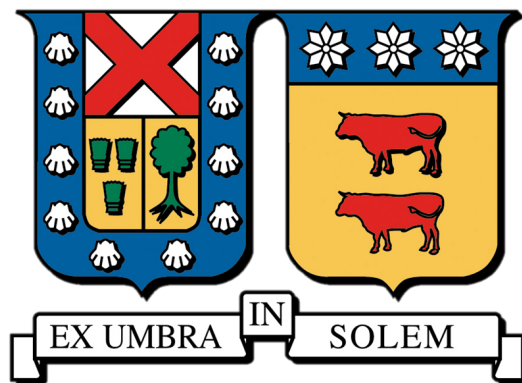


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA



MODELAMIENTO Y CONTROL ÓPTIMO DE UNA
CORREA TRANSPORTADORA DE MINERAL CON
PERTURBACIONES ESTOCÁSTICAS.

LUKAS LUCIANO SERRANO ROMERO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELECTRÓNICO

PROFESOR GUÍA: ALEJANDRO MARIO SUÁREZ SOTOMAYOR

PROFESOR CO-REFERENTE: DANIEL ANDRÉS ERRAZ LEVAGGI

MAR-2024

Resumen

Este trabajo es acerca del modelado fenomenológico de una correa transportadora de mineral con perturbaciones estocásticas a la cual se le controla la velocidad mediante un esquema de control óptimo.

Temas como el modelado de la correa transportadora de mineral, ya sea en términos de funcionamiento, composición de ésta, beneficios y desafíos que pueda presentar son tratados a lo largo del trabajo para así poder simular una correa transportadora de mineral fiel a la realidad a la cuál se le aplica un esquema de control óptimo que optimiza las actuación sobre ésta a lo largo del tiempo, esto con la ayuda del entorno de programación y simulación MATLAB/Simulink, el cuál permite simular y ver el comportamiento de todas las variables necesarias.

Temas relacionados: modelado fenomenológico, método ALLIS CHALMERS para diseño de correas, correa transportadora de mineral, perturbaciones estocásticas, representación en variables de estado, MATLAB/Simulink, control óptimo, controlabilidad, observabilidad, ley de control óptimo, ganancia observador óptimo.

Abstract

This work is about the phenomenological modeling of a mineral conveyor belt with stochastic disturbances whose speed is controlled through a scheme of optimal control.

Topics such as the modeling of the mineral conveyor belt, whether in terms of its operation, its composition, benefits and challenges that it may present, are treated throughout the work. Work in order to simulate a mineral conveyor belt faithful to reality to which an optimal control scheme is applied. Optimal control that optimizes the actions on it over time, this with the help of the MATLAB/Simulink programming and simulation environment, which allows you to simulate and see the behavior of all the necessary variables.

Related topics: phenomenological modeling, ALLIS CHALMERS method for belt design, mineral conveyor belt, stochastic perturbations, representation in state variables, MATLAB/Simulink, optimal control, controllability, observability, optimal control law, optimal observer gain .

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi familia por su inquebrantable apoyo y amor durante este arduo proceso. Sin su constante aliento y comprensión, este logro no habría sido posible.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi tutor por su invaluable orientación, paciencia y sabiduría a lo largo de este viaje académico. Sus consejos y conocimientos han sido fundamentales para el desarrollo de este proyecto.

Agradezco de corazón a mis amigos y seres queridos por estar siempre presentes, brindándome ánimo y motivación en los momentos más difíciles. Su apoyo incondicional ha sido mi mayor fortaleza.

Finalmente, quiero agradecer a todas las personas que de una forma u otra contribuyeron a la realización de este proyecto, ya sea con sus palabras de aliento, su colaboración directa o su inspiración. Su generosidad y apoyo han dejado una huella imborrable en este camino hacia la culminación de mis estudios universitarios. Este logro es también de ustedes. Gracias, de todo corazón.

”La gratitud es la memoria del corazón.” - Jean Baptiste Massieu

Tabla de Contenidos

1	Introducción	1
2	Objetivos y Alcances	2
2.1	Trabajo a desarrollar	2
2.2	Evaluaciones a realizar	3
2.3	Resultados esperados	3
3	Trabajo realizado	4
3.1	Requerimientos de la correa a modelar	4
3.1.1	Determinación del ancho de la correa	5
3.1.2	Determinación de la potencia requerida	7
3.1.3	Determinación de la potencia requerida por el motor	9
3.2	Modelamiento no lineal de la correa transportadora de mineral	9
3.3	Estructurando el problema	10
3.3.1	Variable de entrada al sistema total	10
3.3.2	Variables a observar del sistema total	10
3.3.3	Componentes de cada subsistema	10
3.3.4	Subsistema eléctrico	11
3.3.5	Subsistema rotacional	13
3.3.6	Subsistema de traslación	17
3.4	Representación en variables de estado	19
3.4.1	Variables de estado	19
3.4.2	Ecuaciones de estado de cada subsistema y sus interconexiones . . .	20
3.4.3	Puntos de equilibrio del Sistema	23
3.4.4	Representación matricial	24
3.5	Simulación de la correa transportadora	26
3.5.1	Sistema no lineal	26
3.5.2	Sistema lineal	30
3.6	Teoría de control óptimo para aplicar en la correa transportadora	35
3.6.1	Sistema de control con realimentación de la salida	35

3.6.2	Regulación de sistemas con mediciones incompletas	35
3.6.3	Regulador lineal óptimo con mediciones incompletas y con ruidos .	40
3.7	Aplicando control óptimo a la correa transportadora	43
3.7.1	Controlabilidad	45
3.7.2	Observabilidad	46
3.7.3	Determinación de la ley de control óptimo	46
3.7.4	Determinación de la ganancia del observador óptimo	47
3.7.5	Determinación de filtro de entrada	48
3.7.6	Simulación del control óptimo	49
3.8	Aplicando control óptimo	51
3.8.1	Control óptimo en el rango de variación de velocidad de la correa .	51
3.8.2	Control óptimo con cambio de granulidad del material	62
3.8.3	Control óptimo sobre una correa sin mantención	67
4	Resultados	83
4.1	Control óptimo en el rango de variación de velocidad de la correa	83
4.1.1	Control óptimo a 0.8 [m/s]	83
4.1.2	Control óptimo a 1 [m/s]	84
4.1.3	Control óptimo a 1.2 [m/s]	84
4.2	Control óptimo con cambio de granulidad del material	85
4.2.1	Control óptimo a 0.8 [m/s] con distintas granulidades	85
4.3	Control óptimo sobre una correa sin mantención	85
4.3.1	Control óptimo a 0.8 [m/s]	85
4.3.2	Control óptimo a 1 [m/s]	86
4.3.3	Control óptimo a 1.2 [m/s]	86
5	Conclusiones y Recomendaciones	87

