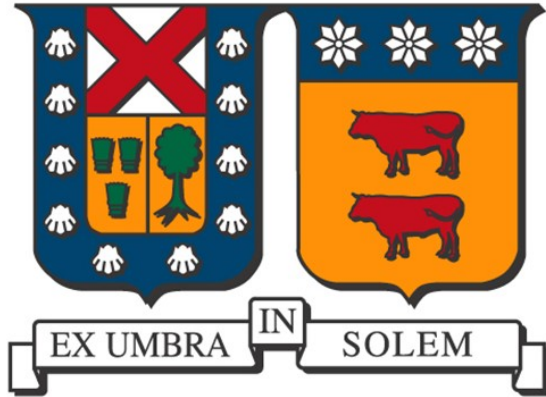


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
Santiago - CHILE



**MODELO DE LOTE ECONÓMICO PROBABILIZADO: CÓMO DECIDIR
ANTE LA FALTA DE INFORMACIÓN**

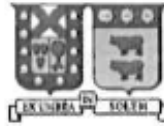
AUTORA

FRANCISCA CATALINA LAGOS FERNÁNDEZ

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERÍA CIVIL INDUSTRIAL**

PROFESOR GUÍA : RODRIGO MENA
PROFESOR CORREFERENTE : ESTEBAN SALGADO

Santiago, 8 de Octubre de 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: **MODELO DE LOTE ECONÓMICO PROBABILIZADO: CÓMO DECIDIR ANTE LA FALTA DE INFORMACIÓN**

Nombre del candidato(a): Francisca Catalina Lagos Fernández

Carrera / Grado: Ingeniería Civil Industrial

Campus: Vitacura

Departamento: Industrias

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, **Rodrigo Mena Bustos**, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente
DEJO CONSTANCIA que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por (marcar una opción):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 03/11/2025

Firma: 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 30.10.2025

Firma: 

Índice de Contenidos

1. Problema de Investigación	7
2. Objetivos	9
2.1. Objetivo General	9
2.2. Objetivos Específicos	9
3. Marco Teórico	10
3.1. Tipos de modelos	11
3.1.1. Modelo punto de reorden y tamaño de lote	14
3.1.1.1. Consideraciones generales y supuestos	14
3.1.1.2. Construcción del modelo	15
3.1.1.3. Función Objetivo:	17
3.2. Incertidumbre Epistémica	17
3.3. Teoría de la Posibilidad	19
3.3.1. Explicación matemática y algunas propiedades	19
3.3.2. Distribución de posibilidad y conjuntos difusos	20
3.3.3. Alpha Cuts	21
3.4. Propagación de incertidumbre	23
3.5. Intervalo esperado y Valor esperado	24
4. Metodología	26
4.1. Modelo de inventario	26
4.1.1. Solución del modelo	28
4.1.1.1. Consideraciones	28
4.1.1.2. Algoritmo de solución	29
4.1.2. Programación del código	29
4.2. Parámetros inciertos	31
4.2.1. Parametros con incertidumbre Aleatoria	31
4.2.1.1. Demanda Anual	31
4.2.1.2. Promedio y desviación estándar en el Lead Time	32
4.2.2. Parámetros con incertidumbre Epistémica	32
4.2.2.1. Promedio de Demanda Anual	32
4.2.2.2. Promedio y desviación estándar en el lead time	33
4.2.3. Costos por faltantes	33
4.3. Intervalos de variación de Q y r	34
4.4. Propagación de incertidumbre	36
4.5. Casos de análisis	38
4.5.1. Caso Base	38
4.5.2. Caso Intervalos	39
4.5.3. Caso Propagación de Incertidumbre	39

5. Caso de estudio	41
5.1. Simplificación de datos	41
6. Análisis y resultados	43
6.1. Resultados caso base	43
6.2. Resultado caso intervalos	44
6.3. Resultado propagación de incertidumbre	47
7. Conclusiones	56
Referencias	58
A. Anexos	60
A.1. Algoritmo Python para Modelo de Inventario deterministico	60
A.2. Algoritmo Python para Modelos de Inventario con variabilidad	61
A.3. Algoritmo Python para Modelo de Inventario con distribuciones de posibilidad	62
A.4. Demanda anual de cubetas de pinturas	63
A.5. Precios Proveedor	63
A.6. Distribución de probabilidad de tiempos de entrega	63
A.7. Código en RStudio para estimación de demanda mensual	64
A.8. Costos totales mínimos y máximos para cada corte alpha, solución 1	64
A.9. Costos totales mínimos y máximos para cada corte alpha, solución 2	65
A.10. Costos totales mínimos y máximos para cada corte alpha, solución 3	65

Índice de Tablas

5.1. Datos negocio de venta de pinturas. Fuente: Izar y Méndez (2013).	41
6.1. Parámetros de entrada utilizados en el caso base. Fuente: Elaboración Propia.	44
6.2. Resultados óptimos en caso base. Fuente: Elaboración Propia.	44
6.3. Resultado valor promedio mensual de demanda y error mediante Estimación de Máxima Verosimilitud. Fuente: Elaboración Propia.	45
6.4. Resultados representativos de costos totales, caso propagación de incertidumbre con intervalos y valores esperados. Fuente: Elaboración propia.	51
6.5. Intervalos esperados y rangos de soluciones representativas de modelo con propagación de incertidumbre. Fuente: Elaboración propia.	53
A.1. Costos Totales mínimos y máximos según nivel α para decisión $Q, r = 233,24, 70,00$. Fuente: Elaboración propia.	64
A.2. Costos Totales mínimos y máximos según nivel α para decisión $Q, r = 260,00, 70,00$. Fuente: Elaboración propia.	65
A.3. Costos Totales mínimos y máximos según nivel α para decisión $Q, r = 229,12, 66,47$. Fuente: Elaboración propia.	65

Índice de Figuras

3.1. Inventario neto y posición de inventario en el tiempo. Fuente: Muckstadt y Sapra (2006).	15
3.2. Distribución de posibilidad trapezoidal para la variable Y_1 , con corte $\alpha = 0,3$ definido por el intervalo $A_{0,3} = [3,15, 4,70]$. Fuente: Zio y Pedroni (2013).	22
4.1. Pseudo código de algoritmo de solución de problema de inventario Caso Base. Fuente: Elaboración propia.	30
4.2. Pseudo código de algoritmo de optimización por intervalo. Ver código original en Anexo A.2. Fuente: Elaboración propia.	35
4.3. Pseudo código modelo de inventario con propagación de incertidumbre mediante distribuciones de posibilidad. Fuente: Elaboración propia.	37
6.1. Gráfica distribución de posibilidad de λ . Fuente: Elaboración propia.	49
6.2. Gráfica distribución de posibilidad de μ . Fuente: Elaboración propia.	49
6.3. Gráfica distribución de posibilidad de σ . Fuente: Elaboración propia.	50
6.4. Gráfica distribución de posibilidad de π . Fuente: Elaboración propia.	50
6.5. Distribución de posibilidad solución 1, asociado a decisión $Q, r = (233,24, 70,00)$. Fuente: Elaboración propia.	51
6.6. Distribución de posibilidad solución 2, asociado a decisión $Q, r = (260,00, 70,00)$. Fuente: Elaboración propia.	52
6.7. Distribución de posibilidad solución 3, asociado a decisión $Q, r = (229,12, 66,47)$. Fuente: Elaboración propia.	52
A.1. Algoritmo en software Python para optimizar modelo de inventario deterministico. Fuente: Elaboración Propia.	60
A.2. Algoritmo en software Python que evalúa óptimos con parametros de entrada inciertos. Fuente: Elaboración Propia.	61
A.3. Algoritmo en software Python que evalúa los óptimos mediante distribuciones de posibilidad . Fuente: Elaboración Propia.	62
A.4. Demanda de pinturas de un año de operación. Fuente: Estudio comparativo de la aplicación de 6 modelos.	63
A.5. Precios proveedor por volumen. Fuente: Estudio comparativo de la aplicación de 6 modelos.	63
A.6. Distribución de probabilidad en tiempos de entrega caso base. Fuente: Estudio comparativo de la aplicación de 6 modelos.	63
A.7. Código en RStudio para estimación de demanda mensual mediante método de Maxima Verosimilitud . Fuente: Elaboración Propia.	64

1. Problema de Investigación

Ante la continua necesidad de las empresas de mejorar indicadores, rentabilidad y optimizar recursos, la gestión y control de inventarios juega un papel fundamental en la eficiencia operativa. Las preguntas ‘cuánto’, ‘cuándo’ y ‘dónde’ se almacena son incógnitas constantes que toda área de abastecimiento debe resolver para poder optimizar costos y recursos apuntando a satisfacer toda la demanda que el mercado solicite. A pesar de que se han desarrollado diversos modelos para dar soporte a la gestión de inventarios con el objetivo de mejorar la precisión en la toma de decisiones, la incertidumbre sigue siendo un factor crítico que afecta la eficiencia en la cadena de suministro (Wang, 2011). En particular, la incertidumbre epistémica, caracterizada por la falta de conocimiento o certeza completa de un fenómeno, desafía la exactitud de los resultados debido a la falta de certeza en los parámetros de entrada de estos modelos. Lo anterior, puede tener un impacto significativo al momento de tomar decisiones en una organización, ya que puede traducirse en una deficiencia en el nivel de servicio a los clientes, puede incrementar costos, generar excesos u obsolescencias o, convertir la operación en un proceso ineficiente (Fernández, 2017). Por lo cual, se vuelve fundamental modelar la incertidumbre, tanto epistémica como aleatoria; caracterizarla y considerar posibles consecuencias de sus efectos en la toma de decisiones del proceso.

Es común que los modelos de optimización de inventarios se enfrenten a desafíos como, por ejemplo, variabilidad de la demanda de productos, ya sea por preferencias del consumidor, competencia en la industria, factores económicos, entre otros. También, variabilidad en los tiempos de entrega de proveedores ya que pueden cambiar por problemas de disponibilidad de materias primas, producción, problemas logísticos, entre otros (Nahmias, 2007). La naturaleza de estas variabilidades se puede clasificar en dos tipos: aleatoria, cuando el fenómeno en sí presenta variabilidad y se puede modelar mediante distribuciones de probabilidad o procesos estocásticos; o epistémica, cuando se origina por falta de información precisa o por desconocimiento parcial. Dada la falta de certeza sobre algunos

datos, lo que se considera como incertidumbre epistémica en los parámetros, la planificación de los inventarios se puede ver afectada negativamente ya que la realidad se podría desarrollar fuera de lo esperado por los modelos.

Dado lo anterior, el siguiente trabajo propone analizar un caso práctico de cómo impacta la incertidumbre epistémica en un modelo de optimización de inventario, el cual busca minimizar los costos totales determinando la cantidad de pedido de Q unidades y el punto de reorden de r unidades. Por un lado, dado que no es un concepto tan nombrado ni de conocimiento masivo, se definirá la incertidumbre epistémica, sus orígenes, implicancias e información relevante para el entendimiento del trabajo y luego, se estudiará un caso práctico donde se propone modelar la incertidumbre en parámetros de entrada al modelo, propagar a través de este y entregar soluciones óptimas que den soporte al tomador de decisiones.

A modo de guía de este estudio, algunas preguntas que se buscará dar respuestas son:

¿Qué es la incertidumbre epistémica? ¿Qué factores generan incertidumbre epistémica en los modelos de optimización de inventarios? ¿Cómo se puede modelar la incertidumbre en la toma de decisiones de inventarios? ¿Cómo se comportan las soluciones óptimas del modelo ante variabilidades de sus parámetros?

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

Identificar factores que generan incertidumbre epistémica en la gestión de inventarios para un modelo de revisión continua tipo (Q,r) y analizar el impacto que esta tiene en las soluciones óptimas del modelo para sugerir decisiones adecuadas al tomador de decisiones.

2.2. Objetivos Específicos

- Revisar literatura especializada sobre gestión de inventarios, modelos de optimización e incertidumbre epistémica, con el fin de establecer el marco conceptual y metodológico.
- Caracterizar los principales parámetros involucrados en un modelo de inventario de revisión continua tipo (Q,r) , detallando sus supuestos, función de costo y condiciones del sistema.
- Modelar las fuentes de incertidumbre epistémica y propagarlas a través del modelo decisional de inventarios.
- Desarrollar e implementar algoritmos en lenguaje *Python* que permitan calcular los resultados óptimos del modelo, tanto determinístico como con incertidumbre epistémica.
- Evaluar el impacto de la variabilidad e incertidumbre epistémica en los costos totales del modelo y en los valores óptimos de Q y r mediante propagación de incertidumbre, análisis de intervalos y cortes α .

3. Marco Teórico

Para comenzar, la gestión de inventarios involucra todas aquellas actividades que tengan como fin planificar, controlar y supervisar; y optimizar los niveles de inventarios de una empresa desde uno hasta miles de productos, que pueden gestionarse bajo distintos criterios de planificación. La cadena del proceso considera desde la adquisición de productos y/o materias primas, hasta la entrega del producto final al cliente con el objetivo principal de mantener niveles óptimos de inventario para satisfacer la demanda del mercado y minimizar los costos del proceso ya que influye directamente en la rentabilidad de las empresas (Zipkin, 2000). Lo anterior, implica en términos generales no incurrir en excesos de costos de almacenamiento o que existan riesgos de escasez que impidan satisfacer toda la demanda de los clientes.

Como se mencionó anteriormente, la gestión de inventario involucra tres principales componentes. En primer lugar, la **planificación**, que involucra la predicción de demanda y la determinación de niveles de inventario necesarios para cumplir con esta (Silver, Pyke, y Peterson, 1998); en segundo lugar, el **control de inventarios**, que involucra el monitoreo de los niveles de inventario para asegurar la disponibilidad y precisión de la información (Nahmias, 2007); y por último, la **optimización de inventarios**, que implica la utilización de modelos matemáticos que determinen las cantidades óptimas ya sea de pedido y punto de reorden, aquí es donde entra el juego la minimización de los costos como eje principal en la gestión (Zipkin, 2000).

Para llevar a cabo estas actividades, existen ciertos factores que son más relevantes para la gestión de inventarios y son aquellos que están directamente relacionadas con la optimización ya sea de costos, satisfacción de demanda y niveles de inventario. En este contexto, es importante distinguir los conceptos de parámetros y variables. El primero corresponde a datos conocidos o estimados que son información de entrada de un modelo, mientras que las variables de decisión, son aquellas que el modelo busca determinar para hacer el resultado óptimo. En la rama de los parámetro se tiene la **demand**a, que se refiere a la cantidad de unidades que los clientes requieren en cierto periodo

y esta puede ser determinística (conocida y constante) o estocástica (incierto y variable), siendo de vital importancia sus valores dado que evita excesos o escasez en la planificación. También se tienen los **tiempos de entrega o lead time**, que hace referencia al tiempo en que se solicita un pedido y este se recibe, su importancia radica en cómo afecta al stock de seguridad y al punto de reorden. Por último, los **costos de inventario**, se refiere a todos los costos del proceso, ya sea de pedido, de almacenamiento y por faltantes, donde la minimización de estos es la principal directriz de la gestión de inventarios. En cuanto a las variables de decisión está el **Punto de reorden**, que se refiere al nivel de stock o inventario en el cual se debe realizar un nuevo pedido, determinar este dato es muy importante para evitar quiebres de inventario y, la **Cantidad de pedido**, que son las unidades que se deben ordenar cada vez que se realiza un pedido, este valor afecta los costos del pedido y el costo de almacenamiento del stock. El conocimiento de estos seis conceptos es fundamental para la optimización de recursos y mejorar la eficiencia operativa en la gestión de inventarios.

3.1. Tipos de modelos

Dentro de los distintos enfoques que tienen los modelos de gestión de inventario, dos de los más destacados son los modelos de revisión continua y los modelos de revisión periódica. Estos modelos se basan en distintos criterios y ofrecen diferentes beneficios que se detallan a continuación.

