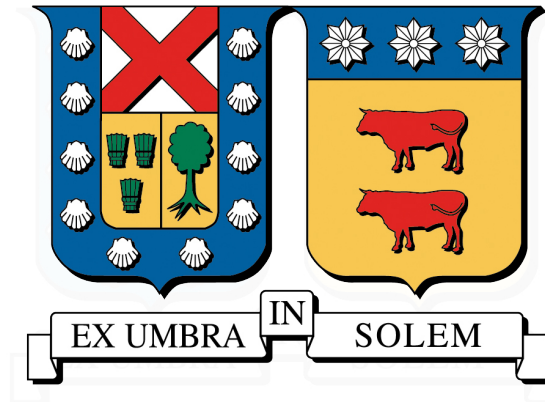


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
VALPARAÍSO - CHILE



**INTEGRACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN E
INVENTARIO:
CONVEXIDAD DE LOS BACKORDERS RESPECTO A LOS
PARÁMETROS DE DEMANDA**

RICARDO IGNACIO UGALDE LILLO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA : Dr. PABLO ESCALONA R.
PROFESOR REFERENTE : Dra. MÓNICA LÓPEZ C.

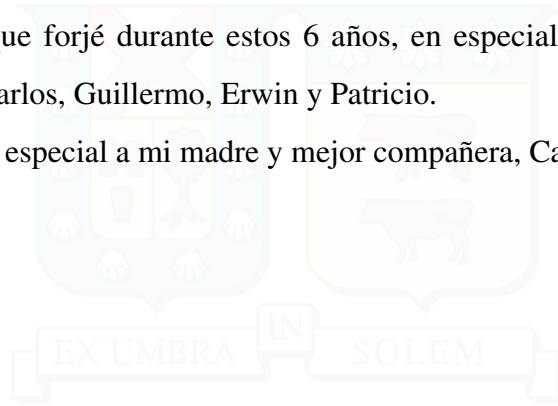
21 DE JUNIO DE 2017

Agradecimientos

Al profesor Pablo Escalona por la orientación a lo largo de la confección de este documento.

A las amistades que forjé durante estos 6 años, en especial a mis compañeros de generación y a Juan Carlos, Guillermo, Erwin y Patricio.

Y a mi familia. En especial a mi madre y mejor compañera, Carmen Gloria.





En memoria de mi tío Rafa.

Resumen Ejecutivo

En este trabajo se presenta un modelo integrado de localización e inventario. La política de inventario es formulada de manera exacta como un *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*. El modelo es relajado y descompuesto en un problema maestro *Uncapacited Facility Location Problem* y subproblemas *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*, con la intención de aplicar el Método de Descomposición de Benders Generalizado.

La finalidad de este trabajo es concluir sobre la convexidad de los subproblemas *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*, más específicamente, entregar evidencia numérica sobre la convexidad de los *backorders* de la política de inventario respecto a los parámetros de la política y a los parámetros de distribución de la demanda.

Palabras Clave: Diseño de Redes de Distribución, Modelos Integrados de Localización e Inventario, Backorders, Convexidad.

ABSTRACT

This work presents a joint location-inventory model. The inventory policy is formulated exactly as a *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*. The model is relaxed and decomposed in a master problem *Uncapacited Facility Location Problem* and primal problems *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*, with the intention of applying Generalized Benders Decomposition Method.

The purpose of this work is to conclude about the convexity of the primal problems *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*, more specifically, to give numerical evidence about the convexity of the backorders of the inventory policy, in respect to the parameters of the inventory policy and demand's distribution.

Keywords: Distribution Network's Design, Joint Location-Inventory Models, Backorders, Convexity.

Índice de Contenidos

1. Introducción	1
1.1. Problema de Investigación	1
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo General	3
1.2.2. Objetivos Específicos	3
2. Marco Teórico	4
2.1. Antecedentes	5
2.1.1. Joint Location-Inventory Problem with Differentiated Service Levels Using Critical Level Policy. (Escalona et al., 2015)	5
2.1.2. A Joint Location-Inventory Model. (Shen et al., 2003)	7
2.1.3. Incorporating Inventory Control Decisions into a Strategic Distribution Network Desing Model with Stochastic Demand. (Miranda y Garrido, 2004)	11
2.2. Base Teórica	14
2.2.1. Continuous Review (Q,r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time. (Axsäter, 2015)	14
2.2.1.1. Posición de Inventario y Nivel de Inventario	14
2.2.1.2. Costos	15
2.2.1.3. Formulación de la Función de Costos de Inventario	16
2.2.2. Fundamentos de Optimización no Lineal. (Amaya, 2009)	20
2.2.2.1. Caracterización de Optimalidad	20
2.2.2.2. Funciones Convexas	20
2.2.2.3. Funciones Convexas Diferenciables	21
2.2.2.4. Condiciones de Optimalidad	22
3. Formulación del Modelo	24
3.1. Formulación Exacta del Modelo Integrado de Localización e Inventario	24
3.2. Descomposición del Modelo	28
3.3. Componente de Backorders de los Subproblemas	32
3.4. Condiciones de Convexidad de la Componente de Backorders	32
3.5. Matriz Hessiana de la Componente de Backorders	32

4. Estudio Computacional	36
4.1. Parámetros Utilizados	36
4.2. Resultados Obtenidos	37
4.3. Conclusiones del Estudio Computacional	41
5. Conclusiones	42
5.1. Trabajos Posteriores	42
Bibliografía	43
A. Anexo A	44
B. Anexo B	46
C. Anexo C	48

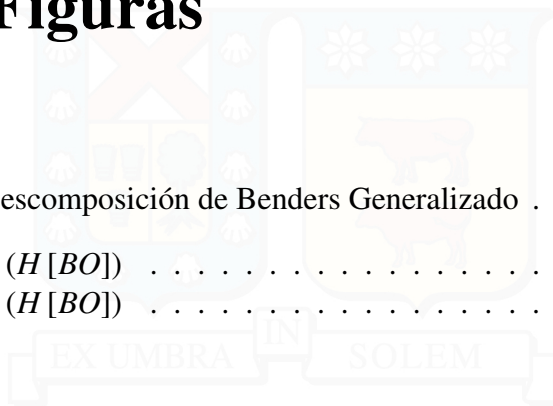


Índice de Tablas

4.1. Pruebas Numéricas	37
4.2. Estadísticas Descriptivas de Δ_1	39
4.3. Percentiles de Δ_1	39
4.4. Tabla de Frecuencia de valores de Δ_1	39
4.5. Estadísticas Descriptivas de Δ_2	40
4.6. Percentiles de Δ_2	40
4.7. Tabla de Frecuencia de valores de Δ_2	40
C.1. Muestra Pruebas Numéricas (1/4)	48
C.2. Muestra Pruebas Numéricas (2/4)	49
C.3. Muestra Pruebas Numéricas (3/4)	50
C.4. Muestra Pruebas Numéricas (4/4)	51

Índice de Figuras

3.1. Método de Descomposición de Benders Generalizado	31
4.1. Instancias $\Delta_1(H[BO])$	38
4.2. Instancias $\Delta_2(H[BO])$	38



1 | Introducción

1.1. Problema de Investigación

Por mucho tiempo, la literatura relacionada al diseño de redes de distribución, tendió a abordar las problemáticas de inventario y localización de manera separada, esto a causa de que corresponden a decisiones de nivel táctico y nivel estratégico respectivamente. Por un lado, la literatura que abordaba las decisiones de inventario de las redes, tendía a enfocarse en determinar las políticas óptimas de abastecimiento para los centros de distribución, y por otro lado la literatura que abordaba las decisiones de localización, tendía a enfocarse en determinar el número de centros de distribución, su localización y sus asignaciones.

La resolución por separado de los problemas de localización e inventario lleva a resultados sub-óptimos en el diseño de una red de distribución, lo anterior debido a la interdependencia de ambas problemáticas. De aquí nació la necesidad de abordar el diseño de redes de distribución de manera integral, lo que llevó al desarrollo de modelos que resolvieran de manera conjunta las temáticas de localización e inventario.

De este modo comienzan a aparecer formulaciones como las propuestas por [Daskin et al. \(2002\)](#) y [Shen et al. \(2003\)](#), en donde se determinan la cantidad, ubicación y asignación de los centros de distribución de una red, y simultáneamente su política de inventario. Respecto a la política de inventario, estos y otros autores asumen que la red de distribución es dominada por un *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*, pero aproximan la política de inventario mediante el Modelo de Lote Económico *EOQ*. El uso de la aproximación se basa en su amplia aceptación, los beneficios para la formulación y resolución de modelos, y su buen desempeño; que induce un error máximo

de un 12,5 % según [Zheng \(1992\)](#) y de 11,8 % según [Axsäter \(1996\)](#).

De aquí nace la motivación de desarrollar y resolver un modelo integrado de localización e inventario, en donde la política de inventario sea formulada de manera exacta como un *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*, con el antecedente que toda la literatura utiliza EOQ para aproximar la política de inventario ([Escalona et al., 2015](#)). Formulando y resolviendo el modelo descrito anteriormente, se espera poder cuantificar el efecto económico de utilizar la aproximación EOQ en el diseño de redes de distribución, obtenido a partir de modelos integrados de localización e inventario.

La problemática anterior se proyecta como una investigación de largo plazo. Dentro de esta línea investigativa se enmarca este trabajo, que como una primera etapa de este proceso, busca verificar la convexidad de un problema *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*, específicamente entregar evidencia de la convexidad de los *backorders* de la política.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Formular de manera exacta un modelo integrado de localización e inventario, en donde la política de inventario corresponda a un *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time* y determinar numéricamente si existe evidencia de convexidad de los *backorders* del modelo respecto a sus variables.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Formular el modelo integrado de localización con inventario sobre el cual se analizará convexidad de manera exacta.
- Desarrollar la formulación teórica de la Matriz Hessiana de los *backorders*.
- Diseñar experimentos aleatorios, en los cuales se hará el análisis de convexidad del modelo.
- Analizar los resultados de los experimentos aleatorios, y concluir sobre la convexidad de los *backorders* respecto a las variables de estudio.

2 | Marco Teórico

El marco teórico de este trabajo se divide en dos temáticas:

1. Antecedentes: en donde se revisa la literatura relacionada a la integración de los problemas de localización e inventario.
2. Base Teórica: en donde se desarrollan los principales conceptos que se tratarán y utilizarán a lo largo de esta investigación.

A partir de la revisión bibliográfica de trabajos en donde los problemas de localización e inventario se modelan de forma conjunta, se logra notar que todos los autores asumen que las redes de distribución son dominadas por políticas de inventario del tipo *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*, pero al momento de formular los modelos para su resolución, aproximan la política de inventario mediante el Modelo de Lote Económico. Lo anterior implica relajar la política de inventario, no considerando los *backorders* y solo garantizando mediante el mantenimiento de inventario de seguridad, el poder satisfacer demanda durante los periodos de reabastecimiento.

