

UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

Memoria de Título

Diseño e Implementación de un Controlador MPC bajo Restricciones No Lineales.

Memoria para optar al título de
Ingeniero Civil Electrónico

Alumno

Marco Javier Duque Silva

Profesor Supervisor

Dr. Juan Carlos Agüero

Comisión Co-Referente

Dr. César Silva Jiménez

21 de septiembre de 2026, Valparaíso, Chile



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Diseño e implementación de un controlador MPC usando redes neuronales bajo restricciones no lineales.

Nombre del candidato(a): Marco Javier Duque Silva

Carrera / Grado: Ingeniería civil electrónica / Ingeniera civil electrónica

Campus: Casa Central

Departamento: Electrónica

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Juan Carlos Agüero Vasquez, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha:

21/09/2026

Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha:

21/09/2026

Firma:

A mi madre, por haber confiado en mí y darme estudios.

AGRADECIMIENTOS

EL trayecto de mi carrera profesional no fue un proceso completamente lineal. Si bien nunca dudé que mi proceso universitario llegaría a su fin, hubo días que me hicieron volver a cuestionarme si todo saldría de la mejor manera. La respuesta es un sí.

Es por eso que escribo estas líneas en agradecimiento a todas las personas que fueron parte de este proceso. Realmente fueron fundamentales al ayudarme con sus momentos de risas, sus anécdotas, su tiempo para escucharme y para estar cuando más los necesité. Esto va para mis amigos de electrónica, pero sobre todo a mis mejores amigos: Vicente, Trinidad, Felipe, Maximiliano y Simón, con quienes compartir todos los días era una razón para visitar la universidad, y coordinar las horas de almuerzo era un desafío diario que siempre lográbamos resolver. También a mi novia Antonia y su familia, por ser parte de este proceso final y estar siempre dispuestos a ayudarme en mis largas jornadas de estudio con su cálido acompañamiento.

También agradezco a mi familia, mi madre Sandra y mi tía “Vero”, que siempre estuvieron pendientes de mí y me ayudaron con todo lo que necesitaba y mucho más. También a mi familia de lejos, que fue una parte fundamental en mi proceso de intercambio en Suecia: Hugo, Claudia, Ariella y mis amigos de KTH, sin cuyo apoyo no hubiera disfrutado ni aprendido lo que es estar en el extranjero y conocer nuevas culturas. Espero poder volver a verlos a todos muy pronto.

Finalmente quiero agradecer a las personas que no están conmigo, pero que siempre recordaré con un inmenso cariño: a mi prima Carla Duque, que partió sin esperar a verme cerrar esta etapa, quien siempre creyó que *“mi inteligencia me llevaría lejos”*; y a mi abuela Carmen, mi “Lela”, que no alcanzó a verme entrar a la universidad, pero que siempre me acompañó en el proceso y en mis largas jornadas de estudio nocturnas y en mis momentos de inquietud. Gracias por estar aquí, a pesar de no poder verte como me hubiera gustado.

Estudiar electrónica me enseñó muchas cosas, pero también me enseñó a ser mejor persona y a ser un profesional en distintos ámbitos de mi vida. A mis profesores del día a día, como también a mis profesores de gimnasio, que me ayudaron a poder focalizar mi estrés en una actividad que realmente disfruto. Gracias.

Por último, se agradece al Centro Avanzado de Ingeniería Eléctrica y Electrónica ANID AC3E CIA250006, al proyecto Fondecyt ANID 1261290 del profesor Juan C. Agüero, y al Proyecto Interno USM 2026 PILIR_26_28.

RESUMEN

EL control predictivo basado en modelos (MPC) es ampliamente utilizado en electrónica de potencia para regular unidades de Recursos Energéticos Distribuidos (DER) conectadas a microrredes de corriente alterna. En un inversor con filtro LCL, el bucle de nivel cero debe respetar, entre otras, una restricción circular sobre la corriente del filtro y un límite hexagonal sobre la tensión del convertidor. La formulación exacta del círculo admisible conduce a un problema de optimización con restricciones de cono de segundo orden (SOCP/QCQP), mientras que la práctica habitual lo aproxima mediante politopos regulares inscritos resolubles en programas cuadráticos (QP) lineales.

Este documento analiza, de forma *offline*, el impacto de esa aproximación geométrica sobre la ley de control del MPC de nivel cero (MPC-Z), de forma complementaria, también se analiza el mismo impacto en un sistema prototipo (masa-resorte), buscando demostrar que el flujo de análisis es totalmente replicable y concordante para un sistema de mayor cantidad de estados y/o entradas. El experimento central compara la restricción circular exacta en la corriente predicha $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ (Caso A) frente a politopos inscritos con $N \in \{6, 12, 24\}$ (Caso B), manteniendo fija la restricción hexagonal sobre la tensión del inversor $\mathbf{v}_s$. Se ejecuta un barrido paramétrico en el plano de corrientes (i_{fd}, i_{fq}) y un barrido angular de la orientación del hexágono de tensión, cuantificando la discrepancia $|\Delta \mathbf{u}|$ en la primera acción óptima, la activación de restricciones y el costo computacional del solver SOCP/QCQP frente al solver QP lineal.

Los resultados muestran que la mediana de $|\Delta \mathbf{u}|$ es nula en el corte $\theta_k = 0^\circ$ y que las mayores diferencias se concentran en regiones de saturación del hexágono de tensión, no en el borde geométrico donde círculo y politopo difieren. El hexágono de $\mathbf{v}_s$ limita más del 84 % de la grilla analizada, por lo que refinar la aproximación poligonal de corriente aporta beneficios sobre la ley de control. El solver SOCP demanda entre $28\times$ y $31\times$ más tiempo que el QP politópico.

Como complemento, se deriva la ley de control explícita afín por partes (PWA) del dodecágono ($N = 12$) mediante MPT3 y condiciones KKT, identificando 44 regiones críticas en $\mathbf{x}_{0h} \in \mathbb{R}^4$ con error de reconstrucción inferior a 10^{-9} V frente al QP de referencia.

Finalmente, se entrena una red neuronal ReLU que aproxima la ley circular con RMSE de 0,043 V (inferior al del dodecágono (0,083 V)) e inferencia de 0,19 μ s/punto, complementada con post-proyección hexagonal para garantizar factibilidad del actuador. En conjunto, el trabajo caracteriza el compromiso entre fidelidad geométrica, exactitud algebraica y costo computacional en el MPC-Z de un DER, y demuestra que un aproximador neuronal *offline* puede materializar la ley del círculo exacto con desempeño compatible con implementación en tiempo real.

Palabras Clave

Control predictivo (MPC), microrred AC, recurso energético distribuido (DER), restricciones circulares, politopos inscritos, SOCP/QCQP, ley explícita afín por partes (PWA), redes neuronales ReLU, filtro LCL.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	III
ÍNDICE DE FIGURAS	IX
ÍNDICE DE TABLAS	XI
ABREVIACIONES	XIII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Contexto y motivación	1
1.2. Descripción del problema	2
1.3. Estado del Arte	3
1.3.1. Control predictivo y sistemas DER en microrredes	3
1.3.2. Restricciones no lineales y QCQP	4
1.3.3. Redes neuronales artificiales en control	4
1.3.4. Brecha en la literatura	4
1.4. Objetivos (General y Específicos)	5
1.5. Metodología	6
1.5.1. Fase de prototipo didáctico	6
1.5.2. Fase de modelado y formulación	6
1.5.3. Fase de comparación <i>offline</i>	6
1.5.4. Fase de ley explícita PWA	7
1.5.5. Fase de aproximación neuronal	7
1.5.6. Fase de validación y documentación	7
1.6. Estructura del documento	7
2. PROTOTIPO DIDÁCTICO: RESTRICCIONES POLITÓPICAS Y	

CIRCULARES EN ENTRADA Y ESTADO	9
2.1. Modelado del sistema y formulación MPC	10
2.1.1. Dinámica continua y discretización	10
2.1.2. Costo cuadrático y horizonte deslizante	10
2.1.3. Formulación compacta batch	11
2.2. Marco de los cuatro casos y puente metodológico	12
2.3. Restricciones en la entrada: Casos A y B	12
2.3.1. Caso A: politopización de la restricción de entrada	13
2.3.2. Caso B: restricción circular en la entrada	13
2.4. Restricciones en estado predicho: Casos C y D	14
2.4.1. Predicción condensada y formulación general	14
2.4.2. Caso C: politopización en estado predicho	15
2.4.3. Caso D: restricción circular en estado	16
2.5. Barrido offline y comparación de leyes	16
2.5.1. Leyes de control en los Casos A y B	16
2.5.2. Leyes de control en los Casos C y D	16
2.5.3. Resultados numéricos comparativos	18
2.6. Validación de solvers y costo computacional	19
2.6.1. Convergencia entre solvers	19
2.6.2. Comparación de tiempos	19
2.7. Ley de control explícita PWA vía condiciones KKT	20
2.7.1. Condiciones KKT con restricción en la entrada (Caso A)	20
2.7.2. Condiciones KKT con restricción en el estado predicho (Caso C)	21
2.7.3. Regiones críticas y ley PWA explícita	21
2.7.4. Procedimiento de identificación	21
2.8. Aproximación ReLU de la ley circular	24
2.8.1. Función de activación ReLU	24
2.8.2. Conjunto de datos y entrenamiento	24
2.8.3. Equivalencia ReLU–PWA, inferencia y función de costo	25
2.8.4. Resultados red ReLU	26
2.9. Síntesis y puente hacia el sistema DER	26
3. MODELADO DEL SISTEMA DER EN MICRORRED AC	28
3.1. Circuito equivalente y dinámica en coordenadas abc	29
3.1.1. Ecuaciones diferenciales en el marco natural	29
3.1.2. Modelo de conmutación del inversor	30
3.2. Representación en el marco estacionario $\alpha\beta$	30
3.2.1. Vectores espaciales y restricción hexagonal	30
3.3. Representación en el marco síncrono dq	31

3.3.1. Modelo no lineal en coordenadas dq	31
3.4. Desacoplamiento en submodelos y arquitectura en cascada	32
3.5. Parámetros nominales y restricciones operativas	32
3.5.1. Restricciones de corriente y tensión del inversor	32
3.5.2. Alcance del estudio comparativo	33
3.6. Modelo lineal del filtro de salida para control de nivel cero	33
3.6.1. Punto de operación y variables del modelo	33
3.6.2. Discretización y modelo predictivo	34
3.6.3. Análisis dinámico en el dominio de la frecuencia	34
4. ANÁLISIS COMPARATIVO: RESTRICCIÓN CIRCULAR VS. POLITÓPICOS EN CORRIENTE	36
4.1. Restricciones circulares, politópicas y elípticas en el MPC	36
4.1.1. Restricción politópica	37
4.1.2. Restricción circular	38
4.1.3. Caso general: restricciones convexas no centradas en el origen	38
4.1.3.1. Elipse (o hiperelipsoide) general.	38
4.1.3.2. Politopo afín (hexágono rotatorio de tensión).	38
4.1.4. Comparación geométrica y computacional	39
4.2. Configuración experimental	40
4.3. Resultados comparativos de la ley de control	42
4.4. Comportamiento de las restricciones operativas	43
4.5. Sensibilidad al ángulo del hexágono de tensión	44
4.6. Costo computacional	45
4.7. Discusión y conclusiones del capítulo	45
5. LEY DE CONTROL EXPLÍCITA DEL DODECÁGONO EN CORRIENTE	47
5.1. Formulación multiparamétrica del MPC-Z con dodecágono	47
5.2. Condiciones KKT y regiones críticas	48
5.3. Obtención de la partición PWA con MPT3	49
5.3.1. Pipeline de cómputo	49
5.4. Validación numérica de la ley explícita	52
5.5. Conexión con el barrido comparativo	53
5.5.1. Ventajas y limitaciones de la representación explícita	53
5.6. Síntesis y puente hacia la aproximación neuronal	53
6. APROXIMACIÓN NEURONAL DE LA LEY CIRCULAR	55
6.1. Motivación y posicionamiento	55

6.2. Equivalencia ReLU y estructura PWA	56
6.3. Formulación del problema de aprendizaje	56
6.3.1. Conjunto de datos	56
6.3.2. Arquitectura propuesta	57
6.3.3. Función de costo y entrenamiento	57
6.4. Garantía de factibilidad mediante post-proyección	57
6.5. Pipeline experimental	58
6.6. Selección de arquitectura	58
6.7. Resultados offline de la red seleccionada	58
6.8. Post-proyección sobre el hexágono de tensión	60
6.9. Discusión y síntesis del capítulo	61
7. CONCLUSIONES	62
7.1. Resumen del trabajo	62
7.2. Conclusiones	63
7.2.1. Diferencias entre restricción circular y politópica.	63
7.2.2. Restricciones dominantes.	63
7.2.3. Compromiso precisión–costo computacional.	63
7.2.4. Viabilidad del aproximador neuronal.	63
7.2.5. Validación metodológica en el prototipo.	64
7.2.6. Respuesta integrada.	64
7.3. Trabajo futuro	64
A. APROXIMACIÓN POLITÓPICA DE UNA REGIÓN CIRCULAR	66
A.1. Formulación geométrica	66
A.2. Distancia de Hausdorff simplificada	67
A.3. Error relativo y convergencia	67
A.4. Ilustración del exceso $\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}_N$	67
BIBLIOGRAFÍA	69

Índice de figuras

2.1. Disco admisible de entrada y politópo inscrito (Caso A).	14
2.2. Disco admisible de estado y politópo inscrito (Caso C).	15
2.3. Comparación de $u_1^*(x_1, x_2)$: Caso A politópico (izquierda) y Caso B circular (derecha). Los pliegues del Caso A corresponden a cambios en el conjunto activo.	17
2.4. Vista cenital de $u_1^*(x_1, x_2)$: Caso A politópico (izquierda) y Caso B circular (derecha).	17
2.5. Comparación de $u_1^*(x_1, x_2)$ con restricción en estado predicho: Caso C politópico (izquierda) y Caso D circular (derecha). Los pliegues del Caso C corresponden a cambios en el conjunto activo. En la base de cada panel se indica la restricción inscrita en (x_1, x_2)	18
2.6. Vista cenital de $u_1^*(x_1, x_2)$ con restricción en estado predicho: Caso C politópico (izquierda) y Caso D circular (derecha). Los contornos blancos representan las curvas de nivel; el contorno negro marca los bordes.	18
2.7. Partición PWA del Caso A en entrada (93 regiones, hexágono).	22
2.8. Partición PWA del Caso C en estado predicho (46 regiones, dodecágono).	23
2.9. Superficies $u_1^*(x_1, x_2)$: Caso A politópico, Caso B circular y red ReLU entrenada sobre el Caso B.	27
2.10. Superficies $u_1^*(x_1, x_2)$ con restricción en estado predicho: Caso C politópico, Caso D circular y red ReLU entrenada sobre el Caso D. En la base de cada panel se indica la restricción (círculo o politopo inscrito).	27
3.1. Circuito equivalente de una unidad DER conectada a una microrred AC. Extraído de [1].	29
4.1. Aproximación politópica de un disco $\mathcal{B} = \{\mathbf{z} \mid \ \mathbf{z}\ _2 \leq r\}$. Las zonas anaranjadas ilustran la holgura secante entre el círculo y el politopo inscrito.	37

4.2. Geometría de una restricción elíptica no centrada en el origen (4.5). El círculo punteado ilustra un disco de referencia centrado.	39
4.3. Restricción hexagonal rotatoria sobre la tensión del inversor en el marco dq . El contorno sólido corresponde a $\mathbf{G}_{vc} \mathbf{T}(\theta_k) \mathbf{u}_{0h} \leq \mathbf{h}_{vc} - \mathbf{G}_{vc}(\mathbf{u}_s - \mathbf{d}_{ik})$ para sucesivos valores de θ_k ; la referencia punteada muestra el hexágono fijo en $\alpha\beta$.	40
4.4. Márgenes mínimos sobre el horizonte $N_p = 3$ bajo la ley dodecagonal. De izquierda a derecha: holgura al círculo de corriente m_{circ} (4.8); holgura al dodecágono inscrito m_{dodec} (4.9); holgura al hexágono de tensión m_{v_s} (4.10). Valores bajos (tonos oscuros en m_{v_s}) indican restricción activa.	44
5.1. Proyección al plano (i_{fd}, i_{fq}) de la ley PWA 4D (Caso B, dodecágono $N = 12$, $\theta_k = 0^\circ$).	51
5.2. Ley explícita PWA en el mismo corte (i_{fd}, i_{fq}) : tensión directa v_{sd}^* (izquierda), tensión cuadratura v_{sq}^* (centro) e índice de región crítica (derecha). Las líneas de contorno marcan los hiperplanos de conmutación entre expresiones afines.	52
6.1. Superficies $v_{sd}^*(i_{fd}, i_{fq})$: Caso A circular (SOCP) y red ReLU entrenada sobre la ley circular ($\theta_k = 0^\circ$).	59
6.2. Mapas de error $\ \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{\text{circ}}^*\ _2$ sobre la grilla: red ReLU (izquierda, RMSE = 0,043 V) y dodecágono (derecha, RMSE = 0,083 V).	59
A.1. Polítopo regular inscrito $\mathcal{P}_5$ en el disco $\mathcal{B}$ ($r = 1$, $e_r \approx 19,1\%$).	68

Índice de tablas

2.1. Parámetros del prototipo masa-resorte.	11
2.2. Los cuatro casos del prototipo: misma planta, distinta geometría de restricción.	12
2.3. Comparación Caso A (politópico) frente a Caso B (circular) en la entrada.	14
2.4. Métricas del barrido <i>offline</i>	19
2.5. Costo computacional del barrido <i>offline</i>	19
2.6. Contraste de las condiciones KKT: Caso A (entrada) y Caso C (estado predicho).	22
2.7. Correspondencia entre los cuatro casos del prototipo y el sistema DER.	27
3.1. Parámetros del sistema DER y valores nominales de operación.	33
4.1. Comparación entre restricción politópica inscrita y circular exacta.	40
4.2. Clasificación de las restricciones convexas en el MPC de nivel cero.	41
4.3. Configuración del barrido comparativo offline, referencia $\theta_k = 0^\circ$	41
4.4. Resumen del barrido comparativo en el plano (i_{fd}, i_{fq}) , con $\theta_k = 0^\circ$	42
4.5. Actividad de restricciones y márgenes agregados bajo la ley politópica ($\theta_k = 0^\circ$).	44
4.6. Costo computacional del barrido ($\theta_k = 0^\circ$, 6400 puntos). Los ratios por N provienen del barrido comparativo; para $N = 12$, la corrida consolidada (reporte_tesis_borde.txt) reporta $33,4 \times$ (29,4 ms/pt vs. 0,88 ms/pt).	45
5.1. Regiones críticas representativas en el corte (i_{fd}, i_{fq}) con v_{cd}, v_{cq} en el centro de $\mathcal{B}_{x_{0h}}$. Los puntos indican cuántas celdas de la grilla 80×80 caen en cada región visible.	51
6.1. Comparación de enfoques para la ley de control MPC-Z en corriente.	55
6.2. Comparación de arquitecturas ReLU sobre la grilla completa ($N_g = 6400$, $\theta_k = 0^\circ$). La columna MSE_pol corresponde al error del dodecágono respecto al círculo (referencia común).	60

6.3. Resumen comparativo del aproximador ReLU frente a los enfoques del Capítulo 4 y 5 ($\theta_k = 0^\circ$).	60
---	----

ABREVIACIONES

Mayúsculas

2L-VSC	: two-level voltage source converter
AC	: alternating current
Adam	: adaptive moment estimation
DARE	: discrete-time algebraic Riccati equation
DER	: distributed energy resource
eMPC	: explicit model predictive control
KKT	: Karush-Kuhn-Tucker (conditions)
LCL	: inductor-capacitor-inductor (filter)
LQR	: linear-quadratic regulator
LTI	: linear time-invariant
mpQP	: multiparametric quadratic programming
MPC	: model predictive control
MSE	: mean squared error
PLL	: phase-locked loop
PoC	: point of coupling
PWM	: pulse width modulation
PWA	: piecewise affine
QCQP	: quadratically constrained quadratic programming
QP	: quadratic programming
ReLU	: rectified linear unit
RMSE	: root mean square error
SOCP	: second-order cone programming
VSC	: voltage source converter
ZOH	: zero order hold

Minúsculas

abc	: natural three-phase reference frame
dq	: synchronous rotating reference frame
$\alpha\beta$	: stationary reference frame (Clarke transform)

INTRODUCCIÓN

1.1. Contexto y motivación

El control predictivo basado en modelos (*Model Predictive Control*, MPC) se ha consolidado como una de las estrategias de control más versátiles en aplicaciones industriales y de investigación. Su capacidad para optimizar el desempeño de sistemas complejos mientras respeta explícitamente restricciones sobre estados, entradas y salidas lo hace especialmente atractivo en electrónica de potencia, donde los actuadores y las variables dinámicas están sujetos a límites físicos estrictos.

En microrredes de corriente alterna, la integración de unidades de Recursos Energéticos Distribuidos (*Distributed Energy Resource*, DER) mediante convertidores de fuente de voltaje requiere controladores capaces de regular el voltaje en el Punto de Acoplamiento (PoC) y, simultáneamente, respetar límites de corriente y de modulación del inversor. Un marco de referencia ampliamente estudiado es el control en cascada sobre un filtro LCL, en el cual el lazo de nivel cero regula el voltaje del filtro y el lazo primario gobierna la interacción con la red [1]. En este contexto, las restricciones operativas no son únicamente algebraicas: muchas de ellas poseen una interpretación geométrica natural en el plano dq o $\alpha\beta$.

Un caso representativo es el límite de corriente del filtro, expresado como una restricción circular $\|\mathbf{i}_f^{dq}\|_2 \leq i_b$, y el límite de tensión del inversor, determinado por el hexágono de vectores espaciales del convertidor 2L-VSC. La formulación exacta de la restricción circular conduce a un problema de optimización con restricciones de cono de segundo orden (SOCP) o, equivalentemente, a un programa cuadráticamente restringido (QCQP). En cambio, la práctica habitual aproxima la envolvente circular mediante un polítopo regular inscrito, obteniendo un programa cuadrático (QP) con restricciones lineales resoluble con un solver

QP estándar.

Esta aproximación geométrica reduce el costo computacional, pero modifica la región factible del problema de control. La pregunta central de este documento es si esa diferencia altera de forma medible la ley de control óptima cuando ambas formulaciones se aplican al mismo MPC de nivel cero sobre un inversor DER, y si una red neuronal puede aproximar la ley obtenida con la restricción circular ideal con un costo de inferencia compatible con implementación en tiempo real.

1.2. Descripción del problema

El sistema bajo estudio corresponde a una unidad DER conectada a una microrred AC mediante un filtro LCL, modelado y discretizado en el marco síncrono dq alineado con el voltaje del PoC. Para el alcance de este documento, se considera únicamente el bucle de control de nivel cero (MPC-Z), que regula el voltaje del filtro mediante la tensión aplicada por el inversor $\mathbf{u}_z = [v_{sd}, v_{sq}]^\top$.

El experimento central del convertidor compara dos formulaciones del mismo controlador predictivo *offline* sobre una grilla de estados en el plano de corrientes (i_{fd}, i_{fq}) . En ambos casos se mantiene fija una restricción hexagonal ($N = 6$) sobre la tensión del inversor $\mathbf{v}_s$, coherente con el límite físico del convertidor. La única diferencia metodológica es la representación del límite de corriente predicha $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ en el horizonte de predicción:

- **Caso A del convertidor (círculo):** $\|\mathbf{i}_{f,\text{pred},k}\|_2 \leq i_b$, resuelto como SOCP/QCQP.
- **Caso B del convertidor (politopo inscrito):** aproximación lineal con $N \in \{6, 12, 24\}$, resuelto como QP lineal.

El análisis profundo de la ley PWA exacta del dodecágono ($N = 12$) y la aproximación neuronal de la ley circular se desarrollan en los Capítulos 5 y 6, respectivamente.

Antes de trasladar ese análisis al filtro LCL, el Capítulo 2 valida la cadena metodológica completa en un sistema masa-resorte con cuatro variantes: en **entrada**, Caso A politópico y Caso B circular; en **estado predicho**, Caso C politópico y Caso D circular. En el convertidor, la pareja círculo/politopo sobre $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ corresponde estructuralmente a los Casos D (circular) y C (politópico) del prototipo; los Casos A y B del prototipo ilustran restricciones en actuación, análogas en rol (no en forma exacta) al hexágono fijo en $\mathbf{v}_s$. El prototipo no modela simultáneamente el hexágono de tensión: aísla la dualidad círculo/politopo en un solo espacio (entrada o estado) para hacer transparentes la formulación *batch*, el barrido *offline*, la identificación PWA de los Casos A y C vía KKT y el entrenamiento ReLU sobre las leyes circulares (Casos B y D).

El problema central de este documento consiste en:

- Cuantificar las diferencias entre ambas representaciones geométricas en la primera acción de control óptima $\mathbf{u}^*$.

- Identificar en qué regiones del espacio de estados dichas diferencias son activas y qué restricciones dominan el comportamiento del optimizador.
- Evaluar el compromiso entre precisión geométrica y costo computacional de los solvers involucrados.
- Derivar y validar la ley de control explícita afín por partes (PWA) asociada al caso politópico mediante condiciones KKT.
- Investigar si una red neuronal ReLU puede aproximar la ley de control del caso circular con desempeño aceptable en modo *offline* y costo de inferencia reducido.