Lista de Figuras

3.1	Tabla N°3 : Ancho de correa v/s tamaño máximo del material	5
3.2	Tabla N°4 : Velocidad máxima recomendada por tipo de material ([m/s]) .	6
3.3	Tabla N°1 : Capacidad de transporte a 1 [m/s]	7
3.4	Tabla N°8 : Factor N_v [Hp] en función del largo y ancho de la correa . . .	8
3.5	Tabla N°9 : Factor N_1 [Hp] en función del largo de la correa	8
3.6	Modelo simplificado de la correa transportadora a modelar	10
3.7	Diagrama de bloques de la conexión entre los subsistemas.	11
3.8	Motor y su equivalente eléctrico	12
3.9	Caja reductora de velocidad y su equivalente eléctrico	14
3.10	Eje con sus soportes y su equivalente eléctrico	14
3.11	Rodillo y su equivalente eléctrico	15
3.12	Carga que debe mover el rodillo y su equivalente eléctrico	17
3.13	Equivalente eléctrico del sistema completo.	19
3.14	Sistema no lineal con su entrada y salida.	26
3.15	Representación ecuaciones sistema no lineal.	27
3.16	Corriente en el inductor sistema no lineal.	27
3.17	Voltaje inducido en el motor sistema no lineal.	28
3.18	Torque de torsión en el eje sistema no lineal.	28
3.19	Velocidad angular del rodillo sistema no lineal.	29
3.20	Aceleración angular del rodillo sistema no lineal.	29
3.21	Velocidad lineal de la correa sistema no lineal.	30
3.22	Sistema lineal con su entrada y salida.	30
3.23	Representación ecuaciones sistema lineal.	31
3.24	Corriente en el inductor sistema lineal.	32
3.25	Voltaje inducido en el motor sistema lineal.	32
3.26	Torque de torsión en el eje sistema lineal.	33
3.27	Velocidad angular del rodillo sistema lineal.	33
3.28	Aceleración angular del rodillo sistema lineal.	34
3.29	Velocidad lineal de la correa sistema lineal.	34
3.30	Estructura de un S.C. con R.S.	36

3.31	Sistema de control simplificado con realimentación de la salida	37
3.32	Regulador lineal óptimo con mediciones incompletas del estado y ruido en la medición.	43
3.33	Diagrama de bloque del sistema con control óptimo.	49
3.34	Diagrama de bloque del modelo lineal	50
3.35	Diagrama de bloque observador óptimo.	50
3.36	Velocidad lineal de la correa con control óptimo. (0.8 [m/s]).	52
3.37	Actuación sobre el sistema con control óptimo.(0.8 [m/s]).	53
3.38	Corriente en el inductor $i_L(t)$. (0.8[m/s]).	53
3.39	Torque de torsión del eje $M_c(t)$. (0.8 [m/s]).	54
3.40	Velocidad angular del eje $w_J(t)$. (0.8[m/s]).	54
3.41	Masa variable de material $m_v(t)$. (0.8[m/s]).	55
3.42	Velocidad lineal de la correa con control óptimo. (1 [m/s]).	56
3.43	Actuación sobre el sistema con control óptimo.(1[m/s]).	56
3.44	Corriente en el inductor $i_L(t)$. (1[m/s]).	57
3.45	Torque de torsión del eje $M_c(t)$. (1 [m/s]).	57
3.46	Velocidad angular del eje $w_J(t)$. (1[m/s]).	58
3.47	Masa variable de material $m_v(t)$. (1[m/s]).	58
3.48	Velocidad lineal de la correa con control óptimo. (1.2 [m/s]).	59
3.49	Actuación sobre el sistema con control óptimo.(1.2[m/s]).	59
3.50	Corriente en el inductor $i_L(t)$. (1.2[m/s]).	60
3.51	Torque de torsión del eje $M_c(t)$. (1.2 [m/s]).	60
3.52	Velocidad angular del eje $w_J(t)$. (1.2[m/s]).	61
3.53	Masa variable de material $m_v(t)$. (1.2[m/s]).	61
3.54	Sistema lineal con su entrada y salida.	62
3.55	Representación ecuaciones sistema lineal.	63
3.56	Velocidad lineal de la correa (0.8[m/s]) para distintas granulidades del ma- terial con y sin control óptimo.	64
3.57	Velocidad lineal de la correa (1[m/s]) para distintas granulidades del ma- terial con y sin control óptimo.	65
3.58	Velocidad lineal de la correa (1[m/s]) para distintas granulidades del ma- terial con y sin control óptimo.	66
3.59	Carga que debe mover el rodillo y su equivalente eléctrico	67
3.60	Velocidad lineal de la correa (0.8 [m/s]) con y sin mantención	68
3.61	Voltaje de actuación sobre de la correa (0.8 [m/s]) con y sin mantención . .	69
3.62	Corriente en el inductor con la correa (0.8 [m/s]) con y sin mantención . .	70
3.63	Torque de torsión del eje con la correa (0.8 [m/s]) con y sin mantención . .	71

3.64	Velocidad angular del eje con la correa (0.8 [m/s]) con y sin mantención . .	72
3.65	Velocidad lineal de la correa (1 [m/s]) con y sin mantención	73
3.66	Voltaje de actuación sobre de la correa (1 [m/s]) con y sin mantención . .	74
3.67	Corriente en el inductor con la correa (1 [m/s]) con y sin mantención . .	75
3.68	Torque de torsión del eje con la correa (1 [m/s]) con y sin mantención . .	76
3.69	Velocidad angular del eje con la correa (1 [m/s]) con y sin mantención . .	77
3.70	Velocidad lineal de la correa (1.2 [m/s]) con y sin mantención	78
3.71	Voltaje de actuación sobre de la correa (1.2 [m/s]) con y sin mantención . .	79
3.72	Corriente en el inductor con la correa (1.2 [m/s]) con y sin mantención . .	80
3.73	Torque de torsión del eje con la correa (1.2 [m/s]) con y sin mantención . .	81
3.74	Velocidad angular del eje con la correa (1.2 [m/s]) con y sin mantención . .	82

Capítulo 1

Introducción

En el ámbito de la ingeniería y la ciencia, el modelamiento y control óptimo de sistemas con perturbaciones estocásticas constituye un desafío fundamental y de creciente relevancia. Estas perturbaciones, inherentes a numerosos sistemas dinámicos, introducen incertidumbre y complejidad en su comportamiento, lo que dificulta su análisis y control efectivo. En este contexto, la presente tesis aborda la problemática del modelamiento y control óptimo sobre un sistema sujeto a perturbaciones estocásticas, con el objetivo de desarrollar estrategias eficaces para mitigar sus efectos y mejorar su desempeño.