En la base teórica, se desarrolla de manera extendida la formulación de la política de inventario *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*, política sobre la cual se desarrollan la totalidad de los análisis de esta investigación. Por otra parte, se presentan los fundamentos de optimización no lineal de necesarios para caracterizar funciones convexas y sus propiedades.

2.1. Antecedentes

2.1.1. Joint Location-Inventory Problem with Differentiated Service Levels Using Critical Level Policy. (Escalona et al., 2015)

El objetivo del modelo propuesto en la publicación es determinar la configuración óptima de una red de distribución para artículos de alta rotación, en donde se utiliza una política de inventario racionada para entregar niveles de servicio diferenciados, en términos de disponibilidad de existencias, para dos clases de demandantes (clientes de baja y alta prioridad).

El diseño óptimo de la red de distribución, debe determinar la ubicación y cantidad de centros de distribución, además de los nodos demanda asignados a cada uno. Lo anterior minimizando los costos de instalación, transporte y almacenamiento, y al mismo tiempo cumpliendo con los niveles de servicio requeridos.

Los autores en la formulación del modelo asumen para cada centro de distribución:

- Política de inventario de revisión continua (Q, r), con un valor de umbral crítico C . En donde Q y r son respectivamente, el tamaño de lote fijo y punto de reorden fijo, y C es el nivel crítico por racionar los demandantes de baja prioridad.
- Demanda aleatoria con distribución normal, como una aproximación de la demanda no negativa de los artículos de alta rotación.
- Nivel de Servicio Tipo I, como medida de nivel de servicio.

En la revisión bibliográfica de trabajos relacionados, el artículo describe diversas publicaciones anteriores que desarrollan modelos en donde las decisiones de control de inventario y localización del diseño de una red de distribución son resueltas de manera conjunta.

En todas las formulaciones revisadas, los autores asumen que los sistemas de control de inventario que funcionan en cada centro de distribución operan con políticas de inventario de revisión continua (Q, r) con Nivel de Servicio Tipo I, en donde la demanda no satisfecha se

deja pendiente (*full-backorder*). Bajo esta política, se emite una orden de reabastecimiento para un lote de tamaño Q , cuando el nivel de inventario alcanza o cae por debajo de un nivel r . Basados en los resultados de las publicaciones de Zheng (1992) y Axsäter (1996), los autores aproximan la política de inventario (Q, r) asumiendo que en cada centro de distribución se determina el tamaño de lote Q usando el Modelo de Lote Económico (EOQ), mientras el punto de reorden r , se determina de modo que se asegure que la probabilidad de quiebres de inventario en cada centro de distribución sea menor o igual a cierto nivel de servicio preestablecido (Nivel de Servicio Tipo I). El nivel de servicio preestablecido es el mismo para toda la red de distribución. Adicionalmente, para cada centro de distribución se asume demanda aleatoria con distribución normal, como una aproximación de un proceso de demanda Poisson de gran volumen. Con estas aproximaciones, los parámetros para la política de inventario (Q, r) son el resultado de la óptima asignación de los nodos demanda a cada centro de distribución.

2.1.2. A Joint Location-Inventory Model. (Shen et al., 2003)

En este artículo, los autores se plantean la problemática de diseñar una red de distribución para un banco de sangre que abastece a distintos hospitales, motivados específicamente en la producción y distribución de plaquetas, el producto más perecible y costoso del banco.

Se considera el modelamiento conjunto de problema de localización e inventario, que involucra a un único proveedor y múltiples nodos demanda. La demanda asociada a cada nodo demanda es aleatoria, debido a esto, se debe mantener cierta cantidad de inventario de seguridad. Para aprovechar efectos de distribución de riesgo (*risk-pooling*), se les permite a ciertos nodos demanda funcionar como centros de distribución para otros nodos demanda. El modelo busca resolver que nodos demanda deberían funcionar como centros de distribución, y asignar los nodos demanda restantes a cada centro de distribución.

Formulación Extendida del Modelo

Cada centro de distribución es dominado por una política de inventario de revisión continua (Q, r) con Nivel de Servicio Tipo I, aproximada mediante EOQ.

La frecuencia de las ordenes y los tamaños de lote, son determinados por la demanda media que es asignada a cada centro de distribución. Cada centro de distribución mantiene ciertos niveles de inventario de seguridad, para protegerse ante la posibilidad de quiebres de inventario durante el tiempo de entrega.

De este modo el modelo busca resolver, dado un conjunto I de nodos demanda, cuántos y cuáles de ellos establecer como centros de distribución, que nodos demanda asignarles y establecer los tamaños de lote y punto de reorden de la política de inventario; de modo que se minimicen los costos totales de localización, transporte, manejo y mantenimiento de inventario.

Parámetros

- μ_i Demanda media (anual) en el nodo demanda i , para cada $i \in I$.
- σ_i^2 Varianza (diaria) de la demanda en el nodo demanda i , para cada $i \in I$.

- f_j Costo (anualizado) de instalar un centro de distribución en el nodo candidato j , para cada $j \in I$.
- $v_j(x)$ Costo de transportar x unidades desde el fabricante hasta el centro de distribución ubicado en el nodo candidato j , para cada $j \in I$.
- d_{ij} Costo unitario de transporte desde el nodo candidato j hasta el nodo demanda i , para cada $i, j \in I$.
- α Nivel de servicio deseado.
- β Ponderador asociado a los costos de transporte.
- θ Ponderador asociado a los costos de inventario.
- z_α Variable normal estándar, de modo que $\mathbb{P}(z \leq z_\alpha) = \alpha$.
- h Costo anual unitario de almacenamiento.
- $\omega_j(x)$ Costo anual total de manejo de inventario en el centro de distribución j , si la demanda diaria esperada para j es x , para cada $j \in I$.
- F_j Costo (anualizado) de emitir una orden en el centro de distribución j , para cada $j \in I$.
- L Tiempo de entrega en días.

Variables de Decisión

- $X_j = 1$, Si el nodo candidato j es seleccionado como centro de distribución, toma valor 0 en otro caso. Para cada $j \in I$.
- $Y_{ij} = 1$, Si el nodo demanda i es abastecido por el centro de distribución localizado en el nodo candidato j , toma valor 0 en otro caso. Para cada $i, j \in I$.

Modelo Compacto

$$(P) : \quad \underset{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}{\text{Min}} \quad \sum_{j \in I} \left\{ f_j X_j + \beta \sum_{i \in I} \mu_i d_{ij} Y_{ij} + \omega_j \left(\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \right) + \theta h z_\alpha \sqrt{\sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij}} \right\} \quad (2.1)$$

$$s.t. \quad \sum_{i \in I} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (2.2)$$

$$Y_{ij} - X_j = 0, \quad \forall i, j \in I \quad (2.3)$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in I \quad (2.4)$$

$$X_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in I \quad (2.5)$$

La función objetivo (2.1) minimiza cuatro costos ponderados en orden respectivo: costo de instalación de centros de distribución (anualizado), costo de transporte desde los centros de distribución hasta los nodos demanda, costo esperado de manejo de inventario y costos de inventario de seguridad. La restricción (2.2) establece que cada nodo demanda es asignado a solo un centro de distribución y la restricción (2.3) establece que los nodos demanda solo pueden ser asignados a nodos candidatos seleccionados como centro de distribución. Las restricciones (2.4) y (2.5) son de naturaleza de las variables binarias.

Omitiendo el índice j , y sean D la demanda total anual y n el número de reabastecimientos anuales, para cada centro de distribución. Sea $AC(n)$ el costo total de la política de inventario para cada centro de distribución:

$$AC(n) = Fn + \beta v \left(\frac{D}{n} \right) n + \theta \frac{hD}{2n} \quad (2.6)$$

Los términos de la ecuación 2.6 representan respectivamente: el costo total anual de emisión de órdenes de reabastecimiento, el costo total anual de transporte y el costo promedio de manejo de inventario.

Asumiendo que el costo $v(x)$ es de la forma $v(x) = g + ax$ y usando el Modelo de Lote Económico en la función de costos $AC(n)$, minimizando el número anual de órdenes de

reabastecimiento n , la ecuación (2.6) queda de la forma:

$$AC = \sqrt{2\theta h D (F\beta g)} + \beta a D \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.7) por los términos asociados a la política de inventario de la función objetivo, y teniendo en cuenta que $D = \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}$, la función objetivo (2.1) queda de la forma:

$$\begin{aligned} \underset{X, Y}{Min} \quad & \sum_{j \in I} \left\{ f_j X_j + \left[\sum_{i \in I} (\beta \mu_i d_{ij} Y_{ij} + \beta a_j \mu_i) Y_{ij} \right] \right. \\ & \left. + \sqrt{2\theta h (F_j + \beta g_j)} \sqrt{\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}} + \theta h z_\alpha \sqrt{\sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij}} \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1.3. Incorporating Inventory Control Decisions into a Strategic Distribution Network Design Model with Stochastic Demand. (Miranda y Garrido, 2004)

El artículo propone incorporar decisiones de control de inventario, tales como decisiones de tamaño de lote e inventario de seguridad, en un modelo de localización de instalaciones; esto para una resolución simultánea. Se formula un *Capacited Facility Location Problem (CFLP)* que incorpora decisiones y costos asociados a inventario.

Formulación del Modelo

Para cada almacén ubicado en el nodo candidato i , se considera un sistema de inventario (Q, r) con revisión continua, que enfrenta demanda aleatoria con distribución normal de media D_i (unidades por día) y varianza U_i . Se considera que el proveedor tarda LT_i (días) en satisfacer una orden de abastecimiento del almacén ubicado en el nodo candidato i . Estas órdenes, de tamaño Q_i , se emiten cuando el nivel de inventario alcanza o cae por debajo de r_i . La política de inventario no considera o penaliza demanda insatisfecha, pero establece un punto de reorden r_i capaz de satisfacer la demanda generada durante el tiempo de entrega LT_i , con una probabilidad $1 - \alpha$. Esta probabilidad es el Nivel de Servicio Tipo I, uniforme en toda la red y renombrado K desde aquí en adelante.

Sean, HC_i ; el costo de mantener inventario (por unidad por unidad de tiempo) del almacén ubicado en el nodo candidato i , OC_i ; el costo de emisión de orden de abastecimiento del almacén ubicado en el nodo candidato i , RC_i ; el costo de transporte unitario desde el proveedor hasta el almacén ubicado en el nodo candidato i , TC_{ij} ; el costo de transporte unitario desde el almacén ubicado en el nodo candidato i hasta el nodo demanda j , TH ; el horizonte de planificación de la red, F_i ; el costo (anualizado) de instalar el almacén en el nodo candidato i , y las variables:

- Z_i , toma valor 1, si el almacén se instala en el nodo candidato i , 0 en otro caso.
- Y_{ij} , toma valor 1, si el nodo demanda j es abastecido por el almacén ubicado en el nodo candidato i , 0 en otro caso.