La hipótesis de investigación plantea que la aproximación poligonal de una restricción circular introduce diferencias localizadas en la ley de control MPC explícita, las cuales pueden caracterizarse mediante barridos paramétricos y métricas de discrepancia en $\mathbf{u}^*$, y que el hexágono de tensión $\mathbf{v}_s$, más que la geometría de $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$, domina la activación de restricciones en el bucle de nivel cero (hipótesis verificada en el convertidor, no en el prototipo). Asimismo, se postula que una red ReLU entrenada con la solución del Caso A del convertidor puede emular dicha ley con menor costo computacional en inferencia que un optimizador iterativo en línea, preservando un error de aproximación acotado en la grilla de entrenamiento.

1.3. Estado del Arte

El control predictivo y las restricciones no lineales en sistemas de control han sido objeto de investigación intensiva desde los años 1970. A continuación, se revisan los fundamentos teóricos y los antecedentes más relevantes para este documento.

1.3.1. Control predictivo y sistemas DER en microrredes

Los trabajos seminales de Camacho y Bordons [2] y Borrelli et al. [3] establecen el marco teórico del MPC, incluyendo estabilidad, optimalidad y manejo de restricciones. El Control Lineal Cuadrático Regulador (*Linear Quadratic Regulator*, LQR) constituye la base del MPC sin restricciones; su extensión con límites explícitos transforma el problema en una optimización recursiva que admite formulaciones QP, QCQP o SOCP según la geometría de las restricciones.

En integración de DER en microrredes AC, Ignacio A. [1] propone una arquitectura de control predictivo en cascada sobre un filtro LCL, incorporando restricciones de corriente, tensión del inversor y variables de sincronización. Ese trabajo motiva el modelado adoptado en el Capítulo 3, aunque el presente estudio reduce deliberadamente el alcance al lazo de nivel cero y a un análisis *offline* de la ley de control.

1.3.2. Restricciones no lineales y QCQP

Las restricciones circulares sobre variables de estado predichas se expresan como normas euclidianas:

$$\|\mathbf{x}_k\|_2 \leq r \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \mathbf{x}_k^\top \mathbf{x}_k \leq r^2, \quad (1.1)$$

donde, en este documento, $\mathbf{x}_k$ corresponde a componentes de corriente del filtro en el horizonte de predicción. El problema resultante es un QCQP o SOCP convexo, resoluble con solvers iterativos de cono o programación no lineal, pero con un costo por iteración superior al de un QP estándar.

La alternativa industrial consiste en inscribir un politopo regular de N lados dentro de la circunferencia, generando restricciones lineales $\mathbf{H}\mathbf{z} \leq \mathbf{b}$. Borrelli et al. [3] analizan estas aproximaciones en el contexto del MPC explícito, donde la ley óptima adopta estructura afín por partes (PWA). La discrepancia geométrica entre el disco y el politopo inscrito puede cuantificarse analíticamente y traducirse en diferencias locales de la acción de control, especialmente cuando la solución opera cerca del borde factible.

1.3.3. Redes neuronales artificiales en control

Las redes neuronales artificiales, en particular las arquitecturas *feedforward* con activación ReLU, se han utilizado como aproximadores universales de leyes de control complejas. Trabajos como [4–7] demuestran que leyes MPC explícitas con estructura PWA pueden representarse o aproximarse mediante redes profundas, abriendo la posibilidad de reemplazar la optimización en línea por inferencia directa. Los desafíos principales incluyen el cumplimiento de restricciones duras fuera de la grilla de entrenamiento, la generalización ante condiciones no vistas y el costo del entrenamiento inicial.

1.3.4. Brecha en la literatura

Aunque existen estudios sobre MPC en DER, restricciones politópicas y aproximación neuronal de controladores, persiste una brecha en la caracterización sistemática del impacto de aproximar restricciones circulares en variables de estado predichas, en particular, la corriente del filtro $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$. Este trabajo contribuye con un análisis empírico *offline* que:

- Valida la cadena círculo/politopo/PWA/ReLU en un prototipo masa-resorte con cuatro casos (entrada y estado predicho) antes del estudio en el convertidor.
- Compara leyes de control bajo restricción circular exacta versus politopos inscritos con $N \in \{6, 12, 24\}$ en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$, incluyendo sensibilidad al ángulo θ_k del hexágono de tensión.
- Cuantifica la discrepancia en $\mathbf{u}^*$, la activación relativa de restricciones de corriente y tensión, y el costo computacional entre solvers SOCP/QCQP y QP lineal.

- Deriva la ley PWA *exacta* del dodecágono ($N = 12$) mediante condiciones KKT y valida su equivalencia numérica frente al QP de referencia.
- Entrena y evalúa un aproximador ReLU de la ley circular, con post-proyección hexagonal para preservar factibilidad del actuador.

1.4. Objetivos (General y Específicos)

Objetivo General: Validar, en un prototipo masa-resorte de cuatro casos (restricciones círculo/politopo en entrada y en estado predicho), la cadena metodológica círculo/politopo/PWA/ReLU; y analizar el impacto de la representación geométrica de restricciones en un controlador predictivo de nivel cero aplicado a una unidad DER con filtro LCL, comparando una formulación circular exacta frente a aproximaciones politópicas en la corriente predicha del filtro, derivando la ley explícita del caso politópico e investigando la capacidad de redes neuronales ReLU para aproximar la ley circular resultante.

- **Objetivo Específico 0 (Prototipo didáctico):** Implementar el sistema masa-resorte con horizonte $N_p = 3$ y cuatro variantes de restricción (Casos A–D: A y C politópico, B y D circular), ejecutar barridos *offline*, identificar la ley PWA de los Casos A y C mediante condiciones KKT y entrenar un aproximador ReLU sobre las leyes circulares (Casos B y D), estableciendo correspondencia estructural con el bucle de nivel cero del convertidor.
- **Objetivo Específico 1 (Modelado del sistema):** Desarrollar el modelo dinámico de la unidad DER en microrred AC, su linealización en el bucle de nivel cero y la implementación computacional en MATLAB del problema MPC-Z, con restricción hexagonal fija en $\mathbf{v}_s$ y comparación círculo versus politopos inscritos en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$.
- **Objetivo Específico 2 (Comparativa geométrica *offline*):** Ejecutar un barrido paramétrico sobre el plano (i_{fd}, i_{fq}) para $N \in \{6, 12, 24\}$ y doce orientaciones de θ_k , contrastando las leyes del Caso A del convertidor (círculo) y Caso B del convertidor (politopo), y cuantificando $|\Delta \mathbf{u}|$, activación de restricciones y tiempo de cómputo por solver.
- **Objetivo Específico 3 (Ley de control explícita PWA):** Formular el QP multiparamétrico del dodecágono ($N = 12$), identificar regiones críticas mediante condiciones KKT y validar la reconstrucción afín por partes frente al QP de referencia.
- **Objetivo Específico 4 (Aproximación mediante redes neuronales):** Entrenar arquitecturas ReLU sobre la ley circular del Caso A del convertidor, evaluar precisión de regresión y costo de inferencia, e incorporar post-proyección sobre el hexágono de $\mathbf{v}_s$ para preservar factibilidad.

1.5. Metodología

La metodología se estructura en las siguientes fases:

1.5.1. Fase de prototipo didáctico

- Modelado MPC *batch* de un sistema masa–resorte ($n_x = n_u = 2$, $N_p = 3$, $T_s = 0,1$ s) con costo cuadrático y condensación en $(\mathbf{H}, \mathbf{f})$.
- Formulación de cuatro casos: Caso A (politópico $N = 6$ en entrada $\mathbf{u}_k$), Caso B (circular en entrada), Caso C (politópico $N = 12$ en estado predicho $\mathbf{x}_k$), y Caso D (circular en estado predicho).
- Barrido *offline* en grilla 60×60 sobre (x_1, x_2) ; resolución QCQP/SOCP (fmincon) en Casos B y D frente a QP lineal (quadprog) en Casos A y C.
- Identificación PWA de los Casos A y C vía condiciones KKT y entrenamiento ReLU sobre las leyes circulares (Casos B y D).
- Síntesis de correspondencia estructural entrada/estado con el hexágono en $\mathbf{v}_s$ y el disco en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ del convertidor (Capítulo 2).

1.5.2. Fase de modelado y formulación

- Derivación del modelo DER–microrred en marcos abc , $\alpha\beta$ y dq , con énfasis en el filtro LCL y el lazo de nivel cero.
- Linealización en torno al punto nominal y discretización ZOH con $T_s = 200 \mu\text{s}$ y horizonte $N_p = 3$.
- Formulación del MPC-Z en estructura *batch* (QP/QCQP) con restricción hexagonal fija en $\mathbf{v}_s$ y comparación geométrica en la restricción *soft* de $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$.
- Implementación en MATLAB mediante código que replique el comportamiento del sistema DER–microrred.

1.5.3. Fase de comparación *offline*

- Barrido en grilla $N_g \times N_g$ sobre $(i_{fd}, i_{fq}) \in [-5,88, 5,88]^2$ A, con v_{cd} y v_{cq} fijos en el equilibrio nominal ($\theta_k = 0^\circ$ como corte principal).
- Resolución del Caso A del convertidor con solver SOCP/QCQP y del Caso B del convertidor con solver QP lineal para $N \in \{6, 12, 24\}$.
- Barrido angular complementario con $N_\theta = 12$ orientaciones equiespaciadas de θ_k .

- Registro de $\mathbf{u}^*$, mapas de $|\Delta \mathbf{u}|$, márgenes de activación de restricciones y tiempos de cómputo.

1.5.4. Fase de ley explícita PWA

- Condensación del QP del dodecágono ($N = 12$) y exploración de conjuntos activos sobre grilla densa en corriente.
- Identificación de regiones críticas y ajuste de expresiones afines $(\mathbf{F}_i, \mathbf{g}_i)$.
- Validación numérica de la ley PWA frente al QP de referencia en puntos *hold-out*.

1.5.5. Fase de aproximación neuronal

- Generación del conjunto $\{(\mathbf{x}_{0h}^{(i)}, \mathbf{u}_{\text{circ}}^{*(i)})\}$ a partir del barrido circular.
- Entrenamiento de arquitecturas ReLU y selección por MSE de validación.
- Evaluación del error de aproximación, costo de inferencia y comparación con la ley politópica y el SOCP.
- Post-proyección euclidiana sobre el hexágono de $\mathbf{v}_s$ para restaurar factibilidad del actuador.

1.5.6. Fase de validación y documentación

- Síntesis cuantitativa de resultados mediante tablas y figuras comparativas en los Capítulos 4–6.
- Discusión del rol dominante de las restricciones activas, en particular, la saturación de $\mathbf{v}_s$, en el comportamiento observado.
- Conclusiones sobre el compromiso círculo/politopo/PWA/ReLU y líneas de extensión hacia validación en lazo cerrado.

1.6. Estructura del documento

El presente documento se organiza de la siguiente manera:

- **Capítulo 1: Introducción.** Contexto, planteamiento del problema, estado del arte, objetivos, metodología y estructura de este documento.
- **Capítulo 2: Prototipo didáctico (masa–resorte).** Validación de la cadena metodológica en cuatro casos (A y C politópico; B y D circular, en entrada y en estado predicho): modelado *batch*, barrido *offline*, identificación PWA de los Casos A

y C vía KKT y aproximación ReLU de las leyes circulares (Casos B y D), como puente estructural previo al análisis DER.

- **Capítulo 3: Modelado del sistema DER en microrred AC.** Circuito LCL, transformaciones de coordenadas, restricciones operativas y modelo lineal discreto del bucle de nivel cero.
- **Capítulo 4: Análisis comparativo: restricción circular vs. politópicos en corriente.** Marco teórico de restricciones convexas; barrido *offline* para $N \in \{6, 12, 24\}$; tablas de discrepancia, actividad de restricciones, sensibilidad a θ_k y costo computacional.
- **Capítulo 5: Ley de control explícita del dodecágono en corriente.** Formulación multiparamétrica, condiciones KKT, partición PWA con MPT3 y validación numérica ($N = 12$, $\theta_k = 0^\circ$).
- **Capítulo 6: Aproximación neuronal de la ley circular.** Entrenamiento y validación *offline* de arquitecturas ReLU, post-proyección hexagonal y comparación con SOCP, QP y PWA.
- **Capítulo 7: Conclusiones.** Síntesis de hallazgos y trabajo futuro.

Los apéndices incluyen la construcción geométrica de politopos inscritos (Apéndice A).

PROTOTIPO DIDÁCTICO: RESTRICCIONES POLITÓPICAS Y CIRCULARES EN ENTRADA Y ESTADO

El Capítulo 1 planteó el programa de investigación sobre restricciones geométricas en el control predictivo basado en modelos (MPC) de una unidad de recurso energético distribuido (DER): comparar círculo versus politópico, derivar la ley afín por partes (PWA) mediante condiciones KKT y aproximar la solución circular con redes ReLU. Antes de trasladar esa cadena al filtro inductor–capacitor–inductor (LCL) de la microrred, este capítulo la desarrolla sobre un sistema masa–resorte de segundo orden, cuya dinámica lineal, formulación *batch* y barrido *offline* son analíticamente transparentes. El objetivo no es sustituir los resultados del convertidor, sino demostrar que el flujo completo (modelado, variantes de restricción, identificación PWA y entrenamiento neuronal) es reproducible y estructuralmente concordante con el bucle de nivel cero del DER.

El prototipo concentra la tensión geométrica–computacional que motiva el documento: un límite exacto (círculo) induce un programa cuadráticamente restringido (QCQP) o un problema de cono de segundo orden (SOCP) costoso, mientras que un politopo inscrito lo reduce a programa cuadrático (QP) lineal a costa de holgura $e_r(N)$ y pliegues en la ley de control. Esa tensión se examina en cuatro casos que comparten la misma planta y el mismo horizonte, y difieren en dónde se impone la restricción y si la restricción es politópica o

circular. Los **Casos A y B** actúan sobre la **entrada** $\mathbf{u}_k$: el Caso A emplea un politopo inscrito ($N = 6$) y el Caso B el círculo, visible en el plano (u_1, u_2) . Los **Casos C y D** trasladan la misma dualidad al **estado predicho** $\mathbf{x}_k$ (politópico en C, circular en D), siendo el Caso C un politopo $N = 12$, replicando la arquitectura del DER, donde el límite de corriente actúa sobre el estado $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ y el hexágono de tensión (entrada) sobre $\mathbf{v}_s$.

La lectura recomendada es la siguiente. La Sección 2.1 introduce la planta y la condensación MPC. La Sección 2.2 presenta el marco de los cuatro casos de estudio. Las Secciones 2.3 y 2.4 desarrollan las formulaciones de los Casos A–B y C–D, correspondiente. La Sección 2.5 reporta el barrido *offline*, contrasta las leyes de control en los pares A–B y C–D, y resume las métricas numéricas. Las Secciones 2.6 y 2.7 validan solvers y derivan la PWA vía KKT (Secciones 2.7.1–2.7.2). La Sección 2.8 entrena el aproximador ReLU. La Sección 2.9 cierra con el puente hacia los capítulos posteriores.

2.1. Modelado del sistema y formulación MPC

La formulación MPC del prototipo se desarrolla en tres pasos: dinámica continua y discretización con retenedor de orden cero (ZOH), definición del costo cuadrático con horizonte deslizante, y condensación *batch* del problema en las matrices $(\mathbf{H}, \mathbf{f})$ evaluables en cada instante de muestreo.

2.1.1. Dinámica continua y discretización

Considérese un sistema masa–resorte–amortiguador con dos canales de actuación. En coordenadas de fase $(x_1, x_2) = (q, \dot{q})$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_c \mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

con $m = 1 \text{ kg}$, $k = 0,5 \text{ N/m}$ y $b = 0,1 \text{ N s/m}$:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 2,0 & 0,3 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Mediante retención de orden cero (ZOH) con $T_s = 0,1 \text{ s}$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c T_s}, \mathbf{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c d\tau. \quad (2.3)$$

2.1.2. Costo cuadrático y horizonte deslizante

El MPC resuelve, en cada instante k , un problema de optimización sobre un horizonte finito N_p , aplica solo la primera acción $\mathbf{u}_k$ y repite el procedimiento (horizonte deslizante). Sin restricciones, el problema reduce al LQR de horizonte finito:

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_{N_p}^\top Q_T \mathbf{x}_{N_p} + \sum_{j=0}^{N_p-1} (\mathbf{x}_j^\top Q \mathbf{x}_j + \mathbf{u}_j^\top R \mathbf{u}_j) \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_j + \mathbf{B} \mathbf{u}_j, \quad (2.4)$$

Tabla 2.1: Parámetros del prototipo masa–resorte.

Parámetro	Valor	Descripción
n_x	2	Estados (x_1, x_2)
n_u	2	Entradas de control
T_s	0,1 s	Periodo de muestreo (ZOH)
N_p	3	Horizonte de predicción
r	1	Radio del disco admisible ($\mathbf{u}$ o $\mathbf{x}$)
N^a	6	Lados del polígono inscrito (Caso A)
N^c	12	Lados del polígono inscrito (Caso C)
N_g	60×60	Resolución del barrido en (x_1, x_2)
Dominio	$[-1,5, 1,5]^2$	Rango del barrido <i>offline</i>
Solver circular	fmincon / CVX	SOCP/QCQP (Casos B y D)
Solver politópico	quadprog	QP lineal (Casos A y C)

con $Q \succeq 0$, $R \succ 0$ y peso terminal $Q_T \succeq 0$ (en la práctica se toma $Q_T = Q$). Las matrices Q y R fijan el compromiso entre seguimiento de estado y esfuerzo de control; su elección depende del par de casos considerado (entrada o estado predicho) y se consolida en la Tabla 2.1. La referencia constante $\mathbf{x}_{\text{ref}}$ define el equilibrio deseado del regulador. La adición de restricciones convexas sobre $\mathbf{u}_j$ o $\mathbf{x}_j$ transforma la solución analítica LQR en un problema de optimización numérico iterativo.

2.1.3. Formulación compacta batch

Se definen los vectores apilados de decisión y de estado predicho:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_p-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_u N_p}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N_p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x N_p}. \quad (2.5)$$

La dinámica condensada es $\mathbf{X} = \Phi \mathbf{x}_0 + \Gamma \mathbf{U}$, con

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{N_p} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N_p-1} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{AB} & \mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Sustituyendo en el costo y definiendo $\mathbf{x}_{\text{ref}, N_p} = \mathbf{1}_{N_p} \otimes \mathbf{x}_{\text{ref}}$, el problema base se reduce a

$$\min_{\mathbf{U}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{U}^\top \mathbf{H} \mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{U} \quad \text{s.a.} \quad \text{restricciones geométricas en } \mathbf{u}_j \text{ o } \mathbf{x}_j, \quad (2.7)$$

Tabla 2.2: Los cuatro casos del prototipo: misma planta, distinta geometría de restricción.

Caso	Objeto restringido	Formulación	Clase
A	Entrada $\mathbf{u}_j$	$\mathbf{H}_{\mathcal{P}} \mathbf{u}_j \leq \mathbf{b}_{\mathcal{P}}$	QP
B	Entrada $\mathbf{u}_j$	$\ \mathbf{u}_j\ _2 \leq r$	QCQP
C	Estado $\mathbf{x}_j$ predicho	$\mathbf{H}_{\mathcal{P}} \mathbf{x}_j \leq \mathbf{b}_{\mathcal{P}}$	QP
D	Estado $\mathbf{x}_j$ predicho	$\ \mathbf{x}_j\ _2 \leq r$	QCQP

con $\mathbf{H} = \mathbf{\Gamma}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{\Gamma} + \bar{\mathbf{R}}$, $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}_{N_p} \otimes Q$, $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_{N_p} \otimes R$ y

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{\Gamma}^\top \bar{\mathbf{Q}} (\Phi \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{\text{ref}, N_p}). \quad (2.8)$$

La matriz $\mathbf{H}$ es simétrica y definida positiva ($R \succ 0$), garantizando un mínimo global único en el interior de cada región crítica. $\mathbf{H}$ se calcula una sola vez; $\mathbf{f}$ se actualiza en cada paso al medir $\mathbf{x}_0$.

2.2. Marco de los cuatro casos y puente metodológico

Sobre la planta (2.3) y la condensación (2.7), el capítulo examina cuatro problemas de optimización que comparten costo y dinámica, y difieren en la geometría de la restricción. La Tabla 2.2 los resume; en todos ellos la decisión permanece en $\mathbf{U}$, pero el lado derecho de las desigualdades puede depender o no de $\mathbf{x}_0$.

La metodología del documento recorre, para cada par círculo/politopo, la misma secuencia de cuatro etapas:

1. Formulación MPC con restricción politópica (Casos A y C) y solución circular (Casos B y D).
2. Barrido paramétrico *offline* que genera $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0)$ para cada variante.
3. Identificación PWA mediante condiciones KKT en los casos QP.
4. Entrenamiento ReLU sobre las leyes circulares, explotando la equivalencia estructural ReLU-PWA.

Los Casos A–B, las restricciones no dependen de $\mathbf{x}_0$, lo que simplifica la partición PWA del Caso A. Los Casos C–D reproducen la estructura del convertidor: el par politópico/circular sobre $\mathbf{i}_{f, \text{pred}}$ del Capítulo 4 corresponde a los Casos C/D, con $\mathbf{A}\mathbf{U} \leq \mathbf{b}_0 + \mathbf{E}\mathbf{x}_{0h}$ en el politópico, mientras que el hexágono de $\mathbf{v}_s$ es análogo en rol al Caso A (restricción politópica en entrada).

2.3. Restricciones en la entrada: Casos A y B

En esta sección el Caso A aproxima la solución por un politopo inscrito de $N = 6$ lados; el Caso B preserva el círculo exacto.

2.3.1. Caso A: politopización de la restricción de entrada

Para obtener un QP resoluble con quadprog, el círculo de radio r se sustituye por un polígono regular de N lados inscrito. Siguiendo el Apéndice A, se puede escribir un politopo de la siguiente manera, considerando θ_i como:

$$\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\pi}{N}, \quad \hat{\mathbf{n}}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.9)$$

y el apotema $a = r \cos(\pi/N)$ define el límite de cada cara:

$$\mathcal{P}_N = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u} \mid \mathbf{H}_{\mathcal{P}} \mathbf{u} \leq \mathbf{b}_{\mathcal{P}}\}, \quad \mathbf{b}_{\mathcal{P}} = a \mathbf{1}_N. \quad (2.10)$$

Para $N = 6$ y $r = 1$, la distancia entre los puntos de máxima desviación geométrica (error de Hausdorff) es:

$$e_r(N) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \approx 13,4\%, \quad (2.11)$$

Apilando la restricción en cada paso del horizonte:

$$(\mathbf{I}_{N_p} \otimes \mathbf{H}_{\mathcal{P}}) \mathbf{U} \leq \mathbf{1}_{N_p} \otimes \mathbf{b}_{\mathcal{P}}, \quad (2.12)$$

se generan $N \cdot N_p = 18$ desigualdades lineales. El Caso A es

$$\min_{\mathbf{U}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{U}^\top \mathbf{H} \mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{U} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{A}_{\text{in}} \mathbf{U} \leq \mathbf{b}_{\text{in}}, \quad (2.13)$$

con $\mathbf{A}_{\text{in}} = \mathbf{I}_{N_p} \otimes \mathbf{H}_{\mathcal{P}}$ y $\mathbf{b}_{\text{in}} = \mathbf{1}_{N_p} \otimes \mathbf{b}_{\mathcal{P}}$. Geométricamente, $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{B}$: existen acciones admisibles para el círculo que el politopo rechaza. La Figura 2.1 ilustra las diferencias $\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}_N$.

2.3.2. Caso B: restricción circular en la entrada

Para cada paso $j = 0, \dots, N_p - 1$:

$$\|\mathbf{u}_j\|_2 \leq r \iff \mathbf{u}_j^\top \mathbf{u}_j \leq r^2, \quad r = 1, \quad (2.14)$$

definiendo un disco de radio r en el plano (u_1, u_2) en cada etapa. El Caso B se escribe:

$$\min_{\mathbf{U}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{U}^\top \mathbf{H} \mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{U} \quad \text{s.a.} \quad \|\mathbf{u}_j\|_2 \leq r, \quad j = 0, \dots, N_p - 1. \quad (2.15)$$

Al ser convexo con restricciones de norma euclídea, (2.15) es un QCQP equivalente a SOCP. Se resuelve con fmincon (*interior-point*); CVX valida la misma solución en la Sección 2.6. La ley $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0)$ resultante es continua y más suave que la politópica, sin pliegues asociados a las aristas del polígono inscrito. Sin embargo, no admite partición finita por regiones, lo que motiva la aproximación ReLU de la Sección 2.8.

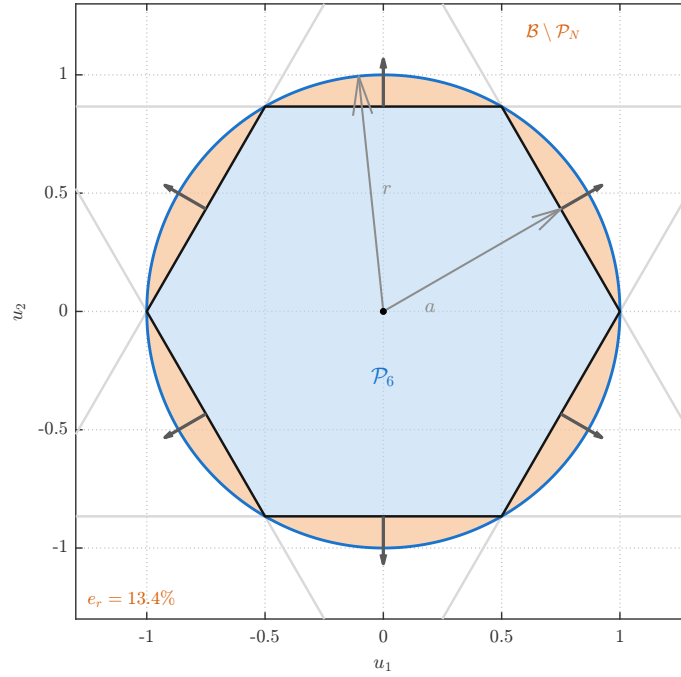
Figura 2.1: Disco admisible de **entrada** y polígono inscrito (Caso A).