La presencia de perturbaciones estocásticas en sistemas dinámicos plantea diversos desafíos, entre los cuales se destacan la necesidad de comprender y caracterizar adecuadamente su naturaleza, así como de diseñar estrategias de control que sean robustas ante su influencia. Esta problemática adquiere una relevancia aún mayor en aplicaciones prácticas, donde la precisión y la estabilidad del sistema son cruciales para su funcionamiento óptimo.

La relevancia de este trabajo radica en su potencial contribución al avance del conocimiento en el campo del control de sistemas dinámicos sujetos a incertidumbre, así como en su aplicabilidad en diversos sectores de la ingeniería y la ciencia. La comprensión y la capacidad de controlar sistemas con perturbaciones estocásticas no solo permitirá mejorar el rendimiento y la fiabilidad de numerosos sistemas, sino que también abrirá nuevas posibilidades para el desarrollo de tecnologías más avanzadas y eficientes.

En resumen, la presente tesis se propone abordar la problemática del modelamiento y control óptimo sobre un sistema con perturbaciones estocásticas, con el objetivo de contribuir al desarrollo de estrategias efectivas para mitigar su influencia y mejorar su desempeño en diversas aplicaciones prácticas.

Capítulo 2

Objetivos y Alcances

En el presente proyecto el objetivo principal es llegar a aplicar la estrategia de control óptimo sobre una correa transportadora de mineral con perturbaciones estocásticas, para llegar a aquello se llevaran a cabo varios objetivos más pequeños donde podemos encontrar:

- Hacer el modelamiento de una correa básica distribuidora de mineral que recibe de una tolva, con material de densidad y cantidad variable (estocástica).
- Controlar la velocidad de la correa usando Control óptimo.
- Disminuir el efecto de las perturbaciones.
- Manejar las actuaciones dentro del rango de trabajo de la correa.

2.1 Trabajo a desarrollar

Se procederá a aplicar el control óptimo al modelo de la correa transportadora, pero para eso se tiene que llevar a cabo primero, en orden cronológico:

- Modelamiento no lineal de la correa.
- Linealización en un punto de operación.
- Aplicación control óptimo.
- Simulación en Simulink.
- Determinar situaciones críticas de funcionamiento.

2.2 Evaluaciones a realizar

Una vez realizado lo anteriormente descrito y tener la simulación con el proceso de control simulado y funcionando, se procederá a realizar las siguientes evaluaciones:

- Comportamiento del modelo en situaciones anormales por definir.
- Determinar rango máximo aceptable de las perturbaciones.

2.3 Resultados esperados

Al llegar al trayecto final del proyecto bajo las condiciones dadas, se espera tener una mejor atenuación de los efectos de las perturbaciones en la velocidad de la correa, así como también se espera tener actuaciones dentro del rango de trabajo de los modelos linealizados, además se analizarán las características de la granulometría del mineral entrando a la correa, y dependiendo de los resultados del trabajo se podrían analizar otros resultados.

Capítulo 3

Trabajo realizado

3.1 Requerimientos de la correa a modelar

Se establecerán primeramente los requerimientos de la correa a modelar, para luego mediante el 'método ALLIS CHALMERS para el diseño de correas'[1] calcular el ancho de la correa y la potencia requerida del motor, estos parámetros son:

- Ángulo de reposo del material (α)
- Ángulo de inclinación de los rodillos (β).
- Tamaño máximo de partícula.
- Densidad del material.
- Tipo de material.
- Capacidad a transportar.
- Flujo volumétrico a transportar.
- Periodo de operación.
- Ángulo de inclinación de la correa.
- Largo de la correa.

Para nuestro caso se ha definido lo siguiente:

- Ángulo de reposo del material (α): 20°
- Ángulo de inclinación de los rodillos (β): 35°

- Tamaño máximo de partícula: $8[\text{pulgadas}] = 203.2[\text{mm}] = 0.025[\text{m}]$
- Densidad del material: $83.3[\text{Kg}/\text{m}^3] = 0.083[\text{Ton}/\text{m}^3]$
- Tipo de material: Promedio
- Capacidad a transportar: $1.25[\text{Ton}/\text{hr}]$
- Flujo volumétrico a transportar: $135[\text{m}^3/\text{hr}]$
- Periodo de operación: $24[\text{Horas}]$
- Ángulo de inclinación de la correa: $0[^\circ]$
- Largo de la correa: $100[\text{m}]$

3.1.1 Determinación del ancho de la correa

La figura 3.1 muestra que para un ' α ' de $20[^\circ]$, β de $35[^\circ]$, columna '90% gruesos - 10% finos', tamaño máximo de partícula de 8", se obtiene un ancho de correa de 24".

ANCHO CORREA (pulg)	TAMAÑO MÁXIMO DEL MATERIAL											
	$\alpha = 10^\circ$				$\alpha = 20^\circ$				$\alpha = 30^\circ$			
	90% gruesos		100% gruesos		90% gruesos		100% gruesos		90% gruesos		100% gruesos	
	10% finos				10% finos				10% finos			
	mm	pulg	mm	pulg	mm	pulg	mm	pulg	mm	pulg	mm	pulg
16	203	8	135	6	135	6	81	3 3/16	68	2 5/8	41	1 9/16
20	254	10	189	6	189	6	102	4	85	3	51	2
24	305	12	203	8	203	8	122	4 3/4	102	4	61	2 3/8
30	381	15	254	10	254	10	152	6	127	5	76	3
36	457	18	305	12	305	12	183	7 3/16	152	6	91	3 5/8
42	533	21	358	14	358	14	213	8 3/8	178	7	107	4 3/16
48	610	24	406	16	406	16	244	9 9/16	203	8	122	4 3/4
54	686	27	457	18	457	18	274	10 3/4	229	9	137	5 3/8
60	762	30	508	20	508	20	305	12	254	10	152	6
66	838	33	559	22	559	22	335	13	279	11	168	6 5/8
72	914	36	610	24	610	24	366	14 3/8	305	12	183	7 3/16

Figura 3.1: Tabla N°3 : Ancho de correa v/s tamaño máximo del material

Este ancho se debe verificar con la velocidad que entrega la figura 3.2, la cual entrega una velocidad de $2.5[\text{m/s}]$. Según catálogos, se recomienda para correas nuevas una velocidad no superior a $2[\text{m/s}]$. Por lo tanto se debe recalcular este valor para estar dentro de los requerimientos adecuados.

