de velocidad en magnitud es entre 70 cm/s y 90 cm/s. Si bien es complejo determinar si este valor es preciso, se puede comparar de acuerdo a la velocidad sistólica máxima (VSM) de un adulto sano. La VSM de un adulto sano es, en una carótida normal, menor a 125 cm/s [1], o bien dentro del rango de 70 cm/s a 100 cm/s [2], por lo cual, los resultados obtenidos son congruentes con lo esperable.

Capítulo 5

Discusión

5.1. Uso de MATLAB como plataforma de codificación

Se seleccionó MATLAB como entorno de cálculo debido a que el equipo Verasonics Vantage trabaja con estructuras y funciones propias de este lenguaje de programación, lo que facilita la compatibilidad entre el código a desarrollar y las estructuras de datos resultantes de los procesos de adquisición. Además, las distintas librerías que presenta este lenguaje facilitan la implementación de funciones que calculan variables específicas del procesamiento de señales, como lo son distintos tipos de filtros, trabajo con números complejos, entre otras.

Si bien es posible implementar las funciones utilizadas y realizar los cálculos en otros lenguajes de programación, este trabajo no tiene como objetivo la utilización del lenguaje que realice los cálculos de la manera más rápida posible, sino que se buscó facilitar el manejo de la información y la programación.

5.2. Uso de MUST

Durante el desarrollo del presente trabajo, la librería MUST surgió como una solución a la programación de cálculos complejos, como lo es la determinación de la matriz utilizada para realizar el beamforming mediante DAS y la implementación de los distintos filtros de pared.

5.3. Codificación en base a funciones

Otro punto importante del código desarrollado es la ventaja de la codificación prácticamente completa del trabajo en funciones que realizan los distintos pasos necesarios para poder obtener y procesar las señales Doppler. Dado que las estructuras que se obtienen del equipo Verasonics Vantage contienen toda la información en cuanto a la programación previa del equipo para la adquisición de la información y las señales propiamente tales, el hecho de identificar automáticamente los parámetros requeridos para poder realizar los cálculos, además de detectar la manera en la cual los datos fueron adquiridos, ya sea en bloque, alterna, con cierta cantidad variable de adquisiciones, con una cantidad variable de ángulos de transmisión, entre otra gran cantidad de parámetros personalizables, disminuye el tiempo necesario en identificar y ordenar de forma manual todos los parámetros de adquisición, lo que a su vez minimiza la posibilidad de errores por parte del usuario al configurar los parámetros de reconstrucción.

Esto además abre la posibilidad de modificar esquemas de cálculo (o agregar y crear nuevos) de manera relativamente simple y rápida, utilizando como base las funciones que ya se encuentran programadas.

5.4. Métodos de validación utilizados

Las tres pruebas realizadas para validar los resultados fueron aplicadas a medida que se avanzaba con la programación del código, y representan tres estados de evolución del esquema de cálculo.

El primero se realizó para confirmar que cada una de las funciones utilizadas cumpliera su objetivo definido, dado que desde un principio se conocían los resultados a los cuales se debía llegar, a pesar de que era esperable cierto porcentaje de error.

Con el segundo experimento se buscó confirmar que las velocidades máximas detectadas en un entorno controlado se mantuvieran en el orden de magnitud esperable, para lo cual se utilizó un fantoma de diámetro interior conocido y una bomba que entrega un caudal de manera precisa.

Finalmente, se requirió validar el código en un entorno en el que se presentaran condiciones fisiológicas, lo cual involucra condiciones menos favorables con respecto a los experimentos anteriores. Por lo mismo, se optó directamente por utilizar las señales captadas al adquirir los datos de un adulto sano. Este experimento se utilizó para probar

la totalidad de las funciones programadas (incluido el filtro de pared) y confirmar que la velocidad máxima en la carótida determinada por el programa coincidiera con lo esperable en un adulto sano, y que las señales Doppler captadas se encontraran en la región en la cual se ubicaba la carótida en condiciones en las que se presentaba además ruido por los movimientos pulsátiles de las paredes arteriales.

Capítulo 6

Conclusión

El objetivo principal de este trabajo fue la implementación de la técnica Doppler vectorial para que funcionara con los datos adquiridos por el equipo Verasonics Vantage 128. Para lograr esto, se requirió un estudio exhaustivo de los pasos necesarios para trabajar con señales de ultrasonido, como lo son distintos fundamentos de procesamiento de señales, formación de imágenes, correlación cruzada, entre otras.