Teniendo en cuenta que $\sum_{j=1}^M d_j Y_{ij} = D_i, \forall i = 1, \dots, N$, el costo total del diseño de la red es:

$$\begin{aligned} \underset{Z, Y}{\text{Min}} \left\{ \sum_{i=1}^N F_i Z_i + TH \sum_{i=1}^N HC_i K \sqrt{LT_i} \sqrt{U_i} + TH \sum_{i=1}^N HC_i \frac{Q_i}{2} \right. \\ \left. + TH \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(TC_{ij} + RC_i + \frac{OC_i}{Q_i} \right) d_j Y_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Los términos de la ecuación (2.9) son respectivamente: el costo total de instalación de los almacenes, el costo total de mantener el inventario de seguridad, el costo total de mantener el inventario promedio y el costo total de emisión de órdenes de abastecimiento.

La función objetivo (2.9), es reformulada considerando el tamaño de lote óptimo Q_i para cada almacén i , derivando la función objetivo respecto a Q_i , para cada $i = 1, \dots, N$, e igualando a cero. Este paso corresponde al uso del Modelo de Lote Económico en la formulación planteada.

A los parámetros y variables mencionados anteriormente, se añaden:

- Cap_i Capacidad de almacenamiento del almacén ubicado en el nodo candidato i .
- u_j Varianza de la demanda por unidad de tiempo del nodo demanda j .

Modelo Compacto

$$(P) : \underset{\mathbf{Z}, \mathbf{Y}}{\text{Min}} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N F_i Z_i + TH \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (TC_{ij} + RC_i) d_j Y_{ij} + \sum_{i=1}^N TH \sqrt{2HC_i OC_i} \sqrt{D_i} \\ & + TH \sum_{i=1}^N HC_i K \sqrt{LT_i} \sqrt{U_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^N Y_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \dots, M \quad (2.11)$$

$$\sum_{j=1}^M d_j Y_{ij} \leq Cap_i Z_i, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

$$\sum_{j=1}^M d_j Y_{ij} \leq D_i, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

$$\sum_{j=1}^M Y_{ij} u_j \leq U_i, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.14)$$

$$Z_i, Y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M \quad (2.15)$$

La ecuación (2.10) es la función objetivo luego de haber reemplazado Q_i por la fórmula EOQ, la ecuación (2.11) asegura que cada nodo demanda es atendido por un almacén, la ecuación (2.12) restringe la demanda atendida por cada almacén a su capacidad máxima de almacenamiento, la ecuación (2.13) establece la varianza total de la demanda atendida por cada almacén, y finalmente (2.14) son las restricciones de naturaleza de las variables binarias Z_j e Y_{ij} .

2.2. Base Teórica

2.2.1. Continuous Review (Q,r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time. (Axsäter, 2015)

Dos de las más comunes políticas de aprovisionamiento en control de inventarios son las políticas (Q, r) y (S, s) . En una política de inventario (Q, r) , cuando el nivel de inventario alcanza o cae por debajo del punto de reorden r , se emite una orden de aprovisionamiento. La orden es por Q unidades, si esto es suficiente para llevar el nivel de inventario por sobre r . De no ser así, la orden es por la cantidad mínima necesaria para llevar el nivel de inventario por sobre r .

Cuando el sistema de control de inventario está diseñado de tal manera que el nivel de inventario es monitoreado continuamente, y cuando las ordenes de reaprovisionamiento son emitidas en el momento exacto en que el nivel de inventario es suficientemente bajo, se habla de una política de inventario de revisión continua (*Continuous Review*).

2.2.1.1. Posición de Inventario y Nivel de Inventario

El propósito de un sistema de control de inventario es determinar cuándo y por qué cantidad emitir ordenes de aprovisionamiento. Estas decisiones deben basarse en la situación actual del inventario, la demanda proyectada y costos asociados.

La situación actual del inventario, no solo debe considerar las existencias disponibles (*on-hand inventory*), sino debe también incluir ordenes de aprovisionamiento pendientes (*outstanding orders*); existencias que aún no han llegado y pedidos pendientes (*backorders*); existencias que aún no se han entregado. La situación actual de inventario, queda caracterizada por la Posición de Inventario (*Inventory Position*).

$$\text{Inventory Position} = \text{on-hand inventory} + \text{outstanding orders} - \text{backorders}$$

A pesar de que las decisiones referidas a órdenes de aprovisionamiento se hagan a partir

de la posición de inventario, los costos de manejo de inventario; asociados a existencias disponibles y penalizaciones por escasez; asociadas a pedidos pendientes, dependen del Nivel de Inventario (*Inventory Level*).

$$\text{Inventory Level} = \text{on-hand inventory} - \text{backorders}$$

En un sistema de inventario (Q, r) con revisión continua, en el momento en que el nivel de inventario alcanza o cae por debajo del punto de reorden r , se genera una orden de abastecimiento de tamaño Q y la posición de inventario alcanza el valor $r+Q$. La posición de inventario comienza a caer a causa de la demanda generada durante el tiempo de entrega L . Cuando la orden de abastecimiento llega, el nivel de inventario sube hasta la posición de inventario.

2.2.1.2. Costos

Los costos de la política de inventario, considera los costos totales de emisión de órdenes de aprovisionamiento (*Ordering Cost*) y el costo total de manejo de inventario (*Holding Cost*).

Los costos de emisión, en general, son costos fijos asociados al aprovisionamiento. En el caso de aprovisionamiento interno, los costos fijos están asociados a costos de administración (asociados al procesamiento de las órdenes), a costos de inicio de producción, y a costos de transporte y manejo interno. Por otro lado, en el caso de aprovisionamiento externo, los costos fijos están asociados a la emisión de una orden, autorización, recepción e inspección de los lotes y manejo de las facturas del proveedor.

Los costos de manejo de inventario, están asociados a costos de almacenamiento, daños y obsolescencia, seguros e impuestos. También parte de este costo, está asociado al costo de oportunidad de mantener inventario, relacionado al retorno de inversiones alternativas. En general, el costo de manejo de inventario se expresa como porcentaje del valor de las existencias.

2.2.1.3. Formulación de la Función de Costos de Inventario

La función de costos de inventario comprende los costos totales de emisiones de órdenes de aprovisionamiento y costos totales de mantenimiento de inventario, asociados a una política de inventario (Q, r) .

El costo total asociado a las emisiones de órdenes de aprovisionamiento es el producto del número total de órdenes de aprovisionamiento n , por el costo unitario de la orden de aprovisionamiento S . El costo asociado total asociado al mantenimiento de inventario corresponde al producto del costo por unidad y unidad de tiempo de mantener inventario h y el nivel de inventario esperado. Sea $AC(Q, r)$ el costo total de la política de inventario:

$$AC(Q, r) = Sn + h\mathbb{E}[\text{Nivel de Inventario}] \quad (2.16)$$

El número total de órdenes de aprovisionamiento n , puede ser obtenido dividiendo la media de la demanda anual μ en el tamaño de lote Q que se ordenará en cada ciclo de reabastecimiento. Por su parte, el nivel de inventario esperado se separa en los valores esperados de sus componentes, existencias disponibles y pedidos pendientes.

$$AC(Q, r) = S \frac{\mu}{Q} + h(\mathbb{E}[\text{On-Hand Inventory}] - \mathbb{E}[\text{Backorders}]) \quad (2.17)$$

La esperanza del inventario disponible a la mano, puede ser expresada como la suma del inventario promedio mantenido por la política $Q/2$ con el inventario de seguridad, que es la diferencia entre el punto de reorden r con la demanda generada durante el tiempo de entrega $\mu' = \mu L$.

$$\mathbb{E}[\text{On-Hand Inventory}] = \left(\frac{Q}{2} + r - \mu' \right) \quad (2.18)$$

Suponiendo que la demanda por unidad de tiempo es una variable aleatoria con distribución normal $(\sim N(\mu, \sigma^2))$, y sea $f(x)$ la función de densidad de probabilidad del nivel de inventario, la esperanza de los *backorders* queda expresada por la ecuación (2.19).

$$\begin{aligned}
-\mathbb{E}[\text{Backorders}] &= - \int_{-\infty}^0 u f(u) du = \int_{-\infty}^0 f(u) \left(\int_u^0 dx \right) du \\
&= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^x f(u) du dx = \int_{-\infty}^0 F(x) dx
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Con $F(x)$, la función de distribución de probabilidad del nivel de inventario.

Supongamos un sistema de control de inventario que enfrenta demanda con distribución Poisson Compuesta, y controlado por una política de revisión continua (Q, r) . Desde el momento en que la posición de inventario (IP) entra en estado estacionario, solo se moverá entre los valores $r + 1 \leq IP \leq r + Q$. Para este rango de valores la posición de inventario distribuye uniformemente.

Sea p_{ij} , la probabilidad que la posición de inventario salte desde el valor i hasta el valor j . Se tiene:

$$\sum_{i=1}^Q p_{ij} = 1 \Rightarrow \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^Q p_{ij} = \frac{1}{Q}, \quad \forall j = \{1, \dots, Q\} \tag{2.20}$$

Sea $D(L)$, la demanda generada durante el tiempo de entrega L y utilizando la propiedad mencionada anteriormente en (2.20), se tiene que la probabilidad que el nivel de inventario tome valor j es:

$$\mathbb{P}[IL = j] = \frac{1}{Q} \sum_{k=\max\{r+1, j\}}^{r+Q} \mathbb{P}[D(L) = k - j], \quad \forall j \in [r + 1, r + Q] \tag{2.21}$$

Sean $\mu' = \mu L$ y $\sigma' = \sigma \sqrt{L}$, la demanda y desviación estándar generada durante el tiempo de entrega, y además sea $\Phi(x)$, la función de distribución de probabilidad para una distribución normal. Se extiende para el caso de demanda aleatoria con distribución normal, la propiedad que la posición de inventario se distribuye uniformemente en el intervalo $[r, r + Q]$. De esta manera, la función $F(x)$ es:

$$F(x) = \mathbb{P}[IL \leq x] = \frac{1}{Q} \int_r^{r+Q} \left(1 - \Phi\left(\frac{u - x - \mu'}{\sigma'}\right) \right) du \tag{2.22}$$

Se introduce la Función de Pérdida $G(x)$, que se define como:

$$G(x) = \int_x^{\infty} (v - x) \varphi(v) dv = \varphi(x) - x(1 - \Phi(x)) \quad (2.23)$$

Con $\varphi(x)$ y $\Phi(x)$, las funciones de densidad y distribución de probabilidad de una distribución normal, respectivamente.