Modelos de revisión periódica

El primer lugar, los modelos de revisión periódica, como su nombre lo indica, tiene la principal característica de que el inventario se revisa periódicamente en un tiempo establecido (semanas, quincenas, meses, etc.) y en cada revisión se realiza un pedido que lleve el inventario a cierto nivel de stock disponible, pudiendo variar la cantidad pedida en cada uno de los ciclos. Dentro de las principales ventajas de manejar este tipo de modelos son la simplicidad operativa, ya que no requiere estar revisando el stock de forma continua; flexibilidad en la cantidad de pedido ya que no se determina un número fijo de unidades para cada ciclo y, por último, tiene menor complejidad para implementarlo ya que no necesita de sistemas tecnológicos avanzados. Sin embargo, por otro lado, una de las mayores desventajas de este tipo de modelos son el incremento de riesgo de quiebre de stock entre revisiones dado que la periodicidad de estos está fija, y se puede incurrir en niveles de

inventarios más altos de los necesarios, que impacta directamente en los costos de almacenamiento (Silver y cols. (1998) ; Chopra y Meindl (2013)).

Modelos de revisión continua

Los modelos de revisión continua, al contrario de los modelos de revisión periódica, implican un monitoreo constante de los niveles de inventario. Una vez que el stock llega a un nivel fijo “r”, llamado punto de reorden, se realiza un nuevo pedido por una cantidad fija “Q”. Estas características permiten reducir las probabilidades de quiebre de stock, en consecuencia, reducción de costos por este concepto. Adicionalmente, otra ventaja es que existe mayor precisión y control en la gestión de los inventarios y los niveles de stock están más alineados a la demanda real. Por el contrario, una de las principales desventajas de este tipo de modelos es que se requiere la implementación de sistemas más avanzados de monitoreo de inventarios que suelen ser más costosos que otro tipos de sistemas (Nahmias, 2007).

A pesar que el uso de los modelos depende mucho del contexto y característica en cuanto a demanda, costos y capacidades de la empresa, en general en las distintas industrias, hay mayor popularidad en el uso de los métodos de revisión continua esto dado que tienen mejor respuesta ante variabilidades en la demanda y permite minimizar mejor los costos totales de inventario. A continuación, se describen 3 de los modelos de revisión continua más utilizados:

- Modelo de Cantidad Económica de Pedido (EOQ): Probablemente sea el modelo más utilizado de forma transversal en la gestión de inventarios, su objetivo es minimizar los costos totales de inventario determinando una cantidad óptima de pedido (Q). Su ventaja principal es la simplicidad para entender y aplicar el modelo, y logra eficiencias operativas en cuanto a la minimización de costos tanto de pedido como de almacenamiento. Por otro lado, dentro de las desventajas principales se encuentra que el modelo considera variables deterministas, quiere decir, considera la demanda como constante y conocida (pudiendo no ser del todo realista en algunos casos) y tiempos de entrega fijos, además de que no considera el concepto de inventario de seguridad (Nahmias, 2007).
- Modelo de punto de reorden (ROP): Como el nombre lo indica, el objetivo de este modelo es realizar el pedido cuando el inventario llegue a un nivel determinado “r”, punto de reorden, esto,

para asegurar que siempre haya suficiente inventario disponible que cubra la demanda durante el tiempo de entrega de los productos. Determinar el valor de “r” es tan sencillo como definir un inventario de seguridad y sumarle a este la demanda en el lead time. En las ventajas del modelo se encuentra una reducción de riesgo de quiebres de stock ya que se realizan los pedidos a un nivel fijo de inventario que asegure cubrir la demanda en el lead time, además de agregar un inventario de seguridad para cubrir algún aumento en la demanda en ese periodo. Por otro lado, es adaptable y fácil de implementar, ya que el punto de reorden se puede ir modificando en base al comportamiento de la demanda y los tiempos de entrega. Y finalmente, hay un impacto de eficiencia operativa ya facilita la programación y planificación, realizando los pedidos de manera oportuna. Por el contrario, las desventajas de este modelo es que puede incurrir en costos de almacenamientos altos debido al inventario de seguridad, además, se requieren datos precisos sobre la demanda y tiempos de entrega ya que cualquier inexactitud puede llevar a quiebres o excesos de inventario requiriendo una actualización constante de estos parámetros (Nahmias, 2007).

- Modelo de revisión continua con inventario de seguridad o descuentos por volumen: ambos casos son una extensión del modelo EOQ pero considerando nuevos conceptos como stock de seguridad o descuentos que ofrecen los proveedores en base a rangos de volúmenes. Respecto a los modelos con stock de seguridad, su fin es amortiguar efectos ante variabilidades en la demanda como en los tiempos de entrega, sin embargo, a pesar de cubrir de mejor manera la demanda el efecto negativo es incurrir en mayores costos de almacenamiento teniendo como dificultad saber determinar correctamente que nivel de stock de seguridad se debe manejar (Nahmias, 2007). En cuanto a los modelos de descuentos por volumen, el objetivo es encontrar el tamaño de pedido “Q” que minimice los costos totales, haciendo uso de los descuentos para ciertos volúmenes de compra. Este modelo es muy útil respecto a minimización de costos, sin embargo, se considera la demanda y los tiempos de entrega como valores fijos, no dando espacio a variabilidades en los parámetros (Chopra y Meindl, 2013).

En resumen, estos modelos en general son de fácil entendimiento y sencillos de aplicar, sin embargo, los 3 modelos mencionados coinciden en que para su aplicación los parámetros de entrada deben ser valores conocidos sin rangos de error, lo cual se aleja bastante de la realidad y del objetivo de este estudio. Por lo tanto, es necesario estudiar un modelo que permita reflejar incertidumbre

en sus parámetros y en consecuencia, en sus resultados óptimos. A continuación, se detalla una extensión del modelo EOQ pero probabilizada, este permite incluir grados de incertidumbre en el estudio.

3.1.1. Modelo punto de reorden y tamaño de lote

El modelo de punto de reorden y tamaño de lote es un modelo de gestión de inventarios que combina dos conceptos claves del área: el punto de reorden y la cantidad económica de pedido (o tamaño de lote). Este modelo es un modelo de revisión continua y su objetivo es minimizar los costos totales estableciendo un punto de reorden y cantidad de pedido fijos.

3.1.1.1. Consideraciones generales y supuestos

El primer objetivo del modelo es minimizar los costos anuales totales de la operación, en base a una cantidad de pedido Q (un), fija, que se solicita cuando el inventario alcanza un valor de r (un), llamado punto de reorden.

Algunas consideraciones del modelo a utilizar es que primero, la demanda es aleatoria, controla inventarios en un solo lugar, de un solo artículo y no hay pérdidas de venta. Dentro de los costos en consideración están el costo fijo por pedido k (U.M), costos por backorders π (U.M/ un) y, los costos de mantener una unidad disponible durante un año h (U.M/un*año).

Un supuesto clave del modelo es que nunca hay más de un pedido pendiente, por lo tanto, cuando se llega al punto de reorden r , no hay pedidos pendientes. Respecto a r , este jamás es negativo y la demanda potencial de un cliente no excede Q , que en la práctica quiere decir que Q debe ser mucho más grande que la demanda esperada en un periodo.

Por otro lado, cabe destacar que, para el modelo, los backorders son no deseados. Si tiene un pedido atrasado en un ciclo (tiempo entre dos pedidos consecutivos) este solo ocurrirá al final, esto quiere decir que, la cantidad promedio de backorders pendientes en cualquier momento del ciclo es muy pequeña en comparación a la cantidad promedio de inventario disponible. En la figura 3.1 se muestra la dinámica entre el inventario neto (stock disponible – backorders), la posición del inventario (capacidad para satisfacer demandas futuras) y t que es el tiempo de entrega:

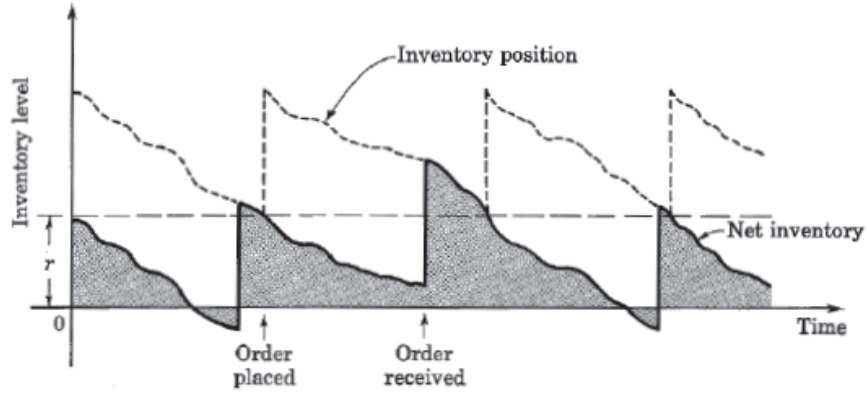


Figura 3.1. Inventario neto y posición de inventario en el tiempo. Fuente: Muckstadt y Sapra (2006).

3.1.1.2. Construcción del modelo

Como se mencionó anteriormente, el objetivo del modelo es minimizar los costos totales de la operación, esta será la función objetivo del problema la cual está compuesta por los parámetros: K : costos fijos de pedido (U.M/pedido); π : costos por backorder (U.M/un); h : costos de mantenimiento de stock disponible durante un año (U.M/año); λ : promedio de la tasa de demanda anual (un/año) y μ : promedio de demanda en lead time (un). Y, también compuesto por las variables de decisión: Q : Cantidad de pedido constante (un) y r : punto de reorden, nivel que alcanza el inventario para realizar el siguiente pedido (un).

Dado que se satisface toda la demanda, el costo variable de adquisición esperado $C^*\lambda$; donde C corresponde al costo unitario de adquisición (U.M/un), no depende de las variables del modelo por lo cual no es necesario incluirlo en la función objetivo. Sin embargo, el costo fijo de adquisición si depende de Q . Por lo tanto, teniendo K y λ se obtiene el costo anual de pedidos realizados en un año es:

$$\text{Costo anual de pedidos realizados} = \frac{\lambda K}{Q} (\text{U.M/año}) \quad (3.1)$$

Por otro lado, para calcular el costo de backorders esperados en un año, se calcula la cantidad de backorders por ciclo y, siendo λ/Q la cantidad de ciclos esperados por año, se puede obtener la cantidad de backorders esperados en un año, para finalmente multiplicarlo por π y obtener el costo de este.

Cuando se llega al punto de reorden en un ciclo, la demanda que se genera en el periodo del lead time determina si existirá o no backorders en ese ciclo. Por lo tanto, siendo x la demanda en

este periodo, existirá backorder si y solo si $x > r$, donde $x-r$ determina las unidades pendientes y, el número de pedidos pendientes por ciclo se calcula como:

$$\text{Promedio esperado de demanda en lead time} = \int_r^{\infty} (x - r) f(x) dx \quad (3.2)$$

Y, en base a lo mencionado anteriormente, el costo de backorders en los que se incurrirá en un año se expresa como:

$$\text{Costos por backorder} = \frac{\lambda \pi}{Q} \int_r^{\infty} (x - r) f(x) dx \text{ (U.M/año)} \quad (3.3)$$

Para calcular el costo anual promedio de inventario, recordar que, se tiene Inventario Neto = Stock Disponible - Backorders, quedando el tiempo promedio del inventario neto expresado como:

$$E[\text{inventario neto}] = E[\text{inventario disponible}] - E[\text{backorders}] \quad (3.4)$$

Cabe mencionar que, como se indicó anteriormente, los pedidos atrasados ocurren en cantidades muy pequeñas y solo al final de un ciclo, esto implica que, el número promedio de backorders que hay en algún momento es insignificante en comparación con el inventario total disponible. Quiere decir:

$$E[\text{backorders}] \approx 0 \quad (3.5)$$

Y como consecuencia, la ecuación anterior resulta como:

$$E[\text{inventario neto}] \approx E[\text{inventario disponible}] \quad (3.6)$$

Por lo que se aproximará $E[\text{inventario neto}]$ como $E[\text{inventario disponible}]$.

Por otro lado, respecto al stock de seguridad s , se tiene que $s + Q$ es el inventario disponible esperado justo al momento que llega un pedido y se supone, que la demanda ocurre a una tasa de λ , por lo tanto, el inventario neto promedio durante un ciclo es de:

$$\text{Inventario promedio neto en un ciclo} = \frac{1}{2}(Q + s) + \frac{1}{2}(s) = \frac{1}{2}Q + s \quad (3.7)$$

Pero, además se tiene que:

$$s = \int_r^\infty (r - x)f(x) dx = r - \mu \quad (3.8)$$

Donde μ corresponde al promedio de demanda en el lead time. Esto permite aproximar el inventario promedio disponible como:

$$\text{Inventario promedio disponible} = \frac{Q}{2} + r - \mu \quad (3.9)$$

Y en términos monetarios anuales, queda expresado como:

$$\text{Costo anual de mantener inventario} = h\left[\frac{Q}{2} + r - \mu\right] \quad (3.10)$$

3.1.1.3. Función Objetivo:

Finalmente, con los términos 3.1, 3.3 y 3.10, se construye la función objetivo a minimizar, quedando expresada como:

$$C(Q, r) = \frac{\lambda K}{Q} + h\left[\frac{Q}{2} + r - \mu\right] + \frac{\lambda \pi}{Q} \int_r^\infty (x - r)f(x) dx \quad (3.11)$$

Donde las restricciones corresponden a $Q, r \geq 0$.

3.2. Incertidumbre Epistémica

La incertidumbre, en términos generales se refiere a la falta de certeza sobre alguna situación, información, entre otros. Su origen puede radicar en falta de información sobre alguna situación, variabilidad y aleatoriedad en datos, ambigüedad en la interpretación, complejidades del entorno que impidan determinar resultados con certeza o, a raíz de limitaciones humanas o riesgos desconocidos (Der Kiureghian y Ditlevsen, 2009). En particular, la incertidumbre epistémica, se origina específicamente en la falta de conocimiento de un evento o de la imprecisión de datos o de un fenómeno en sí. Esto debido, generalmente, a falta de evidencia suficiente de algunos sucesos, interpretación subjetiva de datos e información no coherente o contradictoria (Dubois y Prade, 1988). Desde otra mirada, la incertidumbre epistémica refleja o reconoce la limitación del conocimiento y la imposibilidad de tener total certeza de cómo funcionan algunos fenómenos en el mundo evidenciando que el

conocimiento humano está sujeto a límites. El estudio y consideración de la incertidumbre epistémica en cualquier área tiene amplias y variadas implicancias, por ejemplo, mejorar la toma de decisiones, ya que, al reconocer cierto grado de desconocimiento, las personas pueden tomar decisiones más informadas considerando en su análisis la incertidumbre inherente de un proceso (Smithson, 1989). Por otro lado, desde el punto de vista científico, reconocer la incertidumbre fortalece los procesos de investigación ya que los científicos logran comprender de mejor manera las limitantes en su conocimiento e identificar estudios que requieren más atención y así, entregar análisis y teorías más sólidas y de mejor comprensión. Como tercer punto, se encuentra la gestión de riesgos; el estudio de la incertidumbre epistémica permite gestionar y evaluar posibles riesgos en cientos de escenarios futuros y pronósticos permitiendo tener una planificación más adecuada ante contingencias. Y finalmente, también se reconoce una mejora en la comunicación científica, esto se refiere a que al evidenciar la existencia de incertidumbre (epistémica) en sus estudios y resultados, los investigadores permiten que los lectores tengan una mejor comprensión de los fenómenos en estudio, reconociendo la confianza y validez de sus conclusiones, mitigando cualquier tipo de ambigüedad o desinformación al público. Desde un punto de vista empresarial más práctico, la incertidumbre epistémica impacta en muchas áreas donde las empresas se ven obligadas a tomar decisiones día a día, un ejemplo de aquello es en la gestión de inventarios. La búsqueda constante de optimización de recursos y eficiencias operativas es crucial para mejoras en rentabilidad, sin embargo, al evaluar y tomar decisiones respecto a la gestión de esta área, la incertidumbre epistémica toma un papel importante en muchas variables del proceso, en específico, puede surgir debido a factores como:

- Demanda impredecible: el mercado y la diversa oferta pueden generar cambios constantes en las preferencias de los consumidores, como también puede verse afectada por el momento económico que esté viviendo un país, lo que puede resultar en altos niveles de incertidumbre respecto a la proyección de este parámetro (Snyder y Shen, 2011).
- Tiempos de entrega (Lead time): la incertidumbre aquí radica en problemas de producción, transporte, disponibilidad de materias primas, entre otros, provocando que los tiempos de entrega reales se alejen del teórico (Van der Vorst, Beulens, y van Beek, 2005).
- Interrupción en la cadena de suministros: esto corresponde a cualquier evento que impacte en la cadena de suministro independiente del área que provenga. Un ejemplo son los paros portuarios que retrasan, o en algunos casos cancelan por completo las entregas de materias

primas o productos terminados (Snyder y Shen, 2011).