Tabla 2.3: Comparación Caso A (politópico) frente a Caso B (circular) en la entrada.

Aspecto	Caso A	Caso B
Formulación	$\mathbf{H}_P \mathbf{u}_j \leq \mathbf{b}_P$	$\ \mathbf{u}_j\ _2 \leq r$
Restricciones	$N \cdot N_p = 18$ lineales	$N_p = 3$ cuadráticas
Clase	QP convexo	QCQP / SOCP
Solver	quadprog	fmincon / CVX

2.4. Restricciones en estado predicho: Casos C y D

En el bucle de nivel cero del convertidor (Capítulos 3–4), el límite de corriente actúa sobre $\mathbf{i}_{f,\text{pred},k}$ en cada paso del horizonte: siendo una magnitud predicha por la dinámica. El hexágono de tensión del inversor es, en cambio, una restricción politópica en **entrada**. Para alinear el prototipo con esa arquitectura dual, los Casos C y D trasladan la dualidad politópico/circular del Caso A/B al espacio de estados predichos $\mathbf{x}_j$.

2.4.1. Predicción condensada y formulación general

Para cada paso $j = 1, \dots, N_p$, las filas de (2.6) dan

$$\mathbf{x}_j = \Phi_j \mathbf{x}_0 + \Gamma_j \mathbf{U}. \quad (2.16)$$

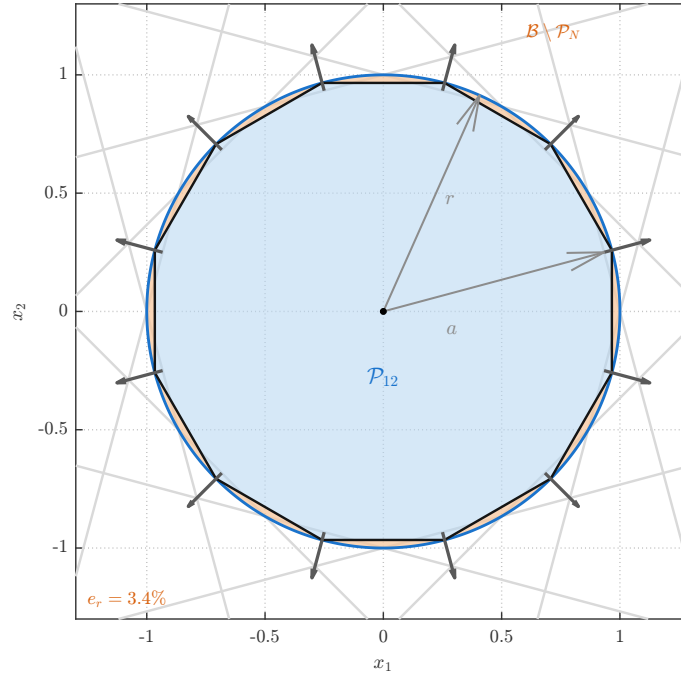


Figura 2.2: Disco admisible de **estado** y polígono inscrito (Caso C).

El problema de decisión sigue siendo un programa en $\mathbf{U}$; las desigualdades se escriben sobre (2.16). En el DER, la misma estructura aparece con $\mathbf{C}_{if}(\Phi \mathbf{x}_{0h} + \Gamma \mathbf{U})$ acotando $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ (Capítulo 3).

2.4.2. Caso C: politopización en estado predicho

Sustituyendo la envolvente circular por el politopo (2.10) sobre cada $\mathbf{x}_j$:

$$\mathbf{H}_{\mathcal{P}} \mathbf{x}_j \leq \mathbf{b}_{\mathcal{P}} \implies \mathbf{H}_{\mathcal{P}} \Gamma_j \mathbf{U} \leq \mathbf{b}_{\mathcal{P}} - \mathbf{H}_{\mathcal{P}} \Phi_j \mathbf{x}_0. \quad (2.17)$$

Apilando las N_p etapas:

$$\min_{\mathbf{U}} \frac{1}{2} \mathbf{U}^\top \mathbf{H} \mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{U} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{A}_{\text{st}} \mathbf{U} \leq \mathbf{b}_0 + \mathbf{E} \mathbf{x}_0, \quad (2.18)$$

con $\mathbf{A}_{\text{st}} \in \mathbb{R}^{NN_p \times n_u N_p}$ y $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$. A diferencia del Caso A, el parámetro $\mathbf{x}_0$ desplaza simultáneamente el costo y el lado derecho de las restricciones. Esa es la estructura del dodecágono en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ del Capítulo 5. La Figura 2.2 ilustra las diferencias del dodecágono inscrito en el plano de estado.

2.4.3. Caso D: restricción circular en estado

Para cada $j = 1, \dots, N_p$:

$$\|\mathbf{x}_j\|_2 \leq r \iff \mathbf{x}_j^\top \mathbf{x}_j \leq r^2, \quad (2.19)$$

Sustituyendo (2.16), cada restricción es cuadrática en $\mathbf{U}$ y afín en $\mathbf{x}_0$. El Caso D es un QCQP/SOCP análogo al Caso B, pero la activación de la envolvente depende de $\mathbf{x}_0$ a través de $\Phi_j \mathbf{x}_0$.

2.5. Barrido offline y comparación de leyes

Con las formulaciones de las Secciones 2.3–2.4, se construye empíricamente la ley $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0)$ sobre una grilla uniforme $N_g \times N_g$ en el plano (x_1, x_2) . Para cada $\mathbf{x}_0$ se resuelve el QCQP o QP del par círculo/politópico correspondiente y se registra la primera acción óptima. El procedimiento genera la solución de referencia para la identificación PWA y el entrenamiento ReLU. En ambos pares, A/B (restricción en entrada) y C/D (restricción en estado predicho), la ley resultante se visualiza con la misma estrategia: superficies tridimensionales de $u_1^*(x_1, x_2)$ y proyección complementaria sobre (x_1, x_2) .

2.5.1. Leyes de control en los Casos A y B

En el par A–B la restricción es visible en el plano de entrada (u_1, u_2) , aunque el barrido parametriza la ley en (x_1, x_2) . La Figura 2.3 muestra en tres dimensiones que u_1^* exhibe diferencias estructurales claras entre politópico y circular. Bajo el Caso A, la superficie es afín por partes: regiones planas conectadas por pliegues donde cambia el conjunto activo de (2.12). En la región central, sin saturación de entrada, la ley coincide con el LQR irrestricto. Bajo el Caso B, la frontera factible es suave y u_1^* resulta más regular, sin pliegues abruptos manteniendo una superficie suave.

La discrepancia $|u_{1,\text{circ}}^* - u_{1,\text{pol}}^*|$ es prácticamente nula en la región central y se concentra más en los bordes donde se satura la restricción de entrada, coincidiendo con la diferencia $\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}_N$ (Figura 2.3). La proyección cenital de la Figura 2.4 complementa la lectura tridimensional al colapsar u_1^* sobre (x_1, x_2) . Mientras que los pliegues en el Caso A corresponden a las curvas de nivel discontinuas del politopo, el Caso B exhibe líneas de nivel completamente suaves que se adaptan a la geometría del contorno.

2.5.2. Leyes de control en los Casos C y D

En el par C–D la restricción actúa sobre el estado predicho $\mathbf{x}_j$. La ley $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0)$ permanece representable como superficie sobre (x_1, x_2) y admite la misma lectura visual que el par A–B. La Figura 2.5 muestra que el Caso C (dodecágono inscrito, $N = 12$) reproduce pliegues asociados a cambios en el conjunto activo, mientras que el Caso D (círculo exacto en $\mathbf{x}_j$)

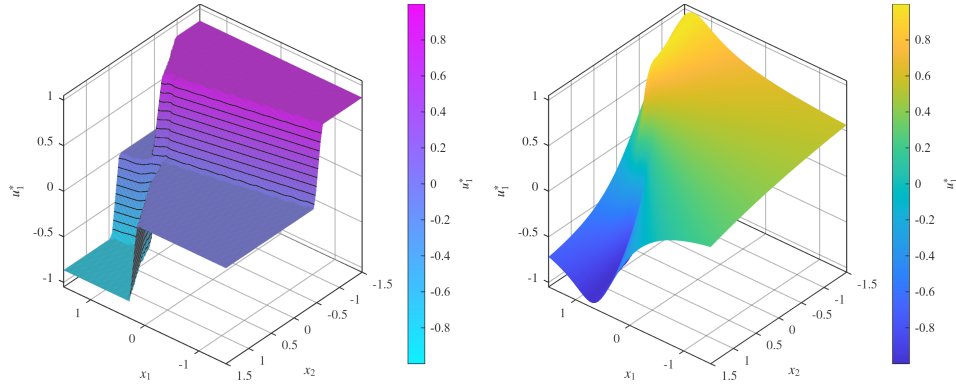


Figura 2.3: Comparación de $u_1^*(x_1, x_2)$: Caso A politópico (izquierda) y Caso B circular (derecha). Los pliegues del Caso A corresponden a cambios en el conjunto activo.

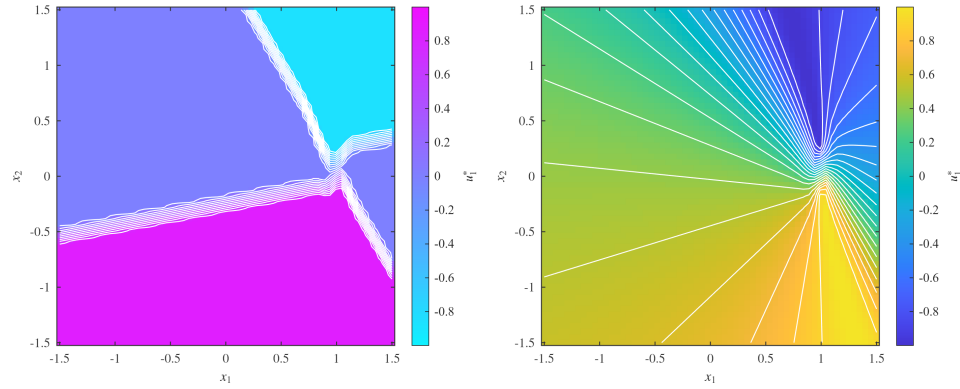


Figura 2.4: Vista cenital de $u_1^*(x_1, x_2)$: Caso A politópico (izquierda) y Caso B circular (derecha).

genera una superficie más continua. Recordar que la diferencia del dodecágono es menor que la del hexágono de entrada ($e_r = 3,4\%$ frente a $13,4\%$), por lo que las diferencias entre leyes politópica y circular se concentran en un sector más estrecho, coherente con la Figura 2.2.

La Figura 2.6 proyecta la misma comparación en vista cenital. Los contornos de u_1^* se recortan a la región admisible del estado predicho (círculo o dodecágono inscrito), de modo que las curvas de nivel no invaden la zona exterior a la restricción; el contorno negro es delimitado por el tipo de restricción en el plano (x_1, x_2) . Esta lectura es análoga a la del par A–B, pero explicita la geometría sobre la que actúa el Caso C/D.

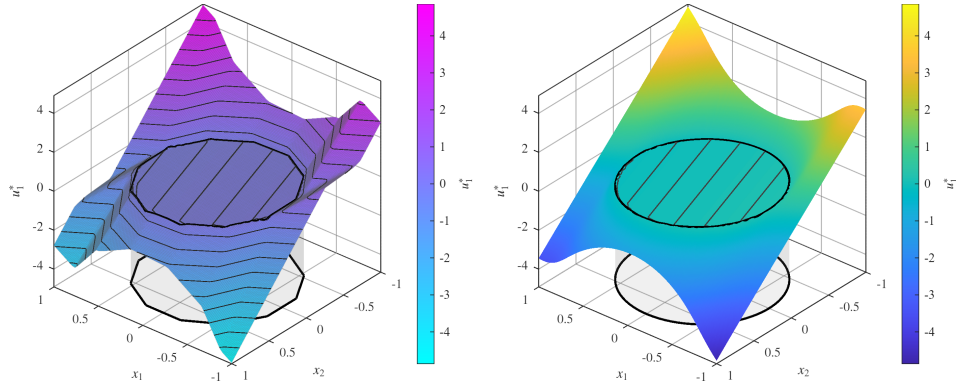


Figura 2.5: Comparación de $u_1^*(x_1, x_2)$ con restricción en estado predicho: Caso C politópico (izquierda) y Caso D circular (derecha). Los pliegues del Caso C corresponden a cambios en el conjunto activo. En la base de cada panel se indica la restricción inscrita en (x_1, x_2) .

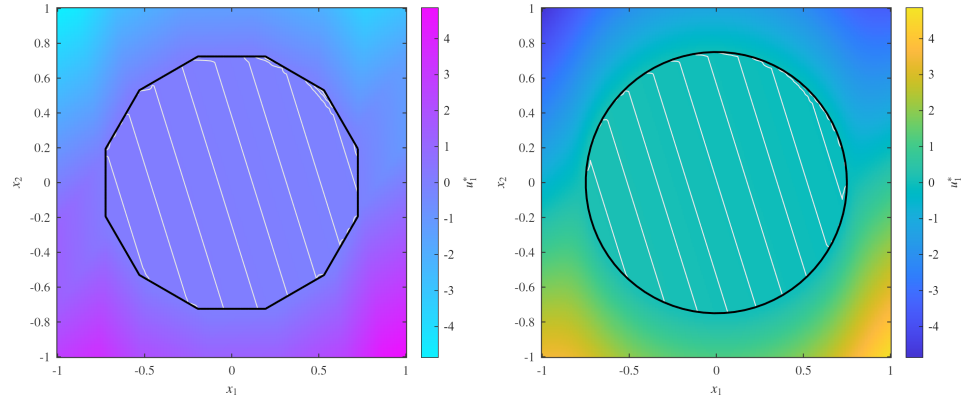


Figura 2.6: Vista cenital de $u_1^*(x_1, x_2)$ con restricción en estado predicho: Caso C politópico (izquierda) y Caso D circular (derecha). Los contornos blancos representan las curvas de nivel; el contorno negro marca los bordes.

2.5.3. Resultados numéricos comparativos

La Tabla 2.4 resume las métricas del barrido para los cuatro casos con los parámetros de la Tabla 2.1.

La discrepancia círculo/politopo en $\mathbf{u}^*$ presenta un promedio menor en estado que en entrada, coherente con el error relativo e_r más bajo del dodecágono (3,4%) frente al hexágono (13,4%).

Tabla 2.4: Métricas del barrido *offline*

Métrica	Casos A–B (entrada)	Casos C–D (estado)
Error e_r	13,4 %	3,4 %
máx $\ \mathbf{u}_{\text{PWA}}^* - \mathbf{u}_{\text{QP}}^*\ _2$	$7,2 \times 10^{-6}$	$1,9 \times 10^{-2}$
Tiempo medio QCQP / QP (ms)	7,1 / 0,78	8,1 / 0,84

2.6. Validación de solvers y costo computacional

Esta sección valida la consistencia entre solvers del Caso B (fmincon y CVX) y cuantifica el costo del barrido frente al QP politópico del Caso A.

2.6.1. Convergencia entre solvers

Se verifica que fmincon (*interior-point* sobre el QCQP) y CVX (formulación SOCP) convergen a la misma solución. El barrido utiliza fmincon por eficiencia; CVX actúa como referencia en una submuestra de 200 puntos. El error absoluto máximo entre ambos fue $4,87 \times 10^{-5}$, con promedio $7,89 \times 10^{-6}$, dentro de las tolerancias numéricas (OptimalityTol = 10^{-6} , StepTolerance = 10^{-8}).

La elección de fmincon sobre CVX se fundamenta en la naturaleza del problema de optimización. Mientras que CVX está diseñado específicamente para problemas convexos (como SOCP o QCQP) y requiere que la estructura del problema (por ejemplo, la semidefinición positiva de la matriz $\mathbf{H}$) se mantenga constante o verificable para garantizar la convexidad, fmincon ofrece la flexibilidad necesaria para tratar el problema como una optimización no lineal general (NLP).

2.6.2. Comparación de tiempos

La ventaja computacional del politopo se evalúa resolviendo el Caso A con quadprog (*active-set*). Se realizó un estudio complementario con $N_p = 10$ y grilla $N_g = 40$ (3600 QPs), cuyos resultados se pueden observar en la Figura 2.5.

Tabla 2.5: Costo computacional del barrido *offline*.

Caso	Total (s)	Por QP (ms)	Tipo
Círculo (fmincon)	41,6	26,0	QCQP
Círculo (CVX, est.)	≈ 689	≈ 431	SOCP
Politópico $N = 4$	0,9	0,6	QP lineal
Politópico $N = 8$	0,8	0,5	QP lineal
Politópico $N = 16$	1,0	0,6	QP lineal

Para la configuración principal ($N_p = 3$, $N_g = 60$), el barrido completo demandó 37,6 s con fmincon (10,5 ms por QCQP del Caso B) frente a 2,3 s con quadprog (0,63 ms por QP del Caso A), ratio $\approx 16,5\times$. La elección $N = 16$ ofrece $e_r < 2\%$ con tiempo muy inferior al QCQP.

2.7. Ley de control explícita PWA vía condiciones KKT

Los Casos A y C son programas cuadráticos multiparamétricos (mpQP) con parámetro $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ [3, 8]. En ambos la decisión condensada es $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_u N_p}$, el gradiente del costo es afín en el parámetro,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{F}_f \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0, \quad \mathbf{F}_f = \mathbf{\Gamma}^\top \bar{\mathbf{Q}} \Phi, \quad \mathbf{f}_0 = -\mathbf{\Gamma}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x}_{\text{ref}, N_p}, \quad (2.20)$$

y la diferencia estructural entre entrada y estado predicho reside en cómo la geometría politópica se escribe sobre $\mathbf{U}$: en el Caso A el lado derecho de las desigualdades es constante; en el Caso C depende de $\mathbf{x}_0$, replicando el mpQP del dodecágono en $\mathbf{i}_{f, \text{pred}}$ del Capítulo 5.

2.7.1. Condiciones KKT con restricción en la entrada (Caso A)

El Caso A (2.13) impone el hexágono inscrito sobre cada $\mathbf{u}_j$ del horizonte. Apilando las $N^a N_p = 18$ restricciones:

$$\min_{\mathbf{U}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{U}^\top \mathbf{H} \mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{U} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{A}_{\text{in}} \mathbf{U} \leq \mathbf{b}_{\text{in}}, \quad (2.21)$$

con $\mathbf{A}_{\text{in}} = \mathbf{I}_{N_p} \otimes \mathbf{H}_{\mathcal{P}}$ y $\mathbf{b}_{\text{in}} = \mathbf{1}_{N_p} \otimes \mathbf{b}_{\mathcal{P}}$. Como $\mathbf{b}_{\text{in}}$ no depende de $\mathbf{x}_0$, el problema adopta la forma estándar.

Denótese por $\mathcal{A}(\mathbf{x}_0) \subseteq \{1, \dots, N^c N_p\}$ el conjunto activo en un punto del espacio de parámetros. El Lagrangiano del subproblema con $\mathcal{A}$ fijo es

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}}; \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^\top \mathbf{H} \mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}}^\top (\mathbf{b}_{\mathcal{A}} - \mathbf{A}_{\mathcal{A}} \mathbf{U}), \quad (2.22)$$

donde $(\mathbf{A}_{\mathcal{A}}, \mathbf{b}_{\mathcal{A}})$ selecciona las filas activas de $(\mathbf{A}_{\text{in}}, \mathbf{b}_{\text{in}})$. Las condiciones KKT son, en cada región donde $\mathcal{A}$ permanece constante:

$$\mathbf{H} \mathbf{U}^* + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^\top \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{A}_{\mathcal{A}} \mathbf{U}^* = \mathbf{b}_{\mathcal{A}}, \quad (2.24)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} \geq \mathbf{0}, \quad (2.25)$$

con complementariedad $\lambda_j (b_{\mathcal{A},j} - \mathbf{A}_{\mathcal{A},j} \mathbf{U}^*) = 0$. Sustituyendo (2.20) en (2.23) y resolviendo el sistema lineal $(\mathbf{H}, \mathbf{A}_{\mathcal{A}})$, $\mathbf{U}^*$ resulta afín en $\mathbf{x}_0$ aunque las restricciones no lo sean: el acoplamiento paramétrico entra solo por $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

2.7.2. Condiciones KKT con restricción en el estado predicho (Caso C)

En el Caso C la envolvente politópica actúa sobre $\mathbf{x}_j = \Phi_j \mathbf{x}_0 + \Gamma_j \mathbf{U}$ (Sección 2.4). Sustituyendo (2.17) en todas las etapas del horizonte se obtiene

$$\min_{\mathbf{U}} \frac{1}{2} \mathbf{U}^\top \mathbf{H} \mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{U} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{A}_{\text{st}} \mathbf{U} \leq \mathbf{b}_0 + \mathbf{E} \mathbf{x}_0, \quad (2.26)$$

con $N^c N_p = 36$ desigualdades para el dodecágono ($N^c = 12$, $N_p = 3$). Las matrices condensadas son

$$\mathbf{A}_{\text{st}} = (\mathbf{I}_{N_p} \otimes \mathbf{H}_p) \Gamma, \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{1}_{N_p} \otimes \mathbf{b}_p, \quad \mathbf{E} = -(\mathbf{I}_{N_p} \otimes \mathbf{H}_p) \Phi. \quad (2.27)$$

Así, cada fila j impone $\mathbf{H}_p(\Phi_j \mathbf{x}_0 + \Gamma_j \mathbf{U}) \leq \mathbf{b}_p$: el estado medido desplaza el lado derecho del politópo en el espacio de decisiones $\mathbf{U}$, análogo a $\mathbf{H}_{if} \mathbf{C}_{if}(\Phi \mathbf{x}_{0h} + \Gamma \mathbf{U}) \leq \mathbf{b}_{if}$ en el convertidor.

Con el mismo conjunto activo $\mathcal{A}(\mathbf{x}_0) \subseteq \{1, \dots, N^c N_p\}$, el Lagrangiano y las condiciones KKT generalizan (2.23)–(2.25):

$$\mathbf{H} \mathbf{U}^* + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^\top \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{A}_{\mathcal{A}} \mathbf{U}^* = \mathbf{b}_{\mathcal{A}} + \mathbf{E}_{\mathcal{A}} \mathbf{x}_0, \quad (2.29)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} \geq \mathbf{0}, \quad (2.30)$$

con complementariedad $\lambda_j(\mathbf{A}_{\mathcal{A},j} \mathbf{U}^* - b_{\mathcal{A},j} - \mathbf{E}_{\mathcal{A},j} \mathbf{x}_0) = 0$. La presencia de $\mathbf{E}_{\mathcal{A}} \mathbf{x}_0$ en (2.29) es la firma del mpQP en estado: tanto el costo como el conjunto factible varían con el parámetro, y los hiperplanos de conmutación dependen de $\mathbf{x}_0$ incluso cuando $\mathcal{A}$ es constante en una región.

2.7.3. Regiones críticas y ley PWA explícita

En ambos casos, despejando (2.28)–(2.29) (o (2.23)–(2.24) cuando $\mathbf{E} = \mathbf{0}$) sobre un conjunto activo fijo se obtiene $\mathbf{U}^*(\mathbf{x}_0)$ afín en el parámetro. La primera acción de control aplicada se extrae con $\mathbf{S}_u = [\mathbf{I}_2 \ \mathbf{0}]$:

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0) = \mathbf{S}_u \mathbf{U}^*(\mathbf{x}_0) = \mathbf{F}_i \mathbf{x}_0 + \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}_i. \quad (2.31)$$

El dominio $\mathbb{R}^2$ se particiona en poliedros convexos separados $\{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^M$; cada cambio en $\mathcal{A}$ introduce un hiperplano de conmutación y un pliegue en $u_1^*(x_1, x_2)$. En el Caso A los pliegues reflejan la saturación del hexágono en (u_1, u_2) ; en el Caso C, la activación del dodecágono sobre la trayectoria predicha $\mathbf{x}_j$, filtrada por Γ_j hacia el espacio de entrada.

2.7.4. Procedimiento de identificación

El procedimiento implementado en MATLAB se formaliza en el Algoritmo 1. Para el Caso A se evalúan $(\mathbf{A}_{\text{in}}, \mathbf{b}_{\text{in}})$; para el Caso C, $(\mathbf{A}_{\text{st}}, \mathbf{b}_0, \mathbf{E})$ de (2.27). En el Capítulo 5 se

Tabla 2.6: Contraste de las condiciones KKT: Caso A (entrada) y Caso C (estado predicho).