La función $G(x)$, tiene la presente propiedad:

$$G'(x) = \Phi(x) - 1 \quad (2.24)$$

De este modo, la ecuación (2.22) queda de la forma:

$$F(x) = \mathbb{P}[IL \leq x] = \frac{1}{Q} \int_r^{r+Q} -G'\left(\frac{u-x-\mu'}{\sigma'}\right) du \quad (2.25)$$

Reemplazando la ecuación (2.25) en la ecuación (2.19), tenemos que la expresión de *backorders* es:

$$-\mathbb{E}[\text{Backorders}] = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{Q} \int_r^{r+Q} -G'\left(\frac{u-x-\mu'}{\sigma'}\right) dudx \quad (2.26)$$

Cambiando el orden de integración de la ecuación (2.26) y resolviendo para la variable x , se obtiene:

$$-\mathbb{E}[\text{Backorders}] = \frac{\sigma'}{Q} \int_r^{r+Q} G\left(\frac{u-x-\mu'}{\sigma'}\right) du \quad (2.27)$$

En este punto, se define la función $H(x)$, que se define como:

$$H(x) = \int_x^{\infty} G(v) dv = \frac{1}{2} \left[(x^2 + 1)(1 - \Phi(x)) - x\varphi(x) \right] \quad (2.28)$$

Teniendo en cuenta que $H'(x) = -G(x)$, e integrando la ecuación (2.27), finalmente se tiene que la esperanza de los *backorders* es:

$$-\mathbb{E}[\text{Backorders}] = \frac{\sigma'^2}{Q} \left(H\left(\frac{r-\mu'}{\sigma'}\right) - H\left(\frac{Q+r-\mu'}{\sigma'}\right) \right) \quad (2.29)$$

Como último paso, se reemplazan en la ecuación (2.17) las expresiones (2.18) y (2.29), que corresponden respectivamente al valor esperado de inventario disponible a la mano y

pedidos pendientes. Así, finalmente, la función de costos totales de inventario es:

$$AC(Q, r) = S \frac{\mu}{Q} + h \left[\left(\frac{Q}{2} + r - \mu' \right) + \frac{\sigma'^2}{Q} \left(H \left(\frac{r - \mu'}{\sigma'} \right) - H \left(\frac{Q + r - \mu'}{\sigma'} \right) \right) \right] \quad (2.30)$$



2.2.2. Fundamentos de Optimización no Lineal. (Amaya, 2009)

2.2.2.1. Caracterización de Optimalidad

De manera general, un modelo de optimización es de la forma:

$$(P) : \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} f(\mathbf{x})$$

$$s.t. \quad \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

Con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, la Region Factible del problema, un conjunto definido por ecuaciones no necesariamente lineales. Y $f(\mathbf{x})$ una función cualquiera.

Definición 2.1 Se dirá que el punto $\mathbf{x}^* \in D$ es mínimo local de f si existe un $\varepsilon > 0$, que satisfaga $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in D$, tal que $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\| < \varepsilon$. Es decir, que existe una vecindad para \mathbf{x}^* , en donde el punto es mínimo.

Definición 2.2 Se dirá que el punto es mínimo global de f , si $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in D$. Es decir, es solución del problema (P).

En términos de nomenclatura usada, el elemento $\mathbf{x}^* \in D$ se conoce como solución factible de (P). Si $\mathbf{x}^* \in D$ resuelve (P) se puede decir que es solución, solución óptima, mínimo, o solución global del problema.

Teorema 2.1 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con D un conjunto convexo no vacío, y \mathbf{x}^* una solución local del problema (P). Se tiene:

1. Si f es convexa, \mathbf{x}^* es mínimo global.
2. Si f es estrictamente convexa, \mathbf{x}^* es el único mínimo global.

2.2.2.2. Funciones Convexas

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Se dice que la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa si y sólo si:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in D, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Una función f , definida como antes, se dice estrictamente convexa si y sólo si:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x \neq y \in D, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Geoméricamente, la definición dice que la imagen de la función f del intervalo $[x, y]$ queda por debajo de la recta que une $(x, f(x))$ con $(y, f(y))$

2.2.2.3. Funciones Convexas Diferenciables

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacío. Y una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable. Se definen:

Definición 2.3 *Vector Gradiente de f :*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)$$

Como el vector formado por las derivadas parciales de primer orden de la función.

Definición 2.4 *La matriz Hessiana de f :*

$$Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Como la matriz formada por las derivadas parciales de segundo orden de la función.

Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas de orden n cuyas componentes pertenecen a \mathbb{R} , y sea la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se define:

Definición 2.5 *El Menor Esquina de orden k , se define como el determinante de la submatriz compuesta por las primeras k filas y las primeras k columnas de la matriz A :*

$$\Delta_k(A) = \det(A_{\{1, \dots, k\}, \{1, \dots, k\}}), \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

Teorema 2.2 Si todos los menores esquina de la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ son mayores estrictos que cero, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que la matriz A es definida positiva.

$$\Delta_k(A) > 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \Rightarrow \quad A > 0$$

Por su parte, si todos los menores esquina de la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ son mayores o iguales que cero, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que la matriz A es semi-definida positiva.

$$\Delta_k(A) \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \Rightarrow \quad A \geq 0$$

Teorema 2.3 Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, abierto y convexo. Y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en D . Entonces la función f es convexa, si y sólo si su matriz hessiana es definida semi-positiva para todo punto del conjunto D ($Hf(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D$).

Corolario 2.1 Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, abierto y convexo. Y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en D . Se tiene que:

1. Si $Hf(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D$, entonces la función f es estrictamente convexa.
2. Si la función f es estrictamente convexa, entonces $Hf(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D$.

2.2.2.4. Condiciones de Optimalidad

A continuación, se enunciarán las condiciones necesarias y suficientes para resolver problemas no lineales de la forma:

$$(P) : \quad \text{Min } f(\mathbf{x})$$

$$s.t. \quad \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

En general, se supondrá que f es una función dos veces diferenciable.

Condiciones necesarias de optimalidad

Teorema 2.4 Sea \mathbf{x}^* solución local de (P), $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto que contiene a \mathbf{x}^* y f una función cuyas segundas derivadas parciales son continuas en D ($f \in C^2(D)$).

Entonces:

- $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$
- $Hf(\mathbf{x}^*) \geq 0$

Teorema 2.5 Sea f una función convexa y diferenciable sobre un conjunto convexo D . Si el conjunto D es abierto, $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$, es una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{x}^* \in D$ sea mínimo global de f sobre D .

Condición Suficiente de optimalidad

Teorema 2.6 Sea $f \in C^2(D)$, con D un conjunto abierto. Supongamos que $\mathbf{x}^* \in D$ satisface:

- $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$
- $Hf(\mathbf{x}^*) > 0$

Entonces, \mathbf{x}^* es mínimo local estricto de f sobre D .

3 | Formulación del Modelo

3.1. Formulación Exacta del Modelo Integrado de Localización e Inventario

Se modela una red de distribución, mediante un problema integrado de localización e inventario. La red de distribución involucra un único proveedor, múltiples nodos candidatos para la localización de centros de distribución y múltiples nodos demanda. Los centros de distribución están dominados por una política de inventario del tipo *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*, y enfrentan demanda aleatoria con distribución normal. A causa de la demanda aleatoria, los centros de distribución deben mantener cierta cantidad de inventario de seguridad, de modo que se asegure cierto nivel de servicio, asociado a la probabilidad de disponibilidad de existencias durante un ciclo de reabastecimiento. La demanda no satisfecha durante un ciclo de reabastecimiento, se dejarán como órdenes de compra pendientes.

El modelo es formulado como un *Uncapacited Facility Location Problem* en conjunto a una política de inventario *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time*.

El modelo busca determinar la cantidad de centros de distribución de la red, su localización y sus asignaciones nodos demanda, además de establecer los tamaños de lote y puntos de reorden de la política de inventario de cada centro de distribución; de modo que se minimicen los costos totales asociados la localización de centros de distribución, el transporte de existencias y la política de inventario.

Formulación Extendida

Conjuntos

- I Conjunto de nodos demanda, indexado por i .
- J Conjunto de nodos candidatos para localizar centros de distribución, indexado por j .

Parámetros

- μ_i Demanda media (anual) en el nodo demanda i , para cada $i \in I$.
- σ_i^2 Varianza (diaria) de la demanda en el nodo demanda i , para cada $i \in I$.
- f_j Costo (anualizado) de instalar un centro de distribución en el nodo candidato j , para cada $j \in J$.
- S_j Costo de emitir una orden de abastecimiento en el nodo candidato j , para cada $j \in J$.
- a_j Costo unitario de transporte desde el proveedor hasta el centro de distribución ubicado en j , para cada $j \in J$.
- d_{ij} Costo unitario de transporte desde el centro de distribución ubicado en j hasta el nodo demanda i , para cada $i \in I$ y $j \in J$.
- h_j Costo anual unitario de almacenamiento en el nodo candidato j , para cada $j \in J$.
- L_j Tiempo de entrega en días para el nodo candidato j , para cada $j \in J$.
- α Nivel de servicio deseado.
- z_α Variable normal estándar, de modo que $\mathbb{P}(z \leq z_\alpha) = \alpha$.

Variables de Decisión

- Q_j Tamaño de lote fijo para el centro de distribución ubicado en el nodo candidato j . Para cada $j \in J$.

- r_j Punto de reorden para el centro de distribución ubicado en el nodo candidato j .
Para cada $j \in J$.
- $X_j = 1$, Si el nodo candidato j es seleccionado como locación de un centro de distribución, toma valor 0 en otro caso. Para cada $j \in J$.
- $Y_{ij} = 1$, Si el nodo demanda i es abastecido por el centro de distribución localizado en el nodo candidato j , toma valor 0 en otro caso. Para cada $i \in I$ y $j \in I$.

Modelo Compacto

$$(P0) : \quad \underset{X, Y, Q, r}{\text{Min}} \quad \sum_{j \in J} \left\{ \begin{aligned} & f_j X_j + S_j \frac{\sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}}{Q_j} + a_j \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} + \sum_{i \in I} d_{ij} \mu_i Y_{ij} \\ & + h_j \left(\frac{Q_j}{2} + r_j - L_j \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \right. \\ & \left. + \frac{L_j \sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij}}{Q_j} \left[H \left(\frac{r_j - L_j \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}}{\sqrt{L_j \sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij}}} \right) - H \left(\frac{r_j + Q_j - L_j \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}}{\sqrt{L_j \sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij}}} \right) \right] \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$s.t. \quad \sum_{j \in J} Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.2)$$

$$Y_{ij} \leq X_j \quad \forall i, j \quad (3.3)$$

$$r_j \geq L_j \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} + z_\alpha \sqrt{\sum_{i \in I} \sigma_i^2 Y_{ij} L_j} \quad \forall j \in J \quad (3.4)$$

$$X_j, Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (3.5)$$

$$r_j, Q_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (3.6)$$

Los términos de la función de costos (3.1) son respectivamente: los costos anualizados de instalación de los centros de distribución, los costos por emisión de órdenes de abastecimiento, los costos de transporte desde el proveedor hasta los centros de distribución,

los costos de transporte desde los centros de distribución hasta los nodos demanda y los costos de mantenimiento del nivel de inventario. El nivel de inventario considera como componentes el inventario promedio, inventario de seguridad y los *backorders* generados durante periodos de reabastecimiento.