- Factores políticos, sociales y ambientales: factores externos como cambios de gobiernos, conflictos sociales, desastres naturales que afecten directamente la entrega, producción, almacenamiento, etc. (Van der Vorst y cols., 2005).

3.3. Teoría de la Posibilidad

La teoría de la posibilidad está estrechamente ligada a la incertidumbre epistémica, ya que ofrece una forma de abordar y estudiar la falta de conocimiento o precisión de datos para la toma de decisiones. De base, se propone que la gran mayoría de las situaciones en la vida cotidiana no pueden clasificarse de forma binaria, sino que existe un grado de pertenencia para cada una de ellas permitiendo así, representar incertidumbres ante datos incompletos o ambiguos (Dubois y Prade, 1988).

En términos simples, la teoría de la posibilidad intenta definir que tan plausible es que “algo” ocurra en un rango de valores, esto, mediante funciones de membresía, que permiten expresar los grados de incertidumbre.

3.3.1. Explicación matemática y algunas propiedades

En primer lugar, la base numérica de la teoría de la posibilidad es la distribución de posibilidad, esta asigna a cada valor de un parámetro y en un rango Y un grado de posibilidad $\pi_Y(y) \in [0, 1]$. De esta manera, la distribución de posibilidad intenta reflejar el grado de similitud del parámetro y y un prototipo ideal o valor esperado donde el grado de posibilidad es 1. Por lo tanto, $\pi_Y(y)$ mide la distancia entre y y el prototipo, que en algunos casos se puede determinar mediante procesos de mediciones definido y en otros, basarse en algunos juicios subjetivos.

A modo de interpretación de resultados, la función de distribución de posibilidad para cualquier y que $\pi_Y(y)=0$ indica que la situación es imposible. Por el contrario, cuando $\pi_Y(y)=1$ para algún y , significa que el resultado es posible, normal o usual, indicador que es mucho menos determinante a cuando una variable tiene una probabilidad=1. En la misma línea, si se tiene que $\pi_Y(y) > \pi_Y(y')$, se considera que y es más plausible que y' , ya que se acerca más al prototipo ideal. Por lo tanto, una distribución de posibilidad es un mapeo semicontinuo desde lo “real” hasta el intervalo unitario que describe los valores más o menos plausibles, y del parámetro que se encuentra en Y (Dubois

y Prade, 1988). Se supone que estos valores son mutuamente excluyentes, ya que el parámetro solo toma un valor. Lo anterior, desprende la condición de normalización:

$$\exists y : \pi_Y(y) = 1 \quad (3.12)$$

De la condición de normalización, se afirma que al menos un valor se considera totalmente posible, que no es lo mismo que lo visto anteriormente $\pi_Y(y)=1$ que indica que la variable es habitual, normal o no sorprendente. Adicionalmente, si $\forall y \in Y, \pi_Y(y) < 1$ la representación de incertidumbre indicada por la distribución de posibilidad sería inconsistente ya que todos los valores en Y son solo parcialmente posibles (Zadeh, 1978)

Por otro lado, si y solo si $\pi_1 \leq \pi_2$ se puede indicar que π_1 es al menos tan específica como π_2 . También, si se tiene $\forall y \in Y, \pi_Y(y) = 1$, esto último simplemente indica que para todo valor de y en Y es posible, indicando en este caso que la medida de posibilidad es vacua.

Finalmente, existen operadores respecto a las distribuciones de posibilidad utilizadas para manipular y combinar distribuciones. Esto es útil ya que permite calcular la posibilidad de eventos compuestos o condicionales. Dentro de las bases principales en la gestión y combinación de incertidumbre están los operadores de unión e intersección (Dubois y Prade, 1988), representados a continuación:

$$(AB) = \max[Pos(A), Pos(B)] \quad (3.13)$$

$$(AB) = \min[Pos(A), Pos(B)] \quad (3.14)$$

Donde A y B son eventos posibles, $Pos(A)$ y $Pos(B)$ es el grado de posibilidad de que ocurra cada evento (obtenidos de una distribución de posibilidad, y el valor oscila entre 0 y 1) y, 3.13 y 3.14 representan las operaciones de unión e intersección respectivamente.

3.3.2. Distribución de posibilidad y conjuntos difusos

Una de las maneras de formular la teoría de la posibilidad es mediante la relación con los conjuntos difusos (Zadeh, 1978; Dubois y Prade, 1988). Los conjuntos difusos presentan límites difusos a diferencia de los conjuntos convencionales, permitiendo así, la representación de la incertidumbre sobre la pertenencia de un elemento al conjunto.

Dentro de las características claves de los conjuntos difusos están las funciones de pertenencia o de membresía. Estas describen el grado de pertenencia parcial de un elemento al conjunto, deter-

minado por su cercanía al núcleo o límite del conjunto difuso. Estas pueden tener diversas formas, desde triangulares, trapezoidales e incluso gaussianas, donde cada una de ellas tiene sus propias características y aplicaciones específicas (Klir y Yuan, 1995). Junto a estos, están los grados de pertenencia, que como se indicó anteriormente, sus valores están entre $[0,1]$ asignados por las funciones, donde 0 indica que no pertenece al conjunto, 1 tienen pertenencia total al grupo y todos los valores intermedios describen una pertenencia parcial, reflejando la incertidumbre de un elemento particular del conjunto.

Si se considera un conjunto difuso F en el rango Y (U_y) teniendo $y \in Y$ (o $y \in U_y$), la función de membresía o de pertenencia $\mu_{F,Y}(y)$ representa el grado de membresía en un conjunto difuso (Zadeh, 1978). Por lo tanto, el concepto se expresa matemáticamente como: la función de membresía $\mu_{F,Y}(y)$ asigna a cada elemento de y de un universo U_y un valor entre 0 y 1, indicando el grado de pertenencia de y al conjunto difuso F con respecto a la variable Y , quedando:

$$\pi_{F,Y}(y) = \mu_{F,Y}(y) \quad \forall y \in U_y \quad (3.15)$$

Lo anterior indica que tanto $\pi_{F,Y}(y)$ como $\mu_{F,Y}(y)$, son equivalentes y representan la misma función de membresía para el conjunto difuso F en base a Y .

3.3.3. Alpha Cuts

Los alpha cuts o cortes alfa, son elementos que se encuentran dentro de la teoría de los conjuntos difusos y se utilizan para representar los subconjuntos asociados a distintos niveles de la función de membresía.

Al seleccionar diferentes valores de $\alpha \in [0,1]$, se obtiene diferentes cortes alfa que representan distintos niveles dentro de un conjunto difuso, proporcionando una visión más clara de la estructura del conjunto (Klir y Yuan, 1995).

Un corte alfa en un conjunto difuso A se define como el conjunto de todos los elementos de x en X . Este, tiene un grado de membresía en A mayor o igual a un valor α en el intervalo $[0,1]$, expresado matemáticamente:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \pi_A(x) \geq \alpha\} \quad (3.16)$$

De la ecuación 3.16 se tiene que, A_α es el corte alfa del conjunto difuso A a un nivel α . Y α ,

es el umbral de corte en un intervalo entre $[0,1]$. En este caso, el corte alpha A_α incluye todos los elementos del conjunto cuyo grado de membresía es al menos α .

De lo anterior, se desprende una de las características más propias de los alpha cuts y es la capacidad de segmentar conjuntos difusos en niveles de pertenencia específicos, es decir, cada corte alfa A_α indica los elementos que tienen un grado de membresía igual o mayor a α , permitiendo una representación detallada de la distribución de pertenencia en el conjunto (Zio y Pedroni, 2013).

Al considerar diferentes valores de alfa, se obtiene para cada uno un corte alpha específico que indica como varía la membresía a lo largo del espectro de posibilidades. El rango de valores es más amplio cuando el nivel de posibilidad es $\alpha = 0$, luego, justo por encima de este valor se encuentra en rango de valores que son “concebibles”. Aquí, están los elementos que pertenecen al conjunto difuso “A” con un grado de pertenencia al menos igual a α y, a medida que aumenta su valor, en conjunto A_α se reduce, abarcando solo aquellos elementos con un grado de pertenencia mayor o igual a α . Por último, en el nivel $\alpha = 1$, corresponde al escenario más restringido, ya que refleja mayor posibilidad pero menor flexibilidad ya que solo se están considerando los casos más creíbles o seguros (Zio y Pedroni, 2013).

A continuación, se presenta un ejemplo de una distribución de posibilidad con cortes alpha:

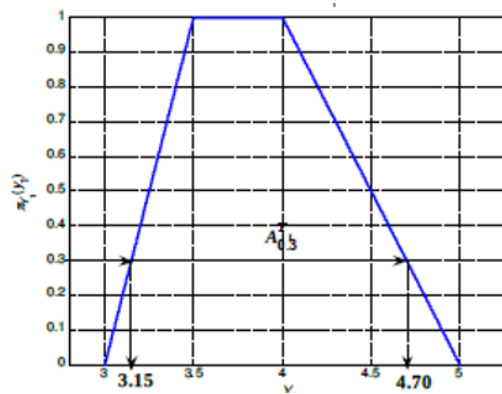


Figura 3.2. Distribución de posibilidad trapezoidal para la variable Y_1 , con corte $\alpha = 0,3$ definido por el intervalo $A_{0,3} = [3,15, 4,70]$. Fuente: Zio y Pedroni (2013).

En la figura 3.2, se tiene una distribución de posibilidad trapezoidal correspondiente a la variable Y_1 . En particular, se destaca el corte $\alpha = 0,3$ (en el eje Y del plano), que define el subconjunto $A_{0,3}$, compuesto por todos los valores cuya posibilidad es mayor o igual a 0,3. Este corte está definido por el intervalo $[3,15, 4,70]$ (valores del eje X del plano). La figura permite observar cómo, al aumentar el valor de α , el intervalo se reduce progresivamente, reflejando un mayor nivel de restricción o exigencia en la pertenencia, ya que sólo se incluyen los valores más compatibles con el núcleo de la

distribución, donde la posibilidad, ó α , es 1.

3.4. Propagación de incertidumbre

La propagación de incertidumbre es el proceso que permite estimar, para un modelo, la incertidumbre en los resultados a partir de la incertidumbre de los parámetros de entrada. Este análisis es muy importante en disciplinas de la ciencia e ingeniería ya que permite comprender y cuantificar el impacto en los valores de salida ante ciertas variabilidades en los parámetros de entrada. Su importancia radica en que permite evaluar el nivel de confianza de los resultados de algún modelo y considerar el riesgo asociado a sus valores al momento de tomar una decisión, mejorando la precisión y confiabilidad de los datos (Helton, Johnson, Sallaberry, y Storlie, 2006). Dentro de los métodos utilizados para la propagación de incertidumbre se puede encontrar el Método de Monte Carlo, Expansión de las series de Taylor o Análisis de Intervalo Difuso. Haciendo énfasis en este último, Análisis de Intervalo Difuso (FIA por sus siglas en ingles “Fuzzy Interval Analysis”) consiste en propagar los efectos de la incertidumbre mediante evaluaciones basadas en los cortes α de las distribuciones de posibilidad de los parámetros inciertos, este enfoque es especialmente útil en contextos de incertidumbre epistémica, donde los datos no son aleatorios, sino simplemente poco conocidos (Hanss, 2005). En términos sencillos para cada nivel de $\alpha \in [0,1]$, se consideran intervalos de valores posibles para cada parámetro y se evalúa el modelo base (o determinista) bajo esas combinaciones para obtener un mínimo y un máximo (o cota inferior y cota superior) del resultado. Matemáticamente, si se considera un conjunto de variables de entrada $Y_i = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ que son variables “posibilistas”, quiere decir, su incertidumbre se describe mediante distribuciones de posibilidad, donde Y_i está caracterizada por una distribución de posibilidad $\pi_{Y_i}(y_i)$, la propagación de incertidumbre se realiza mediante la evaluación del conjunto de entrada Y_α , definido como el producto cartesiano de los cortes α de cada parámetro:

$$\mathbf{Y}_\alpha = A_{1,\alpha} \times A_{2,\alpha} \times \dots \times A_{n,\alpha} \quad (3.17)$$

Donde cada conjunto A_i, α representa el intervalo de valores posibles para el parámetro Y_i al nivel de confianza α , expresado matemáticamente como:

$$A_{i,\alpha} = \{y_i \in \mathbb{R} \mid \pi_{Y_i}(y_i) \geq \alpha\} \quad (3.18)$$

Luego, para cada α se calcula un intervalo de salida $Z=f(Y)$, expresado como:

$$Z_\alpha = \left[Z_\alpha^{\min}, Z_\alpha^{\max} \right], \quad (3.19)$$

$$Z_\alpha^{\min} = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_\alpha} f(\mathbf{y}), \quad Z_\alpha^{\max} = \max_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_\alpha} f(\mathbf{y}) \quad (3.20)$$

Finalmente, el conjunto de los intervalos Z_α al recorrer α de 0 a 1, forma una distribución de posibilidad empírica para la variable de salida $\Pi_z(Z)$ (*Hanss, 2005*).

3.5. Intervalo esperado y Valor esperado

Una vez propagada la incertidumbre a través del modelo, surge la necesidad de sintetizar y analizar los resultados de manera útil para la toma de decisiones. En este contexto es donde toman relevancia las herramientas intervalo esperado y valor esperado, los cuales permiten entender y representar de forma simplificada lo esencial de los resultados en vez de analizar todas las soluciones de distribuciones de posibilidad.

En primer lugar, el **intervalo esperado** es una herramienta que permite acotar el rango de valores donde posiblemente estará la variable de salida dada una distribución de posibilidad, por lo que, en lugar de entregar un valor puntual, esta herramienta proporciona un rango confiable que recoge la dispersión e incertidumbre de los resultados.

Para obtener este intervalo, se tiene una función de membresía (o una distribución de posibilidad en el contexto de incertidumbre epistémica) $\pi(x)$, de un número difuso x con un soporte definido en $[a, b]$ con núcleo $[c, d]$:

$$\pi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ h(x), & a \leq x < c \\ 1, & c \leq x \leq d \\ g(x), & d < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (3.21)$$

Donde $h(x)$ es la función creciente desde a hasta c , y $g(x)$ es una función decreciente desde d hasta b . Estas funciones determinan la pendiente de la función de membresía en los bordes del número

difuso. Además, las medidas de posibilidad y necesidad están dadas respectivamente por:

$$\Pi(X) = h(x) \quad (3.22)$$

$$N(X) = 1 - g(x) \quad (3.23)$$

A partir de esto, se calcula el intervalo esperado asociado a la variable incierta x como:

$$IE(x) = [IE_a(x), IE_b(x)] = \left[\int_a^c x d\Pi(x), \int_d^b x dN(x) \right] \quad (3.24)$$

Este intervalo pondera los extremos de la distribución de posibilidad (o función de membresía) para entregar un rango de valores centrales que tienen mayor credibilidad en cuanto a posibilidad. Luego, para encontrar un valor único representativo se utiliza el **valor esperado**, su utilización tiene el objetivo de obtener una única estimación del parámetro difuso para la toma de decisiones y se define como el centro del intervalo esperado (3.24):

$$VE(x) = \frac{1}{2} (IE_a(x) + IE_b(x)) \quad (3.25)$$

4. Metodología

A continuación, en las siguientes secciones se detalla los métodos utilizados para llevar a cabo en análisis de la incertidumbre epistémica en la gestión de inventarios.

4.1. Modelo de inventario

En la sección anterior 3.1.1, se muestra en detalle el modelo de inventario de revisión continua con punto de reorden y cantidad de pedido. Este, tiene por objetivo minimizar los costos totales de inventario en base a un r y Q óptimo. La elección de utilizar particularmente este modelo radica en su capacidad de reflejar variabilidad en algunos de sus parámetros como lo son la tasa de demanda λ , promedio de demanda en lead time μ y la función de densidad de probabilidad $f(x)$. En primer lugar, la tasa de demanda anual corresponde al promedio de la demanda que ocurre en un año, esto, naturalmente tiene asociada una incertidumbre aleatoria ya que no es un valor exacto en cada periodo. A raíz de este mismo dato se obtiene el promedio de demanda en el lead time, donde aplica la misma lógica, es el valor promedio de las demandas que ocurren en cada periodo del lead time, asociando un error o incertidumbre aleatoria al dato. Finalmente, la función de densidad de probabilidad $f(x)$ representa la probabilidad de que la demanda tome un valor específico x durante el lead time, básicamente, esta función de densidad representa por si sola la incertidumbre de la demanda durante el tiempo de entrega incorporando la variabilidad de los datos.