Aspecto	Caso A (entrada)	Caso C (estado)
Restricción condensada	$\mathbf{A}_{\text{in}} \mathbf{U} \leq \mathbf{b}_{\text{in}}$	$\mathbf{A}_{\text{st}} \mathbf{U} \leq \mathbf{b}_0 + \mathbf{E} \mathbf{x}_0$
Matriz $\mathbf{E}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{E} = -(\mathbf{I}_{N_p} \otimes \mathbf{H}_p) \Phi$
Facetas apiladas	$N^a N_p = 18$	$N^c N_p = 36$
KKT primal activo	$\mathbf{A}_{\mathcal{A}} \mathbf{U}^* = \mathbf{b}_{\mathcal{A}}$	$\mathbf{A}_{\mathcal{A}} \mathbf{U}^* = \mathbf{b}_{\mathcal{A}} + \mathbf{E}_{\mathcal{A}} \mathbf{x}_0$
Analogía DER	Hexágono en $\mathbf{v}_s$	Dodecágono en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$

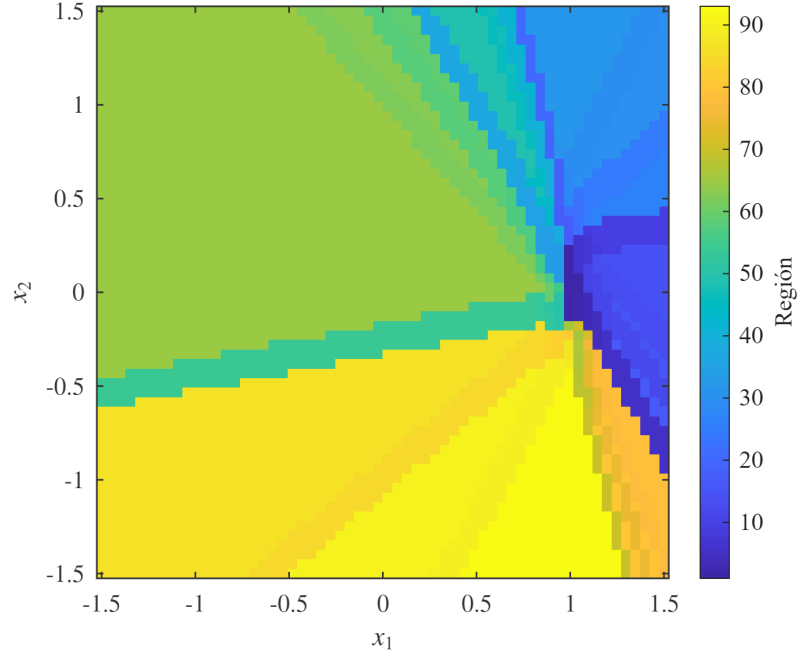


Figura 2.7: Partición PWA del Caso A en entrada (93 regiones, hexágono).

reutiliza la misma lógica sobre el mpQP del convertidor, sustituyendo el barrido denso por enumeración algebraica con MPT3.

El barrido del Caso A identifica 93 regiones críticas (hexágono $N^a = 6$, $N_p = 3$), con $\max \|\mathbf{u}_{\text{PWA}}^* - \mathbf{u}_{\text{QP}}^*\|_2 = 7,2 \times 10^{-6}$ sobre puntos aleatorios. El Caso C produce 46 regiones en la misma resolución de grilla, con error máximo $1,9 \times 10^{-2}$ (Tabla 2.4). La ley politópica admite regiones PWA finita en ambos casos; los Casos B y D circulares no, lo que motiva la Sección 2.8.

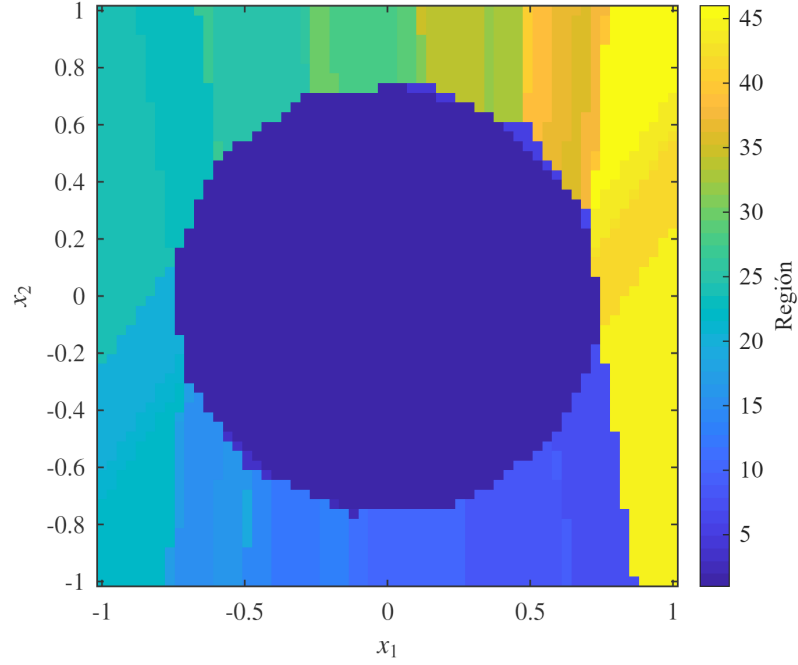


Figura 2.8: Partición PWA del Caso C en estado predicho (46 regiones, dodecágono).

Algorithm 1 Identificación PWA del Caso A; el Caso C sustituye $(\mathbf{A}_{\text{in}}, \mathbf{b}_{\text{in}})$ por $(\mathbf{A}_{\text{st}}, \mathbf{b}_0, \mathbf{E})$.

Require: Matrices $(\mathbf{H}, \mathbf{A}_{\text{in}}, \mathbf{b}_{\text{in}}, \mathbf{F}_f, \mathbf{f}_0)$; grilla $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ de $N_g \times N_g$ puntos; tolerancia τ_{act}

Ensure: Partición $\{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^M$ y leyes $(\mathbf{F}_i, \mathbf{g}_i)$ con $\mathbf{u}^* = \mathbf{F}_i \mathbf{x}_0 + \mathbf{g}_i$

- 1: **for** cada $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{G}$ **do**
 - 2: $\mathbf{f} \leftarrow \mathbf{F}_f \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0$
 - 3: $\mathbf{U}^* \leftarrow$ solución del QP condensado $(\mathbf{H}, \mathbf{f}, \mathbf{A}_{\text{in}}, \mathbf{b}_{\text{in}})$
 - 4: $\mathcal{A}(\mathbf{x}_0) \leftarrow \{j : (\mathbf{A}_{\text{in}} \mathbf{U}^*)_j \geq b_{\text{in},j} - \tau_{\text{act}}\}$
 - 5: **end for**
 - 6: Agrupar puntos de $\mathcal{G}$ con el mismo patrón $\mathcal{A}$
 - 7: **for** cada grupo i con conjunto activo fijo **do**
 - 8: Reconstruir $(\mathbf{F}_i, \mathbf{g}_i)$ por KKT, o mínimos cuadrados sobre $\mathbf{u}_0^* = \mathbf{S}_u \mathbf{U}^*$
 - 9: **end for**
 - 10: Validar $\|\mathbf{u}_{\text{PWA}}^* - \mathbf{u}_{\text{QP}}^*\|_2$ en puntos *hold-out* intermedios de $\mathcal{G}$
 - 11: **return** $\{\mathcal{R}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{g}_i\}_{i=1}^M$
-

2.8. Aproximación ReLU de la ley circular

El Caso B (o D) preserva fidelidad geométrica pero requiere QCQP en cada punto del barrido. El Caso A (o C) es eficiente y PWA-exacto, pero introduce un error e_r y pliegues. Una tercera vía entrena *offline* una red ReLU sobre la ley circular del Caso B (o D), obteniendo resultados en microsegundos, una vez entrenada.

Dos observaciones motivan el enfoque. Primero, una ley suave como la del Caso B es más fácil de aproximar con ReLU que una PWA con pliegues pronunciados. Segundo, el *target* de entrenamiento debe ser la ley circular, no la politópica: entrenar sobre el Caso A propaga el error geométrico $e_r(N)$.

2.8.1. Función de activación ReLU

La red es *feedforward*: capas ocultas con ReLU y salida lineal. Para preactivación $z \in \mathbb{R}$:

$$\sigma(z) = \max(0, z) = \begin{cases} z, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

Cada neurona introduce un hiperplano $z_j = 0$; la composición genera una función afín por partes. Matemáticamente, una red ReLU es homóloga a una ley PWA como (2.31): ambas son lineales por tramos sobre una partición del dominio. La diferencia es de origen y de regularidad. La PWA exacta del Caso A o C (Sección 2.7) fija cada región $\mathcal{R}_i$ y cada par $(\mathbf{F}_i, \mathbf{g}_i)$ mediante el conjunto activo KKT; los pliegues coinciden con facetas del politopo y pueden ser numerosos (93/46 regiones en la grilla). La red ReLU aprende su partición por gradiente sobre la ley circular (Casos B/D): tiende a producir menos pliegues abruptos y a suavizar la aproximación, a costa de no ser exacta en todo el dominio (especialmente en los bordes).

2.8.2. Conjunto de datos y entrenamiento

$$\mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{x}_0^{(i)}, u_{1,\text{circ}}^{\star(i)}) \right\}_{i=1}^{N_g^2}, \quad N_g = 60, \quad (2.33)$$

donde $u_{1,\text{circ}}^{\star}$ proviene del barrido del Caso B (o Caso D) y $u_{1,\text{pol}}^{\star}$ del politopo homólogo se mantiene solo como punto de comparación. El mapeo es $\hat{u}_1 = g_{\Theta}(\mathbf{x}_0)$. Se entrena una red ReLU sobre $\mathcal{D}$ y se selecciona la configuración de menor error cuadrático medio (MSE) MSE_{NN} .

2.8.3. Equivalencia ReLU–PWA, inferencia y función de costo

Fijado un patrón de activación, una red ReLU se reduce localmente a una función afín sobre una región poliédrica, igual que una ley PWA:

$$\hat{u}_1(\mathbf{x}_0; \Theta) = \mathbf{w}^{(L)\top} \sigma(\dots \sigma(\mathbf{W}^{(1)} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}^{(1)}) \dots) + b^{(L)} = \mathbf{f}_\ell^\top \mathbf{x}_0 + g_\ell, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}_\ell. \quad (2.34)$$

A diferencia de la PWA del Caso A/C (Sección 2.7), las regiones $\mathcal{S}_\ell$ no provienen de conjuntos activos KKT, sino que emergen del entrenamiento al desplazar los hiperplanos $z_j = 0$. Una vez obtenidos los pesos Θ , la evaluación en línea es el *forward pass* del Algoritmo 2: productos matriz–vector y ReLU, sin solver iterativo.

El entrenamiento *offline* busca que g_Θ reproduzca la ley circular del barrido. Se minimiza el error cuadrático medio sobre $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{L}(\Theta) = \frac{1}{N_g^2} \sum_{i=1}^{N_g^2} \left\| g_\Theta(\mathbf{x}_0^{(i)}) - u_{1,\text{circ}}^{*(i)} \right\|_2^2, \quad (2.35)$$

con $\Theta = \{(\mathbf{W}^{(\ell)}, \mathbf{b}^{(\ell)})\}_{\ell=1}^L$. La red debe aproximar $u_{1,\text{circ}}^*$, no $u_{1,\text{pol}}^*$. En la implementación MATLAB se emplea Adam con partición aleatoria 80%/20% entrenamiento/validación, *early stopping* sobre el MSE de validación y selección de la arquitectura de menor MSE_{NN} en la grilla completa.

Tras el entrenamiento, las métricas de evaluación comparan la red frente al círculo y al politópico sobre la misma grilla:

$$\text{MSE}_{\text{NN}} = \frac{1}{N_g^2} \sum_{i=1}^{N_g^2} (\hat{u}_1^{(i)} - u_{1,\text{circ}}^{*(i)})^2, \quad \text{MSE}_{\text{pol}} = \frac{1}{N_g^2} \sum_{i=1}^{N_g^2} (u_{1,\text{pol}}^{*(i)} - u_{1,\text{circ}}^{*(i)})^2, \quad (2.36)$$

y el cociente $\text{MSE}_{\text{pol}}/\text{MSE}_{\text{NN}}$ cuantifica si la red supera al politóp inscrito como emulador de la ley circular. Nótese que MSE_{NN} se reporta sobre la grilla total (incluye entrenamiento y validación) una vez fijada la arquitectura ganadora.

Algorithm 2 Inferencia ReLU del mapeo $\mathbf{x}_0 \mapsto \hat{u}_1$

Require: Pesos entrenados $\{(\mathbf{W}^{(\ell)}, \mathbf{b}^{(\ell)})\}_{\ell=1}^L$; estado medido $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$

Ensure: Primera acción predicha $\hat{u}_1 \in \mathbb{R}$

```

1:  $\mathbf{a}^{(0)} \leftarrow \mathbf{x}_0$ 
2: for  $\ell = 1, \dots, L - 1$  do
3:    $\mathbf{z}^{(\ell)} \leftarrow \mathbf{W}^{(\ell)} \mathbf{a}^{(\ell-1)} + \mathbf{b}^{(\ell)}$ 
4:    $\mathbf{a}^{(\ell)} \leftarrow \text{máx}(0, \mathbf{z}^{(\ell)})$  ▷ ReLU,  $\sigma(\cdot)$  elemento a elemento
5: end for
6:  $\hat{u}_1 \leftarrow \mathbf{w}^{(L)\top} \mathbf{a}^{(L-1)} + b^{(L)}$  ▷ Capa de salida lineal escalar
7: return  $\hat{u}_1$ 

```

2.8.4. Resultados red ReLU

La red ReLU alcanza en el par A–B $\text{MSE}_{\text{NN}} = 1,37 \times 10^{-3}$ frente a $\text{MSE}_{\text{pol}} = 7,15 \times 10^{-2}$ ($\text{MSE}_{\text{pol}}/\text{MSE}_{\text{NN}} \approx 52$). En el par C–D se obtiene $\text{MSE}_{\text{NN}} = 3,63 \times 10^{-3}$ y $\text{MSE}_{\text{pol}} = 4,50 \times 10^{-2}$ (ratio ≈ 12), confirmando que la aproximación neuronal supera al politópo en base al MSE obtenido en ambos escenarios.

La Figura 2.9 y la Figura 2.10 extienden la comparación visual a la restricción sobre entradas y estados predichos; el Algoritmo 2 resume la inferencia en línea una vez entrenados los pesos.

2.9. Síntesis y puente hacia el sistema DER

La Tabla 2.7 resume la correspondencia entre el prototipo y el convertidor DER.

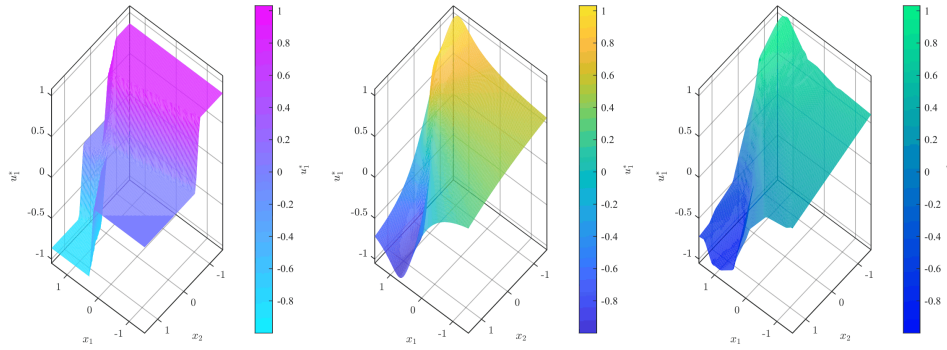
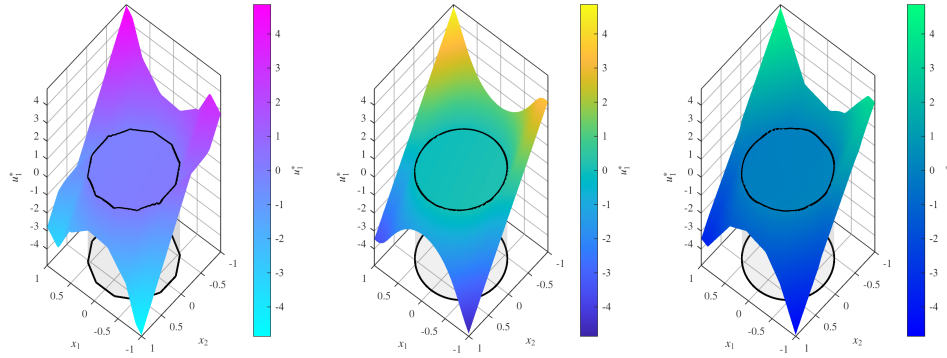
En síntesis, el prototipo demuestra que:

- los cuatro casos (Tabla 2.2) cubren la tensión politópico/circular en entrada y en estado predicho;
- el Caso C reproduce la estructura mpQP del dodecágono en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ con $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$;
- los Casos A–B permiten visualizar la holgura $\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}_N$ y la partición PWA exacta del hexágono;
- el Caso B (y D) circular no admite PWA finita equivalente; la ley suave se aproxima con ReLU mejor que con el politópico rígido;
- la red ReLU alcanza $\text{MSE}_{\text{NN}} \ll \text{MSE}_{\text{pol}}$ con inferencia mínima (ratios ≈ 52 en entrada y ≈ 12 en estado).

Los Capítulos 3–6 generalizan esta cadena al bucle de nivel cero del convertidor DER.

Tabla 2.7: Correspondencia entre los cuatro casos del prototipo y el sistema DER.

Aspecto	Prototipo	Sistema DER
Planta	Masa-resorte, $n_x = 2$	Filtro LCL, $n_x = 4$
Caso A / C	Politopo inscrito en $\mathbf{u}_j$ o $\mathbf{x}_j$	Dodecágono $N = 12$ en $\mathbf{i}_f$
Caso B / D	$\ \mathbf{u}_j\ _2$ o $\ \mathbf{x}_j\ _2 \leq r$ (QCQP)	$\ \mathbf{i}_{f,\text{pred},j}\ _2 \leq i_b$ (SOCP)
Restricción en entrada	Casos A–B	Hexágono rotatorio en $\mathbf{v}_s$
mpQP (Caso C)	$\mathbf{A}_{\text{st}}\mathbf{U} \leq \mathbf{b}_0 + \mathbf{E}\mathbf{x}_0$	Igual + holgura <i>soft</i>
PWA vía KKT	93 / 46 regiones (Casos A / C)	44 regiones en $\mathbb{R}^4$ (Cap. 5)
ReLU	Aproximación sobre ley circular (B / D)	Sobre ley circular del convertidor

Figura 2.9: Superficies $u_1^*(x_1, x_2)$: Caso A politópico, Caso B circular y red ReLU entrenada sobre el Caso B.Figura 2.10: Superficies $u_1^*(x_1, x_2)$ con restricción en estado predicho: Caso C politópico, Caso D circular y red ReLU entrenada sobre el Caso D. En la base de cada panel se indica la restricción (círculo o politopo inscrito).

MODELADO DEL SISTEMA DER EN MICRORRED AC

Este capítulo presenta el modelo matemático que caracteriza la interacción dinámica entre una unidad de recurso energético distribuido (DER) y el resto de una microrred de corriente alterna. El desarrollo sigue la formulación de Ignacio A. [1] y los principios desarrollados en Capítulo 2, en la cual la incorporación explícita de las dinámicas del filtro inductor-capacitor-inductor (LCL) no solo mejora el desempeño del control, sino que también facilita la sincronización directa de la unidad con la microrred, eliminando la necesidad de un lazo de seguimiento de fase (PLL) externo.

El modelo completo admite una arquitectura de control en cascada con lazo de nivel cero (regulación de voltaje en el filtro) y lazo primario (regulación de corriente inyectada e interacción con la red). Para el alcance de este documento, se adopta únicamente el bucle de nivel cero sobre el filtro LCL discretizado. El lazo primario y la estimación del ángulo de fase δ se presentan como contexto teórico, pero no se implementan en las simulaciones posteriores.

El capítulo se organiza de la siguiente manera: la Sección 3.1 describe el circuito equivalente y la dinámica en coordenadas abc ; la Sección 3.2 introduce el marco estacionario $\alpha\beta$ y la restricción hexagonal del inversor; la Sección 3.3 desarrolla el modelo en coordenadas síncronas dq ; la Sección 3.4 presenta el desacoplamiento en submodelos; la Sección 3.5 define las restricciones operativas relevantes para el estudio comparativo; y la Sección 3.6 obtiene el modelo lineal discreto del filtro, base del control predictivo cuyos resultados comparativos se reportan en el Capítulo 4.

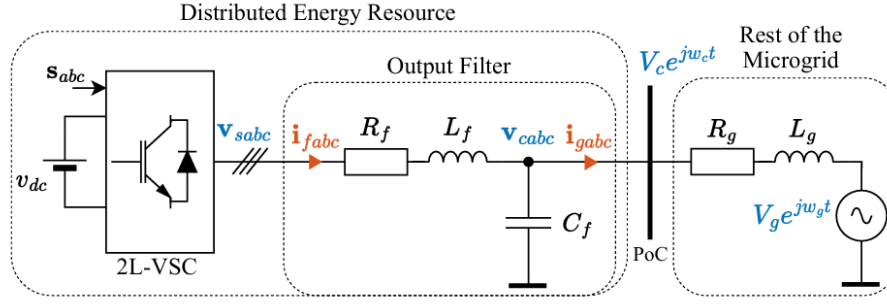


Figura 3.1: Circuito equivalente de una unidad DER conectada a una microrred AC. Extraído de [1].

3.1. Circuito equivalente y dinámica en coordenadas abc

La interacción DER–microrred se representa mediante el circuito de la Figura 3.1. La unidad DER comprende una interfaz de electrónica de potencia conformada por un convertidor de fuente de voltaje de dos niveles (2L-VSC), alimentado por un enlace de corriente continua de voltaje v_{dc} , seguido de un filtro LCL con parámetros $\{R_f, L_f, C_f\}$. La letra LCL alude a la secuencia inductor–capacitor–inductor: el primer inductor corresponde al filtro del convertidor, el capacitor define el voltaje en el Punto de Acoplamiento (PoC), y el segundo inductor modela la impedancia de acoplamiento con la red.

El resto de la microrred se representa mediante un modelo dinámico agrupado (*lumped model*) que actúa como una fuente de voltaje trifásica equivalente, cuya amplitud y frecuencia son variables de entrada ajustables. Esta fuente se conecta al PoC a través de una impedancia en serie $\{R_g, L_g\}$, determinada principalmente por la impedancia de cortocircuito del transformador de interfaz. Bajo este esquema, tanto el voltaje del PoC como el de la red se tratan como osciladores, de modo que el ángulo de fase dinámico entre ambos puede integrarse como variable de estado del sistema.

3.1.1. Ecuaciones diferenciales en el marco natural

Las dinámicas físicas en el marco de referencia natural abc se describen mediante el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales continuas:

$$\frac{d\mathbf{i}_f^{abc}}{dt} = -\frac{R_f}{L_f}\mathbf{i}_f^{abc} - \frac{1}{L_f}\mathbf{v}_c^{abc} + \frac{1}{L_f}\mathbf{v}_s^{abc} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_c^{abc}}{dt} = \frac{1}{C_f}\mathbf{i}_f^{abc} - \frac{1}{C_f}\mathbf{i}_g^{abc} \quad (3.2)$$

$$\frac{d\mathbf{i}_g^{abc}}{dt} = -\frac{R_g}{L_g}\mathbf{i}_g^{abc} + \frac{1}{L_g}\mathbf{v}_c^{abc} - \frac{1}{L_g}\mathbf{v}_g^{abc} \quad (3.3)$$

donde la notación para una señal trifásica arbitraria se define en forma vectorial como $\mathbf{x}^{abc} = [x_a \ x_b \ x_c]^T \in \mathbb{R}^3$. Se asume ausencia de modo común, es decir, $x_a + x_b + x_c = 0$. En este contexto, $\mathbf{i}_f^{abc}$ denota la corriente del inductor del filtro, $\mathbf{v}_c^{abc}$ es el voltaje en el capacitor (equivalente al voltaje en el PoC), $\mathbf{v}_s^{abc}$ es el voltaje aplicado por el inversor, $\mathbf{i}_g^{abc}$ es la corriente inyectada a la red, y $\mathbf{v}_g^{abc}$ representa el voltaje del modelo agrupado de la microrred, tratado como señal exógena.

3.1.2. Modelo de conmutación del inversor

El modelo considera la naturaleza discreta de los niveles de voltaje generados a la salida del inversor. Para ello, se define el estado de conmutación trifásico como $\mathbf{s}_{abc} = [S_a \ S_b \ S_c]^T \in \{0, 1\}^3$, donde S_a , S_b y S_c representan los estados lógicos de encendido y apagado de los interruptores de cada fase del convertidor 2L-VSC. El voltaje aplicado por el inversor queda dado por

$$\mathbf{v}_s^{abc} = v_{dc} \mathbf{s}_{abc}. \quad (3.4)$$

3.2. Representación en el marco estacionario $\alpha\beta$

Para analizar las limitaciones físicas del voltaje que puede aplicar el inversor, el modelo se transforma al marco estacionario complejo $\alpha\beta$ mediante la transformada de Clarke, la cual proyecta una señal trifásica del marco abc sobre un plano bidimensional:

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}_{T_{\alpha\beta}^{abc}} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Utilizando notación compleja, el vector espacial se expresa como $x_{\alpha\beta} = x_\alpha + jx_\beta \equiv \|x_{\alpha\beta}\|_2 e^{j\theta_x(t)}$, con $\theta_x(t) = \theta_x(0) + \int_0^t \omega_x(\eta) d\eta$ y $\omega_x = d\theta_x/dt$. Dado que la transformación de Clarke consiste en una premultiplicación por la matriz constante $T_{\alpha\beta}^{abc}$, la estructura diferencial del modelo se conserva en el marco $\alpha\beta$.

3.2.1. Vectores espaciales y restricción hexagonal

La utilidad principal del marco $\alpha\beta$ es la representación geométrica del voltaje de entrada. El vector espacial del voltaje aplicado por el inversor puede expresarse en función de las señales de compuerta como

$$\mathbf{V} = \frac{2}{3} v_{dc} (S_a + a S_b + a^2 S_c), \quad \text{con } a = e^{j(2\pi/3)}. \quad (3.6)$$

Para la topología 2L-VSC, esta relación produce siete vectores espaciales distintos en el plano $\alpha\beta$. Geométricamente, los extremos de estos vectores forman un hexágono que define

la restricción politópica física dura (*hard constraint*) del voltaje máximo que el inversor puede suministrar.