BELT WIDTH (B)	CERRALS AND OTHER FREE-FLOWING NON-ABRASIVE MATERIALS	COAL EARTH CRUSHED ORE, FINE CRUSHED ROCK LIGHTLY ABRASIVE	HARD.SHARP-EDGED ORE AND ROCK HIGHLY ABRASIVE
16"	2.5	1.6	1.6
20"	3.0	2.0	1.8
24"	3.0	2.5	2.3
30"	3.6	3.0	2.8
36"	4.1	3.3	3.0
42"	4.1	3.6	3.0
48"	4.6	3.6	3.3
54"	5.1	3.6	3.3
60"	5.1	3.6	3.3
66"	-	4.1	3.8
72"	-	4.1	3.8

Figura 3.2: Tabla N°4 : Velocidad máxima recomendada por tipo de material ([m/s])

De la figura 3.3, para una ancho de correa de 24", un β de 35° y un 'a' de 20° , la capacidad de la correa es de $135[m^3/hr]$ a una velocidad de 1 [m/s], para una correa con pendiente cero. Para el calculo de la velocidad requerida según el 'método ALLIS CHALMERS para el diseño de correas' y los requerimientos nuestros se tiene:

$$V_{requerida} = \frac{F_{vt}[m^3/hr] * 1[m/s]}{C_{v1}[m^3/hr]}$$

Donde:

F_{vt} : Flujo volumétrico a transportar

C_{v1} : capacidad de la correa a una velocidad de 1 [m/s]

$$V_{requerida} = \frac{135[m^3/hr] * 1[m/s]}{135[m^3/hr]}$$

$$V_{requerida} = 1[m/s]$$

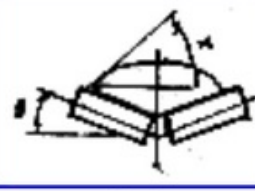
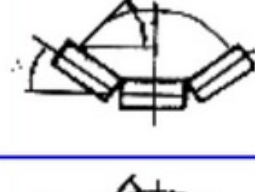
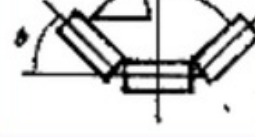
IDLERS	TIPICAL CROSS SECTION	ANGLE OF REPOSE OF MATERIAL	BELT WIDTH										
			16"	20"	24"	30"	36"	42"	48"	54"	60"	72"	84"
FLAT $\beta = 0^{\circ}$		0°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		5°	4	7	10	17	25	36	44	69	74	108	163
		10°	10	16	26	40	89	82	100	140	174	264	369
		15°	18	26	39	63	93	129	163	219	272	397	660
		20°	21	35	52	86	125	173	218	293	365	532	777
		25°	26	44	66	107	158	219	266	371	461	673	948
		30°	32	63	80	130	192	265	334	449	559	816	1021
WITH 2 IDENTICAL ROLLS $\beta = 20^{\circ}$		0°	38	47	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		5°	40	58	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		10°	46	63	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		15°	51	70	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		20°	58	78	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		25°	62	86	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		30°	68	96	-	-	-	-	-	-	-	-	-
WITH 3 IDENTICAL ROLLS $\beta = 20^{\circ}$		0°	-	-	58	96	141	197	261	335	418	-	-
		5°	-	-	69	114	169	238	313	401	500	-	-
		10°	-	-	82	134	199	277	387	470	686	-	-
		15°	-	-	94	164	228	318	424	539	672	-	-
		20°	-	-	107	174	268	359	476	609	759	-	-
		25°	-	-	120	196	290	402	533	682	849	-	-
		30°	-	-	133	217	321	445	590	768	940	-	-
WITH 3 IDENTICAL ROLLS $\beta = 35^{\circ}$		0°	-	-	93	152	226	314	417	535	666	977	1341
		5°	-	-	103	169	260	348	462	592	738	1078	1488
		10°	-	-	114	186	276	384	509	652	812	1188	1631
		15°	-	-	125	204	302	419	556	711	885	1296	1779
		20°	-	-	135	221	328	455	603	772	961	1403	1929
		25°	-	-	147	240	355	492	652	835	1040	1617	2083
		30°	-	-	168	268	382	530	702	898	1118	1631	2242
WITH 3 IDENTICAL ROLLS $\beta = 45^{\circ}$		0°	-	-	109	179	265	369	490	627	782	1143	1672
		5°	-	-	118	194	287	399	529	678	845	1233	1697
		10°	-	-	128	209	309	430	570	729	999	1326	1822
		15°	-	-	137	224	331	460	610	780	972	1419	1960
		20°	-	-	147	239	364	492	651	833	1038	1514	2079
		25°	-	-	157	266	378	524	694	888	1106	1613	2212
		30°	-	-	166	271	401	558	737	912	1173	1711	2349

Figura 3.3: Tabla N°1 : Capacidad de transporte a 1 [m/s]

3.1.2 Determinación de la potencia requerida

De la figura 3.4, para un largo de correa de 100[m] y un ancho de correa de 24", se tiene $N_v = 2.06[Hp]$.

BELT WIDT H (B)	N _v (HP)												
	CONVEYOR LENGTH												
	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100	110
16"	0.37	0.47	0.54	0.61	0.70	0.80	0.90	1.01	1.10	1.20	1.31	1.42	1.53
20"	0.45	0.55	0.64	0.72	0.81	0.95	1.09	1.20	1.32	1.43	1.54	1.67	1.80
24"	0.57	0.70	0.83	0.91	1.01	1.20	1.33	1.52	1.67	1.80	1.92	2.06	2.19
30"	0.69	0.81	0.97	1.10	1.22	1.44	1.66	1.83	2.04	2.19	2.39	2.55	2.71
36"	0.75	0.94	1.08	1.23	1.35	1.58	1.80	2.03	2.24	2.45	2.64	2.84	3.03
42"	0.85	1.01	1.22	1.39	1.54	1.80	2.04	2.28	2.52	2.76	2.95	3.17	3.38
48"	1.02	1.20	1.32	1.64	1.80	2.13	2.40	2.71	2.98	3.23	3.48	3.74	4.00

Figura 3.4: Tabla N°8 : Factor N_v [Hp] en función del largo y ancho de la correa

De la figura 3.5, para un largo de correa de 100[m], se tiene $N_1 = 1.87[Hp]$.