A continuación, se muestra como queda expresado el modelo en términos de parámetros, variables y función objetivo:

Parámetros:

K : costos fijos de pedido (U.M).

π : costos por backorder (U.M/un).

h : costos de mantenimiento de stock disponible durante un año (U.M/un*año).

λ : promedio de la tasa de demanda anual (un/año).

μ : promedio de demanda en lead time (un).

Variables de decisión:

Q : Cantidad de pedido (un).

r : Punto de reorden, nivel que alcanza el inventario para realizar el siguiente pedido (un).

Función Objetivo:

$$C(Q, r) = \frac{\lambda K}{Q} + h\left[\frac{Q}{2} + r - \mu\right] + \frac{\lambda \pi}{Q} \int_r^\infty (x - r) f(x) dx \quad (4.1)$$

Donde las restricciones corresponden a $Q > 0$ y $r \geq 0$.

Como se ha indicado anteriormente, el objetivo del modelo es determinar un r y Q fijo que minimice los costos totales. La función objetivo considera tres conceptos de costos de inventario, el primer término se refiere a costos por pedidos donde simplemente se pondera el costo por cada pedido con la cantidad de pedidos en un año. El segundo término refleja los costos por almacenamiento, donde se pondera el costo de mantener una unidad en inventario por una unidad de tiempo con, el inventario promedio ajustado con la demanda en el lead time. Por último, el tercer término indica los costos por backorders que considera su costo unitario multiplicado con el backorder esperado en un periodo. En resumen, el objetivo es encontrar los valores de cada variable de decisión que minimice la suma de los tres conceptos de costos, considerando que cada uno tiene un impacto distinto en los costos totales.

Por otro lado, como se indicó, el modelo refleja en algunos de sus parámetros incertidumbre de tipo aleatoria, sin embargo, el objetivo de este análisis es reflejar incertidumbre del tipo epistémica. Para esto, en ciertos datos se considerará variabilidad mediante rangos, quiere decir, los valores no serán un valor único promedio, sino que corresponderán a intervalos donde existirá un valor mínimo, máximo y un valor más posible. La definición de cada intervalo dependerá del tipo de parámetro y de la información que se tenga de este.

4.1.1. Solución del modelo

A continuación, se define el método para encontrar los valores óptimos de la función objetivo de costos totales. Algunas opciones para obtener los resultados son mediante derivadas parciales, sistemas de ecuaciones o con el algoritmo Newton-Raphson. En este caso, se utilizará un método iterativo, el cual consiste en evaluar la función repetidamente en base a una estimación inicial que se va ajustando en cada repetición.

4.1.1.1. Consideraciones

Antes de comenzar con los pasos para encontrar la solución óptima, se deben tener algunas consideraciones del modelo para validar que la solución encontrada sea la óptima.

En primer lugar, asumiendo que se pueden satisfacer las restricciones $Q^* > 0$ y $r^* \geq 0$, para considerar Q^* y r^* como los valores óptimos de la función objetivo se debe cumplir que:

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = \frac{\partial C}{\partial r} = 0, \quad (4.2)$$

Tomando la derivada de la función objetivo respecto a Q , resulta:

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = -\frac{\lambda K}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{\pi \lambda}{Q^2} \int_r^\infty (x - r) f(x) dx. \quad (4.3)$$

Si se considera,

$$g(r) = \int_r^\infty (x - r) f(x) dx, \quad (4.4)$$

La función 4.2 se puede expresar como:

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = -\frac{\lambda K}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{\pi \lambda}{Q^2} g(r). \quad (4.5)$$

Con respecto a la derivada de la función objetivo respecto a r , se debe aplicar la regla de Leibniz para poder determinar $dg(r)/dr$, que resulta:

$$\frac{dg(r)}{dr} = - \int_r^\infty f(x) dx \quad (4.6)$$

Luego, si se considera,

$$\bar{F}(r) = \int_r^\infty f(x) dx \quad (4.7)$$

La derivada de los costos totales respecto a r queda expresada como:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = h - \frac{\pi\lambda}{Q}\bar{F}(r) \quad (4.8)$$

Finalmente, combinando las ecuaciones 4.2, 4.5 y 4.8 resulta:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\pi(K + \pi g(r^*))}{h}} \quad (4.9)$$

$$\bar{F}(r^*) = \frac{Q^* h}{\pi\lambda} \quad (4.10)$$

Luego, se tiene que Q^* es siempre al menos tan grande que Q_e (cantidad económica de pedido) $\sqrt{\frac{2\lambda K}{h}}$. También, notar que de 4.10 $\frac{Qh}{\pi\lambda}$ debe ser menor o igual a 1 para que la relación tenga sentido. Esto, dado que se asume que el número esperado de pedidos pendientes en un ciclo es pequeño en relación con el promedio de demandas en el mismo periodo de tiempo.

4.1.1.2. Algoritmo de solución

Paso 1: Determinar $Q_1=Q_e$; $n=1$

Paso 2: Encontrar un r_n que satisfaga la ecuación $\bar{F}(r_n) = \frac{Q_n \cdot h}{\pi\lambda}$

Paso 3: Usando r_n encontrado, determinar $Q_{n+1} = \sqrt{\frac{2\pi(K+\pi g(r_n))}{h}}$

Paso 4: Si $Q_{n+1} - Q_n \leq \epsilon$, se detiene el algoritmo. De lo contrario, determinar un nuevo $n=n+1$ y regresar al **paso 2**. La tolerancia establecida de ϵ , satisface $\epsilon > 0$ y se asume que es pequeña en comparación a Q_e

4.1.2. Programación del código

Finalmente, para obtener las soluciones del problema se utiliza el software *Python* donde se programa paso a paso el algoritmo de iteración descrito. A continuación, el detalle del código:

```

Datos de entrada (provenientes del módulo Data_inventario):
-  $\lambda$ : demanda anual (unidad/año)
-  $K$ : costo fijo por pedido (U.M/pedido)
-  $h$ : costo por mantener una unidad en inventario por año (U.M/unidad·año)
-  $\pi$ : costo por unidad en backorder (U.M/unidad)
-  $\mu$ : demanda promedio durante el lead time (unidad)
-  $\sigma$ : desviación estándar de la demanda durante el lead time (unidad)

Definir función  $p_{BO}(x)$  (función de probabilidad de Back Order):
   $g = \text{densidad\_normal}(x; \text{media} = \mu, \text{desviación} = \sigma)$ 
  Retornar  $(x - r) * g$ 
Fin Función

Calcular distribución normal de demanda en lead time, estimar cantidad inicial de  $Q$  y punto de reorden:

   $F_r = \text{distribución\_normal}(\mu, \sigma)$ 
   $Q = \text{raíz\_cuadrada}( (2 * \lambda * K) / h )$ 
   $r = \text{inversa\_de\_cdf}(F_r, \text{probabilidad} = 1 - (Q * h) / (\pi * \lambda))$ 

Calcular nueva cantidad de pedido  $Q$  incluyendo backorder:
   $Q_{\text{nuevo}} = \text{raíz\_cuadrada}( (2 * \lambda * (K + \pi * (\text{integrar } p_{BO}(x) \text{ desde } x = r \text{ hasta } \infty))) / h )$ 

Mientras diferencia entre  $Q_{\text{nuevo}}$  y  $Q$  sea mayor a una diferencia muy pequeña:
   $Q = Q_{\text{nuevo}}$ 
   $r = \text{inversa\_de\_cdf}(F_r, \text{probabilidad} = 1 - (Q * h) / (\pi * \lambda))$ 
   $Q_{\text{nuevo}} = \text{raíz\_cuadrada}( (2 * \lambda * (K + \pi * (\text{integrar } p_{BO}(x) \text{ desde } x = r \text{ hasta } \infty))) / h )$ 
Terminar ciclo

Calcular componentes del costo total y
   $\text{costo\_pedido} = K * (\lambda / Q)$ 
   $\text{costo\_inventario} = h * (Q / 2 + r - \mu)$ 
   $\text{costo\_backorder} = \pi * (\lambda / Q) * \text{integral}$ 

Calcular costo total esperado:
   $CT = \text{costo\_pedido} + \text{costo\_inventario} + \text{costo\_backorder}$ 

Imprimir resultados:
   $CT$  (costos totales),  $Q$  (cantidad de pedido óptimo) y  $r$  (punto de reorden óptimo)

```

Figura 4.1. Pseudo código de algoritmo de solución de problema de inventario Caso Base. Fuente: Elaboración propia.

El pseudocódigo 4.1 describe el algoritmo de optimización de inventarios del modelo de revisión continua (Q, r) . Este minimiza el costo total anual a partir de parámetros de entrada como demanda anual, costos de pedido, costos de mantener inventarios, costos por backorder y promedio y desviación estándar de la demanda durante el lead time, estimando una cantidad óptima de pedido Q y un punto de reorden r . Para obtener estos últimos valores, primero se utilizan fórmulas basadas en el modelo EOQ para obtener un valor aproximado de Q . Luego, se calcula r que satisfaga la igualdad de la derivada de la función objetivo en base a Q (para que sea solución óptima), para luego calcular un nuevo Q en base a este r encontrado. El proceso se repite reemplazando los valores de Q y r obtenidos hasta que la diferencia entre Q y su valor anterior sea muy pequeña (en comparación al valor de Q). Finalmente se calcula la función de costos totales asociada a la decisión de la última iteración de Q y r .

4.2. Parámetros inciertos

En este estudio se consideran como parámetros inciertos aquellos que no pueden ser definidos como valores fijos y/o únicos debido a la naturaleza de su comportamiento, esto por la variabilidad inherente o por falta de información precisa. A continuación, se clasificarán los datos según tipo de incertidumbre, aleatoria y epistémica.

4.2.1. Parametros con incertidumbre Aleatoria

En primera instancia, algunos parámetros del modelo tienen un comportamiento aleatorio debido a la variabilidad natural de su origen, estos se pueden modelar con distribuciones de probabilidad y se apoya con datos históricos. Bajo este criterio, los parámetros con incertidumbre aleatoria identificados en el caso son:

4.2.1.1. Demanda Anual

Primero, la demanda se considera un proceso estocástico al que se asocia una variabilidad al valor más posible. Para el caso, se consideran datos de demanda mensual durante un año. Considerando que el valor que se busca es el promedio de demanda anual, determinar el valor de este se dividirá en tres etapas.

En primer lugar, considerando demandas mensuales durante un año, se calcula el valor promedio y el error de la demanda mensual mediante la Estimación de Máxima Verosimilitud (EMV) donde se asume una distribución normal de los datos. Esta técnica permite obtener los valores más probables de los parámetros desconocidos de un modelo probabilístico mediante la maximización de una función de verosimilitud, entregando los valores más “verosímiles” o probables para los parámetros de la distribución de probabilidad que se ajusta a los datos. Luego, se obtiene el error muestral a partir del error estándar. Para esto, se debe considerar cierto nivel de confianza, y ponderar el error estándar al Z asociado a ese nivel, obteniendo así el valor más probable de los parámetros y su error muestral.

Dado que la información está en valores mensuales, como último paso los valores se deben homologar a la unidad de medida necesaria, esto significa simplemente pasar el valor mensual a anual, obteniendo el valor final de la tasa de demanda anual y su error muestral.

4.2.1.2. Promedio y desviación estándar en el Lead Time

Dependiendo del caso, este dato puede ser entregado de forma directa o no. Si se considera que es un dato no entregado, es muy sencillo calcular el promedio y desviación a partir del promedio de demanda mensual o anual. Considerando el escenario mostrado en 4.2.1.1, a partir de la demanda mensual y error muestral asociado, se ponderan los valores de forma lineal por el valor del lead time que corresponda. Ejemplo, si el lead time corresponde a 8 días, el promedio de demanda mensual se divide en 30 (asumiendo cantidad de días de un mes regular), obteniendo el promedio de demanda diario, para luego ponderarlo por la cantidad de días del lead time, $\times 8$, obteniendo valor y error para ese periodo de tiempo.

Estos valores al derivar directamente de la demanda, derivan también sus fuentes de variabilidad por lo que en esta etapa inicial, también se consideran parámetros con incertidumbre aleatoria.

4.2.2. Parámetros con incertidumbre Epistémica

Si bien los parámetros mencionados anteriormente (sección 4.2.1) presentan variabilidad aleatoria, esta solo representa una parte de la incertidumbre total del problema. Dado que hay casos donde la información disponible es incompleta, limitada o vaga, es más adecuado modelarla desde la perspectiva de la incertidumbre epistémica mediante distribuciones de posibilidad, lo que permite representar de forma más realista los distintos valores que podría tomar cada parámetro, estos son:

4.2.2.1. Promedio de Demanda Anual

Si bien en principio la demanda tiene una variabilidad aleatoria, la información disponible para estimarla puede ser limitada. Cuando esto sucede ya no es riguroso modelar la incertidumbre asociada como aleatoria, porque no hay suficiente información para asignar probabilidades precisas, por lo que, el tipo de incertidumbre cambia dado que su origen ya no solo depende de la naturaleza del fenómeno, sino que también se debe a una falta de conocimiento riguroso, originando la incertidumbre epistémica.

Para modelar esta variabilidad con origen epistémico, es necesario representar el parámetro mediante una distribución de posibilidad con un rango de valores plausibles y un valor central más creíble $\lambda \in [\hat{\lambda} - \Delta_{\lambda}, \hat{\lambda} + \Delta_{\lambda}]$. Estos valores y rangos se pueden obtener desde el valor más probable de la demanda y error muestral del modelamiento de incertidumbre aleatoria.

4.2.2.2. Promedio y desviación estándar en el lead time

Como se indicó anteriormente, al ser valores que derivan directamente de la demanda, también derivan sus fuentes de variabilidad, por lo que ante la falta de conocimiento preciso, es necesario definir distribuciones de posibilidad para modelar la incertidumbre epistémica.

Nuevamente, el rango de valores posibles y valor más probable se obtendrán del modelamiento de incertidumbre aleatoria, siendo promedio en el lead time $\mu \in [\hat{\mu} - \Delta_\mu, \hat{\mu} + \Delta_\mu]$ y la desviación estándar en el lead time $\sigma \in [\hat{\sigma} - \Delta_\sigma, \hat{\sigma} + \Delta_\sigma]$ para así definir la distribución de posibilidad asociada a los parámetros.

4.2.3. Costos por faltantes

Los costos por faltantes son los costos que se producen cuando la demanda supera el inventario disponible y hay una “pérdida” de ingresos por la falta. En términos cualitativos, esto genera una insatisfacción a los clientes y, en consecuencia, una eventual mala imagen de ellos a la empresa y pérdidas de ventas futuras (Fernández, 2017). En términos sencillos, los costos por faltantes se pueden considerar simplemente como lo que se pierde en la venta de cada unidad, sin embargo, también se sugiere cuantificar el impacto de los efectos cualitativos de esto, pudiendo expresarse matemáticamente como:

$$\pi = (p_{venta} - costo)(1 + \gamma) \quad (4.11)$$

donde p_{venta} es el precio de venta en U.M, $costo$ es el costo de una unidad de producto en U.M y γ es un valor que intenta cuantificar el impacto cualitativo que genera en el cliente la no entrega de productos, algunos expertos lo denominan como el impacto del boca a boca, para el cual se recomienda hacer encuestas para determinar su valor. El número se obtiene como:

$$\gamma = \beta * N_p \quad (4.12)$$

Donde β : porcentaje de personas que hacen caso a la mala recomendación y N_p : cantidad de personas a las que se les comenta la mala experiencia. Si no hay información para calcular el valor, expertos sugieren que sea entre 0,5 y 1, con un valor recomendado de 0,5 para casos generales (Izar, Ynzunza, y Sarmiento, 2012), aunque para algunos expertos este valor puede ser conservador

(Kumar, Petersen, y Leone, 2007).

A diferencia de los parámetros anteriores, los costos por faltantes no presentan una variabilidad "natural", más bien, su incertidumbre se origina principalmente de la dificultad para estimarlo con precisión. Aunque por un lado se define un valor económico determinado por unidad perdida, también se intenta modelar el efecto cualitativo del no cumplimiento. Dado que estos efectos son difíciles de cuantificar, se estima el parámetro usando fórmulas con supuestos de la percepción de los clientes, basando su valor en estimaciones subjetivas y no datos reales, dando origen a un parámetro con incertidumbre epistémica, modelado mediante distribuciones de posibilidad para reflejar los valores más posibles.