La restricción (3.2) asegura que cada nodo demanda es atendido por un centro de distribución. La restricción (3.3) establece que los nodos demanda solo pueden ser atendidos por centros de distribución efectivamente instalados. La restricción (3.4) garantiza que el punto de reorden de cada centro de distribución sea mayor a la demanda generada durante el tiempo de entrega y le añade un inventario de seguridad asociado a Nivel de Servicio Tipo I. Por último las ecuaciones (3.5) y (3.6) corresponden a restricciones de naturaleza de las variables continuas y binarias del modelo.

Para el modelo anterior, se proponen:

- $\sum_{i \in I} \hat{d}_{ij} \mu_i Y_{ij} = \sum_{i \in I} (a_j + d_{ij}) \mu_i Y_{ij}$: Los costos totales de transporte desde los centros de distribución hasta los nodos demanda.
- $\sigma_j^2 = \sum_{i \in I} (\sigma_i Y_{ij})^2$: La varianza (diaria) de la demanda atendida por cada centro de distribución.
- $\mu_j = \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij}$: La demanda media (anual) atendida por cada centro de distribución.

De este modo el nuevo modelo compacto del problema es:

Modelo Compacto

$$(P0) : \quad \underset{\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{Q}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}}{\text{Min}} \quad \sum_{j \in J} \left\{ f_j X_j + S_j \frac{\mu_j}{Q_j} + \sum_{i \in I} \hat{d}_{ij} \mu_j Y_{ij} + h_j \left(\frac{Q_j}{2} + r_j - \mu_j L_j + \frac{L_j \sigma_j^2}{Q_j} \left[H \left(\frac{r_j - \mu_j L_j}{\sigma_j \sqrt{L_j}} \right) - H \left(\frac{r_j + Q_j - \mu_j L_j}{\sigma_j \sqrt{L_j}} \right) \right] \right) \right\} \quad (3.7)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.8)$$

$$Y_{ij} \leq x_j \quad \forall i, j \quad (3.9)$$

$$\sigma_j^2 \geq \sum_{i \in I} (\sigma_i Y_{ij})^2 \quad \forall j \in J \quad (3.10)$$

$$\mu_j \geq \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \quad \forall j \in J \quad (3.11)$$

$$r_j \geq \mu_j L_j + z_\alpha \sigma_j^2 \sqrt{L_j} \quad \forall j \in J \quad (3.12)$$

$$X_j, Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (3.13)$$

$$r_j, Q_j, \mu_j, \sigma_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (3.14)$$

La nueva formulación incorpora como variables de decisión a la media y desviación estándar de la demanda atendida por los j centros de distribución (μ_j y σ_j^2 respectivamente).

La función objetivo y conjunto de restricciones se mantienen sin cambios, a excepción de la adición de las restricciones (3.10) y (3.11), que definen a las variables μ_j y σ_j^2 .

3.2. Descomposición del Modelo

Para resolver el problema (P0) presentado en la sección 3.1, se propone una descomposición del mismo en un problema maestro (PM) y j subproblemas.

El problema maestro corresponde a un *Uncapacited Facility Location Problem*, que incorpora en su función de costos el término $\xi_j(X_j, Y_{ij})$ asociado a los costos totales de la

política de inventario para cada centro de distribución j .

Problema Maestro

$$(PM) : \underset{X, Y}{Min} \sum_{j \in J} \left\{ f_j X_j + \sum_{i \in I} \hat{d}_{ij} Y_{ij} + \xi_j(X_j, Y_{ij}) \right\} \quad (3.15)$$

$$s.t. \quad \sum_{j \in J} Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.16)$$

$$Y_{ij} \leq x_j \quad \forall i, j \quad (3.17)$$

$$X_j, Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (3.18)$$

Los j subproblemas $\xi_j(X_j, Y_{ij})$, corresponden a la resolución de las políticas de inventario *Continuous Review (Q, r) Policy with Full-Backorder and Deterministic Lead Time* que dominarán a los j centros de distribución. Los subproblemas deben determinar el tamaño de lote, el punto de reorden y los nodos asignados a cada centro de distribución.

Subproblemas

$$\xi_j(X_j, Y_{ij}) = \underset{Q, r, \mu, \sigma}{\text{Min}} \left\{ \begin{aligned} & S_j \frac{\mu_j}{Q_j} + h_j \left(\frac{Q_j}{2} + r_j - \mu_j L_j \right. \\ & \left. + \frac{L_j \sigma_j^2}{Q_j} \left[H \left(\frac{r_j - \mu_j L_j}{\sigma_j \sqrt{L_j}} \right) - H \left(\frac{r_j + Q_j - \mu_j L_j}{\sigma_j \sqrt{L_j}} \right) \right] \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

$$\text{s.t.} \quad \mu_j \geq \sum_{i \in I} \mu_i Y_{ij} \quad \forall j \in J \quad (3.20)$$

$$r_j \geq \mu_j L_j + z_\alpha \sigma_j^2 \sqrt{L_j} \quad \forall j \in J \quad (3.21)$$

$$\sigma_j^2 \geq \sum_{i \in I} (\sigma_i Y_{ij})^2 \quad \forall j \in J \quad (3.22)$$

$$r_j, Q_j, \mu_j, \sigma_j \geq 0 \quad \forall i, j \quad (3.23)$$

Relajando el problema maestro (PM) al no considerar el término $\xi_j(X_j, Y_{ij})$, se obtiene un $UFLP$ en su forma estándar. Ambos problemas, (PM) y $UFLP$, comparten el mismo poliedro de factibilidad, pero se tiene que la función objetivo del $UFLP$ es menor que la función objetivo del problema maestro (PM). Por lo tanto, la solución del $UFLP$ es *lower bound* (LB) del problema maestro.

La idea para resolver el problema ($P0$), es que a partir de la resolución de los subproblemas $\xi_j(X_j, Y_{ij})$ se pueda devolver un *upper bound*, y un corte de factibilidad o de optimalidad sobre las variables \mathbf{X} e \mathbf{Y} al problema maestro. El proceso descrito anteriormente corresponde al Método de Descomposición de Benders Generalizado.

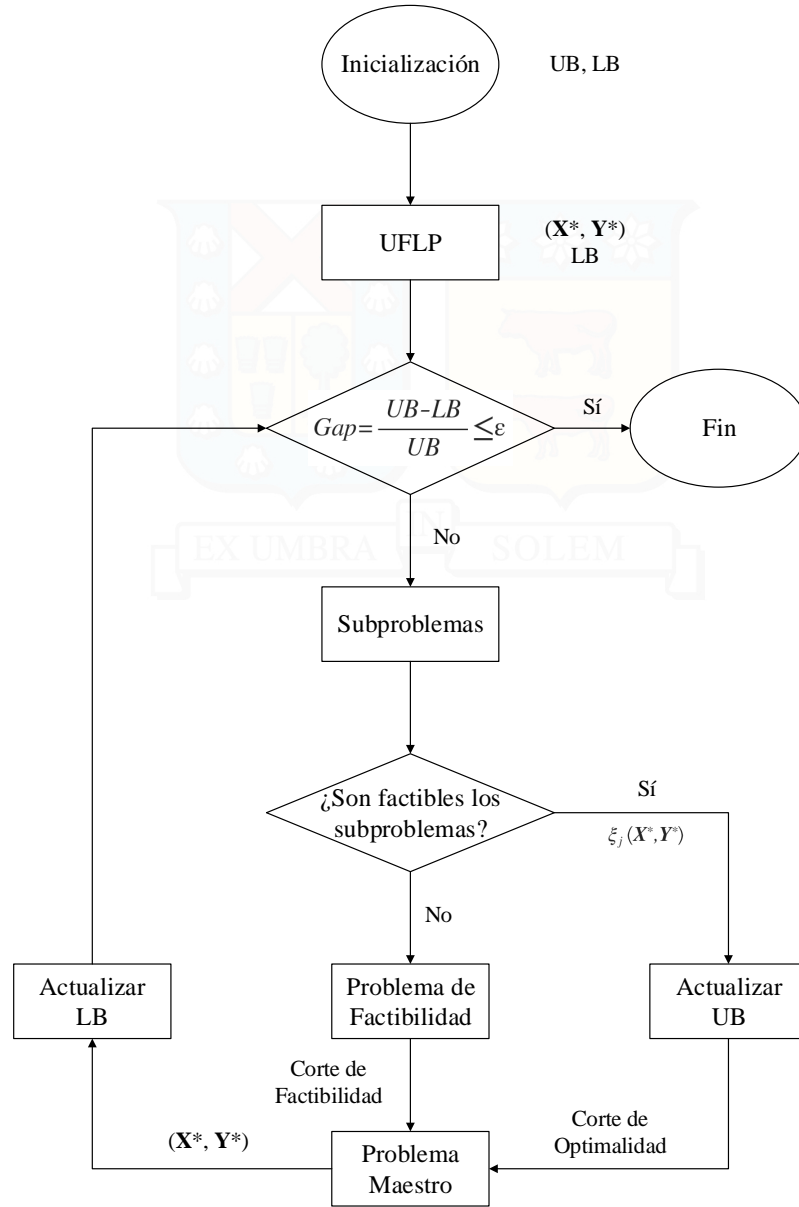


Figura 3.1: Método de Descomposición de Benders Generalizado

(Fuente: Elaboración Propia)

Como etapa previa al desarrollo de esta idea de resolución, teniendo en cuenta que el *UFLP* es un problema optimizable, se debe determinar si los subproblemas $\xi_j(X_j, Y_{ij})$ son factibles de resolver.

3.3. Componente de Backorders de los Subproblemas

El conjunto factible definido por el conjunto de restricciones (ecuaciones 3.20 a la 3.23) de los subproblemas $\xi_j(X_j, Y_{ij})$, está definido por funciones convexas. Por su parte la función objetivo 3.19, en las componentes que refieren al inventario promedio e inventario de seguridad, también son convexas. Es por esto, que se evaluará convexidad para la componente de *backorders*. Esta componente se nombrará de aquí en adelante $BO_j(Q_j, r_j, \mu_j, \sigma_j)$.

$$BO_j(Q_j, r_j, \mu_j, \sigma_j) = \frac{L_j \sigma_j^2}{Q_j} \left(\left[H \left(\frac{r_j - \mu_j L_j}{\sigma_j \sqrt{L_j}} \right) - H \left(\frac{r_j + Q_j - \mu_j L_j}{\sigma_j \sqrt{L_j}} \right) \right] \right) \quad (3.24)$$

3.4. Condiciones de Convexidad de la Componente de Backorders

Para concluir sobre la convexidad de $BO_j(Q_j, r_j, \mu_j, \sigma_j)$, se utilizarán como criterio el Teorema 2.3 y Corolario 2.1. Para esto, se evaluarán los menores esquina de la matriz hessiana de la componente de *backorders* ($H[BO_j(Q_j, r_j, \mu_j, \sigma_j)]$) y mediante el Teorema 2.2 se definirá si la matriz es semi-definida o definida positiva, concluyendo finalmente sobre la convexidad de la componente de *backorders*.