Para garantizar operación libre de distorsión armónica, el vector de voltaje de referencia debe mantenerse dentro de este límite hexagonal. Bajo condiciones ideales, el vector traza una trayectoria circular continua contenida en el polígono. En la práctica, para maximizar el rango de operación lineal y aprovechar mejor el bus de continua, se emplea modulación PWM con inyección de secuencia cero (*min-max injection*). Esta técnica permite que el índice de modulación m opere sin distorsión hasta

$$m = \frac{V_s}{v_{dc}/2} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad (3.7)$$

lo que habilita hasta un 15,47% de sobremodulación libre de distorsión respecto al rango lineal $m \leq 1$.

3.3. Representación en el marco síncrono dq

Para simplificar el análisis y habilitar técnicas de control de tipo continuo, se combina la transformación de Clarke con la transformada de Park, que mapea un vector del marco $\alpha\beta$ hacia un marco rotatorio dq alineado con un vector de referencia:

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{T_{dq}^{\alpha\beta}} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

En este documento, el marco dq gira a frecuencia angular ω_c y se orienta con el ángulo del voltaje en el PoC, definido como $\theta_c(t) = \theta_c(0) + \int_0^t \omega_c(\eta) d\eta$. Bajo esta alineación, el voltaje del PoC en el marco rotatorio se simplifica a $\mathbf{v}_c^{dq} = v_{cd} + jv_{cq} \equiv V_c$, dado que el control de nivel cero regula activamente $v_{cq} \rightarrow 0$. Por otro lado, el voltaje de la microrred se representa como $\mathbf{v}_g^{dq} = v_{gd} + jv_{gq} \equiv V_g e^{j\delta}$, donde el ángulo de fase dinámico se define como $\delta(t) = \theta_g(t) - \theta_c(t)$. Las frecuencias eléctricas satisfacen $\omega_c = d\theta_c/dt$ y $\omega_g = d\theta_g/dt$, de modo que la dinámica del ángulo relativo queda gobernada por $d\delta/dt = \omega_g - \omega_c$.

3.3.1. Modelo no lineal en coordenadas dq

Al aplicar las transformaciones anteriores, el modelo de interacción queda descrito por el siguiente sistema en notación compleja, con $\mathbf{i}_f^{dq} = i_{fd} + ji_{fq}$ e $\mathbf{i}_g^{dq} = i_{gd} + ji_{gq}$:

$$\frac{d\mathbf{i}_f^{dq}}{dt} = -\frac{R_f}{L_f} \mathbf{i}_f^{dq} - j\omega_c \mathbf{i}_f^{dq} - \frac{1}{L_f} \mathbf{v}_c^{dq} + \frac{1}{L_f} \mathbf{v}_s^{dq} \quad (3.9)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_c^{dq}}{dt} = \frac{1}{C_f} \mathbf{i}_f^{dq} - j\omega_c \mathbf{v}_c^{dq} - \frac{1}{C_f} \mathbf{i}_g^{dq} \quad (3.10)$$

$$\frac{d\mathbf{i}_g^{dq}}{dt} = -\frac{R_g}{L_g}\mathbf{i}_g^{dq} - j\omega_c\mathbf{i}_g^{dq} + \frac{1}{L_g}\mathbf{v}_c^{dq} - \frac{1}{L_g}\mathbf{v}_g^{dq}e^{j\delta} \quad (3.11)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_g - \omega_c. \quad (3.12)$$

El término $e^{j\delta}$ en (3.11) introduce una no linealidad relevante, al igual que los acoplamientos cruzados inducidos por los términos $j\omega_c$. Se asume que $\mathbf{i}_f^{dq}$, $\mathbf{v}_c^{dq}$ e $\mathbf{i}_g^{dq}$ son variables medibles, mientras que δ es un estado interno no medible directamente y debe ser estimado en esquemas de control completos.

3.4. Desacoplamiento en submodelos y arquitectura en cascada

Desde la perspectiva de diseño de control, resulta conveniente desacoplar el sistema global en dos submodelos. Las ecuaciones (3.9) y (3.10) definen el modelo del filtro de salida, base del lazo de control interno o de nivel cero, encargado de seguir una referencia de voltaje $\mathbf{v}_c^{dq,r}$ en el PoC. Las ecuaciones (3.11) y (3.12) conforman el modelo dinámico agrupado de la red, asociado al lazo primario responsable de seguir referencias de corriente inyectada $\mathbf{i}_g^{dq,r}$.

Esta separación justifica una arquitectura de control en cascada: el lazo de nivel cero regula el voltaje del filtro, mientras que el lazo primario modula la corriente de red y la sincronización con la microrred. En este documento, el análisis comparativo se restringe al primer lazo. El lazo primario se mantiene fuera del alcance experimental y se asume que las referencias de voltaje del PoC permanecen en su valor nominal durante el barrido *offline* del controlador predictivo.

3.5. Parámetros nominales y restricciones operativas

La Tabla 3.1 resume los parámetros del circuito y los valores nominales empleados en las simulaciones de este documento.

3.5.1. Restricciones de corriente y tensión del inversor

Por seguridad operativa, la corriente del filtro debe satisfacer la restricción circular

$$\|\mathbf{i}_f^{dq}\|_2 = \sqrt{i_{fd}^2 + i_{fq}^2} \leq i_b. \quad (3.13)$$

En implementaciones industriales y en la tesis de referencia, esta envolvente circular se aproxima frecuentemente mediante un politopo regular inscrito (por ejemplo, un dodecágono con $N = 12$) para obtener un problema de optimización lineal.

Por su parte, el voltaje aplicado por el inversor está limitado físicamente por el hexágono de vectores espaciales descrito en la Sección 3.2. En el plano dq , esta restricción se expresa

Tabla 3.1: Parámetros del sistema DER y valores nominales de operación.

Parámetro	Valor	Descripción
R_f	$0,035 \Omega$	Resistencia del filtro del convertidor
L_f	5 mH	Inductancia del filtro del convertidor
C_f	$12 \mu\text{F}$	Capacitancia del filtro (voltaje en el PoC)
R_g	$0,84 \Omega$	Resistencia de acoplamiento con la red
L_g	$3,3 \text{ mH}$	Inductancia de acoplamiento con la red
v_{dc}	300 V	Voltaje del enlace de corriente continua
v_b	$173,20 \text{ V}$	Voltaje nominal del PoC
i_b	6 A	Límite nominal de corriente del filtro
T_s	$200 \mu\text{s}$	Período de muestreo ($f_{sw} = 5 \text{ kHz}$)
ω_b, ω_g	$2\pi \cdot 50 \text{ rad/s}$	Frecuencia nominal de red y filtro

como un politopo convexo $\mathcal{U}_{vs}$ cuyo límite radial máximo admisible es

$$V_{s,\text{máx}} = \frac{2}{3} v_{dc} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 173,21 \text{ V}. \quad (3.14)$$

3.5.2. Alcance del estudio comparativo

El experimento central de este documento compara dos formulaciones del mismo controlador predictivo de nivel cero, manteniendo idéntica la restricción hexagonal en la tensión del inversor $\mathbf{v}_s$ y variando únicamente la representación geométrica del límite de corriente predicha $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ en el horizonte de predicción:

- **Caso A (círculo):** $\|\mathbf{i}_{f,\text{pred},k}\|_2 \leq i_b$, formulación SOCP/QCQP.
- **Caso B (politopo inscrito):** aproximación lineal con $N \in \{6, 12, 24\}$ (hexágono, dodecágono e icositetragono), formulación QP lineal.

El barrido comparativo y el análisis de resultados se desarrollan en el Capítulo 4.

3.6. Modelo lineal del filtro de salida para control de nivel cero

El modelo dinámico del filtro de salida, regido por las ecuaciones no lineales (3.9)–(3.10), constituye la planta del lazo de control de nivel cero. Para el diseño de controladores basados en modelos lineales, como el Control Predictivo Basado en Modelos (MPC), se requiere una representación en espacio de estados linealizada en torno a un punto de operación nominal.

3.6.1. Punto de operación y variables del modelo

El punto de equilibrio considerado corresponde a una condición intermedia entre operación como generador y como carga, con corriente de red nula ($\mathbf{i}_g^{dq} = \mathbf{0}$), corriente

del filtro nula ($\mathbf{i}_f^{dq} = \mathbf{0}$), voltaje del filtro nominal ($\mathbf{v}_c^{dq} = [v_b \ 0]^T$), frecuencia del marco $\omega_c = \omega_b$ y ángulo de fase relativo $\delta = 0$.

Bajo estas condiciones, el modelo lineal continuo se define con el vector de estados $\mathbf{x}_z = [i_{fd} \ i_{fq} \ v_{cd} \ v_{cq}]^T \in \mathbb{R}^4$, la entrada de control $\mathbf{u}_z = [v_{sd} \ v_{sq}]^T \in \mathbb{R}^2$, la perturbación medible $\mathbf{d}_z^m = [i_{gd} \ i_{gq}]^T \in \mathbb{R}^2$ y la salida regulada $\mathbf{y}_z = [v_{cd} \ v_{cq}]^T \in \mathbb{R}^2$. El sistema continuo linealizado adopta la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_z = A_z \mathbf{x}_z + B_z \mathbf{u}_z + P_z \mathbf{d}_z^m, \quad \mathbf{y}_z = C_z \mathbf{x}_z, \quad (3.15)$$

con las matrices

$$A_z = \begin{bmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & \omega_c & -\frac{1}{L_f} & 0 \\ -\omega_c & -\frac{R_f}{L_f} & 0 & -\frac{1}{L_f} \\ \frac{1}{C_f} & 0 & 0 & \omega_c \\ 0 & \frac{1}{C_f} & -\omega_c & 0 \end{bmatrix}, \quad B_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} I_2 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$P_z = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ -\frac{1}{C_f} I_2 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & I_2 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

3.6.2. Discretización y modelo predictivo

Para su implementación digital, el modelo continuo se discretiza mediante un retenedor de orden cero (ZOH) con período de muestreo T_s , obteniéndose

$$\mathbf{x}_{z,k+1} = A_{zd} \mathbf{x}_{z,k} + B_{zd} \mathbf{u}_{z,k} + P_{zd} \mathbf{d}_{z,k}^m, \quad (3.18)$$

donde $A_{zd} = e^{A_z T_s}$ y $[B_{zd} \ P_{zd}] = \int_0^{T_s} e^{A_z \tau} [B_z \ P_z] d\tau$. En la formulación adoptada en el Capítulo 4, la corriente de red $\mathbf{d}_z^m$ se trata como perturbación medible compensada mediante prealimentación, de modo que la optimización se centra en el modelo nominal (3.18).

3.6.3. Análisis dinámico en el dominio de la frecuencia

Para evaluar las características dinámicas del filtro linealizado, se define la matriz de funciones de transferencia discreta

$$G_z(z) = C_z(zI_4 - A_{zd})^{-1} B_{zd}. \quad (3.19)$$

El análisis de valores singulares de $G_z(z)$, con los parámetros de la Tabla 3.1, revela picos de resonancia en $\omega_{zr1} = 3768 \text{ rad/s}$ y $\omega_{zr2} = 4396 \text{ rad/s}$. Estas frecuencias evidencian modos oscilatorios propios del filtro LCL que el controlador de nivel cero debe atenuar activamente. Adicionalmente, los valores singulares máximo y mínimo permanecen cercanos a 0 dB en un amplio rango de frecuencias por debajo de la frecuencia de Nyquist $\omega_N = \pi/T_s$, comportamiento estudiado en [1] para el mismo conjunto de parámetros que evidencia

dichas respuestas. Con el modelo discreto del filtro y las restricciones operativas definidas, el Capítulo 4 reporta el barrido comparativo entre la restricción circular y politópicos inscritos en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$.

ANÁLISIS COMPARATIVO: RESTRICCIÓN CIRCULAR VS. POLITÓPICOS EN CORRIENTE

El Capítulo 3 presentó el modelo del filtro LCL y las restricciones operativas del bucle de nivel cero. En este capítulo se desarrolla, en primer lugar, el marco geométrico de las restricciones convexas que intervienen en el control predictivo (MPC) de nivel cero (politópicas, circulares y elípticas) y su impacto en la clase del problema de optimización y en la ley de control resultante. A continuación se reportan los resultados del barrido *offline* que compara la ley obtenida con una restricción circular exacta en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ frente a politópicos inscritos con $N \in \{6, 12, 24\}$, manteniendo fija la restricción hexagonal rotatoria sobre $\mathbf{v}_s$.

4.1. Restricciones circulares, politópicas y elípticas en el MPC

En el control predictivo (MPC) de nivel cero, las restricciones sobre variables predichas en el horizonte $k = 1, \dots, N_p$ determinan tanto la factibilidad del problema como la estructura de la ley de control óptima. Según la geometría del conjunto admisible, el problema recursivo adopta forma de programa cuadrático (QP), cuadráticamente restringido (QCQP) o de programación con restricciones de cono de segundo orden (SOCP) [2, 3]. Esta clasificación condiciona directamente el costo computacional en línea y la regularidad (suavidad o afinidad por partes) de la acción de control $\mathbf{u}^*$.

Denótese por $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ una variable predicha genérica y por $\mathcal{Z}_k$ su conjunto admisible en el paso k . El problema MPC con restricciones convexas se escribe, en forma compacta,

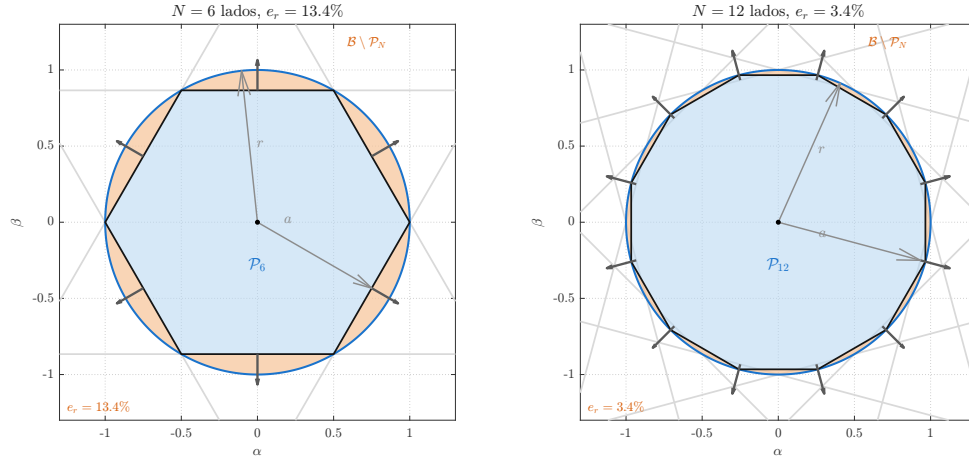


Figura 4.1: Aproximación politópica de un disco $\mathcal{B} = \{\mathbf{z} \mid \|\mathbf{z}\|_2 \leq r\}$. Las zonas anaranjadas ilustran la holgura secante entre el círculo y el politopo inscrito.

como

$$\min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{U}, \mathbf{x}_0) \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{z}_k \in \mathcal{Z}_k, \quad k = 1, \dots, N_p, \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{U}$ agrupa las acciones de control en el horizonte. La elección de $\mathcal{Z}_k$ es, por tanto, la variable de diseño central del estudio comparativo.

4.1.1. Restricción politópica

Un conjunto politópico convexo se representa mediante intersección de semiplanos:

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z} \mid \mathbf{H}\mathbf{z} \leq \mathbf{b}\}, \quad (4.2)$$

con $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times n_z}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$. Cuando $\mathcal{P}$ es un polígono regular de N lados inscrito en un disco de radio r , la construcción de semiplanos y la convergencia en sentido de Hausdorff al círculo se detallan en el Apéndice A. La holgura radial máxima entre ambas fronteras es

$$\Delta R = r \left(1 - \cos \frac{\pi}{N}\right), \quad (4.3)$$

la cual se alcanza en los puntos medios de las caras, de modo que el politopo inscrito coincide con el círculo en los vértices y resulta más restrictivo en los puntos medios de las caras.

Al ser lineales, las restricciones (4.2) mantienen el MPC como QP convexo, resoluble con un solver QP de programación cuadrática. En el marco del MPC explícito, la ley óptima adopta estructura afín por partes (PWA): cada cambio en el conjunto activo de restricciones introduce un pliegue en $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, visible como discontinuidades en las derivadas de la superficie de control. El número de restricciones crece linealmente con N y con N_p , incrementando el tamaño del problema pero preservando tiempos de resolución bajos. En contrapartida, un

politopo inscrito puede rechazar trayectorias factibles para el círculo y, en régimen saturado, producir acciones de control distintas cerca del borde admisible.

4.1.2. Restricción circular

La restricción circular (o esférica en dimensiones superiores) modela límites isotrópicos de corriente o tensión:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z} \mid \|\mathbf{z}\|_2 \leq r\} \iff \mathbf{z}^\top \mathbf{z} \leq r^2. \quad (4.4)$$

En el experimento de este documento, el Caso A impone $\|\mathbf{i}_{f,\text{pred},k}\|_2 \leq i_b$ sobre la corriente predicha del filtro en cada paso del horizonte.

La formulación (4.4) define un conjunto con frontera diferenciable; la ley de control resultante es, en general, más suave que en el caso politópico, sin los pliegues asociados a las aristas del polígono. Matemáticamente, la restricción cuadrática convierte el subproblema en QCQP o, equivalentemente, SOCP mediante la introducción de una variable auxiliar con restricción de cono [3]. Esto incrementa el costo por iteración respecto al QP lineal, como se cuantifica en la Sección 4.6. La ventaja es la fidelidad física: el círculo representa exactamente el límite de corriente, sin el error del politopo inscrito.

4.1.3. Caso general: restricciones convexas no centradas en el origen

En sistemas reales, los conjuntos admisibles rara vez están centrados en el origen del espacio de optimización. Dos extensiones relevantes para el convertidor DER son:

4.1.3.1. Elipse (o hiperelipsoide) general.

Una restricción elíptica desplazada y rotada se expresa como

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z} \mid (\mathbf{z} - \mathbf{c})^\top \mathbf{P} (\mathbf{z} - \mathbf{c}) \leq 1\}, \quad (4.5)$$

con centro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_z}$ y matriz $\mathbf{P} \succ 0$ que define la forma y orientación del conjunto. El disco (4.4) es el caso particular $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{P} = r^{-2}\mathbf{I}$. La elipse permite modelar límites anisotrópicos o desplazados del actuador, pero conduce a QCQP/SOCP al igual que la restricción circular.

4.1.3.2. Politopo afín (hexágono rotatorio de tensión).

La restricción hexagonal sobre la tensión del inversor en coordenadas de error no está centrada en el origen ni es isotrópica. En la formulación del sistema de estudio se implementa como

$$\mathbf{G}_{vc} \mathbf{T}(\theta_k) \mathbf{u}_{0h} \leq \mathbf{h}_{vc} - \mathbf{G}_{vc} (\mathbf{u}_s - \mathbf{d}_{ik}), \quad (4.6)$$

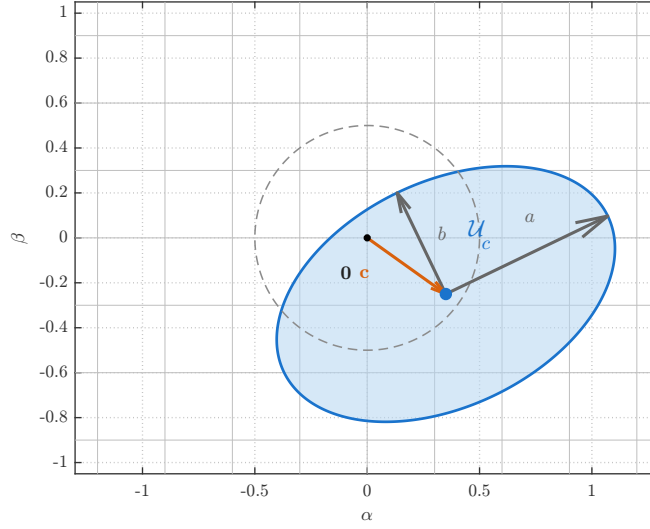


Figura 4.2: Geometría de una restricción elíptica no centrada en el origen (4.5). El círculo punteado ilustra un disco de referencia centrado.

donde $\mathbf{T}(\theta_k)$ es la matriz de rotación del marco de tensión, $\mathbf{u}_s$ es la entrada de equilibrio y $\mathbf{d}_{ik}$ la perturbación medida. Esta es una restricción politópica afín: lineal en las variables de decisión, pero desplazada y orientada según el punto de operación y el ángulo θ_k . La Figura 4.3 ilustra cómo el admisible hexagonal de $\mathbf{v}_s$ gira en el plano (v_{sd}, v_{fq}) conforme avanza θ_k , reproduciendo la parametrización empleada en el barrido angular de la Sección 4.5. Su activación dominante en dicho barrido explica por qué la geometría de $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ (circular o politópica) tiene un efecto limitado sobre $\mathbf{u}^*$ cuando el hexágono de $\mathbf{v}_s$ satura primero.

4.1.4. Comparación geométrica y computacional

La Tabla 4.1 resume las diferencias cualitativas entre las familias de restricciones. La Tabla 4.2 las ubica en el contexto del experimento de este documento.

En síntesis, la aproximación politópica sacrifica exactitud geométrica y suavidad local a cambio de eficiencia computacional; la restricción circular preserva el modelo físico isotrópico al costo de un solver más demandante. El hexágono rotatorio de tensión combina eficiencia lineal con un desplazamiento operativo que, en la práctica, puede dominar la saturación del actuador. Las secciones siguientes cuantifican estas interacciones en el barrido comparativo sobre $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$.

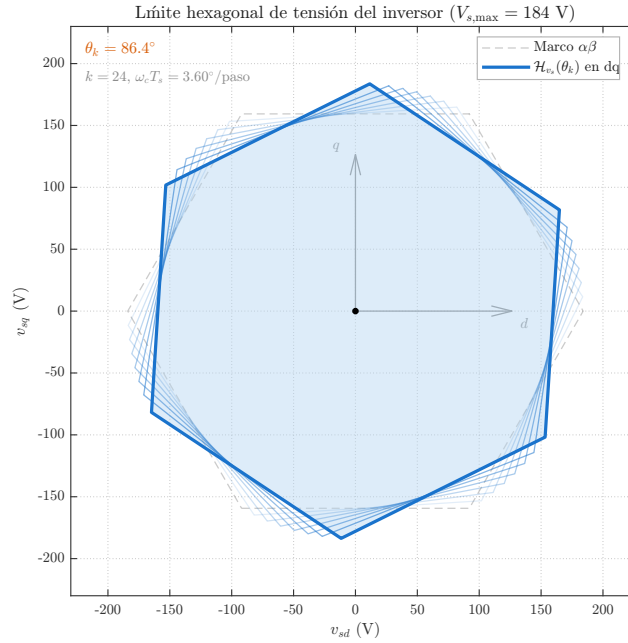


Figura 4.3: Restricción hexagonal rotatoria sobre la tensión del inversor en el marco dq . El contorno sólido corresponde a $\mathbf{G}_{vc}\mathbf{T}(\theta_k)\mathbf{u}_{0h} \leq \mathbf{h}_{vc} - \mathbf{G}_{vc}(\mathbf{u}_s - \mathbf{d}_{ik})$ para sucesivos valores de θ_k ; la referencia punteada muestra el hexágono fijo en $\alpha\beta$.

Tabla 4.1: Comparación entre restricción politópica inscrita y circular exacta.

Aspecto	Politópica inscrita	Circular exacta
Formulación	$\mathbf{H}\mathbf{z} \leq \mathbf{b}$ (lineal)	$\ \mathbf{z}\ _2 \leq r$ (cuadrática / SOCP)
Clase de problema	QP convexo	QCQP / SOCP convexo
Solver típico	Solver QP lineal	Solver SOCP/QCQP
Suavidad de $\mathbf{u}^*$	Afín por partes (pliegues)	Mayor regularidad en el interior
Conservadurismo	Sí, $\Delta R > 0$	No, borde exacto
Costo computacional	Bajo ($\sim 6-7$ ms/pt)	Alto ($\sim 170-220$ ms/pt)

4.2. Configuración experimental

En esta sección se presenta la evaluación comparativa de la ley de control del bucle de nivel cero cuando la restricción *soft* sobre la corriente predicha del filtro se formula como límite circular exacto frente a politopos regulares inscritos. A diferencia de la validación dinámica en lazo cerrado reportada en [1] para el esquema cascada completo, el presente estudio resuelve *offline* el problema de optimización MPC-Z en una grilla del plano de corriente del filtro, manteniendo fija la restricción hexagonal rotatoria sobre la tensión del

Tabla 4.2: Clasificación de las restricciones convexas en el MPC de nivel cero.

Tipo	Forma	Clase	Rol en este documento
Disco centrado	$\ \mathbf{i}_{f,\text{pred}}\ _2 \leq i_b$	QCQP/SOCP	Caso A (referencia)
Politopo inscrito	$\mathbf{H}_{if}\mathbf{i}_{f,\text{pred}} \leq \mathbf{b}_{if}$	QP	Caso B ($N \in \{6, 12, 24\}$)
Politopo afín rotatorio	$\mathbf{G}_{vc}\mathbf{T}(\theta_k)\mathbf{u}_{0h} \leq \dots$	QP	Hexágono $\mathbf{v}_s$ (Fig. 4.3)
Elipse general	$(\mathbf{z} - \mathbf{c})^\top \mathbf{P}(\mathbf{z} - \mathbf{c}) \leq 1$	QCQP/SOCP	Marco teórico (Fig. 4.2)

Tabla 4.3: Configuración del barrido comparativo offline, referencia $\theta_k = 0^\circ$

Parámetro	Valor	Descripción
Grilla	80×80	$(i_{fd}, i_{fq}) \in [-5,88, 5,88]^2$ A ($\pm 98\%$ de i_b)
Estado fijo	v_{cd}, v_{cq} en $\mathbf{x}_s$	Tensión del filtro en el punto de operación
Caso A	Círculo en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$	Solver SOCP/QCQP iterativo
Caso B	Politopo inscrito ($N = 6, 12, 24$)	Solver QP lineal
Restricción común	Hexágono en $\mathbf{v}_s$	$N = 6$, rotación $\mathbf{T}(\theta_k)$
Barrido angular	$N_\theta = 12$	θ_k cada 30°

inversor descrita en (4.6).