L (m)	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100	110
N ₁ (HP)	0.50	0.63	0.74	0.81	0.95	1.11	1.25	1.42	1.50	1.64	1.75	1.87	2.00

Figura 3.5: Tabla N°9 : Factor N_1 [Hp] en función del largo de la correa

Entonces:

$$N_c = (V_R * N_v * N_g) + (N_1 + N_h) * \left(\frac{flujomasico}{100} \right)$$

Donde:

N_c : Potencia requerida

V_r : Velocidad requerida = 1[m/s]

N_v : Factor $N_v = 2.06[Hp]$

N_g : Factor $N_g = 0[Hp]$ debido a que en nuestro caso no se cuenta con skirtboards.

N_1 : Factor $N_1 = 1.87[Hp]$

N_h : Factor $N_h = 0[Hp]$ debido a que en nuestro caso la correa no presenta inclinación, y este factor esta relacionado con la diferencia de altura entre el inicio y final de la correa.

Flujo másico = 1.25 [Ton/hr]

Entonces:

$$N_c = 0,023375[Hp]$$

3.1.3 Determinación de la potencia requerida por el motor

Asumiendo una eficiencia de un 75% por efecto de algunas pérdidas, se tiene:

$$N_{motor} = \frac{N_c}{Eficiencia}$$

$$N_{motor} = 0,03[Hp]$$

3.2 Modelamiento no lineal de la correa transportadora de mineral

Se desea obtener un modelo matemático del proceso asociado a la correa transportadora de mineral de manera simplificada, para ello se modelará tanto el tren motriz de la correa, formado por el motor eléctrico, una caja reductora de engranajes y un rodillo, y la correa en si.

El modelamiento del sistema motriz se muestra a continuación en la figura 3.6, con el fin de analizar la velocidad lineal que proporciona el rodillo a la correa. Elementos a destacar para el modelamiento son:

- Hay roce viscoso entre los ejes y los soportes.
- El eje entre la caja reductora y el rodillo sufre torsión.
- La correa se modelará como una masa que es tirada por la fuerza que produce el rodillo.
- El material sobre la correa se modelará como una masa con un valor constante (valor medio) y una masa variable (perturbación).
- Los polines de carga ejercen fuerza de roce viscoso a la correa.

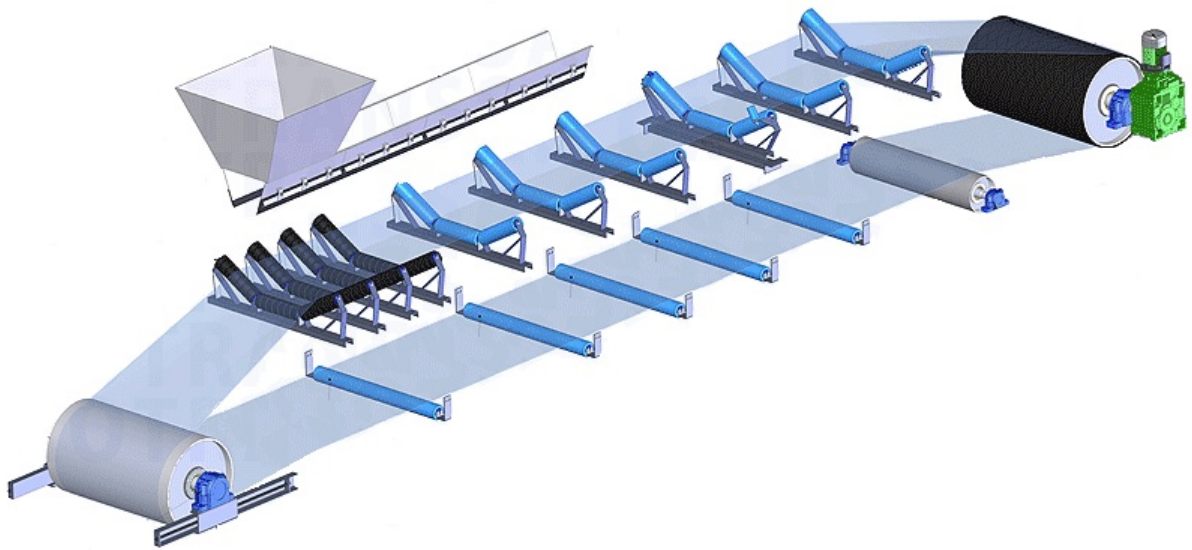


Figura 3.6: Modelo simplificado de la correa transportadora a modelar

3.3 Estructurando el problema

3.3.1 Variable de entrada al sistema total

La entrada del sistema es un voltaje, el cual alimenta el motor DC.

$$U(t) = \text{Voltaje de entrada al sistema [V]}$$

3.3.2 Variables a observar del sistema total

$$V_c(t) = \text{Velocidad lineal de la correa [m/s]}$$

3.3.3 Componentes de cada subsistema

El sistema total se dividirá para su posterior análisis en tres diferentes subsistemas, entre los cuales se encuentran:

- Subsistema eléctrico.
- Subsistema rotacional.
- Subsistema de traslación.

Descripción y componentes de cada subsistema:

- Subsistema eléctrico: Este subsistema se encuentra compuesto por un motor DC , el cual es el encargado de mover todo el sistema.
- Subsistema rotacional: Este subsistema se encuentra compuesto por:
 - Caja reductora de velocidad.
 - Eje que sufre torsión.
 - Rodillo motriz.
 - Soportes, tanto del eje como del rodillo.
- Subsistema de traslación: Este subsistema se encuentra compuesto por:
 - Correa transportadora.
 - Material que será transportado.
 - Polines de carga.