3.5. Matriz Hessiana de la Componente de Backorders

Obviando el índice j , se presenta la matriz hessiana de la componente de *backorders*, compuesta por las derivadas parciales de segundo orden respecto a las variables Q , r , μ y σ .

$$H[BO(Q, r, \mu, \sigma)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 BO}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial r} & \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \mu} & \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial r} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r \partial \mu} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \mu} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \mu \partial r} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \mu \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \sigma} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r \partial \sigma} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \mu \partial \sigma} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Cada derivada parcial de segundo orden fue calculada en *Wolfram Mathematica*, mediante el procedimiento presentado en el Anexo A.

Sean $x_1 = \frac{r - \mu L}{\sigma \sqrt{L}}$ y $x_2 = \frac{r + Q - \mu L}{\sigma \sqrt{L}}$. Las componentes de la matriz hessiana son:

$$\frac{\partial^2 BO}{\partial Q^2} = \frac{\sigma^2 L}{Q^3} \left((x_1^2 + 1)(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) + x_1(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) + \varphi(x_2)(x_1 - x_2) \right) \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial r} = \frac{\sigma \sqrt{L}}{Q^2} \left(x_1(\Phi(x_1) - \Phi(x_2)) + \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \right) \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \mu} = \frac{\sigma L \sqrt{L}}{Q^2} \left(x_1(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) + \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \right) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \sigma} = \frac{\sigma L}{Q^2} \left(\varphi(x_2)(x_2 - x_1) + \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \right) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial^2 BO}{\partial r^2} = \frac{1}{Q} \left(\Phi(x_2) - \Phi(x_1) \right) \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^2 BO}{\partial r \partial \mu} = \frac{L}{Q} \left(\Phi(x_1) - \Phi(x_2) \right) \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2 BO}{\partial r \partial \sigma} = \frac{\sqrt{L}}{Q} \left(\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \right) \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 BO}{\partial \mu^2} = \frac{L^2}{Q} \left(\Phi(x_2) - \Phi(x_1) \right) \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 BO}{\partial \mu \partial \sigma} = \frac{L \sqrt{L}}{Q} \left(\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \right) \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2 BO}{\partial \sigma^2} = \frac{L}{Q} \left(\Phi(x_2) - \Phi(x_1) + x_1 \varphi(x_1) - x_2 \varphi(x_2) \right) \quad (3.35)$$

Se presentan los menores esquina de orden k de la matriz hessiana, compuestos por las primeras k filas y columnas de la matriz:

$$\Delta_1 (H [BO]) = \left| \frac{\partial^2 BO}{\partial Q^2} \right| \quad (3.36)$$

$$\Delta_2 (H [BO]) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 BO}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial r} \\ \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial r} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r^2} \end{vmatrix} \quad (3.37)$$

$$\Delta_3 (H [BO]) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 BO}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial r} & \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial r} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \mu} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \mu \partial r} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \mu^2} \end{vmatrix} \quad (3.38)$$

$$\Delta_4 (H [BO]) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 BO}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial r} & \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \mu} & \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial r} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r \partial \mu} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \mu} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \mu \partial r} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \mu \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 BO}{\partial Q \partial \sigma} & \frac{\partial^2 BO}{\partial r \partial \sigma} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \mu \partial \sigma} & \frac{\partial^2 BO}{\partial \sigma^2} \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

El cálculo de cada menor esquina fue realizado en *Wolfram Mathematica* (Ver Anexo A) y se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\Delta_1 (H [BO]) = \frac{\sigma^2 L}{Q^3} \left((x_1^2 + 1)(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) + x_1(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) + \varphi(x_2)(x_1 - x_2) \right) \quad (3.40)$$

$$\Delta_2 (H [BO]) = \frac{\sigma^2 L}{Q^4} \left(\Phi^2(x_1) + \Phi^2(x_2) - (\varphi(x_1) - \varphi(x_2))^2 + \Phi(x_2)(x_1\varphi(x_1) - x_2\varphi(x_2)) \right. \\ \left. + \Phi(x_1)(-2\Phi(x_2) - x_1\varphi(x_1) + x_2\varphi(x_2)) \right) \quad (3.41)$$

$$\Delta_3 (H [BO]) = 0 \quad (3.42)$$

$$\Delta_4 (H [BO]) = 0 \quad (3.43)$$

Cada menor esquina presenta la posibilidad de ser factorizado en dos términos: uno en función Q , L y σ , y un segundo término en función de los puntos x_1 y x_2 ; y las funciones de densidad de probabilidad $\varphi(x)$ y distribución de probabilidad $\Phi(x)$ de una distribución normal estándar.

Lo anterior permite una evaluación conveniente para cualquier valor del parámetro de lead time L , para cualquier valor de las variables Q , r , μ y σ , y para cualquier nivel de servicio.

4 | Estudio Computacional

El estudio computacional fue desarrollado con el objetivo de entregar evidencia numérica de la convexidad o no convexidad de la componente de *backorders* (ecuación 3.25) de la función de costos de los subproblemas $\xi_j(X_j, Y_{ij})$.

Las pruebas numéricas consistieron en la obtención del valor numérico de los cuatro menores esquina de la matriz hessiana de la componente de *backorders*.

Se generaron 10.000 instancias aleatorias en *MATLAB*, en las cuales se obtuvieron valores para los menores esquina presentados en las ecuaciones (3.40), (3.41), (3.42) y (3.43).

El procedimiento para generar las pruebas numéricas en *MATLAB*, queda explicitado en el Anexo B.

4.1. Parámetros Utilizados

Aprovechando la estructura de los menores esquina, que permite factorizar los términos Q , L y σ , se definieron las componentes de la matriz solo en términos de las funciones de densidad de probabilidad $\varphi(x)$ y distribución de probabilidad $\Phi(x)$ de una distribución normal estándar.

Considerando lo anterior, como únicas condiciones para las pruebas y considerando $x_1 = \frac{r - \mu L}{\sigma \sqrt{L}}$ y $x_2 = \frac{r + Q - \mu L}{\sigma \sqrt{L}}$, se generaron números aleatorios dentro de una distribución normal estándar de modo que se cumpliera que $0 < x_1 < x_2$.

4.2. Resultados Obtenidos

En la siguiente tabla, se presentan los valores numéricos de los cuatro menores esquina para 15 instancias seleccionadas aleatoriamente de las 10.000 pruebas realizadas:

Tabla 4.1: Pruebas Numéricas

Instancia	$\Delta_1 (H [BO])$	$\Delta_2 (H [BO])$	$\Delta_3 (H [BO])$	$\Delta_4 (H [BO])$
1	2,299882E-01	2,935574E-02	0	0
2	4,815105E-03	5,524113E-05	0	0
3	1,273803E-02	5,638727E-04	0	0
4	2,081843E-02	7,791177E-04	0	0
5	2,283420E-03	5,566536E-05	0	0
6	3,623806E-02	2,131348E-03	0	0
7	1,153753E-01	1,069362E-02	0	0
8	3,938639E-06	1,213192E-08	0	0
9	8,446271E-05	6,629509E-07	0	0
10	3,918338E-03	9,961575E-05	0	0
11	8,216178E-06	2,746162E-08	0	0
12	1,733616E-01	1,985404E-02	0	0
13	1,449293E-01	1,521639E-02	0	0
14	4,174382E-02	2,726487E-03	0	0
15	1,760047E-01	2,000052E-02	0	0

(Fuente: Elaboración Propia)

En el Anexo C, se presenta una muestra más extensa de 100 instancias seleccionadas aleatoriamente dentro de las 10.000 pruebas realizadas.

Los resultados obtenidos en estas 15 instancias también se muestran gráficamente, en las figuras 4.1 y 4.2.

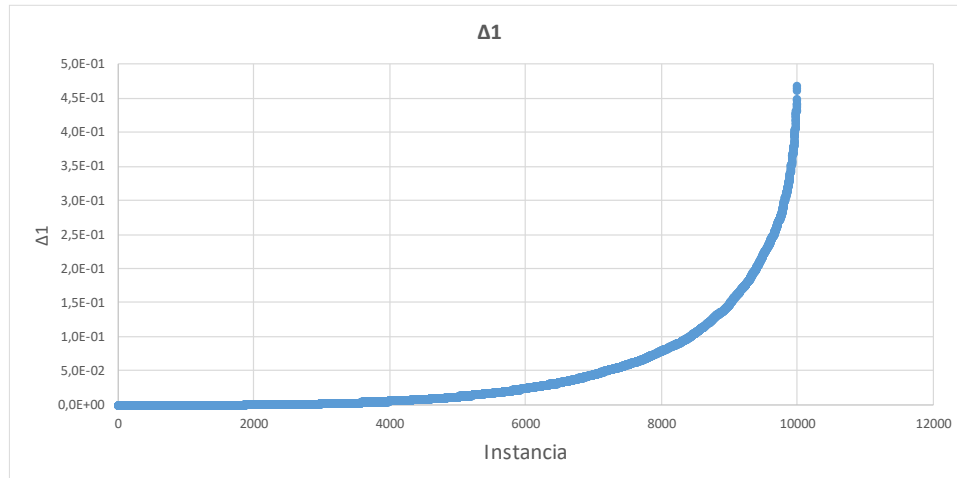


Figura 4.1: Instancias $\Delta_1 (H [BO])$

(Fuente: Elaboración Propia)

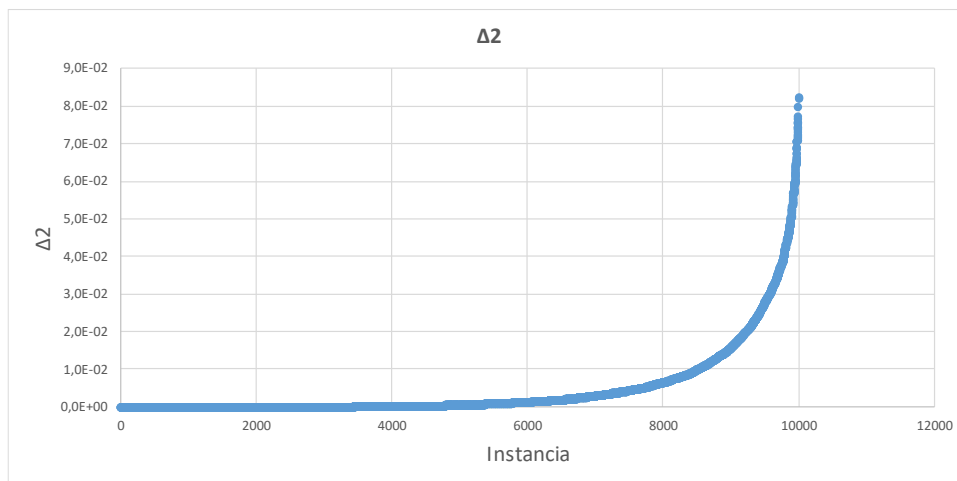


Figura 4.2: Instancias $\Delta_2 (H [BO])$

(Fuente: Elaboración Propia)

Las figuras 4.1 y 4.2 muestran que para todas las instancias se cumple que $\Delta_1 (H [BO (Q, r, \mu, \sigma)]) > 0$ y $\Delta_2 (H [BO (Q, r, \mu, \sigma)]) > 0$, para todas las instancias generadas aleatoriamente.