4.3. Intervalos de variación de Q y r

Una vez obtenidos los parámetros con variabilidades asociadas, y antes de entrar de lleno a la propagación de incertidumbre, es importante realizar un proceso de sensibilización de datos. El objetivo es evaluar como la variabilidad de los parámetros de entrada impacta en los resultados óptimos del modelo, sin reflejar aún la incertidumbre. Además, este paso permite obtener los intervalos "óptimos" de las variables de decisión Q y r con parámetros variables, que permitirán ser más acertivos una vez se ejecute el modelo con incertidumbre.

A grandes rasgos, el mecanismo consiste en tener un rango de valores de los parámetros con incertidumbre y optimizar para cada combinación de estos, obteniendo un Q^* y r^* óptimo asociado a un costo total mínimo. De forma más sencilla, es crear una combinación finita de parámetros de entrada distinta y evaluar el óptimo de cada uno de ellos como si fuese un escenario determinista, donde la totalidad de iteraciones reflejará rangos de Q , r y costos totales.

En términos de programación, lo anterior implica agregarle ciclos de iteración al modelo determinista 4.1, lo que resulta en el siguiente pseudocódigo:

```

Datos base (provenientes del módulo Data_variab):
- K: costo fijo por pedido (U.M/pedido)
- h: costo por mantener una unidad en inventario por año (U.M/unidad·año)
- Se definirán rangos para los parámetros inciertos:  $\pi$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ 

Definir función p_BO(x) (función de probabilidad de Back Order):
  g = densidad_normal(x; media =  $\mu$ , desviación =  $\sigma$ )
  Retornar  $(x - r) * g$ 
Fin Función

Inicializar listas vacías:
  Lista_Q = []
  Lista_r = []
  Lista_CT = []

Para cada valor de  $\pi$  en el rango [AA, BB] con WW divisiones:
  Para cada valor de  $\lambda$  en el rango [CC, DD] con XX divisiones:
    Para cada valor de  $\mu$  en el rango [EE, FF] con YY divisiones:
      Para cada valor de  $\sigma$  en el rango [GG, HH] con ZZ divisiones:

        Calcular distribución normal de demanda en lead time, estimar cantidad inicial de Q y punto de reorden:

          F_r = distribución_normal( $\mu$ ,  $\sigma$ )
          Q = raíz_cuadrada( (2 *  $\lambda$  * K) / h )
          r = inversa_de_cdf(F_r, probabilidad = 1 - (Q * h) / ( $\pi$  *  $\lambda$ ))

        Calcular nueva cantidad de pedido incluyendo backorder:
          Q_nuevo = raíz_cuadrada( (2 *  $\lambda$  * (K +  $\pi$  * (integrar p_BO(x) desde x = r hasta  $\infty$ ))) / h ) / h )

        Mientras diferencia entre Q_nuevo y Q sea mayor a una diferencia muy pequeña:
          Q = Q_nuevo
          r = inversa_de_cdf(F_r, probabilidad = 1 - (Q * h) / ( $\pi$  *  $\lambda$ ))
          Q_nuevo = raíz_cuadrada( (2 *  $\lambda$  * (K +  $\pi$  * (integrar p_BO(x) desde x = r hasta  $\infty$ ))) / h )

        Terminar ciclo

        Calcular componentes del costo total:
          costo_pedido = K * ( $\lambda$  / Q)
          costo_inventario = h * (Q / 2 + r -  $\mu$ )
          costo_backorder =  $\pi$  * ( $\lambda$  / Q) * integral

        Calcular costo total esperado:
          CT = costo_pedido + costo_inventario + costo_backorder

        Almacenar resultados:
          Agregar Q a Lista_Q
          Agregar r a Lista_r
          Agregar CT a Lista_CT

Imprimir resultados:
  CT (costos totales), Q (cantidad de pedido óptimo) y r (punto de reorden óptimo)

```

Figura 4.2. Pseudo código de algoritmo de optimización por intervalo. Ver código original en Anexo A.2. Fuente: Elaboración propia.

El código 4.2 utiliza el mismo mecanismo de iteración del código base 4.1 para encontrar la solución óptima. Sin embargo, la diferencia radica en el planteamiento de los parámetros de entrada, donde a cada parámetro sujeto a variabilidad, se le asigna el rango de valores posibles donde se determina una cantidad de "puntos" equidistantes a evaluar dentro de ese rango. Por lo que, en primera instancia en cada ciclo *for* se define el valor que tomará cada parámetro con el cual se evaluará el modelo aplicando el mismo algoritmo de 4.1. Una vez obtenido el valor de Q , r y costos totales asociados, estos son guardados en una lista de soluciones para volver a evaluar el modelo con la siguiente combinación de datos correspondiente del ciclo *for*. Una vez evaluados todos los casos, el algoritmo entrega como resultados todas las combinaciones de soluciones óptimas encontrada para cada combinación de parámetros de entrada, pudiendo determinar cuales son los valores mínimos y máximos de cada variable de decisión y costo total dentro de la totalidad de datos.

4.4. Propagación de incertidumbre

Para reflejar la incertidumbre epistémica en el caso de estudio, se utiliza el método de Análisis de Intervalo Difuso, donde se propaga la incertidumbre de los datos de entrada, a los de salida. Para esto, primero es necesario obtener las distribuciones de posibilidad de los parámetros inciertos, los cuales dependerán de los valores que tenga cada parámetro, variabilidad, valor más probables, etc. pudiendo resultar distribuciones triangulares, trapezoidales, entre otros. Luego, en base al nivel α , se determina el rango posible de valores que tome cada parámetro incierto (recaltar que cada nivel α implica un rango distinto de valores de parámetros) para evaluar los costos totales mínimo y máximo (asociado a cada nivel α). Sin embargo, antes de ejecutar el modelo, es necesario definir que valores de Q y r evaluará el algoritmo, ya que el tomador de decisión debe decidir previo a que la incertidumbre se “manifieste” en el ejercicio. En términos prácticos/realistas, el usuario primero decide las variables y luego la incertidumbre se manifiesta ante esa decisión.

El siguiente pseudocódigo muestra el algoritmo para encontrar las distribuciones de posibilidad de los costos totales asociados a cada variable Q, r :

```

Datos de entrada:
- Rango de valores para Q y r
- K: costo por pedido (U.M/pedido)
- h: costo por mantener inventario (U.M/unidad-año)
- Fórmulas para construir intervalos por cada corte- $\alpha$ 
- Parámetros:  $\pi$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  modelados como intervalos por  $\alpha$ 

Inicializar lista vacía (para guardar todos los resultados)
  todos_los_resultados = []

Para cada valor Q en el rango [aa, bb] con yy divisiones:
  Para cada valor r en el rango [cc, dd] con zz divisiones:

    Inicializar listas vacías:
      lista_alpha, lista_CTmin, lista_CTmax
      lista_Qmin, lista_Qmax, lista_Rmin, lista_Rmax

    Para cada valor  $\alpha$  en [0, 1] con xx divisiones:
      Inicializar lista de costos:
        CT_xc = []

      Calcular intervalos de parámetros según  $\alpha$ :
      Para intervalos de  $\pi$ :
        Si  $\alpha = 1$ :
          a = ee , b = ff
        Si  $\alpha < 1$ :
          a = (a + g) * ii
          b = (h - a) * ii
      Para intervalos de  $\lambda$ :
        c = jj - (1 -  $\alpha$ ) * kk
        d = jj + (1 -  $\alpha$ ) * kk
      Para intervalos de  $\mu$ :
        f = mm - (1 -  $\alpha$ ) * nn
        i = mm + (1 -  $\alpha$ ) * nn
      Para intervalos de  $\sigma$ :
        j = pp - (1 -  $\alpha$ ) * qq
        p = pp + (1 -  $\alpha$ ) * qq

      Para cada valor  $\pi$  en el intervalo [a, b] con rr divisiones:
        Para cada valor  $\lambda$  en [c, d] con ss divisiones:
          Para cada valor  $\mu$  en [f, i] con tt divisiones:
            Para cada valor  $\sigma$  en [j, p] con uu divisiones:

              Definir función p_BO(x) (función de probabilidad de Back Order):
                g = densidad_normal(x; media =  $\mu$ , desviación =  $\sigma$ )
                Retornar (x - r) * g
              Fin Función
              Calcular:
                costo_pedido = K * ( $\lambda$  / Q)
                costo_inventario = h * (Q / 2 + r -  $\mu$ )
                costo_backorder =  $\pi$  * ( $\lambda$  / Q) * integral de p_BO(x) desde r a  $\infty$ 
                CT = costo_pedido + costo_inventario + costo_backorder
              Guardar resultados:
                Agregar Q a optimosQ
                Agregar r a optimosR
                Agregar CT a CT_xc

      Guardar estadísticas por corte  $\alpha$ :
        Agregar  $\alpha$  a lista_alpha; Agregar min(CT_xc) a lista_CTmin; Agregar max(CT_xc) a lista_CTmax
        Agregar Q asociado a min(CT_xc) a lista_Qmin; Agregar Q asociado a max(CT_xc) a lista_Qmax
        Agregar r asociado a min(CT_xc) a lista_Rmin; Agregar r asociado a max(CT_xc) a lista_Rmax
      Para cada índice i en lista_alpha:
        Agregar a todos_los_resultados un diccionario con:
          Q, r,  $\alpha$ , CT mínimo, CT máximo

Imprimir lista_alpha

```

Figura 4.3. Pseudo código modelo de inventario con propagación de incertidumbre mediante distribuciones de posibilidad. Fuente: Elaboración propia.

Al utilizar el mismo modelo de inventario base (Modelo de lote economico), el pseudocódigo 4.3 es una variante del algoritmo 4.2, donde se incluyen inicialmente las variables a evaluar de (Q, r) y el modelamiento de las distribuciones de posibilidad asociada a cada parametro con incertidumbre epistémica.

El paso a paso corresponde a, primero, definir los rangos y cantidad de valores que el modelo evaluará de Q , r . Luego, para cada combinación Q , r se inicia la evaluación a cada nivel alpha de las distribuciones de posibilidad (cantidad de cortes alpha definido por el tomador de decisión),

esto implica, que cuando se está en el primer nivel alpha a evaluar, mediante las distribuciones de posibilidad de los parámetros con variabilidad se determinan los valores mínimos y máximos que tomarán dichos parámetros al mismo nivel alpha que se esta evaluando. Una vez determinados los valores mínimos y máximos posibles para cada parámetro (con incertidumbre) se procede a evaluar, dentro de esos rangos, una por una las combinaciones de datos de λ , π , μ y σ . Recalcar que solo se evalúan cada una de las combinaciones numéricas en la función objetivo, no hay iteraciones para encontrar los mejores valores Q , r , ya que estos fueron definidos en el primer paso del algoritmo. Una vez evaluadas todas las combinaciones del nivel alpha determinado, el algoritmo identifica el valor mínimo y máximo de costos totales obtenidos y esos serán la cota inferior y superior de ese nivel alpha para la primera combinación de Q, r . Luego, se repite el proceso para el siguiente nivel alpha del mismo Q, r hasta llegar al último nivel (donde $\alpha=1$) finalizando así, los resultados de la primera distribución de posibilidad de los costos totales asociados a Q, r . Finalmente, se repite el mismo proceso para el siguiente valor de Q, r , esto implica definir un corte alpha, los rangos de los parámetros asociados a ese mismo nivel alpha, evaluar la función objetivo de todas las combinaciones, para obtener la cota mínima y máxima de los costos totales asociada a cada corte alpha, y una vez evaluados todos los cortes alpha, resulta una nueva distribución de posibilidad de costos totales.

4.5. Casos de análisis

Una vez definidos los parámetros inciertos del modelo y la forma en la que se trabajarán, es necesario describir los casos de análisis a desarrollar en esta investigación, donde cada caso representa distintos niveles de incertidumbre. En particular, los casos a evaluar son tres: un caso base (determinista), caso con parámetros definidos por intervalos y caso con propagación de incertidumbre epistémica modelada mediante distribuciones de posibilidad.

Cada uno de estos enfoques entrega una mirada distinta sobre el problema de toma de decisiones bajo incertidumbre, y permite comparar los efectos que tiene la incertidumbre sobre las soluciones óptimas del modelo. A continuación, se detallan los tres escenarios que serán objeto de análisis.

4.5.1. Caso Base

Este primer escenario corresponde a la formulación tradicional del modelo de inventario (Q, r) bajo condiciones deterministas. En este caso, todos los parámetros de entrada: tasa de demanda

anual (λ), demanda promedio en el lead time (μ), desviación estándar (σ) y costo por faltantes (π), son considerados como valores únicos, fijos y conocidos con certeza. La solución del modelo en este escenario entrega un único par óptimo de variables de decisión (Q^* , r^*) y un valor de costo total mínimo asociado a estas. Para obtener estos valores, se utiliza el algoritmo detallado en 4.1 programado en Python (Ver Anexos A.1).

El objetivo de incluir este caso es establecer una referencia contra la cual se compararán los resultados obtenidos bajo escenarios de mayor complejidad. Si bien este enfoque no representa la realidad de muchos sistemas de gestión de inventarios, su simplicidad permite evaluar cómo se modifican las decisiones óptimas cuando se incorpora información más realista sobre la variabilidad en los datos.

4.5.2. Caso Intervalos

El segundo escenario busca representar la incertidumbre sensibilizando los datos de entrada del modelo (definidos como inciertos). A diferencia del Caso Base, donde cada parámetro tiene un único valor, en este enfoque se consideran intervalos de posibles valores para λ , μ , σ y π , los cuales fueron determinados a partir de estimaciones estadísticas, errores muestrales y criterios expertos.

El método a usar consiste en generar todas las combinaciones posibles de los parámetros dentro de cada uno de sus rangos y resolver el modelo base de inventario para cada una de ellas. Así, se obtiene un conjunto de resultados óptimos (Q^* , r^* , CT^*) asociados a diferentes valores de parámetros de entrada. Este enfoque no modela explícitamente el grado de posibilidad de cada combinación, sino que considera todos los puntos y combinaciones de parámetros como igualmente posibles. A nivel de obtención de resultados, para encontrar las soluciones de este escenario se utiliza el algoritmo detallado en 4.2, programado en Python (Ver Anexo A.2).

El objetivo de este análisis es identificar cómo varía la solución óptima al variar los parámetros dentro de rangos definidos. Además, estos resultados permiten definir un espacio de soluciones posibles que será útil como base para el análisis posterior de propagación de incertidumbre.

4.5.3. Caso Propagación de Incertidumbre

El último escenario representa el enfoque más realista para abordar la incertidumbre epistémica presente en los datos de entrada. Cada uno de los parámetros inciertos (λ , μ , σ y π) se modela como un número difuso, mediante distribuciones de posibilidad. Estas distribuciones permiten construir,

para cada nivel de posibilidad α , un conjunto de valores que representa los valores del parámetro con al menos ese grado de plausibilidad. Luego, se propagan estos cortes α a través del modelo, evaluando combinaciones fijas de (Q, r) y obteniendo, para cada α , un intervalo de costos totales posibles. El resultado de este proceso se obtiene utilizando el algoritmo 4.3 en Python (Ver Anexo A.3).

A diferencia de los otros dos casos, este escenario no entrega una única solución óptima, sino que los resultados son distribuciones de posibilidad de los costos totales, asociadas a cada combinación evaluada de (Q, r) . Esto significa que, en vez de un único valor, se obtiene una distribución que permite conocer qué tan plausible es que un cierto valor de costo total ocurra, dado cierto nivel de incertidumbre.

Finalmente, este enfoque ofrece una mirada más robusta al proceso de toma de decisiones, ya que permite evaluar cada combinación (Q, r) no solo en función de su costo total, sino también considerando su rango de variación. Adicionalmente, se aplicarán herramientas como intervalo esperado, valor esperado y análisis de dominancia de intervalos, con el objetivo de comparar distintas soluciones y fortalecer la toma de decisiones con incertidumbre.

5. Caso de estudio

Para analizar y concluir los objetivos planteados, se utilizará como base un caso ilustrativo de un negocio de venta de pinturas, el fin principal de este artículo es el estudio comparativo aplicando distintos tipos de modelos de inventarios, sin embargo, para este caso, solo se utilizarán los datos como demandas, tiempos, costos, etc.