La conexión entre estos subsistemas y las variables de interconexión entre ellos quedan explicadas en la figura 3.7 a continuación:

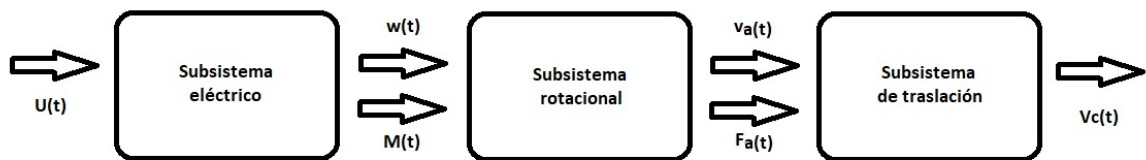


Figura 3.7: Diagrama de bloques de la conexión entre los subsistemas.

3.3.4 Subsistema eléctrico

Como componentes del subsistema eléctrico podemos encontrar:

- Motor.

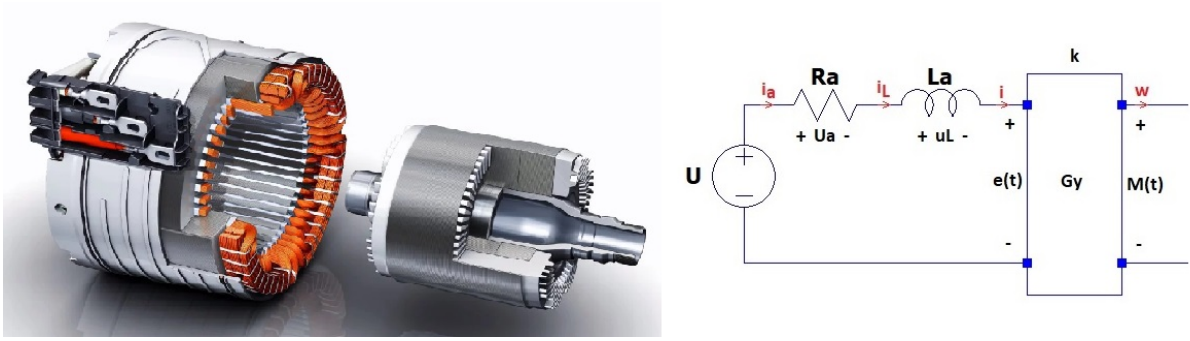


Figura 3.8: Motor y su equivalente eléctrico

En la figura 3.8 se observa un motor eléctrico y su equivalente eléctrico.

3.3.4.1 Variable de entrada

La variable de entrada del subsistema eléctrico es la entrada del sistema total, es decir, un voltaje:

$$U(t) = \text{Voltaje de entrada al sistema [V]}$$

3.3.4.2 Variables observadas

Las variables observadas son:

$$w(t) = \text{Velocidad angular del eje del motor [rad/s]}$$

$$M(t) = \text{Torque en el eje del motor [rad/s]}$$

3.3.4.3 Variables internas

Las variables internas son:

$$u_a(t) = \text{Voltaje en la resistencia de armadura [V]}$$

$$u_L(t) = \text{Voltaje en la inductancia de armadura [V]}$$

$$i_a(t) = \text{Corriente por la resistencia de armadura [A]}$$

$$i_L(t) = \text{Corriente por la inductancia de armadura [A]}$$

$$e(t) = \text{Voltaje inducido por el devanado del motor [V]}$$

$$i(t) = \text{Corriente por el devanado del motor [A]}$$

3.3.4.4 Constantes

Las constantes son:

R_a = Resistencia de armadura del motor DC = 10[Ω]

L_a = Inductancia de armadura del motor DC = 0,01[H]

k = Constante eléctrica del motor = 10[Nm/A]

3.3.4.5 Conexiones y leyes de los componentes

Conexiones:

$$U(t) = u_a(t) + u_L(t) + e(t)$$

$$i(t) = i_a(t) = i_L(t)$$

Leyes de los componentes:

$$u_a(t) = i_a(t) * R_a$$

$$u_L(t) = L_a * \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$e(t) = k * w(t)$$

$$M(t) = k * i(t)$$

En la figura 3.8 se observa un motor eléctrico y su equivalente eléctrico, en éste ultimo se observa una caja denominada ' Gy' ' (girador) el cual es un acople entre subsistemas, como podría ser un transformador donde ambas variables (esfuerzo y flujo) se relacionan pero no entre ellas, es decir, el esfuerzo de un subsistema se relaciona con el esfuerzo del otro subsistema y el flujo de un subsistema se relaciona con el otro mediante una constante, el girador (' Gy' ') hace lo contrario, es decir, relaciona el esfuerzo de un subsistema con el flujo del otro, en este caso, relaciona el Voltaje inducido ' e' ' (esfuerzo) con la velocidad angular ' w' ' (flujo) y relaciona el torque ' M' ' (esfuerzo) con la corriente ' i' ' (flujo) mediante la constante ' k' '.

3.3.5 Subsistema rotacional

Como componentes del subsistema rotacional podemos encontrar:

- Caja reductora de velocidad.

- Resorte rotacional (eje con torsión).
- Roce viscoso de los soportes del eje y de los soportes del rodillo.
- Masa inercial del rodillo.

Componentes y su equivalente eléctrico:

Para la caja reductora de velocidad, el eje y el rodillo con sus respectivos soportes, se tiene:

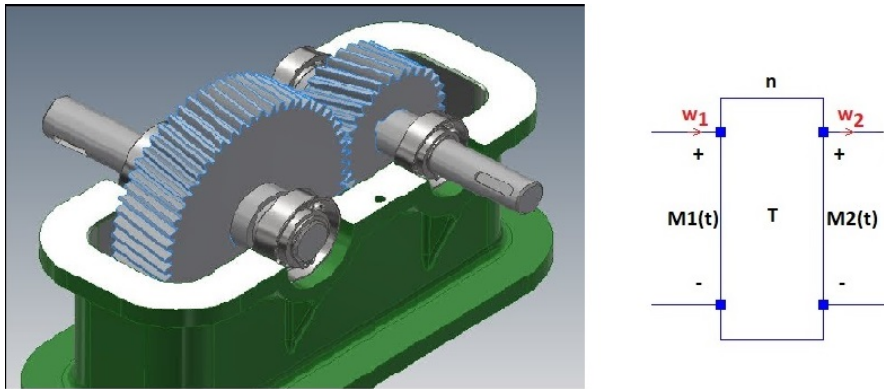


Figura 3.9: Caja reductora de velocidad y su equivalente eléctrico

En la figura 3.9 se observa una caja reductora de velocidad y su equivalente eléctrico, en éste ultimo se observa una caja denominada ' T ' (transformador) el cual es un acople entre subsistemas, donde ambas variables (esfuerzo y flujo) se relacionan sin cruzarse, es decir, el esfuerzo de un subsistema se relaciona con el esfuerzo del otro subsistema y el flujo de un subsistema se relaciona con el otro mediante una constante, en este caso, relaciona el torque ' M_1 ' (esfuerzo) con el torque ' M_2 ' (esfuerzo) y relaciona la velocidad angular ' w_1 ' (flujo) con la velocidad angular ' w_2 ' (flujo) mediante la constante ' n '.