Tabla 4.2: Estadísticas Descriptivas de Δ_1

Δ_1	
Media	4,715545E-02
Mediana	1,254890E-02
Máximo	4,691784E-01
Mínimo	2,643722E-06
Desviación Estándar	7,498347E-02

(Fuente: Elaboración Propia)

Tabla 4.3: Percentiles de Δ_1

Percentil	Valor
P_{20}	6,292914E-04
P_{40}	5,888842E-03
P_{60}	2,443076E-02
P_{80}	7,948266E-02

(Fuente: Elaboración Propia)

Tabla 4.4: Tabla de Frecuencia de valores de Δ_1

Intervalo	Frecuencia
[0, 00; 0, 10)	8417
[0, 10; 0, 20)	976
[0, 20; 0, 30)	421
[0, 30; 0, 40)	152
[0, 40; 0, 50)	34

(Fuente: Elaboración Propia)

Para el subdeterminante Δ_1 ($H[BO(Q, r, \mu, \sigma)]$) se obtuvo un valor mínimo de 2,643722E-06 y un valor máximo de 4,691784E-01, con una media de 4,715545E-02. Respecto a la distribución de los resultados, el 84,17% de ellos están en el intervalo [0,00; 0,10] y el 80% de los resultados están por debajo de 7,948266E-02.

Tabla 4.5: Estadísticas Descriptivas de Δ_2

Δ_2	
Media	4,943097E-03
Mediana	5,109961E-04
Máximo	8,263532E-02
Mínimo	6,973903E-11
Desviación Estándar	1,035280E-02

(Fuente: Elaboración Propia)

Tabla 4.6: Percentiles de Δ_2

Percentil	Valor
P_{20}	8,754932E-06
P_{40}	1,753057E-04
P_{60}	1,289959E-03
P_{80}	6,507095E-03

(Fuente: Elaboración Propia)

Tabla 4.7: Tabla de Frecuencia de valores de Δ_2

Intervalo	Frecuencia
[0, 00; 0, 02)	9226
[0, 02; 0, 04)	559
[0, 04; 0, 06)	163
[0, 06; 0, 08)	50
[0, 08; 0, 10)	2

(Fuente: Elaboración Propia)

Por su parte, para el subdeterminante $\Delta_2 (H [BO (Q, r, \mu, \sigma)])$ se obtuvo un valor mínimo de $6,973903E-11$ y un valor máximo de $8,263532E-02$, con una media de $4,943097E-03$. Respecto a la distribución de los resultados, el 92,26 % de ellos están en el intervalo $[0, 00; 0, 02]$ y el 80 % de los resultados están por debajo de $6,507095E-03$.

Por último, numéricamente se confirman las ecuaciones 3.42 y 3.43; las cuales fueron obtenidas algebraicamente; que indican que $\Delta_3 (H [BO (Q, r, \mu, \sigma)]) = 0$ y $\Delta_4 (H [BO (Q, r, \mu, \sigma)]) = 0$, respectivamente.

4.3. Conclusiones del Estudio Computacional

Los resultados numéricos obtenidos en el estudio computacional, nos permiten verificar que:

- $\Delta_1 (H [BO (Q, r, \mu, \sigma)]) > 0$
- $\Delta_2 (H [BO (Q, r, \mu, \sigma)]) > 0$
- $\Delta_3 (H [BO (Q, r, \mu, \sigma)]) = 0$
- $\Delta_4 (H [BO (Q, r, \mu, \sigma)]) = 0$

Aplicando el Teorema 2.2 sobre el criterio de los menores esquina de una matriz cuadrada, nos permite decir que la matriz hessiana de la componente de *backorders*, $H [BO (Q, r, \mu, \sigma)]$, es semi-definida positiva.

Luego aplicando el Teorema 2.3 puede garantizar que la componente de *backorders* $BO = BO (Q, r, \mu, \sigma)$ es convexa respecto a las variables Q, r, μ y σ conjuntamente. El corolario 2.1 en su punto (2) indica que la componente de *backorders* podría ser estrictamente convexa, pero no se puede verificar mediante el método de los menores esquina de la matriz hessiana.

Finalmente; teniendo en cuenta que la región factible del problema $\xi_j (X_j, Y_{ij})$ es un conjunto convexo, y que con la convexidad de la componente de *backorders*, la función de costos del problema constituye una función convexa; utilizando el Teorema 2.1 se puede concluir que los subproblemas $\xi_j (X_j, Y_{ij})$ tiene un mínimo global no único.

5 | Conclusiones

Este trabajo permite determinar que hay evidencia numérica de la convexidad de la componente de *backorders* de los subproblemas $\xi_j(X_j, Y_{ij})$ respecto las variables \mathbf{Q} , \mathbf{r} , $\boldsymbol{\mu}$ y σ , componente de los subproblemas de la cual no existía evidencia de convexidad. Con esto se puede garantizar la existencia de mínimos globales para los subproblemas $\xi_j(X_j, Y_{ij})$.

Dado que hay evidencia de convexidad de los subproblemas $\xi_j(X_j, Y_{ij})$, estos pueden ser optimizados mediante algún método de resolución. En función al Método de Descomposición de Benders Generalizado descrito en la sección 3.2, se puede devolver como entrada al problema maestro los valores óptimos de los subproblemas $\xi_j(X_j, Y_{ij})$, que dependen de los \mathbf{X}^* e \mathbf{Y}^* obtenidos a partir de un *UFLP*, generar un *upper bound* para el problema maestro y medir el *gap* de optimalidad de la relajación del problema (*P0*).

La contribución de este trabajo, al confirmar de la convexidad de los subproblemas $\xi_j(X_j, Y_{ij})$, es que permite seguir explorando una metodología de resolución para el problema (*P0*) basada en el Método de Descomposición de Benders Generalizado.

5.1. Trabajos Posteriores

Como extensiones de este trabajo, naturalmente se desprenden: (i) el desarrollo de un método de resolución para el problema propuesto en la sección 3.1 basado en el Método de Descomposición de Benders Generalizado y su posterior resolución y (ii) la comparación de los resultados obtenidos para el problema (*P0*) con formulaciones similares que utilicen la aproximación del Modelo de Lote Económico y medir el impacto económico del uso de la aproximación EOQ.

Bibliografía

- Amaya, J. (2009). *Optimización para Estudiantes de Ingeniería*. (document), 2.2.2
- Axsäter, S. (1996). Using the Deterministic EOQ Formula in Stochastic Inventory Control. *Management Science*, 42(6), 830–834. 1.1, 2.1.1
- Axsäter, S. (2015). *Inventory Control*. USA: Springer, third edición. (document), 2.2.1
- Daskin, M. S.; Coullard, C. R.; y Shen, Z-J. M. (2002). An Inventory-Location Model: Formulation , Solution Algorithm and Computational Result. *Annals of Operations Research*, (110), 83–106. 1.1
- Escalona, P.; Ordóñez, F.; y Marianov, V. (2015). Joint Location-Inventory Problem with Differentiated Service Levels using Critical Level Policy. *Transportation Research Part E*, (83), 141–157. (document), 1.1, 2.1.1
- Miranda, P. y Garrido, R. (2004). Incorporating inventory control decisions into a strategic distribution network design model with stochastic demand. 40, 183–207. (document), 2.1.3
- Shen, Z-J. M.; Coullard, C. R.; y Daskin, M. S. (2003). A Joint Location-Inventory Model. *Transportation Science*, 37(1), 40–55. (document), 1.1, 2.1.2
- Zheng, Y-S. (1992). On Properties of Stochastic Inventory Systems. *Management Science*, 38(1), 87–103. 1.1, 2.1.1

A | Anexo A

Pseudo Código Wolfram Mathematica 9

Primero, se definen las derivadas de primer y segundo orden para las funciones de densidad y distribución de probabilidad, $\varphi(x)$ y $\phi(x)$, respectivamente.

```
def [phi]'[x_] := [varphi][x] ;
def [phi]''[x_] := - x * [varphi][x] ;
def [varphi]'[x_] := - x * [varphi][x] ;
def [varphi]''[x_] := (x^2 - 1) * [varphi][x] ;
```

Luego se definen las derivadas respecto a las variables Q , r , μ y σ para los puntos

$$x_1 = \frac{r - \mu l}{\sigma \sqrt{l}} \text{ y } x_2 = \frac{r + Q - \mu l}{\sigma \sqrt{l}}.$$

```
def Derivative [1, 0, 0, 0] [x1] [q_, r_, u_, s_] := 0;
def Derivative [0, 1, 0, 0] [x1] [q_, r_, u_, s_] := 1 / (s * Sqrt[l]) ;
def Derivative [0, 0, 1, 0] [x1] [q_, r_, u_, s_] := - 1 / (s * Sqrt[l]) ;
def Derivative [0, 0, 0, 1] [x1] [q_, r_, u_, s_] := - x1 [q, r, u, s] / s ;
def Derivative [1, 0, 0, 0] [x2] [q_, r_, u_, s_] := 1 / (s * Sqrt[l]) ;
def Derivative [0, 1, 0, 0] [x2] [q_, r_, u_, s_] := 1 / (s * Sqrt[l]) ;
def Derivative [0, 0, 1, 0] [x2] [q_, r_, u_, s_] := -1 / (s * Sqrt[l]) ;
def Derivative [0, 0, 0, 1] [x2] [q_, r_, u_, s_] := - x2[q, r, u, s] / s ;
```

Se define el elemento de la función de costos de inventario asociado a los *backorders*, en terminos de la función $H(x) = \frac{1}{2} [(x^2 + 1)(1 - \phi(x)) - x\varphi(x)]$.

```
def B0 := (s^2 * l) / (2*q) ((x1[q, r, u, s]^2 + 1)
*(1 - [phi][x1[q, r, u, s]]) - (x2[q, r, u, s]^2 + 1)
*(1 - [phi][x2[q, r, u, s]]) + x2[q, r, u, s] * [varphi][x2[q, r, u, s]]
- x1[q, r, u, s] * [varphi][x1[q, r, u, s]]) ;
```