La información entregada respecto al negocio de pinturas es que vende cubetas de 20 litros con una demanda estacional mensual (Ver anexo A.4) que en un año corresponde a una demanda anual $\lambda = 2.165$ (un/año). Los precios del proveedor están determinados en base al volumen de compra (Ver Anexo A.5) donde el valor central corresponde a 720 (U.M/un) y los tiempos de entregas según una distribución de probabilidad (Ver Anexo A.6), donde el tiempo más probable es de 6 días. En cuanto a costos y precio de venta, se muestran a continuación:

Tabla 5.1. Datos negocio de venta de pinturas. Fuente: Izar y Méndez (2013).

CONCEPTO	VALOR
Precio de venta por cubeta	1.080
Costo de hacer un pedido (K)	1.500
Mantener inventario	1,4 % mensual

Como se observa de la Tabla 5.1, el costo de mantener inventario es un porcentaje mensual, para llevar este porcentaje a una unidad de medida aplicable al modelo, es decir U.M/año, es necesario hacer un simple cálculo que se obtiene mediante el costo de adquisición de una unidad por la cantidad de meses del año por la tasa mensual indicada, resultando $h = 720 \cdot 12 \cdot 1,4\% = 120,96$ (U.M/año).

5.1. Simplificación de datos

Por simplicidad y para que el caso base se ajuste mejor al modelo, algunos datos se considerarán como un valor único a trabajar. En particular, el tiempo de entrega del proveedor que tiene una

distribución de probabilidad, será el valor más probable entregado en el caso, equivalente a 6 días; y, el precio ofertado por el proveedor que se determina por rangos de volúmenes de compra, será el valor medio de estos, quiere decir, 720 (U.M/cubeta). Por último, respecto a los costos por faltantes que es un dato que no entrega este caso, se estima como valor base en escenario más recomendable utilizando la ecuación 4.11, resultando $\pi = (1.080 - 720) * (1 + 0,5) = 540$ (U.M/unidad).

6. Análisis y resultados

Considerando la información entregada en los capítulos anteriores, Metodología y Caso base, en esta sección se analizará el comportamiento del modelo de inventario bajo distintos escenarios, partiendo por un modelo base, donde los parámetros definidos como incierto tomarán valores determinista, hasta llegar al modelo con propagación de incertidumbre. Para esto, se realizará un análisis comparativo en los distintos escenarios, uno basado en parámetros deterministas, otro que considera un intervalo de parámetros de entrada, y el tercero basado en la teoría de la posibilidad para representar incertidumbre epistémica. El objetivo es evidenciar como la variabilidad o incertidumbre influyen en los costos óptimos del modelo y sus variables de decisión Q, r .

Finalmente, como último paso se propondrá una decisión recomendada asociada al riesgo que genera la incertidumbre (epistémica) con el objetivo de guiar una solución en un escenario donde la información no es completa.

6.1. Resultados caso base

En primer lugar, se resuelve el modelo de inventario donde los parámetros definidos como inciertos se consideran deterministas, quiere decir, que todos los parámetros de entrada se consideran conocidos con 100 % de certeza, sin variabilidad ni incertidumbre asociada. Bajo estas condiciones, el modelo funciona en condiciones ideales asumiendo que se dispone de información completa. A continuación se muestran los parámetros de entrada para el modelo (indicados en la sección 5):

Tabla 6.1. Parámetros de entrada utilizados en el caso base. Fuente: Elaboración Propia.

Parámetro	Valor	Unidad
λ	2.165	unidad/año
μ	33,68	unidad
σ	10,49	unidad
π	540	U.M./unidad
K	1.500	U.M./pedido
h	120,96	U.M./unidad·año

Al ejecutar el algoritmo detallado en 4.1, se obtienen las soluciones óptimas:

Tabla 6.2. Resultados óptimos en caso base. Fuente: Elaboración Propia.

Resultado	Valor	Unidad
CT	28.829,43	U.M./año
Q^*	232,78	unidad
r^*	40,79	unidad

El algoritmo determina que el mínimo Costo Total del caso alcanza un valor de 28.829,43 (U.M/año), donde en cada pedido se solicita un volumen de 232,78 unidades cuando el inventario alcanza un nivel de 40,79 unidades.

Más allá de realizar un análisis a los valores obtenidos, estos resultados permiten tener una referencia para evaluar resultados posteriores donde habrá efecto de incertidumbre, y tal como se analizará en las siguientes secciones, esta solución determinista podría no ser óptima o robusta si los parámetros de entrada difieren de la realidad y toman otros valores.

6.2. Resultado caso intervalos

En segunda instancia, se ejecuta y evalúa el modelo de inventario considerando parametros de entrada como intervalos. A diferencia del caso anterior, donde todos los parámetros se conocen como un valor único con certeza, en este caso se establecen rangos con los posibles valores de los cuatro parámetros definidos como inciertos: demanda anual λ , costos por faltantes π , promedio de demanda en el lead time μ y desviación estándar en el lead time σ . Esta sensibilización en los datos permite identificar como “se mueven” los resultados óptimos del problema. Para esto, primero es necesario determinar cuales serán los rangos de entrada de cada parámetro.

En base a la metodología explicada en el punto 4.2 se obtiene lo siguiente para cada uno de los 4 parámetros:

Demanda anual, utilizando las demandas mensuales del caso base (ver anexo A.4) y la herramienta de Estimación de Máxima Verosimilitud (EMV) del programa RStudio (ver anexo A.7), se calcula el valor promedio y desviación estándar de la demanda mensual y sus respectivos errores estándar asociados (ambos en unidades), obteniendo:

Tabla 6.3. Resultado valor promedio mensual de demanda y error mediante Estimación de Máxima Verosimilitud. Fuente: Elaboración Propia.

Parámetro	Estimación	Error Estándar
Promedio demanda mensual	168,41532	15,14154
Desviación estándar demanda mensual	52,45155	10,6871

Luego, se obtiene el error muestral considerando un nivel de confianza del 99,95 %, equivalente a un $Z=3,3$, resultando la demanda mensual como:

$$\text{Demanda mensual(error muestral)} = 168,41532 \pm (3,3) * 15,14154 \text{ [unidad/mes]} \quad (6.1)$$

$$\text{Demanda mensual(error muestral)} = 168,41532 \pm 49,967082 \text{ [unidad/mes]} \quad (6.2)$$

Finalmente, es necesario homologar la unidad de medida de mensual a anual, esto se obtiene simplemente ponderando x12 cada término, obteniendo así el valor final de la demanda anual y su error:

$$\lambda = 2.020,98384 \pm 599,604984 \text{ [unidad/año]} \quad (6.3)$$

Promedio y desviación estándar en el lead time. Basado en la misma demanda mensual arrojada por RStudio mediante EMV, se pondera por el lead time, correspondiente a 6 días, y se obtienen el promedio y la desviación estándar (asumiendo demanda lineal en ese tiempo):

$$\mu = (168,41532 \pm 49,967082) * (6/30) \quad (6.4)$$

$$\sigma = (52,45155 \pm 35,26743) * (6/30) \quad (6.5)$$

$$\mu = 33,683064 \pm 9,9934164 \quad (6.6)$$

$$\sigma = 10,49031 \pm 7,053486 \quad (6.7)$$

Finalmente, los **costos por faltantes**. Para este parámetro se aplica la fórmula 4.11, se reem-

plazan los valores resultando.

$$\pi = (1.080 - 720)(1 + \gamma) \text{ (U.M./un)}$$

Como se indicó, no existe un valor exacto para γ , por lo que intrínsecamente este parámetro tiene variabilidad ya que solo hay valores recomendados. Considerando que el valor más recomendado por expertos es de 0.5, este número se utilizará como referencia para crear un rango de valores, donde arbitrariamente se utilizará un error de $\pm 0,5$. Esto resulta en que γ oscile entre un valor mínimo de 0 y un valor máximo de 1, y en consecuencia, los costos por faltantes resultan:

$$\pi_{inf} = (1.080 - 720) * (1 + 0) = 360 \quad (6.8)$$

$$\pi_{sup} = (1.080 - 720) * (1 + 1) = 720 \quad (6.9)$$

En resumen, los parámetros quedan en los rangos:

$$\pi \in [360, 720] \quad (6.10)$$

$$\lambda \in [1.421, 379, 2.620, 589] \quad (6.11)$$

$$\mu \in [23,69, 43,68] \quad (6.12)$$

$$\sigma \in [3,44, 17,54] \quad (6.13)$$

Luego, resolviendo el algoritmo de optimización del caso, 4.2, el modelo entrega los óptimos (costo total, Q y r) para cada combinación de parámetros. En total, el código arrojó 3.240 resultados óptimos, donde se consideran como representativos los extremos, quiere decir, al mínimo y máximo valor alcanzado en cada variable y función objetivo:

$$\text{Mínimo Costo total mínimo} = 23.588,38 \text{ (U.M./año)} \quad (6.14)$$

$$\text{Máximo Costo total mínimo: } 36.121,00 \text{ (U.M./año)} \quad (6.15)$$

$$\text{Mínima Cantidad de Pedido óptima } Q: 189,04 \text{ (un)} \quad (6.16)$$

$$\text{Máxima Cantidad de Pedido óptima } Q: 261,94 \text{ (un)} \quad (6.17)$$

$$\text{Mínimo punto de reorden óptimo } r: 29,53 \text{ (un)} \quad (6.18)$$

$$\text{Máximo punto de reorden óptimo } r: 80,97 \text{ (un)} \quad (6.19)$$

Es importante recalcar que en este escenario no existe una única solución óptima para el problema de inventario, sino que al sensibilizar los datos de entrada, los resultados evidencian en que rangos están las posibles soluciones.

Al comparar estos resultados con el caso base determinista, donde se obtuvo un costo total de 28.829,43 [U.M/año] con $Q^* = 232,78$ y $r^* = 40,80$, se evidencia que las soluciones óptimas pueden variar significativamente al variar los parámetros de entrada. El modelo con parámetros sensibilizados muestra que los costos totales pueden variar hasta en un $\pm 25\%$ con respecto al valor determinista, lo cual refuerza la necesidad de considerar la variabilidad como un elemento clave al momento de tomar decisiones. Además, los óptimos de Q y r también presentan variaciones importantes, indicando que un criterio basado únicamente en estimaciones puntuales puede no ser adecuado ante variaciones operativas reales.

Finalmente, es de vital importancia destacar que en esta ejecución del modelo no hay efecto de incertidumbre aun reflejada, el modelo simplemente optimiza un conjunto de combinaciones de datos discretos, lo que permite evaluar como varía la solución óptima, más no, que efecto produce la incertidumbre en los resultados.

6.3. Resultado propagación de incertidumbre

En esta sección se analiza el modelo propagando la incertidumbre de los parámetros de entradas a los datos de salida mediante Análisis de Intervalo Difuso. Primero, las variables inciertas del modelo $(\lambda, \pi, \sigma, \mu)$, ya no pueden ser tratadas como números exactos o rangos acotados, sino que deben ser trabajadas como un número difuso modelado mediante distribuciones de posibilidad. Para esto, se retoman los rangos, variabilidad y/o errores de cada parámetro, indicados anteriormente en las ecuaciones 6.3, 6.6, 6.7, 6.8 y 6.9. Donde, en resumen se tiene:

$$\lambda = 2.020,98 \pm 599,60 \quad (6.20)$$

$$\mu = 33,68 \pm 9,99 \quad (6.21)$$

$$\sigma = 10,49 \pm 7,0 \quad (6.22)$$

$$\pi = (1.080 - 720) * (1 + \gamma) \quad (6.23)$$

Como se observa, en el caso de los parametros provenientes o derivados de la demanda mensual (λ, σ, μ) tienen una misma estructura de variabilidad, compuesto por valor más posible $\pm$ error asociado. Por otro lado, los costos por faltantes π , a pesar de que se podría asumir un valor esperado medio, este concepto es un valor muy difícil de determinar de forma precisa, por lo que se asumirán dos cotas, cuando γ tome el valor de 0,3 y 0,6.

Ahora, se construyen las distribuciones de posibilidad (o función de membresia $\pi_i, i \in [\lambda, \sigma, \mu, \pi]$) de cada parámetro. En el caso de λ, σ , y μ , el valor central de la distribución estará determinado por el valor promedio del parámetro y los valores extremos estarán definidos por el valor promedio $\pm$ error muestral y, entre los extremos y el centro la posibilidad crece o decrece linealmente. Para el caso de π , el valor central de la distribución de posibilidad no será un valor único, sino un rango definido para cuando γ tome el valor de 0,3 y 0,6. los valores extremos serán cuando γ sea 0 y 1. En esta caso también los valores crecen y decrecen linealmente entre los extremos y el centro.

Lo anterior se traduce matemáticamente como:

$$\pi_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x < 1421.38 \\ \frac{x-1,421.38}{2020.98-1,421.38}, & 1421,38 \leq x < 2,020.98 \\ \frac{2,620.58-x}{2,620.58-2,020.98}, & 2,020.98 \leq x < 2,620.58 \\ 0, & x > 2,620.58 \end{cases} \quad (6.24)$$

$$\pi_\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < 23.69 \\ \frac{x-23.69}{33.68-23.69}, & 23.69 \leq x < 33.68 \\ \frac{43.67-x}{43.67-33.68}, & 33.68 \leq x < 43.67 \\ 0, & x > 43.67 \end{cases} \quad (6.25)$$

$$\pi_{\sigma}(x) = \begin{cases} 0, & x < 3.44 \\ \frac{x-3.44}{10.49-3.44}, & 3.44 \leq x < 10.49 \\ \frac{17.54-x}{17.54-10.49}, & 10.49 \leq x < 17.54 \\ 0, & x > 17.54 \end{cases} \quad (6.26)$$

$$\pi_{\pi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 360 \\ \frac{x-360}{480-360}, & 360 \leq x < 480 \\ 1, & 480 \leq x \leq 600 \\ \frac{720-x}{720-600}, & 600 < x \leq 720 \\ 0, & x > 720 \end{cases} \quad (6.27)$$

Graficamente, estas resultan:

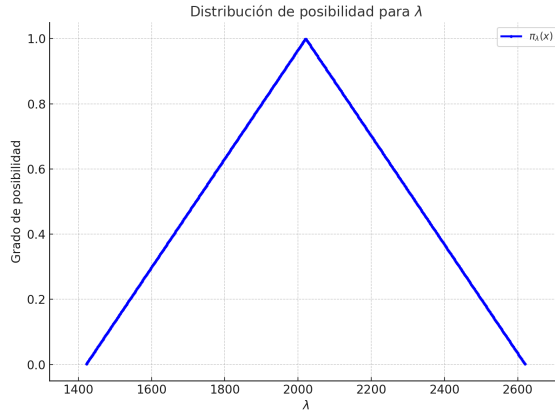


Figura 6.1. Gráfica distribución de posibilidad de λ . Fuente: Elaboración propia.

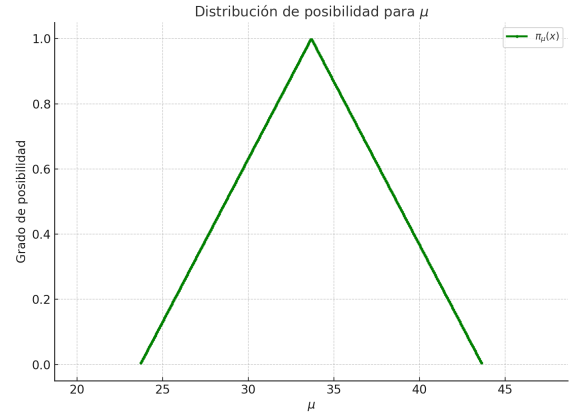


Figura 6.2. Gráfica distribución de posibilidad de μ . Fuente: Elaboración propia.

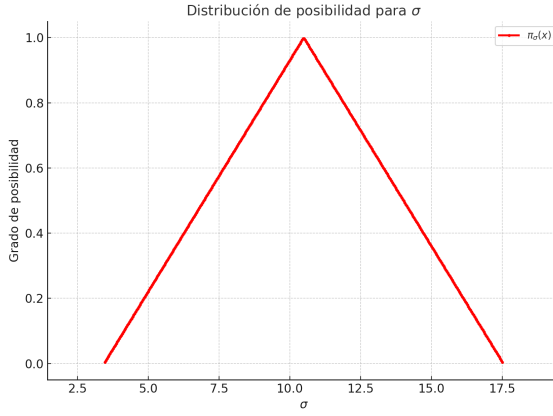


Figura 6.3. Gráfica distribución de posibilidad de σ . Fuente: Elaboración propia.