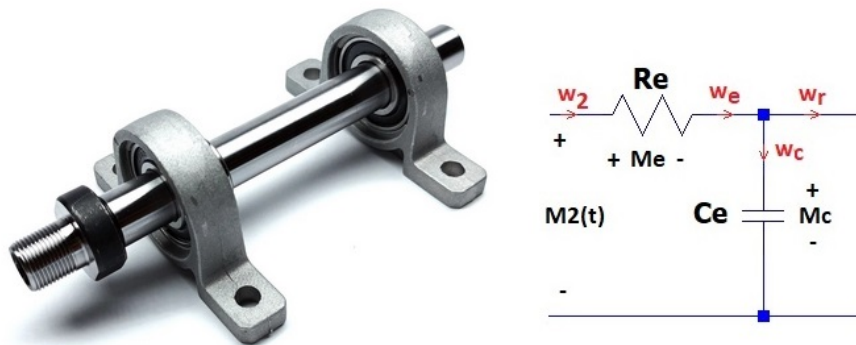


Figura 3.10: Eje con sus soportes y su equivalente eléctrico

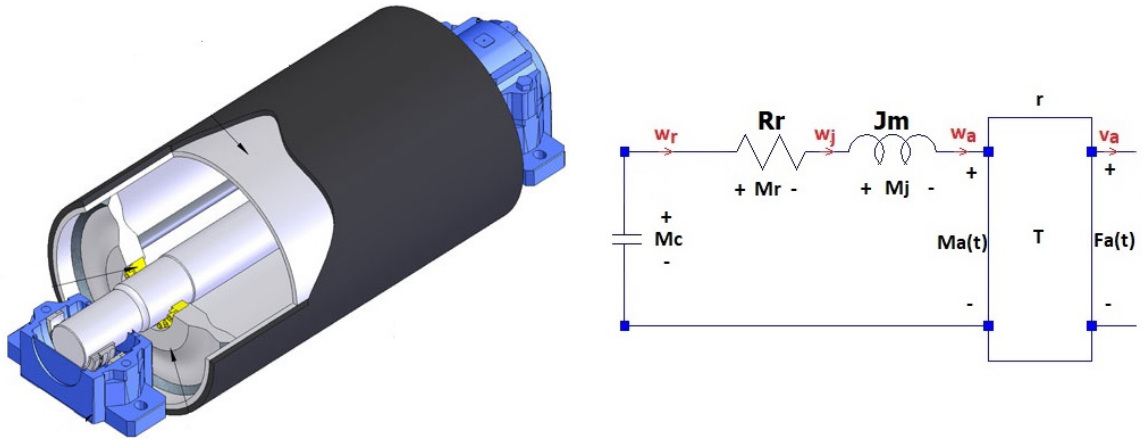


Figura 3.11: Rodillo y su equivalente eléctrico

En la figura 3.11 se observa el rodillo y su equivalente eléctrico, en éste ultimo se observa una caja denominada ' T ' (transformador) el cual es un acople entre subsistemas, donde ambas variables (esfuerzo y flujo) se relacionan sin cruzarse, es decir, el esfuerzo de un subsistema se relaciona con el esfuerzo del otro subsistema y el flujo de un subsistema se relaciona con el otro mediante una constante, en este caso, relaciona el torque ' M_a ' (esfuerzo) con la fuerza ' F_a ' (esfuerzo) y relaciona la velocidad angular ' w_a ' (flujo) con la velocidad lineal ' v_a ' (flujo) mediante la constante ' r '.

3.3.5.1 Variables de entrada

Las variables de entrada del subsistema rotacional son las salidas del subsistema eléctrico, las cuales son:

$$w(t) = \text{Velocidad angular del eje del motor [rad/s]}$$

$$M(t) = \text{Torque en el eje del motor [Nm]}$$

3.3.5.2 Variables observadas

Las variables observadas son:

$$F_a(t) = \text{Fuerza sobre el rodillo debido a la carga [N]}$$

$$v_a(t) = \text{Velocidad lineal de la carga [m/s]}$$

3.3.5.3 Variables internas

Las variables internas son:

- $M_1(t)$ = Torque en el engranaje primario [Nm]
- $w_1(t)$ = Velocidad angular en el engranaje primario [rad/s]
- $M_2(t)$ = Torque en el engranaje secundario [Nm]
- $w_2(t)$ = Velocidad angular en el engranaje secundario [rad/s]
- $M_e(t)$ = Torque de roce viscoso del eje [Nm]
- $w_e(t)$ = Velocidad angular de roce viscoso del eje [rad/s]
- $M_c(t)$ = Torque de torsión del eje [Nm]
- $w_c(t)$ = Velocidad angular de torsión del eje [rad/s]
- $M_r(t)$ = Torque de roce viscoso del rodillo [Nm]
- $w_r(t)$ = Velocidad angular de roce viscoso del rodillo [rad/s]
- $M_J(t)$ = Torque de masa inercial del rodillo [Nm]
- $w_J(t)$ = Velocidad angular del rodillo [rad/s]
- $M_a(t)$ = Torque sobre el rodillo debido a la carga [Nm]
- $w_a(t)$ = Velocidad angular debido a la carga [rad/s]

3.3.5.4 Constantes

Las constantes son:

- n = Relación entre los engranajes = 1[-]
- R_e = Constante de roce viscoso del eje = 1[Nms/rad]
- C_e = Constante de torsión del eje = 1[rad/Nm]
- R_r = Constante de roce viscoso del rodillo = 10[Nms/rad]
- J_m = Masa inercial del rodillo = 0.5[Nms²]
- r = Radio del rodillo = 0.1[m]

3.3.5.5 Conexiones y leyes de los componentes

Conexiones:

- $M(t) = M_1(t)$
- $w(t) = w_1(t)$
- $M_2(t) = M_e(t) + M_c(t)$

$$M_c(t) = M_r(t) + M_J(t) + M_a(t)$$

$$w_2(t) = w_e(t) = w_c(t) + w_a(t)$$

$$w_r(t) = w_J(t) = w_a(t)$$

Leyes de los componentes:

$$M_1(t) = n * M_2(t)$$

$$w_2(t) = n * w_1(t)$$

$$M_e(t) = R_e * w_e(t)$$

$$w_c(t) = C_e * \frac{dM_c(t)}{dt}$$

$$M_r(t) = R_r * w_r(t)$$

$$M_J(t) = J_m * \frac{dw_J(t)}{dt}$$

$$M_a(t) = r * F_a(t)$$

$$v_a(t) = r * w_a(t)$$

3.3.6 Subsistema de traslación

Como componentes del subsistema de traslación podemos encontrar:

- Masa de la correa (energía cinética).
- Masa del material (energía cinética)
- Roce viscoso de los polines de carga.