Se generan las derivadas parciales de segundo orden que componen la Matriz Hessiana.

```
print D1 = FullSimplify[D[B0, q, q]]
print D2 = FullSimplify[D[B0, q, r]]
print D3 = FullSimplify[D[B0, q, u]]
print D4 = FullSimplify[D[B0, q, s]]
print D5 = FullSimplify[D[B0, r, r]]
print D6 = FullSimplify[D[B0, r, u]]
print D7 = FullSimplify[D[B0, r, s]]
print D8 = FullSimplify[D[B0, u, u]]
print D9 = FullSimplify[D[B0, u, s]]
print D10 = FullSimplify[D[B0, s, s]]
```

Como último paso, se calculan los cuatro menores esquina.

```
print Delta_1 = D1
print Delta_2 = FullSimplify[D1*D5 - D2*D2]
print Delta_3 = FullSimplify[D1 (D5*D8 - D6*D6)
- D2 (D2*D8 - D3*D6) + D3 (D2*D6 - D3*D5)]
print Delta_4 = FullSimplify[D1 (D5 (D8*D10 - D9*D9) - D6 (D6*D10 - D7*D9)
+ D7 (D6*D9 - D7*D8)) - D2 (D2 (D8*D10 - D9*D9)
- D6 (D3*D10 - D4*D9) + D7 (D3*D9 - D4*D8))
+ D3 (D2 (D6*D10 - D7*D9) - D5 (D3*D10 - D4*D9)
+ D7 (D3*D7 - D4*D6)) - D4 (D2 (D6*D9 - D7*D8)
- D5 (D3*D9 - D4*D8) + D6 (D3*D7 - D4*D6))]
```

B | Anexo B

Pseudo Código MATLAB R2013a

```

k=0;
while k<10000

x1 = randn;
x2 = randn;

if (x1>0) & (x1<x2)
    k=k+1;
    p1 = normpdf(x1,0,1);
    p2 = normpdf(x2,0,1);
    f1 = normcdf(x1,0,1);
    f2 = normcdf(x2,0,1);

    d1(k)=(1+x1^2)*(f2-f1)+x1*(p2-p1)+(x1-x2)*p2;
    d2(k)=x1*(f1-f2)+p1-p2;
    d3(k)=-d2(k);
    d4(k)=(x2-x1)*p2-f2+f1;
    d5(k)=f2-f1;
    d6(k)=-d5(k);
    d7(k)=-p1-p2;

```

```

d8(k)=d5(k);
d9(k)=p1-p2;
d10(k)=f2-f1+x1*p1-x2*p2;

det1(k) = det([d1(k)]);
det2(k) = det([d1(k) d2(k); d2(k) d5(k)]);
det3(k) = d1(k)*(d5(k)*d8(k)-d6(k)^2)-d2(k)*(d2(k)*d8(k)-d3(k)*d6(k))
+d3(k)*(d2(k)*d6(k)-d3(k)*d5(k));
det4(k) = d1(k)*(d5(k)*(d8(k)*d10(k)-d9(k)^2)-d6(k)*(d6(k)*d10(k)
-d7(k)*d9(k))+d7(k)*(d6(k)*d9(k)-d7(k)*d8(k)))
-d2(k)*(d2(k)*(d8(k)*d10(k)-d9(k)^2)-d6(k)*(d3(k)*d10(k)
-d4(k)*d9(k))+d7(k)*(d3(k)*d9(k)-d4(k)*d8(k)))
+d3(k)*(d2(k)*(d6(k)*d10(k)-d7(k)*d9(k))-d5(k)*(d3(k)*d10(k)
-d4(k)*d9(k))+d7(k)*(d3(k)*d7(k)-d4(k)*d6(k)))
-d4(k)*(d2(k)*(d6(k)*d9(k)-d7(k)*d8(k))-d5(k)*(d3(k)*d9(k)
-d4(k)*d8(k))+d6(k)*(d3(k)*d7(k)-d4(k)*d6(k)));

fprintf(archivo,det1(k),det2(k),det3(k),det4(k));

end
end

```

C | Anexo C

Muestra Pruebas Numéricas

Tabla C.1: Muestra Pruebas Numéricas (1/4)

Instancia	$\Delta_1 (H [BO])$	$\Delta_2 (H [BO])$	$\Delta_3 (H [BO])$	$\Delta_4 (H [BO])$
64	3,438694E-03	9,278381E-05	0	0
212	1,986752E-01	2,397533E-02	0	0
237	5,998043E-02	3,730618E-03	0	0
317	9,824701E-08	7,841991E-11	0	0
443	7,393984E-03	2,827128E-04	0	0
541	2,329305E-02	1,291022E-03	0	0
612	1,184280E-01	1,173266E-02	0	0
628	9,275031E-02	8,452674E-03	0	0
673	2,673067E-03	4,459208E-05	0	0
720	3,180424E-05	1,447357E-07	0	0

(Fuente: Elaboración Propia)

Tabla C.2: Muestra Pruebas Numéricas (2/4)

Instancia	$\Delta_1 (H [BO])$	$\Delta_2 (H [BO])$	$\Delta_3 (H [BO])$	$\Delta_4 (H [BO])$
951	2,299882E-01	2,935574E-02	0	0
954	5,916311E-02	4,601704E-03	0	0
1029	6,167005E-03	2,096766E-04	0	0
1132	2,220055E-02	1,227873E-03	0	0
1299	2,030667E-03	4,939904E-05	0	0
1485	1,521003E-02	7,163412E-04	0	0
1791	5,115189E-04	7,709971E-06	0	0
1871	2,994927E-04	3,701728E-06	0	0
1960	4,815105E-03	5,524113E-05	0	0
1982	2,770600E-03	5,606013E-05	0	0
2011	1,569494E-01	1,652661E-02	0	0
2031	5,424978E-02	4,012853E-03	0	0
2189	1,273803E-02	5,638727E-04	0	0
2255	2,081843E-02	7,791177E-04	0	0
2289	2,283420E-03	5,566536E-05	0	0
2652	6,586924E-02	5,304820E-03	0	0
2695	3,623806E-02	2,131348E-03	0	0
2788	4,776563E-02	3,264311E-03	0	0
2836	1,463529E-04	9,370908E-07	0	0
3041	1,247189E-02	5,691084E-04	0	0
3086	8,867899E-06	3,572601E-08	0	0
3145	3,721461E-07	4,329938E-10	0	0
3163	1,153753E-01	1,069362E-02	0	0
3406	5,702345E-04	9,235273E-06	0	0
3527	2,692094E-04	1,938093E-06	0	0
3641	1,258227E-04	5,882283E-07	0	0
3714	1,142269E-01	1,116648E-02	0	0
4113	2,127429E-03	4,880161E-05	0	0
4234	3,938639E-06	1,213192E-08	0	0
4258	6,271398E-02	4,602781E-03	0	0

(Fuente: Elaboración Propia)

Tabla C.3: Muestra Pruebas Numéricas (3/4)

Instancia	$\Delta_1 (H [BO])$	$\Delta_2 (H [BO])$	$\Delta_3 (H [BO])$	$\Delta_4 (H [BO])$
4413	1,296331E-04	1,252595E-06	0	0
4465	6,724845E-02	4,768379E-03	0	0
4639	2,495404E-01	3,298363E-02	0	0
4803	3,856599E-02	2,246525E-03	0	0
4922	1,945619E-02	1,016646E-03	0	0
5037	8,446271E-05	6,629509E-07	0	0
5163	4,822204E-08	3,132206E-11	0	0
5228	3,918338E-03	9,961575E-05	0	0
5294	2,217200E-06	4,875340E-09	0	0
5353	2,053571E-02	9,766797E-04	0	0
5394	8,216178E-06	2,746162E-08	0	0
5416	8,405776E-02	7,260906E-03	0	0
5466	1,197172E-04	1,003006E-06	0	0
5514	2,468341E-01	3,247789E-02	0	0
5692	1,979381E-01	2,376097E-02	0	0
5862	2,726602E-02	1,607896E-03	0	0
5873	2,383879E-02	1,355495E-03	0	0
5945	2,803761E-02	1,563299E-03	0	0
6230	8,807032E-04	1,651427E-05	0	0
6358	5,801886E-07	8,980266E-10	0	0
6359	6,521444E-04	1,088721E-05	0	0
6490	8,933002E-02	7,231850E-03	0	0
6491	1,304441E-05	5,679230E-08	0	0
6597	2,781772E-01	3,839061E-02	0	0
6623	1,733616E-01	1,985404E-02	0	0
6625	7,442198E-04	1,291237E-05	0	0
6981	1,347315E-01	1,342307E-02	0	0
6996	1,449293E-01	1,521639E-02	0	0
7051	6,524029E-04	6,050611E-06	0	0
7212	5,256475E-07	5,743033E-10	0	0

(Fuente: Elaboración Propia)

Tabla C.4: Muestra Pruebas Numéricas (4/4)

Instancia	$\Delta_1 (H [BO])$	$\Delta_2 (H [BO])$	$\Delta_3 (H [BO])$	$\Delta_4 (H [BO])$
7214	2,206417E-01	2,771462E-02	0	0
7279	3,957249E-02	2,288790E-03	0	0
7455	6,034371E-02	4,619423E-03	0	0
7613	1,092494E-04	1,020605E-06	0	0
7633	1,992325E-03	4,885708E-05	0	0
7709	1,101659E-02	2,569063E-04	0	0
7968	1,131187E-03	1,921761E-05	0	0
8031	4,174382E-02	2,726487E-03	0	0
8128	2,759318E-02	1,604370E-03	0	0
8178	1,262785E-03	2,363895E-05	0	0
8235	1,295838E-02	5,985077E-04	0	0
8325	2,225417E-01	2,802951E-02	0	0
8334	1,271142E-01	1,218131E-02	0	0
8397	1,637677E-01	1,767839E-02	0	0
8401	3,030491E-03	8,591066E-05	0	0
8633	1,219890E-01	1,124242E-02	0	0
8634	1,032405E-01	8,589488E-03	0	0
8642	1,980512E-02	6,185488E-04	0	0
8833	1,067734E-01	1,021474E-02	0	0
8943	2,362579E-03	6,158178E-05	0	0
9395	1,678601E-01	1,897914E-02	0	0
9402	4,046662E-05	2,430757E-07	0	0
9454	1,197955E-02	5,378051E-04	0	0
9575	9,392290E-03	2,940178E-04	0	0
9587	1,220783E-02	5,530476E-04	0	0
9721	7,695017E-02	5,363566E-03	0	0
9755	1,721761E-04	1,846828E-06	0	0
9767	1,760047E-01	2,000052E-02	0	0
9893	2,851542E-01	4,011866E-02	0	0
9913	5,617392E-11	2,522623E-15	0	0

(Fuente: Elaboración Propia)