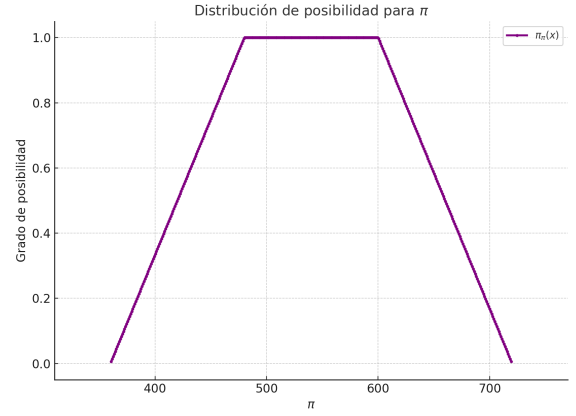


Figura 6.4. Gráfica distribución de posibilidad de π . Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, como último input al modelo es necesario determinar los rangos de entrada de Q y r . Esta decisión es bastante arbitraria y depende del criterio del lector, sin embargo, hay mecanismos que pueden ayudar a decidir de manera más precisa los valores. Como se indicó en la sección 4.3, uno de los propósitos de evaluar el modelo con intervalos es obtener los rangos entre los que oscilan las variables de decisión, esto permite acotar las combinaciones (Q, r) . Por lo que dado los intervalos obtenidos de Q, r en la sección 6.2, donde:

Cantidad de pedido Q^* : entre 189,04 y 261,94 [unidad]

Punto de reorden r^* : entre 29,53 y 80,97 [unidad]

A criterio del autor, se decide que los rangos de entrada al modelo serán:

$$Q = [190, 260] \quad r = [30, 70]$$

Una vez definidos todos los datos de entrada del modelo, se obtienen los resultados modelo utilizando el algoritmo 4.1. La salida del algoritmo arrojó un total de 1.225 distribuciones de posibilidad de costos totales donde cada una evaluó un total de 10 cortes alpha ($\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$). En términos generales, el mínimo costo mínimo alcanzado fue de 23.588,94 [U.M/año], mientras que el máximo costo mínimo fue de 188.049, 74 [U.M/año], con esto, es evidente la dispersión de resultados que se obtienen bajo un modelamiento con incertidumbre.

Dada la extensión de los resultados, es poco práctico realizar un análisis uno por uno de cada distribución de posibilidad, por lo que para simplificar y optimizar el análisis, se calculan los intervalos y valores esperados de cada distribución de posibilidad de costos totales para filtrar soluciones

representativas del universo de resultados. Los criterios utilizados para la selección de valores corresponde a: (i) solución (Q,r) cuya distribución de posibilidad tenga el menor valor esperado, (ii) solución (Q,r) que presente el mínimo rango entre el valor esperado y cota superior, y (iii) solución (Q,r) intermedia de valor esperado respecto a las soluciones anteriores y que tenga la cota mínima en ese rango.

En base a los criterios indicados y utilizando las herramientas de intervalo esperado y valor esperado explicado en 3.5, se muestran las 3 soluciones representativas:

Tabla 6.4. Resultados representativos de costos totales, caso propagación de incertidumbre con intervalos y valores esperados. Fuente: Elaboración propia.

Solución	Q	r	Intervalo esperado	Valor Esperado
1	233,24	70,00	[28.965,44 , 34.899,61]	31.932,52
2	260,00	70,00	[29.444,52 , 34.767,82]	32.106,17
3	229,12	66,47	[28.492,35 , 35.713,20]	32.102,77

Para cada solución, se presentan las gráficas de distribuciones de posibilidad asociadas (detalle de valores de corte α en A.8, ,A.9, A.10 respectivamente):

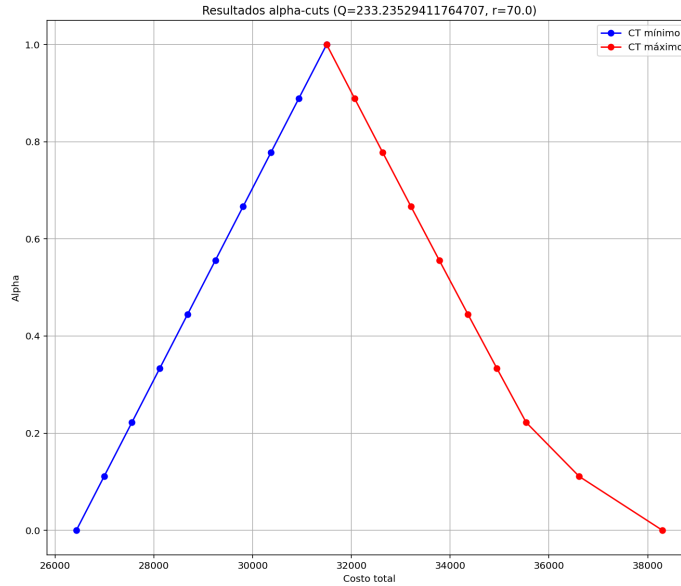


Figura 6.5. Distribución de posibilidad solución 1, asociado a decisión $Q,r= (233,24 , 70,00)$. Fuente: Elaboración propia.

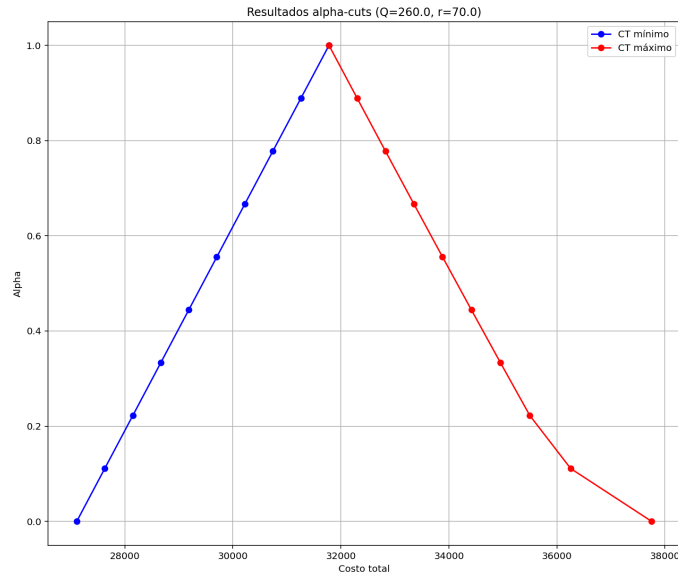


Figura 6.6. Distribución de posibilidad solución 2, asociado a decisión $Q, r = (260,00, 70,00)$. Fuente: Elaboración propia.

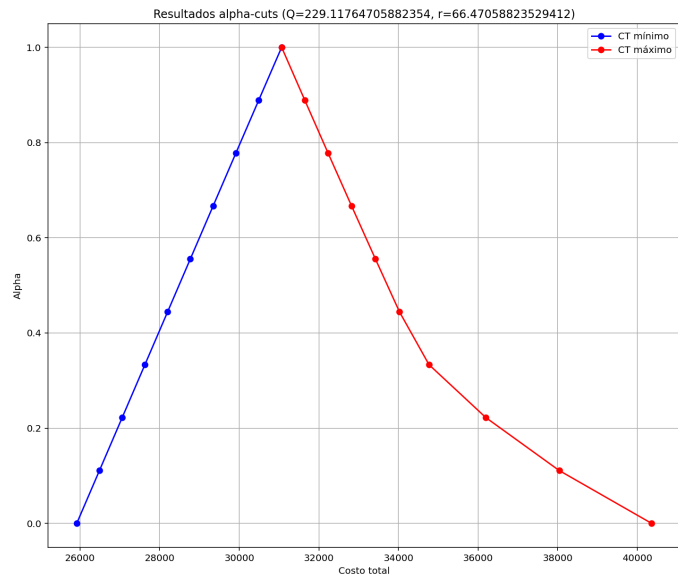


Figura 6.7. Distribución de posibilidad solución 3, asociado a decisión $Q, r = (229,12, 66,47)$. Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, al analizar los gráficos de las distribuciones de posibilidad de los costos totales, se observa que en los tres casos la estructura de estos tiende a una forma triangular, donde a

priori pareciese que tiene un único valor central o más plausible (al observar los valores de los resultados, queda claro que hay dos puntos centrales muy cercanos entre sí en las tres soluciones). Esta estructura de las soluciones hace sentido considerando qué en tres de los cuatro parámetros de entrada con incertidumbre, las distribuciones de posibilidad son tipo triangulares simétricas y la función de costos es lineal, por lo que es lógico que los datos de salida tiendan a tener una estructura similar.

En cuanto a los resultados de los intervalos esperados, como paso adicional se calculan los rangos de cada intervalo, obteniendo:

Tabla 6.5. Intervalos esperados y rangos de soluciones representativas de modelo con propagación de incertidumbre. Fuente: Elaboración propia.

Solución	Q	r	Intervalo esperado	Rango
1	233,24	70,00	[28.965,44 ; 34.899,61]	5.934,17
2	260,00	70,00	[29.444,52 ; 34.767,82]	5.323,30
3	229,12	66,47	[28.492,35 ; 35.713,20]	7.220,85

Observando tanto el intervalo esperado como los rangos de cada uno, se tiene que la **solución 2** presenta el intervalo más acotado, con un rango de 5.323,30 (un), lo que indica menor dispersión, por ende, mayor robustez frente a la incertidumbre. En otras palabras, es la solución que da más “seguridad” en término de los posibles costos.

En cuanto a la **solución 3** presenta dos características, por un lado, es la solución con la cota inferior menor, quiere decir que posiblemente puede alcanzar el costo total más bajo entre las tres soluciones, pero también es la que tiene mayor amplitud de los tres casos, correspondiente a 7.220,85, esto implica que es la solución con mayor exposición al riesgo, ya que incluye tanto escenarios muy favorables como muy desfavorables en comparación a las otras dos opciones.

Finalmente, la **solución 1** se presenta como una solución intermedia entre las dos anteriores ya que el rango de 5.934,17 es menos riesgoso que la solución 3 pero menos robusta que la solución 1.

Ahora, desde la perspectiva del **valor esperado**, que representa la medida central de la distribución de posibilidad de los costos totales, los valores obtenidos para cada solución son: $VE (solución 1)=31.932,54$ (U.M/año), $VE (solución 2)= 32.106,17$ (U.M/año) y $VE (solución 3)=32.102,77$ (U.M/año). Se puede observar que las variaciones de los valores esperado de las soluciones elegidas son bastante pequeñas entre sí, el menor valor de todo el universo de soluciones es de 31.932,52 (U.M/año) correspondiente a la **solución 1**, y el mayor entre las soluciones elegidas es la **solución 2** de 32.106,17 (U.M/año), la variación entre ambos alcanza solo el 0,54% equivalente a 173,65

(U.M/año), lo que se considera un comportamiento estable del modelo frente a la incertidumbre. Además, considerar que desde el punto de vista de la elección de Q , donde la solución 1 $Q = 233,24$ (un), solución 2 $Q = 260,00$ (un) y solución 3 $Q = 229,12$ (un), hay una variación de aproximadamente un 13,5 % entre el mayor y menor valor de ellos y, respecto a la elección de r la variación es mucho menor siendo la solución 1 y 2 $r = 70,00$ (un) y la solución 3 $r = 66,47$ (un) equivalente a un 5,3 %. Lo anterior indica que las variaciones en los puntos de elección Q, r en estos casos generan diferencias marginales en los costos totales esperados.

Por otra parte, considerando únicamente el concepto de valor esperado, la **solución 1** sería la mejor opción ya que es el mínimo valor de las tres soluciones, sin embargo, generar una elección únicamente bajo este concepto no sería robusto ya que el valor esperado solo indica la tendencia central de los valores más plausible de cada distribución de posibilidad más no considera información sobre variabilidades, dispersiones o niveles de riesgo.

Al integrar la información detallada tanto de intervalo esperado, rango y valor esperado, se sugiere al tomador de decisión considerar la **solución 2** $(Q, r) = (260,00, 70,00)$ como la mejor elección del modelo. A pesar de que su costo total esperado (32.106,17(U.M/año)) es levemente superior al mínimo (solución 1) en 173,65 (U.M), lo compensa el hecho que presenta el intervalo más acotado y la menor cota superior, correspondiente a 5.323,30(U.M) y 37.767,82(U.M) respectivamente, lo que reduce el riesgo a sobrecostos frente a la incertidumbre epistémica. En resumen, comparando con la solución 1, que presenta menor valor esperado (31.932,52 (U.M/año)) pero mayor amplitud en el intervalo (5.934,17) y una cota superior más elevada (34.899,61), la solución 2 tiene un incremento marginal en cuanto al valor esperado de 0,54 % a cambio de una ganancia significativa en cuanto a riesgo. Por otro lado, la solución 3 alcanza un valor esperado similar (32.102,77 (U.M/año)) sin embargo, presenta un rango más amplio (7.220,85) y la peor cota superior de las 3 opciones (35.713,20) convirtiéndola en una solución más incierta y menos recomendable desde la perspectiva de riesgo. En consecuencia, la solución 2 tiene un mejor equilibrio entre eficiencia y confiabilidad, siendo la política de inventario más robusta frente a la propagación de incertidumbre epistémica y por lo tanto, la alternativa más razonable para la toma de decisiones en contextos reales de gestión de inventario.

Finalmente, considerando la política de inventario recomendada bajo incertidumbre epistémica con la obtenida en el modelo determinista (sección 6.1) se tiene que en el modelo con incertidumbre la elección corresponde a $(Q, r) = (260,00, 70,00)$ y, en el modelo determinista el óptimo es $(Q, r) = (232,78, 40,79)$ alcanzando un costo total de 32.106,17(U.M/año) y 28.829,43(U.M/año) respecti-

vamente. Se observa que la elección de variables del modelo con incertidumbre presenta cercanía al óptimo determinista, aunque con un punto de reorden r bastante mayor, con una variación equivalente a un 71,6 % en comparación a Q que la variación entre ambos escenarios es de un 11,7 %. Lo anterior indica que la incertidumbre epistémica no modifica significativamente la elección de Q dada la función de costos totales, siendo consistente con la estructura de la función ya que los términos costos anual de pedidos realizados (ecuación 3.1) y costo anual de mantener inventario (ecuación 3.10) son decrecientes y crecientes respectivamente según Q , lo que “amortigua” las variaciones de la variable. En cuanto a r , el gran aumento en su valor en el escenario con propagación de incertidumbre muestra una elección más conservadora ya que reduce la posibilidad de quiebres de stock resguardándose frente a cambios en la demanda, tiempos de entrega, etc., ambos efectos, en consecuencia, resultan en un costo total anual mayor en un 11,4 %. En resumen, los resultados respaldan el hecho que el modelo determinista al basarse en parámetros exactos y de conocimiento absoluto, adopten una política de inventario con un Q y r más bajo y eficiente, pero también, más arriesgado, ya que no prevé cualquier desviación que pueda existir en la demanda, lead times, costos, etc., como sí lo refleja un modelo con propagación de incertidumbre epistémica.

7. Conclusiones

A lo largo del desarrollo de este estudio, se abordó la principal problemática de la incertidumbre epistémica en modelos de gestión de inventarios: cómo tomar decisiones óptimas en entornos donde los parámetros del modelo no son conocidos con certeza y cuya correcta modelación es crucial para mejorar la calidad de la toma de decisiones. Los resultados obtenidos satisfacen los objetivos específicos planteados. En particular, la caracterización de λ, μ, σ y π como números difusos permitió propagar la incertidumbre y contrastar las soluciones óptimas con el caso base (determinista), cumpliendo así, el objetivo de analizar el impacto de la incertidumbre epistémica en un modelo de gestión de inventario Q, r .