Se logró verificar que los resultados obtenidos en distintos experimentos controlados, como lo son el fantoma rotatorio y la evaluación del perfil de velocidad presente en un fantoma cilíndrico sometido a flujo estacionario, son congruentes con los valores esperados, y por lo tanto, se consideran satisfactorios.

A su vez, el código tuvo un comportamiento aceptable en la evaluación in vivo, detectando una velocidad sistólica máxima dentro del rango esperable en un adulto sano.

La programación de esta técnica abre las puertas a distintos estudios que son posibles realizar con el equipo presente en el Laboratorio de Ultrasonido Cuantitativo de la Universidad Técnica Federico Santa María, como lo son la evaluación de distintos filtros de pared en condiciones in vivo, mejoras de la técnica de mínimos cuadrados mediante la aplicación de pesos ponderados, mejoras en la velocidad de cálculo del esquema propuesto, la evaluación del salto de presión en la válvula aórtica analizando el campo vectorial que es posible obtener con el presente esquema, entre muchos otros.

Bibliografía

[1] Apollo Hospitals. Carotid ultrasound.

[2] Diplomado Médico. Método de exploración de las arterias carótidas.

[3] Johan Kirkhorn. Introduction to iq-demodulation of rf-data. 1999.

[4] Craig Madiena, Julia Faurie, Jonathan Poree, and Damien Garcia. Color and vector flow imaging in parallel ultrasound with sub-nyquist sampling. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 65:795–802, 5 2018.

[5] NI-FGEN User Manual. Nyquist and shannon's sampling theorems.

[6] Vincent Perrot, Maxime Polichetti, François Varray, and Damien Garcia. So you think you can das? a viewpoint on delay-and-sum beamforming. Ultrasonics, 111, 3 2021.

[7] Thomas Szabo and Peter Kaczkowski. Essentials of Ultrasound Imaging. 2023.

[8] Billy Y.S. Yiu and Alfred C.H. Yu. Least-squares multi-angle doppler estimators for plane-wave vector flow imaging. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 63:1733–1744, 11 2016.

[9] Kenny Jon Émile S. MD; Barjaktarevic Igor MD PhD; Mackenzie David C. MDCM; Elfarnawany Mai PhD; Math Zhen Yang B.; Eibl Andrew M. BComm; Eibl Joseph K. PhD; Kim Chul Ho PhD; Johnson Bruce D. PhD. Carotid doppler measurement variability in functional hemodynamic monitoring: An analysis of 17,822 cardiac cycles. Critical Care Explorations, 06 2021.

Anexo A

Demostración de la expresión 1.6

Comenzando con la expresión 1.5

$$f_{mn} = \frac{vcos(\theta_m - \alpha) + vcos(\phi_n - \alpha)}{c_0} f_0 \tag{A.1}$$

donde f_{mn} es la frecuencia de corrimiento Doppler, θ_m es el ángulo Tx utilizado, ϕ_n es el ángulo Rx seleccionado, α es el ángulo de la dirección del flujo sanguíneo con respecto al eje normal a la superficie del transductor, c_0 es la velocidad del sonido en el medio, f_0 es la frecuencia central del transductor y v es la magnitud de la velocidad del flujo. Al multiplicar por c_0 y dividir por f_0 se obtiene

$$\frac{c_0}{f_0} f_{mn} = vcos(\theta_m - \alpha) + vcos(\phi_n - \alpha) \tag{A.2}$$

luego al aplicar la propiedad del coseno de una resta de ángulos, donde $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)$:

$$\frac{c_0}{f_0} f_{mn} = v(cos(\alpha)cos(\theta) + sin(\alpha)sin(\theta) + cos(\alpha)cos(\phi) + sin(\alpha)sin(\phi)) \tag{A.3}$$

esta expresión puede reordenarse de la siguiente manera

$$\frac{c_0}{f_0} f_{mn} = v(cos(\alpha)cos(\theta) + cos(\alpha)cos(\phi) + sin(\alpha)sin(\theta) + sin(\alpha)sin(\phi)) \tag{A.4}$$

la cual puede ser factorizada

$$\frac{c_0}{f_0} f_{mn} = vcos(\alpha)(cos(\theta) + cos(\phi)) + vsin(\alpha)(sin(\theta) + sin(\phi)) \tag{A.5}$$

en este punto, se puede reemplazar $vcos(\alpha)$ por v_z y $vsin(\alpha)$ por v_x

$$\frac{c_0}{f_0} f_{mn} = v_z(cos\theta + cos\phi) + v_x(sin\theta + sin\phi) \tag{A.6}$$

obteniéndose la ecuación 1.6.