El controlador de nivel cero regula la tensión del filtro LCL y garantiza seguimiento sin *offset* de la referencia en el marco dq , imponiendo $v_{cd} = v_{cd}^r$ y $v_{cq} = 0$. Sobre la corriente predicha del filtro se aplica una restricción *soft* de forma circular con radio nominal i_b , análoga a la formulación (3.13) del Capítulo 3; en el Caso B dicha envolvente se aproxima mediante un politopo regular inscrito de N lados. En ambos casos, la tensión del inversor permanece sujeta al hexágono físico del 2L-VSC en el marco $\alpha\beta$, rotado en dq según el ángulo paramétrico θ_k . Los parámetros nominales del sistema (T_s , N_p , i_b , $V_{s,\text{máx}}$, $\mathbf{x}_s$, $\mathbf{u}_s$) se listan en la Tabla 3.1 del Capítulo 3; la Tabla 4.3 resume únicamente la configuración específica del barrido comparativo.

Los problemas de optimización se resuelven en MATLAB sobre el modelo discreto del filtro en coordenadas de error, con prealimentación $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{0h,0} + \mathbf{u}_s - \mathbf{d}_{ik}$. El **Caso A** (referencia) impone $\|\mathbf{i}_{f,\text{pred},k}\|_2 \leq i_b$ mediante un solver SOCP/QCQP iterativo. El **Caso B** sustituye dicha envolvente por un politopo inscrito con $N \in \{6, 12, 24\}$, resuelto como QP lineal con *active-set* y variable de holgura penalizada ($Q_\epsilon = 10^9$), en coherencia con la aproximación dodecagonal empleada en [1]. El barrido principal explora el plano (i_{fd}, i_{fq}) con $\theta_k = 0^\circ$; adicionalmente, se repite el experimento para $N_\theta = 12$ ángulos equiespaciados $\theta_k \in \{0^\circ, 30^\circ, \dots, 330^\circ\}$. Este barrido angular parametriza la familia de QPs que, en operación, instanciaría la simulación con $\theta_k = \theta_c(t_k)$, sin modelar la dinámica temporal de integración de fase.

Tabla 4.4: Resumen del barrido comparativo en el plano (i_{fd}, i_{fq}) , con $\theta_k = 0^\circ$.

N	ΔR [A]	$ \Delta \mathbf{u} _{\text{máx}}$ [V]	mean	median	$> 0,05$ V [%]
6	0,80 (13,4 %)	2,44	0,018	0,000	1,81
12	0,20 (3,4 %)	2,72	0,006	0,000	0,50
24	0,05 (0,9 %)	1,40	0,002	0,000	0,38

4.3. Resultados comparativos de la ley de control

La métrica principal de comparación es la norma 2 de la discrepancia en la primera acción de control aplicada,

$$|\Delta \mathbf{u}| = \|\mathbf{u}_{\text{poli}} - \mathbf{u}_{\text{circ}}\|_2 \quad [\text{V}], \quad (4.7)$$

donde $\mathbf{u} = [v_{sd}, v_{sq}]^\top$ denota la tensión del inversor en el marco dq . Para cada valor de N , la holgura radial del politopo inscrito respecto al disco admisible del SOCP se cuantifica mediante (4.3) con $r = i_b$; la Tabla 4.4 resume, para el corte $\theta_k = 0^\circ$, la geometría de aproximación y las estadísticas de $|\Delta \mathbf{u}|$ sobre los puntos de la grilla.

La comparación entre la restricción circular exacta y los politopos inscritos revela que la ley de control del bucle de nivel cero permanece esencialmente invariante en casi todo el dominio barrido. En los tres casos la mediana de $|\Delta \mathbf{u}|$ es nula, lo que indica que más de la mitad de los puntos de la grilla producen acciones idénticas entre el SOCP circular y el QP politópico. Las discrepancias se localizan en una fracción reducida del plano (inferior al 2 % incluso para el hexágono inscrito más conservador ($N = 6$)) y se asocian sistemáticamente a la saturación del hexágono de tensión del inversor en el cuadrante $(i_{fd}, i_{fq}) < 0$, como se cuantifica en la Sección 4.4 mediante los márgenes m_{v_s} .

En el centro de la grilla, en los vértices del admisible de corriente y en las esquinas positivas, la coincidencia entre ambas formulaciones es exacta ($|\Delta \mathbf{u}| = 0$). El punto de máxima discrepancia en los tres casos es $(-5,88, -5,88)$ A, con $|\Delta \mathbf{u}|_{\text{máx}} = 2,44$ V ($N = 6$), 2,72 V ($N = 12$) y 1,40 V ($N = 24$). Al refinar el politopo de $N = 6$ a $N = 24$, la holgura radial ΔR decrece de 0,80 A a 0,05 A y las diferencias residuales de control se atenúan, confirmando que la aproximación poligonal converge hacia la ley obtenida con el límite circular cuando la restricción de corriente deja de ser el factor limitante del problema de optimización.

En el nodo central $(i_{fd}, i_{fq}) = (-0,15, -0,15)$ A, ambas leyes producen $v_{sd} = 173,49$ V con $|\Delta \mathbf{u}| = 0$, mientras que en el borde $(-i_b, 0)$ la tensión satura en 184,00 V, valor de apotema del hexágono, sin discrepancia entre formulaciones. Estos puntos representativos confirman que la discordancia círculo/politopo no afecta el régimen interior ni la saturación pura de tensión, sino únicamente la transición en la frontera perimetral del cuadrante negativo, donde $m_{v_s} \approx 0$ y $|\Delta \mathbf{u}|$ alcanza su máximo (Tabla 4.4).

4.4. Comportamiento de las restricciones operativas

Para interpretar por qué $|\Delta \mathbf{u}|$ es nulo en la mayor parte de la grilla, se analiza la activación de las restricciones bajo la ley politópica (Caso B), con umbrales $\varepsilon_{i_f} = 0,05$ A y $\varepsilon_{v_s} = 1,0$ V. El análisis sigue la lógica empleada en [1] al evaluar la activación simultánea de la restricción *soft* en corriente y la restricción dura hexagonal en tensión, aunque aquí el estudio se realiza sobre la ley estática $u^*(i_{fd}, i_{fq})$ en lugar de una simulación temporal en lazo cerrado.

Para cada punto de la grilla y bajo la solución óptima del Caso B, se calcula el margen mínimo en el horizonte $N_p = 3$:

$$m_{\text{circ}} = \min_{k=1,\dots,N_p} (i_b - \|\mathbf{i}_{f,\text{pred},k}\|_2), \quad (4.8)$$

$$m_{\text{dodec}} = \min_{k=1,\dots,N_p} \min_j (h_j - \mathbf{H}_j \mathbf{i}_{f,\text{pred},k}), \quad (4.9)$$

$$m_{v_s} = \min_{k=1,\dots,N_p} \min_j (g_j - \mathbf{G}_{v_c,j} \mathbf{u}_{0h,k}), \quad (4.10)$$

donde $\mathbf{H}_j$, h_j y $\mathbf{G}_{v_c,j}$, g_j denotan las facetas del dodecágono de corriente y del hexágono de tensión, respectivamente. Valores de m_{circ} o m_{dodec} cercanos a cero indican saturación de la restricción de corriente; valores de m_{v_s} cercanos a cero señalan saturación del hexágono de $\mathbf{v}_s$.

La Figura 4.4 muestra los mapas espaciales de estos márgenes para el dodecágono ($N = 12$, $\theta_k = 0^\circ$). En el panel de m_{v_s} , la franja oscura del cuadrante $(i_{fd}, i_{fq}) < 0$ coincide con la zona donde $|\Delta \mathbf{u}|$ es no nulo (Sección 4.3): el hexágono de tensión limita la acción de control antes de que la corriente predicha se acerque al borde i_b . Los paneles de m_{circ} y m_{dodec} permanecen elevados en casi todo el dominio (mediana ~ 3 A y $\sim 2,9$ A, respectivamente), confirmando que la restricción de corriente no constituye el cuello de botella del optimizador.

La Tabla 4.5 resume la fracción de puntos con restricciones activas y los márgenes agregados m_{circ} , m_{poli} y m_{v_s} bajo la ley politópica para los tres valores de N . El hexágono de tensión del inversor permanece activo en el 84,12 % de los puntos en el corte $\theta_k = 0^\circ$, mientras que la restricción de corriente, tanto circular como politópica, apenas se activa ($< 0,5$ %). El margen típico de corriente ($m_{\text{circ}} \sim 3$ A) confirma que la trayectoria predicha opera lejos del borde i_b en la mayoría de los puntos, mientras que m_{v_s} presenta mediana nula, coherente con la activación del hexágono de tensión y con el mapa de la Figura 4.4.

La corona teórica $\|\mathbf{i}_{f,\text{pred}}\| \in [R_{\text{insc}}, i_b]$, única región donde círculo y politopo difieren geoméricamente, nunca coincide con la activación exclusiva del círculo: la zona de discordancia posible permanece vacía en los tres casos. En consecuencia, el cuello de botella dominante es la saturación de $\mathbf{v}_s$, no la geometría de $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$. Esto explica por qué refinar la aproximación poligonal de la restricción de corriente aporta beneficios limitados sobre la ley de control cuando el hexágono de tensión del inversor constituye la restricción activa en

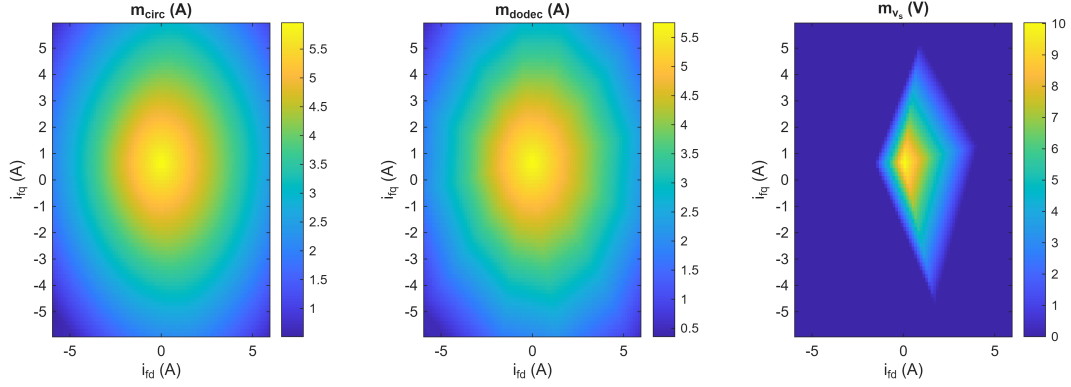


Figura 4.4: Márgenes mínimos sobre el horizonte $N_p = 3$ bajo la ley dodecagonal. De izquierda a derecha: holgura al círculo de corriente m_{circ} (4.8); holgura al dodecágono inscrito m_{dodec} (4.9); holgura al hexágono de tensión m_{v_s} (4.10). Valores bajos (tonos oscuros en m_{v_s}) indican restricción activa.

Tabla 4.5: Actividad de restricciones y márgenes agregados bajo la ley politópica ($\theta_k = 0^\circ$).

N	Hex. v_s [%]	Poli. i_f [%]	Corona [%]	m_{circ} med. [A]	m_{poli} med. [A]	m_{v_s} med. [V]	Viol. cruz. [%]
6	84,12	0,31	0,38	3,16	2,48	0,66	0,00
12	84,12	0,00	0,00	3,15	2,98	0,66	0,00
24	84,12	0,00	0,00	3,15	3,11	0,66	0,00

más del 84 % de la grilla. Adicionalmente, la violación cruzada de la ley politópica respecto al límite circular es nula en todos los experimentos (0 % de puntos con violación > 0), lo que confirma que el politopo inscrito actúa como restricción conservadora sin generar soluciones inadmisibles para el círculo.

4.5. Sensibilidad al ángulo del hexágono de tensión

El hexágono de $\mathbf{v}_s$ se implementa como politopo rotatorio $\mathbf{G}_{vc} = \mathbf{H}_{vc} \mathbf{T}(\theta_k)$, donde θ_k es el ángulo de orientación del marco de tensión en (4.6) (véase Fig. 4.3). Al repetir el barrido completo para $N_\theta = 12$ ángulos equiespaciados de 30° , se observa un patrón periódico con periodo 60° , coherente con la simetría del hexágono. En ángulos $\theta_k \in \{30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, \dots\}$ el hexágono de tensión limita el 100 % de la grilla y $|\Delta \mathbf{u}|_{\text{máx}}$ alcanza su máximo global; en los ángulos intermedios ($0^\circ, 60^\circ, \dots$) la activación desciende al 84,1 %.

Para el hexágono inscrito ($N = 6$), el peor caso global es $|\Delta \mathbf{u}|_{\text{máx}} = 9,96$ V en $\theta_k = 30^\circ$ y 90° , frente a 2,44 V en $\theta_k = 0^\circ$. Con el dodecágono ($N = 12$), la discrepancia máxima bajo rotación oscila entre 2,72 V y 3,81 V (peor caso en $\theta_k = 270^\circ$). Para el icositetrágono ($N = 24$), el rango se reduce a 1,40–1,96 V (peor caso en $\theta_k = 330^\circ$). A mayor N , la holgura radial ΔR disminuye y las diferencias residuales inducidas por la rotación del hexágono de

Tabla 4.6: Costo computacional del barrido ($\theta_k = 0^\circ$, 6400 puntos). Los ratios por N provienen del barrido comparativo; para $N = 12$, la corrida consolidada (reporte_tesis_borde.txt) reporta $33,4\times$ (29,4 ms/pt vs. 0,88 ms/pt).

N	Círculo (s)	ms/pt	Politopo (s)	ms/pt	Ratio
6	334,89	209,31	11,02	6,89	$30,4\times$
12	274,68	171,67	9,74	6,09	$28,2\times$
24	353,88	221,17	11,40	7,12	$31,0\times$

tensión se atenúan, aunque el beneficio en coincidencia de leyes permanece marginal en el corte $\theta_k = 0^\circ$ dado que el factor limitante sigue siendo $\mathbf{v}_s$.

4.6. Costo computacional

La Tabla 4.6 compara el tiempo total de resolución sobre los 6400 puntos de grilla para el corte $\theta_k = 0^\circ$. El solver SOCP/QCQP iterativo demanda entre $28\times$ y $31\times$ más tiempo que el QP politópico en el barrido por N , con un costo medio por punto de 172–221 ms frente a 6–7 ms. En la corrida consolidada del Caso B dodecágono ($N = 12$, reporte_tesis_borde.txt), el cociente fue $33,4\times$ (29,4 ms/pt frente a 0,88 ms/pt). Este resultado confirma la ventaja computacional señalada en la Sección 4.1.4, independientemente del número de lados N elegido para la aproximación poligonal. En los tres experimentos no se registraron puntos reparados ni soluciones infactibles.

4.7. Discusión y conclusiones del capítulo

Los resultados del barrido offline permiten concluir que, bajo la configuración MPC-Z adoptada y alineada a [1], la elección entre restricción circular exacta y politopo inscrito en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ tiene un impacto acotado sobre la ley de control del bucle de nivel cero. En el corte $\theta_k = 0^\circ$, la mediana de $|\Delta \mathbf{u}|$ es nula para los tres politopos y la fracción de puntos con discrepancia apreciable ($> 0,05$ V) decrece de 1,81 % ($N = 6$) a 0,38 % ($N = 24$) a medida que ΔR se reduce. Las mayores discrepancias se concentran en el cuadrante $(i_{fd}, i_{fq}) < 0$, coincidiendo con la saturación del hexágono de tensión ($m_{v_s} \approx 0$), lo que confirma que el hexágono de $\mathbf{v}_s$, y no la geometría de la restricción de corriente, constituye el factor limitante dominante del optimizador.

El análisis de activación de restricciones muestra que la corriente predicha del filtro rara vez satura el borde admisible ($< 0,5\%$ de la grilla), mientras que el hexágono de tensión permanece activo entre el 84 % y el 100 % de los puntos según θ_k . Esta jerarquía explica la escasa sensibilidad de $\mathbf{u}^*$ a la aproximación poligonal de corriente y justifica que, en la práctica, la formulación QP con politopo inscrito (como la empleada en la tesis de

referencia [1]) produzca una ley de control prácticamente equivalente a la del SOCP circular en la gran mayoría del dominio operativo.

Desde el punto de vista computacional, el QP politópico es aproximadamente $30\times$ más rápido que el SOCP circular, con tiempos por punto del orden de 6–7 ms. Si bien estos valores son compatibles en principio con el período de muestreo $T_s = 200 \mu\text{s}$ solo mediante precómputo *offline* o hardware dedicado, el trade-off entre fidelidad geométrica y costo de resolución favorece la aproximación lineal cuando el hexágono de tensión domina la saturación del actuador.

Es importante reconocer las limitaciones del presente estudio: la evaluación se realiza mediante barrido paramétrico *offline* de la ley $u^*(i_{fd}, i_{fq})$, sin validación dinámica en lazo cerrado ni despliegue experimental, en contraste con la simulación temporal en Simulink reportada en la Sección 6.3 de [1]. No obstante, el enfoque permite aislar de forma controlada el efecto de la geometría de la restricción de corriente sobre la acción de control, complementando el análisis cualitativo de la Sección 4.1 con evidencia cuantitativa. Dado que el Caso B con dodecágono ($N = 12$) conduce a un QP convexo, su ley óptima admite una descripción exacta como función afín por partes; el Capítulo 5 desarrolla ese marco algebraico. El Capítulo 6 plantea, a continuación, una red ReLU como aproximador de la ley circular cuando la descripción explícita completa no resulta práctica.

LEY DE CONTROL EXPLÍCITA DEL DODECÁGONO EN CORRIENTE

El Capítulo 4 cuantificó las diferencias entre la restricción circular exacta y politopos inscritos en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ mediante un barrido *offline*. En este capítulo se complementa ese análisis empírico con el marco algebraico del control predictivo explícito (MPC) asociado al **Caso B con dodecágono** ($N = 12$): al ser un programa cuadrático (QP) con restricciones lineales, la ley de control óptima del bucle de nivel cero admite una representación exacta como función afín por partes (PWA) sobre regiones críticas del espacio de estados. A diferencia del Caso A circular, cuya frontera cuadrática impide una parametrización poliédrica finita equivalente, el dodecágono inscrito permite escribir $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ mediante un número finito de expresiones afines, gobernadas por las condiciones KKT.

5.1. Formulación multiparamétrica del MPC-Z con dodecágono

Considérese el MPC de nivel cero del Capítulo 3 en coordenadas de error, con estado incremental $\mathbf{x}_{0h} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^4$ y acción $\mathbf{u}_{0h} \in \mathbb{R}^2$. Para un horizonte $N_p = 3$ y costo cuadrático *batch*, el problema se escribe en forma condensada como

$$\min_{\mathbf{U}} \frac{1}{2} \mathbf{U}^\top \mathbf{H} \mathbf{U} + \mathbf{f}^\top(\mathbf{x}_{0h}) \mathbf{U} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{A}_{\text{in}} \mathbf{U} \leq \mathbf{b}_{\text{in}} + \mathbf{E} \mathbf{x}_{0h}, \quad (5.1)$$

donde $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_{0h,0}^\top, \dots, \mathbf{u}_{0h,N_p-1}^\top]^\top$ agrupa las acciones en el horizonte. Las filas de $\mathbf{A}_{\text{in}}$ provienen de dos familias de restricciones lineales comunes a ambos casos del Capítulo 4:

1. **Dodecágono en corriente** ($N = 12$): $\mathbf{H}_{if} \mathbf{C}_{if} (\Phi \mathbf{x}_{0h} + \Gamma \mathbf{U}) \leq \mathbf{h}_{if}$, con variable de holgura penalizada ($Q_\epsilon = 10^9$) en el MPC de nivel cero del convertidor.
2. **Hexágono rotatorio en tensión**: $\mathbf{G}_{vc} \mathbf{T}(\theta_k) \mathbf{u}_{0h,k} \leq \mathbf{g}_{vc}$, según (4.6).

En la formulación multiparamétrica estándar [3, 8], el vector de parámetros desplaza el lado derecho de las restricciones. Se agrupa la decisión del horizonte y la holgura en $\mathbf{z} = [\mathbf{U}^\top, \boldsymbol{\epsilon}^\top]^\top \in \mathbb{R}^{n_z}$, de modo que el programa cuadrático multiparamétrico (mpQP) adopta la forma

$$\min_{\mathbf{z}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \mathbf{H} \mathbf{z} + \mathbf{f}^\top(\mathbf{x}_{0h}) \mathbf{z} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{A} \mathbf{z} \leq \mathbf{b}_0 + \mathbf{E} \mathbf{x}_{0h}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \geq \mathbf{0}, \quad (5.2)$$

coherente con la implementación del MPC de nivel cero del convertidor. El parámetro natural es el estado incremental completo

$$\mathbf{x}_{0h} = [i_{fd} - i_{s,fd}, i_{fq} - i_{s,fq}, v_{cd} - v_{s,cd}, v_{cq} - v_{s,cq}]^\top, \quad (5.3)$$

explorado dentro de una caja alrededor del equilibrio nominal: $|i_{f,dq}| \lesssim 0,98 i_b$ y $|v_{c,dq}| \lesssim 0,15 V_{s,\text{máx}}$. Con $\theta_k = 0^\circ$, las matrices del mpQP ($\mathbf{H}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{E}$) se condensan a partir del MPC de nivel cero del convertidor. El Caso B es, por construcción, un QP multiparamétrico convexo cuya solución óptima $\mathbf{U}^*(\mathbf{x}_{0h})$ es única y PWA en el interior de cada región crítica.

5.2. Condiciones KKT y regiones críticas

Denótese por $\mathcal{A}(\mathbf{x}_{0h})$ el conjunto activo de restricciones en un punto del espacio de parámetros. Las condiciones KKT del problema (5.1) son, en cada región donde $\mathcal{A}$ permanece constante:

$$\mathbf{H} \mathbf{U}^* + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{0h}) + \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^\top \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{A}_{\mathcal{A}} \mathbf{U}^* = \mathbf{b}_{\mathcal{A}} + \mathbf{E}_{\mathcal{A}} \mathbf{x}_{0h}, \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}} \geq \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

con complementariedad $\lambda_j (\mathbf{A}_{\mathcal{A},j} \mathbf{U}^* - \mathbf{b}_{\mathcal{A},j} - \mathbf{E}_{\mathcal{A},j} \mathbf{x}_{0h}) = 0$. Sustituyendo (5.5) en (5.4) y despejando $\mathbf{U}^*$, se obtiene la ley explícita sobre las variables de decisión del horizonte; la primera acción de control aplicada es

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{0h}) = \mathbf{S}_u \mathbf{U}^*(\mathbf{x}_{0h}) + \mathbf{u}_s - \mathbf{d}_{ik}, \quad (5.7)$$

con $\mathbf{S}_u = [\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{0}]$ seleccionando $\mathbf{u}_{0h,0}$.

Cada cambio en $\mathcal{A}$ introduce un hiperplano de conmutación en $\mathbb{R}^4$ y un pliegue en $\mathbf{u}^*$. En el marco del MPC explícito, el dominio se particiona en poliedros convexos disjuntos $\{\mathcal{R}_i\}$, de modo que dentro de cada $\mathcal{R}_i$ la ley es exactamente afín:

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{0h}) = \mathbf{F}_i \mathbf{x}_{0h} + \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{x}_{0h} \in \mathcal{R}_i. \quad (5.8)$$

Las matrices $(\mathbf{F}_i, \mathbf{g}_i)$ se obtienen algebraicamente de las condiciones KKT en cada conjunto activo, sin ajuste por mínimos cuadrados sobre una grilla.

5.3. Obtención de la partición PWA con MPT3

Esta sección describe el flujo de cómputo que condensa el Caso B en un mpQP, resuelve algebraicamente las regiones críticas con MPT3 y genera las figuras del capítulo evaluando la ley explícita sobre la misma grilla del Capítulo 4.

5.3.1. Pipeline de cómputo

El procedimiento, implementado en MATLAB/YALMIP, consta de cuatro etapas enlazadas con el barrido *offline* del Capítulo 4:

1. **Condensación del mpQP.** A partir del MPC de nivel cero del convertidor (Caso B, dodecágono $N = 12$, $\theta_k = 0^\circ$), se exportan las matrices $(\mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{b}_0, \mathbf{E}, \mathbf{F})$ de (5.2) con la misma parametrización de holgura *soft* ($Q_\epsilon = 10^9$) empleada en el barrido.
2. **Resolución multiparamétrica.** La formulación se traduce a MPT3 [8] y se resuelve con `mpt_mpqp`, explorando conjuntos activos mediante condiciones KKT (Algoritmo 3). Metodológicamente, extiende el Algoritmo 1 del Capítulo 2: en lugar de identificar regiones por barrido denso, MPT3 construye algebraicamente cada poliedro crítico y su ley afín asociada.
3. **Validación numérica.** La ley PWA se contrasta con `quadprog` (*active-set*) sobre puntos aleatorios en la caja $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_{0h}}$ (Sección 5.4).
4. **Visualización.** Sobre una grilla $N_g \times N_g$ en (i_{fd}, i_{fq}) (idéntica en extensión al barrido del Capítulo 4) se evalúa $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{0h})$ fijando v_{cd}, v_{cq} en el centro incremental de $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_{0h}}$ ($\mathbf{x}_{0h}(3:4) = \mathbf{0}$). Cada punto se clasifica según la región crítica de menor violación factible.