En primer lugar, se comenzó con la construcción de un modelo de inventario base, donde todos los parámetros de entrada son conocidos y fijos. Este modelo permitió obtener una primera solución óptima bajo condiciones ideales, sin incorporar ningún tipo de variabilidad. Posteriormente, se incorporaron intervalos para los parámetros inciertos del modelo, siendo la demanda anual, la demanda y desviación estandar durante el lead time y el costo por faltantes. Este segundo enfoque, basado en un análisis por intervalos, permitió identificar cómo cambian los valores óptimos de las variables de decisión y el costo total al considerar variabilidad en los datos de entrada. Sin embargo, el principal objetivo de esta investigación se centró en el estudio de la teoría de la posibilidad, distribuciones de posibilidad y del análisis de intervalo difuso como herramientas para representar la incertidumbre epistémica en el modelo de inventario. A través de la utilización de distribuciones de posibilidad, se logró plasmar la incertidumbre de manera estructurada, permitiendo incorporar no solo un rango de posibles valores, sino también un grado de plausibilidad asociado a cada uno, esto permitió propagar la incertidumbre desde los parámetros de entrada hasta los resultados del modelo generando un conjunto de escenarios evaluados bajo diferentes niveles de cortes α , que entregan para cada decisión (Q, r) un intervalo de posibles costos totales. Este método permitió generar resultados mucho más informativos y realistas que los obtenidos mediante el modelo base. En particular, se logró determi-

nar para cada combinación de variables de decisión un: intervalo esperado, que permitió visualizar la dispersión del posible costo total, entregando un rango de valores que la solución podría alcanzar, y; también un valor esperado, que entregó una estimación promedio del resultado esperado. Estos dos indicadores fueron fundamentales para evaluar la conveniencia de una decisión bajo incertidumbre, logrando entregar una base sólida para tomar decisiones considerando tanto el costo anual como el nivel de riesgo asociado.

En términos de resultados, el costo óptimo en el caso base (determinista) ascendió a 28.829,43 (U.M./año) con $Q,r=(232,78, 40,79)$. Al ajustar el modelo considerando distribuciones de posibilidad para propagar la incertidumbre, se obtuvieron más de mil resultados posibles, donde se eligieron tres soluciones representativas que se utilizaron como base para la propuesta final al tomador de decisión. La política de inventario que presentó la mejor opción fue la solución 2, definida por $Q,r=(260,00;70,00)$ con un valor de costo total esperado de 32.106,17 (U.M./año). Esta opción logró el mejor equilibrio entre eficiencia y robustez del universo de soluciones, ya que al combinar un valor esperado competitivo del costo total (32.106,17 U.M./año) con un intervalo más acotado o de menor rango entre las soluciones evaluadas, reduce el riesgo a escenarios de mayores costos. A pesar que la política de inventario del modelo con propagación de incertidumbre aumenta las variables de decisión y costos totales esperados, se beneficia en que permite tomar decisiones más informadas, prudentes y coherentes con la realidad de su entorno.

Finalmente, es importante reforzar que plantear un problema determinista puede ser poco útil cuando se enfrentan a contextos con alta incertidumbre epistémica. Por ello, se reafirma la importancia de incorporar herramientas que permitan modelar este tipo de incertidumbre de forma explícita. El uso de la teoría de la posibilidad y el análisis de intervalo difuso en modelos de inventario representa una metodología viable para abordar este desafío.

Referencias

- Chopra, S., y Meindl, P. (2013). *Supply chain management: Strategy, planning, and operation*. Pearson.
- Der Kiureghian, A., y Ditlevsen, O. (2009). Aleatory or epistemic? does it matter? *Structural Safety*, 31(2), 105–112.
- Dubois, D., y Prade, H. (1988). *Possibility theory: An approach to computerized processing of uncertainty*. Springer Science & Business Media.
- Fernández, A. C. (2017). *Gestión de inventarios*. Editorial IC.
- Hanss, M. (2005). *Applied fuzzy arithmetic: An introduction with engineering applications*. Springer.
- Helton, J. C., Johnson, J. D., Sallaberry, C. J., y Storlie, C. B. (2006). Survey of sampling-based methods for uncertainty and sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(10-11), 1175–1209.
- Izar, J. M., y Méndez, H. (2013). *Estudio comparativo de la aplicación de 6 modelos de inventarios para decidir la cantidad y el punto de reorden de un artículo*. (Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México.)
- Izar, J. M., Ynzunza, C. B., y Sarmiento, R. (2012, julio-diciembre). Determinación del costo del inventario con el método híbrido. *Conciencia Tecnológica*(44), 30–35.
- Klir, G. J., y Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications*. Prentice Hall.
- Kumar, V., Petersen, J. A., y Leone, R. P. (2007). How valuable is word of mouth? *Harvard Business Review*, 85(10), 139–146.
- Muckstadt, J. A., y Sapro, A. (2006). *Principles of inventory management*. Springer.

- Nahmias, S. (2007). *Análisis de la producción y las operaciones* (5.^a ed.). McGraw Hill.
- Silver, E. A., Pyke, D. F., y Peterson, R. (1998). *Inventory management and production planning and scheduling*. John Wiley & Sons.
- Smithson, M. (1989). *Ignorance and uncertainty: Emerging paradigms*. New York: Springer.
- Snyder, L. V., y Shen, Z.-J. M. (2011). *Fundamentals of supply chain theory*. Wiley.
- Van der Vorst, J. G., Beulens, A. J., y van Beek, P. (2005). Innovations in logistics and supply chain management. En *Innovation and firm performance* (pp. 245–265). Springer.
- Wang, M. (2011). *Reverse logistics optimization: A research to the uncertainties in the third party reverse logistics. case of new zealand couriers ltd*. Auckland, New Zealand: Massey University.
- Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1), 3–28.
- Zio, E., y Pedroni, N. (2013). *Methods for representing uncertainty: A literature review* (Inf. Téc. n.º 2013-03). APPORTS de la Recherche. (Theme: Risk analysis)
- Zipkin, P. H. (2000). *Foundations of inventory management*. McGraw-Hill.

A. Anexos

A.1. Algoritmo Python para Modelo de Inventario deterministico

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import statistics
import pandas as pd
from scipy.stats import norm
from scipy.integrate import quad
from scipy.optimize import fsolve, bisect

#Data de parámetros
from Data_variab import *

tasa_dda = 2165

#Función probabilidad B0
def p_B0(x):
    g=norm.pdf(x, loc=μ, scale=σ)
    return (x - sup_r)*g

F_r = statistics.NormalDist(μ, σ) #definición función densidad, arroja probabilidad
Q_inicial= np.sqrt( (2*tasa_dda *K)/h)
sup_r = F_r.inv_cdf(p = 1-(Q_inicial*h/(pi*tasa_dda))) #arroja valor r que satisface la igualdad
Q= np.sqrt((2*tasa_dda*(K + pi*(quad(p_B0,(sup_r),np.infty)[0]))/(h))
#sup_r = F_r.inv_cdf(p = 1-(Q*h/(pi*tasa_dda)))

while (Q-Q_inicial)>1e-10000000:
    Q_inicial= Q
    sup_r = F_r.inv_cdf(p = 1 - (Q_inicial*h/(pi*tasa_dda)))
    Q= np.sqrt((2*tasa_dda*(K + pi*(quad(p_B0,(sup_r),np.infty)[0]))/(h))

costo_pedido=K*(tasa_dda/Q)
costo_inven=h*((Q/2)+sup_r-μ)
costo_B0=pi*(tasa_dda/Q)*(quad(p_B0,sup_r,np.infty)[0])
CT = costo_pedido+costo_inven+costo_B0

print(CT)
print(Q)
print(sup_r)
```

Figura A.1. Algoritmo en software Python para optimizar modelo de inventario deterministico.
Fuente: Elaboración Propia.

A.2. Algoritmo Python para Modelos de Inventario con variabilidad

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import statistics
4 import pandas as pd
5 from scipy.stats import norm
6 from scipy.integrate import quad
7 from scipy.optimize import fsolve, bisect
8
9 #Data de parámetros
10 from Data_variab import *
11
12 #Función probabilidad B0
13 def p_B0(x):
14     g=norm.pdf(x, loc=μ, scale=σ)
15     return (x - sup_r)*g
16
17 for pi in np.linspace(360,720,15):
18     for tasa_dda in np.linspace(1421.378856,2620.588824,4):
19         for μ in np.linspace(23.6896476,43.6764804, 6):
20             for σ in np.linspace(3.436824,17.543796, 6):
21                 #print(pi, tasa_dda, μ,σ)
22
23                 F_r = statistics.NormalDist(μ, σ) #definición función densidad, arroja probabilidad
24                 Q_inicial= np.sqrt((2*tasa_dda*K)/h)
25                 sup_r = F_r.inv_cdf(p = 1-(Q_inicial*h/(pi*tasa_dda))) #arroja valor r que satisface la igualdad
26                 Q= np.sqrt((2*tasa_dda*(K + pi*(quad(p_B0,(sup_r),np.infty)[0])))/(h))
27                 #sup_r = F_r.inv_cdf(p = 1-(Q*h/(pi*tasa_dda)))
28
29                 while (Q-Q_inicial)>1e-10000000:
30                     Q_inicial= Q
31                     sup_r = F_r.inv_cdf(p = 1 - (Q_inicial*h/(pi*tasa_dda)))
32                     Q= np.sqrt((2*tasa_dda*(K + pi*(quad(p_B0,(sup_r),np.infty)[0])))/(h))
33
34                 costo_pedido=K*(tasa_dda/Q)
35                 costo_inven=h*((Q/2)+sup_r-μ)
36                 costo_B0=pi*(tasa_dda/Q)*(quad(p_B0,sup_r,np.infty)[0])
37                 CT = costo_pedido+costo_inven+costo_B0
38
39                 optimosQ.append(Q)
40                 optimosR.append(sup_r)
41                 CT_xc.append(CT)
42
43 print(CT_xc)
44 print(optimosQ)
45 print(optimosR)

```

Figura A.2. Algoritmo en software Python que evalúa óptimos con parametros de entrada inciertos.
Fuente: Elaboración Propia.

A.3. Algoritmo Python para Modelo de Inventario con distribuciones de posibilidad

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pandas as pd
4 from scipy.stats import norm
5 from scipy.integrate import quad
6 import os
7 # Data de parámetros
8 from Data_variabF import *
9
10 carpeta_graficos = 'Graficos_Qr'
11 if not os.path.exists(carpeta_graficos):
12     os.makedirs(carpeta_graficos)
13
14 todos_los_resultados = []
15
16 for Q in np.linspace(190, 260, 35):
17     for r in np.linspace(30, 70, 35):
18
19         lista_alpha = []
20         lista_CTmin = []
21         lista_CTmax = []
22         lista_CTtodos = []
23         lista_Qmin = []
24         lista_Qmax = []
25         lista_Rmin = []
26         lista_Rmax = []
27
28         for alpha in np.linspace(0, 1, 10):
29
30             CT_xc = []
31
32             if alpha==1:
33                 a=480
34                 b=600
35             else:
36                 a=(alpha+3)*120
37                 b=(6-alpha)*120
38             c = 2020.98384 - (1-alpha)*599.604984
39             d = 2020.98384 + (1-alpha)*599.604984
40             f = 33.683064 - (1-alpha)*9.9934164
41             i = 33.683064 + (1-alpha)*9.9934164
42             j = 10.49031 - (1-alpha)*7.053486
43             p = 10.49031 + (1-alpha)*7.053486
44
45             # Loop sobre combinaciones de parámetros inciertos
46             for pi in np.linspace(a, b, 8):
47                 for tasa_dda in np.linspace(c, d, 15):
48                     for mu in np.linspace(f, i, 6):
49                         for sigma in np.linspace(j, p, 6):
50
51                             # Definición de la función para backorder
52                             def p_B0(x):
53                                 g = norm.pdf(x, loc=mu, scale=sigma)
54                                 return (x - r) * g
55
56                             costo_pedido = K * (tasa_dda / Q)
57                             costo_inven = h * ((Q / 2) + r - mu)
58                             costo_B0 = pi * (tasa_dda / Q) * (quad(p_B0, r, np.infty)[0])
59
60                             CT = costo_pedido + costo_inven + costo_B0
61
62                             optimosQ.append(Q)
63                             optimosR.append(r)
64                             CT_xc.append(CT)
65
66                             lista_alpha.append(alpha)
67                             lista_CTmin.append(min(CT_xc))
68                             lista_CTmax.append(max(CT_xc))
69                             lista_Qmin.append(optimosQ[CT_xc.index(min(CT_xc))])
70                             lista_Qmax.append(optimosQ[CT_xc.index(max(CT_xc))])
71                             lista_Rmin.append(optimosR[CT_xc.index(min(CT_xc))])
72                             lista_Rmax.append(optimosR[CT_xc.index(max(CT_xc))])
73
74
75             for i in range(len(lista_alpha)):
76                 todos_los_resultados.append({
77                     'Q': Q,
78                     'r': r,
79                     'Alpha': lista_alpha[i],
80                     'CT mínimo': lista_CTmin[i],
81                     'CT máximo': lista_CTmax[i] })

```

Figura A.3. Algoritmo en software Python que evalúa los óptimos mediante distribuciones de posibilidad . Fuente: Elaboración Propia.

A.4. Demanda anual de cubetas de pinturas

Mes	Demanda
Enero	120
Febrero	136
Marzo	155
Abril	140
Mayo	180
Junio	230
Julio	250
Agosto	245
Septiembre	220
Octubre	180
Noviembre	165
Diciembre	144
Total Anual	2165

Figura A.4. Demanda de pinturas de un año de operación. Fuente: Estudio comparativo de la aplicación de 6 modelos.

A.5. Precios Proveedor

Volumen de compra	Costo, \$/cubeta
1 – 180	740.00
181 – 300	720.00
> 300	705.00

Figura A.5. Precios proveedor por volumen. Fuente: Estudio comparativo de la aplicación de 6 modelos.

A.6. Distribución de probabilidad de tiempos de entrega

Tiempo de entrega, días	Probabilidad
5	0.22
6	0.56
7	0.22

Figura A.6. Distribución de probabilidad en tiempos de entrega caso base. Fuente: Estudio comparativo de la aplicación de 6 modelos.

A.7. Código en RStudio para estimación de demanda mensual

```
install.packages("bbmle")
install.packages("stats4")
install.packages("openxlsx")
library(stats4) # para la función mle
#library(bbmle) # para la función mle2
library(openxlsx)

library(readxl)
x <- read_excel("C:/Users/secnet/Desktop/U/2021-2/TÍTULO II/Pruebas dda.xlsx")
View(x)
attach(x)

y <- x$mensual1
#set.seed(100)
y = rnorm(n = 12, mean = 180.41, sd = 45.23)

NegLogLik = function(mu, sigma){-sum(dnorm(y, mu, sigma, log = TRUE))}
EMV1 = mle(NegLogLik, start = list(mu=180.41, sigma=45.23))
summary(EMV1)

#expor_x <- data.frame(x)
#write.xlsx(expor_x, "Datos_Aleatorios.xlsx")
```

Figura A.7. Código en RStudio para estimación de demanda mensual mediante método de Maxima Verosimilitud . Fuente: Elaboración Propia.

A.8. Costos totales mínimos y máximos para cada corte alpha, solución 1

Tabla A.1. Costos Totales mínimos y máximos según nivel α para decisión $Q, r = 233, 24, 70, 00$.
Fuente: Elaboración propia.

Nivel α	CT mínimo	CT máximo
0,00	26.431,44	38.299,04
0,11	26.994,22	36.611,63
0,22	27.557,00	35.538,80
0,33	28.119,78	34.947,17
0,44	28.682,57	34.361,86
0,56	29.245,38	33.781,98
0,67	29.808,28	33.206,69
0,78	30.371,42	32.635,15
0,89	30.935,02	32.066,55
1,00	31.499,43	31.500,18

A.9. Costos totales mínimos y máximos para cada corte alpha, solución 2

Tabla A.2. Costos Totales mínimos y máximos según nivel α para decisión $Q, r = 260.00, 70.00$.
Fuente: Elaboración propia.

Nivel α	CT mínimo	CT máximo
0,00	27.109,16	37.755,09
0,11	27.627,83	36.255,21
0,22	28.146,50	35.500,21
0,33	28.665,18	34.955,66
0,44	29.183,86	34.416,77
0,56	29.702,56	33.882,76
0,67	30.221,34	33.352,87
0,78	30.740,33	32.826,33
0,89	31.259,74	32.302,45
1,00	31.779,88	31.780,55

A.10. Costos totales mínimos y máximos para cada corte alpha, solución 3

Tabla A.3. Costos Totales mínimos y máximos según nivel α para decisión $Q, r = 229,12, 66,47$.
Fuente: Elaboración propia.

Nivel α	CT mínimo	CT máximo
0,00	25.919,77	40.358,77
0,11	26.490,25	38.036,58
0,22	27.060,74	36.195,75
0,33	27.631,23	34.767,99
0,44	28.201,77	34.025,37
0,56	28.772,50	33.420,74
0,67	29.343,69	32.823,65
0,78	29.915,75	32.233,10
0,89	30.489,27	31.648,10
1,00	31.064,92	31.067,63