Algorithm 3 Ley PWA exacta del mpQP MPC-Z mediante MPT3 (generalización DER, Caso B dodecágono)

Require: Matrices mpQP $(\mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{b}_0, \mathbf{E}, \mathbf{F})$; caja $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_{0h}}$

Ensure: Partición $\{\mathcal{R}_i\}$ y leyes $(\mathbf{F}_i, \mathbf{g}_i)_{i=1}^{N_r}$

- 1: Condensar el mpQP del MPC de nivel cero del convertidor
 - 2: Formular en YALMIP: $\min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \mathbf{H} \mathbf{z} + (\mathbf{F} \mathbf{x}_{0h})^\top \mathbf{z}$ s.a. $\mathbf{A} \mathbf{z} \leq \mathbf{b}_0 + \mathbf{E} \mathbf{x}_{0h}$, $\mathbf{x}_{0h} \in \mathcal{B}_{\mathbf{x}_{0h}}$
 - 3: Convertir la formulación a formato MPT3
 - 4: $[\mathbf{P}n, \{\mathbf{F}_i^z\}, \{\mathbf{g}_i^z\}, \mathcal{A}_i] \leftarrow$ resolvidor multiparamétrico MPT3
 - 5: Convertir a control aplicado: $\mathbf{u}^* = \mathbf{S}_u \mathbf{z}^* + \mathbf{u}_s - \mathbf{d}_{ik} \Rightarrow (\mathbf{F}_i, \mathbf{g}_i)$
 - 6: Validar $\|\mathbf{u}_{\text{PWA}}^* - \mathbf{u}_{\text{QP}}^*\|$ en puntos aleatorios de $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_{0h}}$
 - 7: Evaluar y clasificar la ley sobre grilla (i_{fd}, i_{fq}) con v_{cd}, v_{cq} en el centro de $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_{0h}}$; exportar mapas de regiones y de v_{sd}^*, v_{sq}^*
 - 8: **return** $\{\mathcal{R}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{g}_i\}_{i=1}^{N_r}$
-

Para la configuración nominal ($N = 12$, $\theta_k = 0^\circ$, caja de (5.3)), MPT3 identifica 44 regiones críticas $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{44}\}$ sobre $\mathbf{x}_{0h} \in \mathbb{R}^4$, cada una asociada a un conjunto activo distinto sobre las 56 desigualdades lineales del problema condensado:

- $18 = 6 \times N_p$ facetas del hexágono de tensión $\mathbf{v}_s$;
- $36 = 12 \times N_p$ facetas del dodecágono de corriente $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ (incluyendo holgura *soft*);
- 2 restricciones de no negatividad de la variable de holgura ϵ .

La Figura 5.1 muestra la proyección de esa partición al plano (i_{fd}, i_{fq}) bajo el corte anterior. En la grilla 80×80 del barrido principal solo aparecen 15 regiones distintas (R01–R15 en la barra de color): el resto de las 44 tuplas algebraicas no intersecta ese corte 2D con v_{cd}, v_{cq} fijos, o comparte el mismo índice activo visible en corriente. Los contornos visibles corresponden a hiperplanos de conmutación inducidos principalmente por la saturación del hexágono de $\mathbf{v}_s$; la ley explícita resultante permanece parametrizada en el espacio completo $\mathbb{R}^4$.

En coherencia con el Capítulo 4, la mayoría de las regiones activan facetas del hexágono de $\mathbf{v}_s$ y holgura *soft*; la activación exclusiva del dodecágono de corriente permanece confinada a zonas periféricas del cuadrante $(i_{fd}, i_{fq}) < 0$, donde también se concentran las discrepancias círculo/politopo.

La Tabla 5.1 resume regiones representativas del corte visible, ordenadas por frecuencia en la grilla de clasificación. Las columnas n_{v_s} , n_{if} y n_{sl} cuentan facetas activas del hexágono de tensión, del dodecágono de corriente y de la holgura *soft*, respectivamente, en el conjunto activo asociado a cada región.

Los hallazgos cualitativos del corte confirman el Capítulo 4: en 14 de las 15 regiones

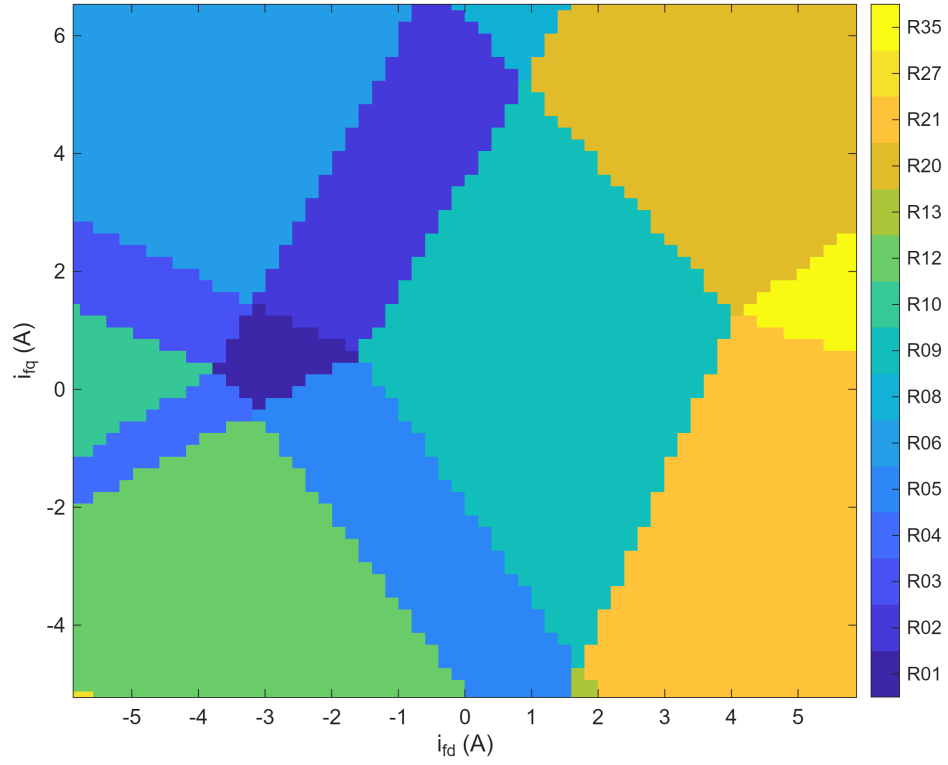


Figura 5.1: Proyección al plano (i_{fd}, i_{fq}) de la ley PWA 4D (Caso B, dodecágono $N = 12$, $\theta_k = 0^\circ$).

Tabla 5.1: Regiones críticas representativas en el corte (i_{fd}, i_{fq}) con v_{cd}, v_{cq} en el centro de $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_{0h}}$. Los puntos indican cuántas celdas de la grilla 80×80 caen en cada región visible.

Reg.	n_{v_s}	n_{if}	n_{sl}	Pts.	Interpretación
R01	0	0	2	310	Interior operativo; ley afín lejos de saturación de $\mathbf{v}_s$
R03	1	0	2	255	Una faceta del hexágono de $\mathbf{v}_s$ activa
R07	2	0	2	259	Dos facetas de $\mathbf{v}_s$; transición entre zonas
R15	4	0	2	35	Saturación fuerte de $\mathbf{v}_s$ ($v_{sd}^* \approx 184$ V)
R08	2	1	2	9	Única región visible con corriente activa; periferia $(i_{fd}, i_{fq}) < 0$

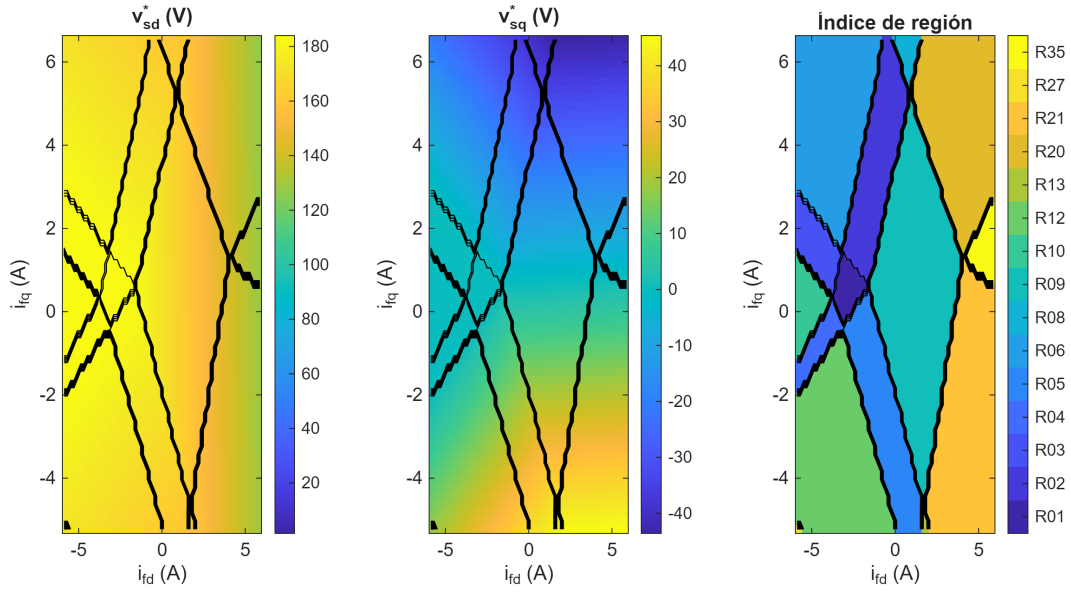


Figura 5.2: Ley explícita PWA en el mismo corte (i_{fd}, i_{fq}) : tensión directa v_{sd}^* (izquierda), tensión cuadratura v_{sq}^* (centro) e índice de región crítica (derecha). Las líneas de contorno marcan los hiperplanos de conmutación entre expresiones afines.

visibles no hay facetas activas del dodecágono ($n_{if} = 0$); R08 concentra la única interacción $\mathbf{v}_s + \mathbf{i}_f$ y coincide con la zona de máximo $|\Delta \mathbf{u}|$ círculo/politopo. Las regiones de saturación (R12–R15) clavan v_{sd}^* en el apotema del hexágono (184 V), coherente con $m_{v_s} \approx 0$ en la Figura 4.4.

5.4. Validación numérica de la ley explícita

La ley PWA se valida comparando $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{0h}) = \mathbf{F}_i \mathbf{x}_{0h} + \mathbf{g}_i$ con la solución del QP de referencia sobre 400 puntos aleatorios en $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_{0h}}$. La discrepancia máxima es

$$\max_{\mathbf{x}_{0h} \in \mathcal{D}_{\text{val}}} \|\mathbf{u}_{\text{PWA}}^*(\mathbf{x}_{0h}) - \mathbf{u}_{\text{QP}}^*(\mathbf{x}_{0h})\|_2 = 2,6 \times 10^{-10} \text{ V}, \quad (5.9)$$

con error medio $7,2 \times 10^{-13}$ V. Un test de sensibilidad con (i_{fd}, i_{fq}) fijos y v_{cd}, v_{cq} variados produce $\|\mathbf{u}_a^* - \mathbf{u}_b^*\| = 1,75 \times 10^{-2}$ V, confirmando que la parametrización 4D captura la dependencia en la tensión del filtro.

La evaluación en línea requiere identificar la región $\mathcal{R}_i$ del $\mathbf{x}_{0h}$ actual (mediante factibilidad y costo mínimo entre candidatos) y ejecutar una multiplicación matriz-vector, con costo $O(n_x n_u)$ inferior al del solver QP iterativo reportado en la Sección 4.6 del Capítulo 4 (~ 6 ms/punto). Se conservan las 44 tuplas $(\mathbf{F}_i, \mathbf{g}_i)$, la máscara de restricciones activas y el reporte de validación numérica para reproducibilidad. Las figuras 5.1 y 5.2 no

añaden regiones algebraicas: visualizan el mismo conjunto de leyes evaluado punto a punto en el corte 2D descrito en la Sección 5.3.

5.5. Conexión con el barrido comparativo del Capítulo 4

La holgura radial del dodecágono inscrito es $\Delta R = 0,20$ A (3,4% de i_b), según (4.3). Geométricamente, círculo y politopo difieren en la corona $\|\mathbf{i}_{f,\text{pred}}\| \in [R_{\text{insc}}, i_b]$, con $R_{\text{insc}} = 5,80$ A. No obstante, la partición PWA confirma que la activación del dodecágono de corriente es marginal frente a la del hexágono de $\mathbf{v}_s$, en línea con la activación del 84% de la grilla reportada en la Tabla 4.5 del Capítulo 4.

Desde la perspectiva del MPC explícito, las expresiones (5.8) asociadas a regiones interiores coinciden numéricamente con las del Caso A circular en más del 99% de la grilla del barrido ($|\Delta \mathbf{u}|$ mediano nulo). Las regiones donde $\mathbf{F}_i$ difiere entre ambos casos son periféricas y corresponden a la saturación simultánea del hexágono de tensión y, excepcionalmente, del dodecágono de corriente (precisamente el cuadrante $(i_{fd}, i_{fq}) < 0$ identificado en la Figura 4.4 y en el mapa de regiones de la Figura 5.1).

5.5.1. Ventajas y limitaciones de la representación explícita

La formulación dodecagonal ofrece tres propiedades analíticas:

1. **Exactitud algebraica:** cada región crítica se describe por (5.8), derivable de las condiciones KKT vía MPT3, sin error de truncamiento del solver más allá de 10^{-9} V.
2. **Finitud combinatoria:** 44 regiones en la caja 4D examinada, enumerable sin barrido denso sobre grilla [6, 8].
3. **Evaluación en tiempo real:** una vez identificada $\mathcal{R}_i$, la acción de control se obtiene por una evaluación afín.

Las limitaciones del presente estudio deben declararse explícitamente. La partición corresponde a la caja $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_{0h}}$ alrededor del equilibrio con $\theta_k = 0^\circ$; el barrido angular del Capítulo 4 parametriza otra familia de QPs no incluida en las 44 regiones. En contraste, el Caso A circular no admite partición poliédrica finita equivalente, lo que motiva el enfoque de aproximación neuronal del Capítulo 6.

5.6. Síntesis y puente hacia la aproximación neuronal

El dodecágono inscrito en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ permite escribir la ley de control del bucle de nivel cero como 44 funciones afines evaluables sin solver iterativo, obtenidas algebraicamente con MPT3 sobre $\mathbf{x}_{0h} \in \mathbb{R}^4$. En el corte visual del barrido aparecen 15 regiones distintas (Figuras 5.1 y 5.2), suficientes para ilustrar la estructura PWA dominada por $\mathbf{v}_s$. En la

práctica, la partición confirma que la saturación de $\mathbf{v}_s$ (y no la geometría de $\mathbf{i}_f$) estructura la mayoría de las regiones operativas, en coherencia con los resultados del Capítulo 4.

La pregunta complementaria es si la ley deseada es la del círculo exacto, más fiel físicamente y más suave, pero cuya formulación SOCP es costosa y no admite descripción PWA finita. El Capítulo 6 entrena un aproximador ReLU sobre la ley circular, explotando la equivalencia estructural entre funciones ReLU y leyes PWA aquí caracterizadas, y valida su desempeño frente al dodecágono y al SOCP en el caso estudiado.

APROXIMACIÓN NEURONAL DE LA LEY CIRCULAR

El Capítulo 4 evidenció que la restricción circular exacta en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ conduce a un problema de cono de segundo orden (SOCP) o cuadráticamente restringido (QCQP) cuyo solver demanda aproximadamente $30\times$ más tiempo que el programa cuadrático (QP) dodecagonal (Tabla 4.6). El Capítulo 5 mostró, a su vez, que el dodecágono admite una ley afín por partes (PWA) *exacta* mediante condiciones KKT, pero introduce holgura geométrica $\Delta R > 0$ y pliegues en las derivadas de $\mathbf{u}^*$. Este capítulo desarrolla y valida una tercera vía: entrenar *offline* una red neuronal con activación de unidad de rectificación lineal (ReLU) para aproximar la ley de control del círculo, preservando la fidelidad geométrica del disco admisible y obteniendo un costo de inferencia compatible con implementación en tiempo real. Los experimentos se ejecutan sobre las mismas bases del Capítulo 4.

6.1. Motivación y posicionamiento

El compromiso entre las tres formulaciones estudiadas puede resumirse así:

Tabla 6.1: Comparación de enfoques para la ley de control MPC-Z en corriente.

Enfoque	Fidelidad	Costo	Representación exacta
Círculo (QCQP)	Exacta	Alto	No
Dodecágono (QP)	Aprox. ($\Delta R \approx 0,20$ A)	Bajo	Si
Red ReLU	Aprendida del círculo	Muy bajo	No

La hipótesis central es que una red feedforward con activaciones ReLU puede emular el mapeo $\mathbf{x}_{0h} \mapsto \mathbf{u}_{\text{circ}}^*(\mathbf{x}_{0h})$ obtenido del barrido SOCP del Capítulo 4, con error de aproximación acotado en la grilla de entrenamiento y evaluación en microsegundos por la propagación hacia adelante (*forward pass*). Este enfoque sigue la línea que se estudia en [1], quien emplea redes profundas como aproximadores del MPC en cascada, acotado aquí al bucle de nivel cero y a la ley circular de referencia.

6.2. Equivalencia ReLU y estructura PWA

Una red neuronal prealimentada con activación ReLU, $\sigma(z) = \max(0, z)$, en todas las capas ocultas y capa de salida lineal, genera una función continua lineal por partes en el espacio de entrada [5, 6]. Cada neurona introduce un hiperplano de activación; la composición de capas divide $\mathbb{R}^{n_x}$ en un número finito de regiones poliédricas dentro de las cuales la salida es afín:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{0h}; \Theta) = \mathbf{W}^{(L)} \sigma(\dots \sigma(\mathbf{W}^{(1)} \mathbf{x}_{0h} + \mathbf{b}^{(1)}) \dots) + \mathbf{b}^{(L)} = \mathbf{F}_\ell \mathbf{x}_{0h} + \mathbf{g}_\ell, \quad \mathbf{x}_{0h} \in \mathcal{R}_\ell, \quad (6.1)$$

donde Θ agrupa pesos y sesgos y $\mathcal{R}_\ell$ es la región de activación del patrón binario de la red en la capa ℓ . La evaluación en línea sigue la estructura del Algoritmo 2 del Capítulo 2, generalizada al bucle de nivel cero del convertidor: las entradas $\mathbf{x}_{0h}$ y las salidas $\hat{\mathbf{u}}_{0h}$ se estandarizan antes y después del *forward pass*; la capa de salida es lineal de dimensión $n_u = 2$ y la tensión absoluta se reconstruye como $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_{0h} + \mathbf{u}_s$. Cada paso oculto fija el patrón binario de activación que determina la región poliédrica $\mathcal{R}_\ell$ vigente en ese punto.

La salida $\hat{\mathbf{u}}$ alimenta, en despliegue, el bloque de post-proyección sobre el hexágono de $\mathbf{v}_s$ descrito en la Sección 6.4.

Esta estructura es homóloga a la ley PWA exacta del dodecágono en (5.8), pero con una diferencia conceptual: la partición $\{\mathcal{R}_\ell\}$ de la red no proviene de las condiciones KKT del optimizador, sino que se aprende durante el entrenamiento para ajustar la superficie de control a los datos generados por el Caso A circular. En la práctica, la propagación hacia atrás (*backpropagation*) desplaza los hiperplanos de activación de modo que la red pueda aproximar fronteras curvas (como la del disco $\|\mathbf{i}_{f,\text{pred}}\| \leq i_b$) con una densidad paramétrica controlada por el número de neuronas, sin necesidad de enumerar explícitamente todos los conjuntos activos del QP.

6.3. Formulación del problema de aprendizaje

6.3.1. Conjunto de datos

Se construye un conjunto de entrenamiento a partir del barrido *offline* del Capítulo 4. Cada muestra consiste en un par estado-acción:

$$\mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{x}_{0h}^{(i)}, \mathbf{u}_{\text{circ}}^{*(i)}) \right\}_{i=1}^{N_g}, \quad N_g = 6400, \quad (6.2)$$

donde $\mathbf{x}_{0h}^{(i)} = [i_{fd}^{(i)} - i_{s,fd}, i_{fq}^{(i)} - i_{s,fq}]^\top$ es la proyección del estado de error en el plano de corriente del filtro (con v_{cd}, v_{cq} en el equilibrio nominal) y $\mathbf{u}_{\text{circ}}^{*(i)} = [v_{sd}, v_{sq}]^\top$ es la primera acción óptima del Caso A. La grilla adopta $N_g = 80 \times 80$ puntos en $[-5,88, 5,88]^2$ A, la misma resolución empleada en la clasificación PWA del Capítulo 5. El corte angular se fija en $\theta_k = 0^\circ$.

6.3.2. Arquitectura propuesta

Se considera una red feedforward (FNN) con:

- **Entrada:** $\mathbf{x}_{0h} \in \mathbb{R}^2$ (desviación de corriente del filtro respecto al equilibrio).
- **Capas ocultas:** una o dos capas conectadas con activación ReLU; se evalúan cinco configuraciones de capacidad (4, 6 u 8 neuronas en una capa; 4×4 u 8×8 en dos capas).
- **Salida:** capa lineal de dimensión $n_u = 2$ que entrega $\hat{\mathbf{u}}_{0h} = [\hat{v}_{sd}, \hat{v}_{sq}]^\top$ en coordenadas de error; la tensión absoluta se reconstruye sumando $\mathbf{u}_s$ nominal.

La elección de ReLU en lugar de activaciones suaves (tanh, sigmoide) se justifica por la correspondencia PWA con la estructura del MPC explícito (Sección 6.2) y por la eficiencia de implementación en hardware embebido.

6.3.3. Función de costo y entrenamiento

El entrenamiento se formula como regresión supervisada minimizando el error cuadrático medio (MSE), generalizando (2.35) del prototipo a salida vectorial:

$$\mathcal{L}(\Theta) = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} \left\| \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{0h}^{(i)}; \Theta) - \mathbf{u}_{\text{circ}}^{*(i)} \right\|_2^2. \quad (6.3)$$

Para $n_u = 2$, $\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{\text{circ}}^*\|_2^2 = (\hat{v}_{sd} - v_{sd}^*)^2 + (\hat{v}_{sq} - v_{sq}^*)^2$; la norma al cuadrado agrega el error de cada coordenada de la acción, no introduce una norma distinta del MSE escalar del Capítulo 2.

El objetivo es que $\hat{\mathbf{u}}$ reproduzca la ley circular en todo el dominio de entrenamiento, incluyendo las regiones periféricas donde el hexágono de tensión satura y la acción óptima presenta mayor variación. La métrica de evaluación propuesta es análoga a (4.7); en las tablas siguientes se reporta también la raíz del error cuadrático medio (RMSE) en voltios:

$$\varepsilon_{\text{NN}} = \|\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{0h}) - \mathbf{u}_{\text{circ}}^*(\mathbf{x}_{0h})\|_2 \quad [\text{V}]. \quad (6.4)$$

6.4. Garantía de factibilidad mediante post-proyección

La inferencia neuronal $\hat{\mathbf{u}}$ no garantiza por construcción el cumplimiento de las restricciones operativas del inversor. Para restituir factibilidad, se propone un bloque

determinista de post-proyección sobre el hexágono de tensión del 2L-VSC, coherente con la restricción dura (4.6):

$$\mathbf{u}_{\text{aplicado}} = \Pi_{\mathcal{U}_{v_s}}(\hat{\mathbf{u}}), \quad (6.5)$$

donde $\Pi_{\mathcal{U}_{v_s}}$ denota la proyección mínima sobre el polígono hexagonal rotatorio en el marco dq . Cuando θ_k es fijo en el corte de entrenamiento ($\theta_k = 0^\circ$), $\mathcal{U}_{v_s}$ es un hexágono afín desplazado; en operación con θ_k variable, la proyección debe actualizarse con $\mathbf{T}(\theta_k)$ en cada paso de muestreo.

Este esquema híbrido (red ReLU + proyección convexa) separa la aproximación de la ley circular (aprendizaje) de la garantía de seguridad del actuador (optimización convexa de baja dimensión), en la línea del procedimiento de recuperación de factibilidad reportado por [1] para aproximadores DNN del MPC.

6.5. Pipeline experimental

El flujo experimental, implementado en MATLAB, enlaza tres etapas: reutilizar el barrido *offline* del Capítulo 4 sobre la grilla 80×80 ; construir $\mathcal{D}$ con estandarización de $\mathbf{x}_{0h}$ y $\mathbf{u}_{0h}$, dejando la ley dodecagonal solo como *baseline* de comparación; y entrenar las cinco arquitecturas con Adam (*Adaptive Moment Estimation*), partición aleatoria 80%/20%, tasa 5×10^{-3} , *mini-batch* de 256, hasta 600 épocas y *early stopping* con paciencia de 25 épocas sobre el MSE de validación. La configuración MPC-Z coincide con la del barrido: $N_p = 3$, $T_s = 200 \mu\text{s}$, $i_b = 6 \text{ A}$, $V_{s,\text{máx}} = 184 \text{ V}$, dodecágono $N = 12$ y $\mathbf{u}_s = [172, 18, 0, 023]^\top \text{ V}$.

6.6. Selección de arquitectura

La Tabla 6.2 resume el desempeño de las cinco redes evaluadas sobre la grilla completa de 6400 puntos. Las configuraciones de una sola capa con 4, 6 u 8 neuronas resultan insuficientes para capturar la frontera curva del Caso A del convertidor: el MSE supera la unidad y el error máximo alcanza varios volts. La red de dos capas 4×4 mejora parcialmente el ajuste, pero sigue siendo inferior al *baseline* dodecagonal. La configuración de **dos capas ocultas de ocho neuronas** alcanza el menor MSE ($1,86 \times 10^{-3} \text{ V}^2$), convergiendo en 531 épocas.

El cociente $\text{pol}/\text{NN} = 3,69$ indica que la red seleccionada reproduce la ley circular con error cuadrático medio inferior al de la aproximación dodecagonal respecto a la solución exacta.

6.7. Resultados offline de la red seleccionada

La Figura 6.1 contrasta las superficies $v_{sd}^*(i_{fd}, i_{fq})$ del Caso A circular con la red ReLU entrenada sobre esa ley. Visualmente, la red captura los pliegues inducidos por la saturación del hexágono de tensión en el cuadrante negativo, regiones donde el Capítulo 4 reportó la mayor variación de la acción óptima.

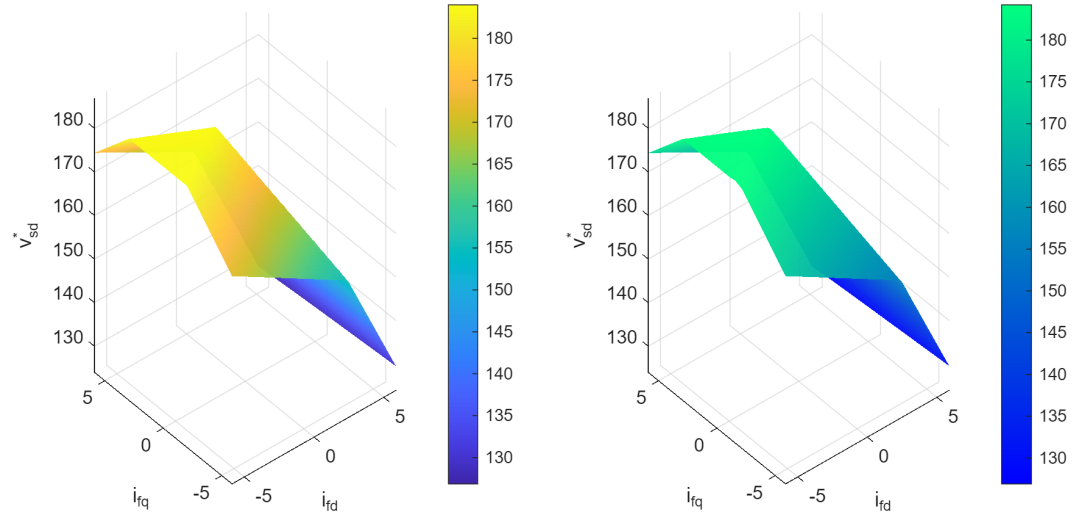


Figura 6.1: Superficies $v_{sd}^*(i_{fd}, i_{fq})$: Caso A circular (SOCP) y red ReLU entrenada sobre la ley circular ($\theta_k = 0^\circ$).

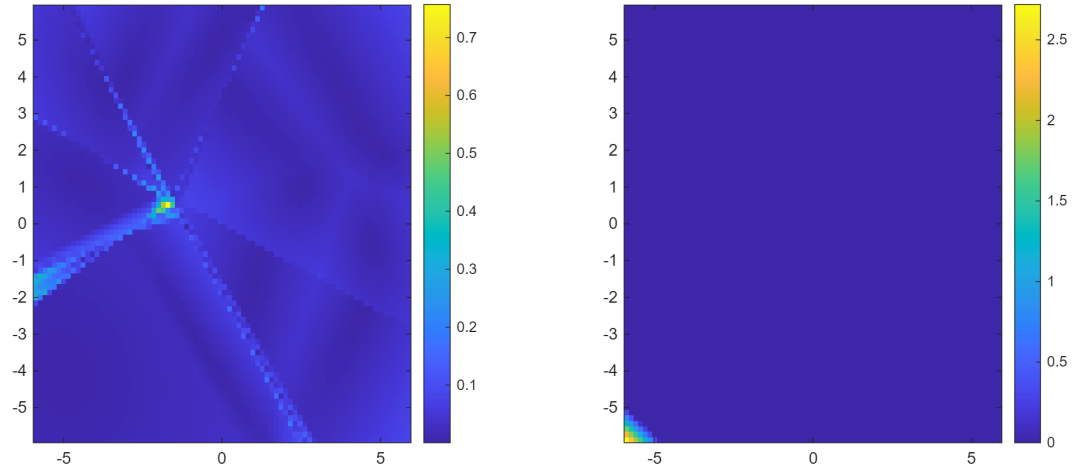


Figura 6.2: Mapas de error $\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{\text{circ}}^*\|_2$ sobre la grilla: red ReLU (izquierda, RMSE = 0,043 V) y dodecágono (derecha, RMSE = 0,083 V).

Tabla 6.2: Comparación de arquitecturas ReLU sobre la grilla completa ($N_g = 6400$, $\theta_k = 0^\circ$). La columna MSE_pol corresponde al error del dodecágono respecto al círculo (referencia común).

Capacidad (ReLU)	MSE_NN	MSE_pol	RMSE [V]	Max $ \varepsilon $ [V]	pol/NN
4 neuronas (1 capa)	2,56	$6,88 \times 10^{-3}$	1,60	5,996	0,00
6 neuronas (1 capa)	1,45	$6,88 \times 10^{-3}$	1,20	4,689	0,00
8 neuronas (1 capa)	$7,20 \times 10^{-1}$	$6,88 \times 10^{-3}$	0,848	4,280	0,01
4×4 (2 capas)	$8,46 \times 10^{-1}$	$6,88 \times 10^{-3}$	0,920	5,577	0,01
8×8 (2 capas)	$1,86 \times 10^{-3}$	$6,88 \times 10^{-3}$	0,043	0,757	3,69

Tabla 6.3: Resumen comparativo del aproximador ReLU frente a los enfoques del Capítulo 4 y 5 ($\theta_k = 0^\circ$).

Métrica	ReLU	Dodecágono ($N = 12$)	SOCP circular
MSE vs. círculo [V^2]	$1,86 \times 10^{-3}$	$6,88 \times 10^{-3}$	-
RMSE [V]	0,043	0,083	-
Max $ \varepsilon $ [V]	0,757	2,719	-
Tiempo en línea [$\mu s/pt$]	0,19	~ 6000	~ 172000
Representación	Aprendida (ReLU)	PWA exacta (44 reg.)	Frontera curva

La Tabla 6.3 sintetiza las métricas principales de la arquitectura seleccionada frente a los tres enfoques estudiados en este documento. El error máximo de la red (0,757 V) es $3,6\times$ inferior al máximo en el caso círculo/dodecágono ($|\Delta \mathbf{u}|_{\max} = 2,72$ V, Tabla 4.4). Restringiendo la evaluación a la componente v_{sd} , el MSE neuronal ($7,14 \times 10^{-4}$ V²) también supera al del politopo ($1,72 \times 10^{-3}$ V²), coherente con la prioridad visual de esta variable en los mapas del Capítulo 4.

El tiempo de inferencia estimado en MATLAB sobre 5000 puntos en CPU es de $0,19 \mu s$ por *forward pass*, es decir, entre cuatro y cinco órdenes de magnitud inferior al QP dodecagonal y al SOCP circular resueltos iterativamente en el barrido del Capítulo 4. Este resultado confirma la viabilidad de desplegar la ley circular aprendida en un bucle de nivel cero con periodo de muestreo de $200 \mu s$, reservando la mayor parte del presupuesto temporal para sensado, estimación de estado y actuación.

6.8. Post-proyección sobre el hexágono de tensión

Se aplica el operador (6.5) a las salidas de la red sobre el hexágono fijo $\theta_k = 0^\circ$. De los 6400 puntos, 1606 (25,1%) requieren proyección porque $\hat{\mathbf{u}}$ viola alguna faceta de $\mathbf{v}_s$; esta fracción es coherente con la activación del hexágono de tensión en el 84 % de la grilla reportada en el Capítulo 4, dado que la proyección solo actúa cuando la salida neuronal

excede el politopo, no cuando logra respetar la restricción.

Tras la proyección, el MSE desciende a $1,57 \times 10^{-3} \text{ V}^2$ y el error máximo a 0,687 V. El esquema híbrido red + proyección convexa de baja dimensión restaura factibilidad del actuador con un costo adicional despreciable frente al *forward pass*, y reduce el error máximo en las regiones de saturación de $\mathbf{v}_s$ donde la red presenta mayor incertidumbre de ajuste.

6.9. Discusión y síntesis del capítulo

Los experimentos confirman la hipótesis planteada en la Introducción: una red ReLU entrenada sobre la ley circular alcanza error de aproximación acotado en la grilla de entrenamiento y costo de inferencia del orden de microsegundos, superando al dodecágono como emulador del Caso A sin resolver el SOCP en línea. La equivalencia estructural ReLU–PWA (Sección 6.2) se manifiesta en la capacidad de la red profunda seleccionada para aproximar fronteras curvas y pliegues de saturación que el dodecágono solo reproduce de forma conservadora.

Tres matices deben explicitarse. Primero, el entrenamiento se restringe al barrido bidimensional en (i_{fd}, i_{fq}) con $\theta_k = 0^\circ$; la extensión al barrido angular del Capítulo 4 requeriría enriquecer $\mathcal{D}$ o condicionar la red en θ_k . Segundo, la red no garantiza factibilidad sin el bloque de post-proyección; este paso es imprescindible en despliegue. Tercero, la validación permanece *offline*: la integración en lazo cerrado sobre el modelo LCL completo y la comparación dinámica frente al MPC iterativo quedan como línea de continuidad hacia el marco de Acosta [1].

En síntesis, el aproximador ReLU constituye una alternativa práctica para materializar la ley del círculo exacto en el bucle de nivel cero: combina la fidelidad geométrica del SOCP con un costo computacional comparable (e incluso inferior) al de la evaluación PWA exacta del dodecágono, sin la holgura ΔR ni la enumeración combinatoria de las 44 regiones críticas del mpQP 4D.

CONCLUSIONES

7.1. Resumen del trabajo

Antes del análisis en el convertidor, el Capítulo 2 validó *offline* la cadena metodológica completa, barrido paramétrico, contraste círculo versus politopo inscrito, identificación PWA vía condiciones KKT y entrenamiento ReLU sobre la ley circular, en un sistema masa–resorte con cuatro variantes: Casos A y C con restricción politópica y Casos B y D con restricción circular, respectivamente en entrada y en estado predicho. Ese entorno de baja dimensión hizo transparente el mismo programa de investigación que luego se generaliza al filtro inductor–capacitor–inductor (LCL) del recurso energético distribuido (DER).

En el filtro LCL del DER, este documento abordó el control predictivo de nivel cero (MPC-Z) sobre un inversor conectado a una microrred de corriente alterna, centrándose en la representación geométrica de las restricciones operativas en el plano dq . El experimento central comparó dos formulaciones del mismo controlador *offline* sobre una grilla de corrientes (i_{fd}, i_{fq}) : la restricción circular exacta en la corriente predicha $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$ (Caso A del convertidor, SOCP/QCQP) frente a un politopo regular inscrito con $N \in \{6, 12, 24\}$ (Caso B del convertidor, QP lineal). En ambos casos se mantuvo fija una restricción hexagonal sobre la tensión del inversor $\mathbf{v}_s$, coherente con el límite físico del convertidor 2L-VSC.

Sobre esa base comparativa, se desarrollaron tres líneas complementarias de análisis. En el Capítulo 4 se cuantificaron las discrepancias $|\Delta \mathbf{u}|$ entre ambas leyes, la actividad de restricciones y el costo computacional de los solvers. En el Capítulo 5 se derivó la ley PWA del dodecágono mediante MPT3 y condiciones KKT, identificando 44 regiones críticas en una caja 4D alrededor del equilibrio ($\theta_k = 0^\circ$). En el Capítulo 6 se entrenó una red ReLU que aproxima la ley circular con error acotado y costo de inferencia del orden de microsegundos.

7.2. Conclusiones

Las conclusiones se organizan en torno a las preguntas de investigación formuladas en la Introducción.

7.2.1. Diferencias entre restricción circular y politópica.

La aproximación poligonal de la envolvente circular introduce diferencias localizadas en la primera acción de control óptima $\mathbf{u}^*$. En el corte $\theta_k = 0^\circ$, la mediana de $|\Delta \mathbf{u}|$ es nula para los tres politopos estudiados y las mayores discrepancias se concentran en el cuadrante $(i_{fd}, i_{fq}) < 0$, con picos de 2,44 V ($N = 6$), 2,72 V ($N = 12$) y 1,40 V ($N = 24$). Al refinar N , la holgura radial ΔR decrece y las diferencias residuales se atenúan, confirmando convergencia hacia la ley circular cuando la geometría de corriente deja de ser el factor limitante.

7.2.2. Restricciones dominantes.

El hexágono de tensión $\mathbf{v}_s$ (y no la geometría de $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$) constituye el factor limitante dominante del optimizador. En $\theta_k = 0^\circ$, el hexágono de tensión limita más del 84 % de la grilla; la corona teórica donde círculo y politopo difieren geoméricamente nunca coincide con activación exclusiva del círculo. La partición PWA del Capítulo 5 confirma este resultado: la activación del dodecágono de corriente es marginal frente a la del hexágono de $\mathbf{v}_s$; la mayoría de las 44 regiones críticas están estructuradas por saturación de tensión. En consecuencia, refinar la aproximación poligonal de corriente aporta beneficios marginales sobre la ley de control cuando el inversor opera cerca del límite de modulación.

7.2.3. Compromiso precisión–costo computacional.

El solver SOCP/QCQP iterativo demanda entre $28\times$ y $31\times$ más tiempo que el QP politópico, con costos medios de 172–221 ms/punto frente a 6–7 ms/punto. La ley PWA exacta del dodecágono (obtenida con MPT3 sobre $\mathbf{x}_{0h} \in \mathbb{R}^4$) elimina la necesidad del solver iterativo en línea, con error de reconstrucción inferior a 10^{-9} V respecto al QP de referencia. La red ReLU ReLU- 8×8 del Capítulo 6 alcanza RMSE = 0,043 V frente a la ley circular (inferior al RMSE del dodecágono (0,083 V)) con inferencia de 0,19 μs /punto, viable para un periodo de muestreo de 200 μs .

7.2.4. Viabilidad del aproximador neuronal.

La hipótesis de que una red ReLU puede emular la ley circular con error acotado y bajo costo de inferencia se confirma en el dominio barrido. El error máximo neuronal (0,757 V) es $3,6\times$ inferior al error máximo círculo/dodecágono (2,72 V). La post-proyección sobre

el hexágono de $\mathbf{v}_s$ restaura factibilidad del actuador en el 25,1% de los puntos con un costo adicional despreciable. El esquema híbrido aprendizaje + proyección convexa separa la aproximación de la ley deseada de la garantía de seguridad operativa.

7.2.5. Validación metodológica en el prototipo.

En el sistema masa–resorte (Capítulo 2), el Caso C verificó la estructura multiparamétrica $\mathbf{AU} \leq \mathbf{b}_0 + \mathbf{E}\mathbf{x}_0$ análoga al dodecágono en $\mathbf{i}_{f,\text{pred}}$, con 46 regiones PWA reconstruidas por KKT. El entrenamiento ReLU sobre las leyes circulares (Casos B y D del prototipo) superó al politópico inscrito en MSE ($\text{MSE}_{\text{pol}}/\text{MSE}_{\text{NN}} \approx 52$ en entrada y ≈ 12 en estado). En el barrido principal, el solver QCQP/SOCP demandó aproximadamente $16\times$ más tiempo por punto que el QP lineal (10,5 ms frente a 0,6 ms), anticipando el salto de costo del convertidor. La discrepancia máxima entre leyes politópica y circular en entrada fue del orden de 0,18 en u_1 , acotando el efecto geométrico antes de incorporar el hexágono de tensión $\mathbf{v}_s$.

7.2.6. Respuesta integrada.

La elección entre formulación circular exacta y politopo inscrito tiene impacto acotado sobre la ley de control del bucle de nivel cero bajo la configuración examinada, porque la saturación de $\mathbf{v}_s$ domina el comportamiento del optimizador. No obstante, cuando la fidelidad geométrica del disco admisible es un requisito explícito, el SOCP en línea resulta costoso y no admite descripción PWA finita; el dodecágono ofrece exactitud algebraica con holgura conservadora; y la red ReLU proporciona un compromiso favorable entre fidelidad a la ley circular, costo de inferencia y simplicidad de despliegue, complementado por post-proyección hexagonal.

7.3. Trabajo futuro

Las siguientes líneas extienden el alcance del presente estudio de pregrado hacia un despliegue completo del MPC en cascada sobre el filtro LCL:

1. **Validación en lazo cerrado.** Integrar la ley ReLU con post-proyección en simulación dinámica del modelo discreto LCL y comparar desempeño transitorio, error de seguimiento y cumplimiento de restricciones frente al MPC iterativo y a la ley PWA exacta del dodecágono.
2. **Variación angular θ_k .** Ampliar el conjunto de entrenamiento con los doce cortes del barrido angular del Capítulo 4, o condicionar la red en θ_k , dado que la orientación del hexágono de tensión modifica sustancialmente $|\Delta\mathbf{u}|_{\text{máx}}$ (hasta 9,96 V con $N = 6$ en $\theta_k = 30^\circ$).

3. **Integración con el lazo primario.** Conectar el MPC-Z aproximado con el bucle primario y las restricciones de sincronización del marco de Acosta [1], evaluando estabilidad en cascada y robustez ante perturbaciones de red.
4. **Implementación embebida.** Cuantificar el costo de la red ReLU- 8×8 en hardware objetivo (DSP/FPGA), incluyendo cuantización de pesos, latencia de post-proyección y comparación con lookup tables PWA de las 44 regiones críticas.
5. **Certificación, generalización y entrenamiento con restricciones.** Estudiar cotas de error fuera de la grilla con técnicas de verificación de redes ReLU [6]. Extender el entrenamiento actual (Adam + MSE) para incorporar el hexágono $\mathcal{U}_{v_s}$ mediante penalización en la loss, proyección en el bucle de aprendizaje, parametrización admisible de la salida u optimización con restricciones explícitas.

En conjunto, los resultados de este documento—desde la validación en el prototipo hasta el análisis en el convertidor—caracterizan el rol de las restricciones geométricas en el MPC de nivel cero de un DER y demuestran que un aproximador neuronal entrenado *offline* puede materializar la ley del círculo exacto con desempeño superior al politopo inscrito y costo computacional compatible con control en tiempo real, abriendo una vía práctica entre la fidelidad del SOCP y la eficiencia del QP lineal.

APROXIMACIÓN POLITÓPICA DE UNA REGIÓN CIRCULAR

Este apéndice detalla la construcción del politopo regular inscrito empleado para linealizar restricciones circulares $\|\mathbf{z}\|_2 \leq r$ en los Capítulos 2 y 4. Se presenta la formulación por semiplanos, la distancia de Hausdorff simplificada cuando $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{B}$, el error relativo $e_r(N)$ y una ilustración del exceso geométrico $\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}_N$.

A.1. Formulación geométrica

Se considera un polígono regular de N lados inscrito en una circunferencia de radio r . La frontera del politopo se define mediante N semiplanos cuyas normales unitarias exteriores $\hat{n}_i$ apuntan hacia los ángulos bisectores [9]:

$$\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\pi}{N}, \quad \hat{n}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{A.1})$$

La distancia perpendicular desde el origen a cada lado (apotema) es

$$a = r \cos\left(\frac{\pi}{N}\right). \quad (\text{A.2})$$

El conjunto admisible politópico se escribe como

$$\mathcal{P}_N = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z} \mid \mathbf{H}_\mathcal{P} \mathbf{z} \leq b_\mathcal{P} \mathbf{1}_N\}, \quad \mathbf{H}_\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \theta_N & \sin \theta_N \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

con $b_P = a$. El disco exacto es

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z} \mid \|\mathbf{z}\|_2 \leq r\}. \quad (\text{A.4})$$

Por construcción, $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{B}$: el politopo inscrito es una aproximación del disco [10]. Los puntos admisibles para el círculo pero rechazados por el politopo pertenecen a $\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}_N$.

A.2. Distancia de Hausdorff simplificada

Geoméricamente, d_H mide la diferencia radial del círculo respecto del politopo. En un polígono regular inscrito, los vértices coinciden con la circunferencia, mientras que el máximo se alcanza en el punto medio de cada cara: desde ahí, la normal exterior intersecta la circunferencia dentro del sector anaranjado $\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}_N$ (Figura A.1). La longitud de ese segmento se expresa como:

$$d_H(\mathcal{P}_N, \mathcal{B}) = r - a = r \left(1 - \cos \frac{\pi}{N}\right) \quad (\text{A.5})$$

A.3. Error relativo y convergencia

El error relativo de la aproximación se define como

$$e_r(N) = \frac{d_H(\mathcal{P}_N, \mathcal{B})}{r} = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{N}\right). \quad (\text{A.6})$$

Al refinar N , la holgura decrece y el politopo converge al círculo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_H(\mathcal{P}_N, \mathcal{B}) = \lim_{N \rightarrow \infty} r \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{N}\right)\right] = 0. \quad (\text{A.7})$$

Esto justifica que el QP con politopo inscrito se aproxime arbitrariamente al QCQP/SOCP circular cuando N aumenta, aunque el costo del problema crece linealmente con el número de caras [3].

A.4. Ilustración del exceso $\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}_N$

La Figura A.1 muestra un pentágono regular inscrito ($N = 5$, $r = 1$, $e_r \approx 19,1\%$) generado en MATLAB. El relleno anaranjado representa el conjunto $\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}_N$: trayectorias factibles para la restricción circular que el politopo rechaza. El segmento discontinuo parte del punto medio de una cara del politopo (azul), sigue la normal exterior hasta la circunferencia (naranja) y tiene longitud d_H . En los vértices no hay diferencia; la holgura máxima se mide en las caras.

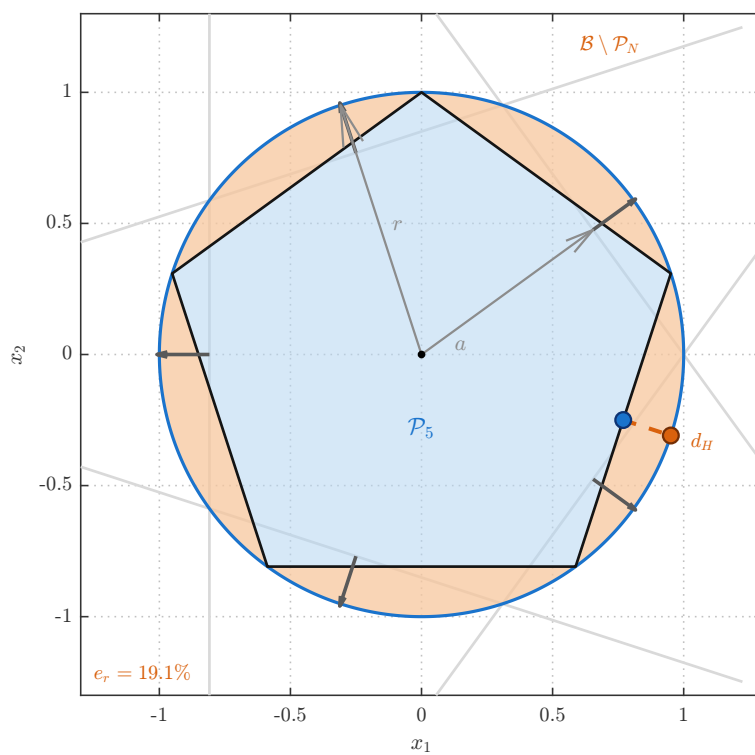


Figura A.1: Polítopo regular inscrito $\mathcal{P}_5$ en el disco $\mathcal{B}$ ($r = 1$, $e_r \approx 19,1\%$).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] I. A. Acosta Brito, “Reinforcement learning-based primary control for DER units integration in AC microgrids,” Tesis de Magister en Ciencias de la Ingeniería Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile, 2025.
- [2] E. Camacho and C. Bordons, *Model Predictive Control*. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [3] F. Borrelli, A. Bemporad, and M. Morari, *Predictive Control for Linear and Hybrid Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- [4] B. Karg and S. Lucia, “Efficient representation and approximation of model predictive control laws via deep learning,” 06 2018.
- [5] S. Chen, K. Saulnier, N. Atanasov, D. D. Lee, V. Kumar, G. J. Pappas, and M. Morari, “Approximating explicit model predictive control using constrained neural networks,” in *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, 2018, pp. 1520–1527.
- [6] J. Katz, I. Pappas, S. Avraamidou, and E. N. Pistikopoulos, “The integration of explicit mpc and relu based neural networks,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, no. 2, pp. 11 350–11 355, 2020, 21st IFAC World Congress. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896320308429>
- [7] Y. Cao and R. Gopaluni, “Deep neural network approximation of nonlinear model predictive control,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, pp. 11 319–11 324, 01 2020.
- [8] A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. N. Pistikopoulos, “The explicit linear quadratic regulator for constrained systems,” *Automatica*, vol. 38, no. 1, pp. 3–20, 2002. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109801001741>
- [9] D. A. Brannan, M. F. Esplen, and J. J. Gray, *Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [10] C. N. Jones and M. Morari, “Polytopic approximation of explicit model predictive controllers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 11, pp. 2542–2553, 2010.