El equivalente eléctrico de la correa y el material que transporta se encuentra a continuación:

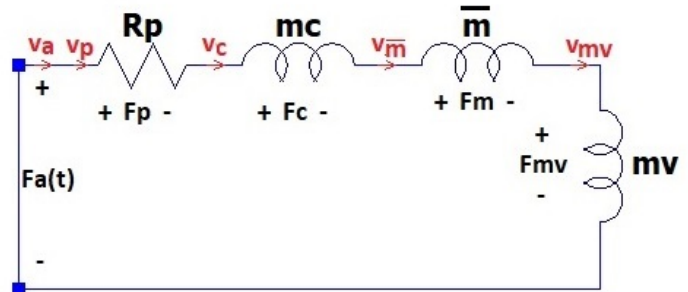


Figura 3.12: Carga que debe mover el rodillo y su equivalente eléctrico

3.3.6.1 Variables de entrada

Las variables de entrada del subsistema de traslación son las salidas del subsistema rotacional, las cuales son:

$$F_a(t) = \text{Fuerza sobre el rodillo debido a la carga [N]}$$

$$v_a(t) = \text{Velocidad lineal de la carga [m/s]}$$

3.3.6.2 Variables observadas

La variable observadas es:

$$V_c(t) = \text{Velocidad lineal de la correa [m/s]}$$

3.3.6.3 Variables internas

Las variables internas son:

$$F_p(t) = \text{Fuerza de roce viscoso de los polines [N]}$$

$$v_p(t) = \text{Velocidad lineal de roce viscoso de los polines [m/s]}$$

$$F_c(t) = \text{Fuerza debida a la masa de la correa } (m_c) \text{ [N]}$$

$$F_{\bar{m}}(t) = \text{Fuerza debida a la masa media del material [N]}$$

$$v_{\bar{m}}(t) = \text{Velocidad lineal de la masa media del material [m/s]}$$

$$F_{mv}(t) = \text{Fuerza debida a la masa variable del material [N]}$$

$$v_{mv}(t) = \text{Velocidad lineal de la masa variable del material [m/s]}$$

3.3.6.4 Constantes

Las constantes son:

$$R_p = \text{Constante de roce viscoso de los polines} = 25[\text{Nms/rad}]$$

$$m_c = \text{masa de la correa} = 100[\text{Kg}]$$

$$\bar{m} = \text{masa media del material} = 1000[\text{Kg}]$$

3.3.6.5 Conexiones y leyes de los componentes

Conexiones:

$$F_a(t) = F_p(t) + F_c(t) + F_{\bar{m}}(t) + F_{mv}(t)$$

$$v_a(t) = v_p(t) = v_c(t) = v_{\bar{m}}(t) = v_{mv}(t)$$

Leyes de los componentes:

$$F_p(t) = R_p(t) * v_p(t)$$

$$F_c(t) = m_c * \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$F_{\bar{m}}(t) = \bar{m} * \frac{dv_{\bar{m}}(t)}{dt}$$

$$F_{mv}(t) = \frac{d(mv(t) * v_{mv}(t))}{dt}$$

Finalmente como equivalente eléctrico del sistema total, se tiene:

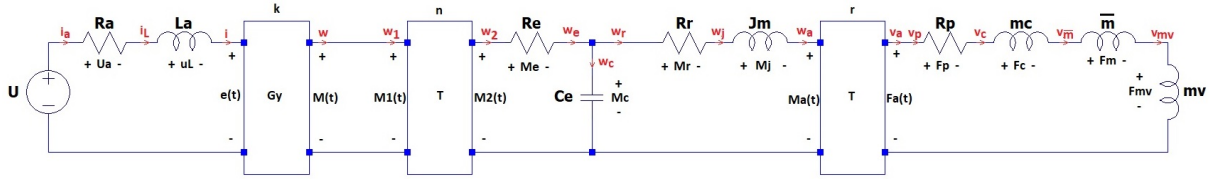


Figura 3.13: Equivalente eléctrico del sistema completo.

En la figura 3.13 se puede observar el diagrama eléctrico equivalente al sistema formado por el motor DC, la caja reductora de velocidad, el eje con torsión con sus soportes, el rodillo con sus soportes, los polines de carga, la correa y el material que debe ser transportado.

3.4 Representación en variables de estado

3.4.1 Variables de estado

Se usan las variables de estado $i_L(t)$, $M_c(t)$, $w_J(t)$ y $m_v(t)$ ya que aparecen derivadas en la ley de los componentes, es decir, conviene usar como variables de estado las variables de los elementos básicos que acumulan energía como la inductancia presente en el motor DC, el eje que presenta torsión (energía potencial), la masa inercial del rodillo (energía cinética rotacional) y la masa del material (energía cinética) .

3.4.2 Ecuaciones de estado de cada subsistema y sus interconexiones

Ahora, se pasará a detallar las ecuaciones de estado para cada subsistema:

3.4.2.1 Subsistema eléctrico

Para el subsistema eléctrico se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L_a} * u_L(t) \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L_a} * (U(t) - u_a(t) - k * w(t)) \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L_a} * (U(t) - i_L(t) * R_a - k * w(t))\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}w(t) = w_1(t) &= \frac{w_2(t)}{n} = \frac{w_e(t)}{n} = \frac{M_e(t)}{n * R_e} = \frac{(M_2(t) - M_c(t))}{n * R_e} \\ &= \frac{(\frac{M_1(t)}{n} - M_c(t))}{n * R_e} = \frac{(\frac{M(t)}{n} - M_c(t))}{n * R_e} = \frac{(\frac{k * i(t)}{n} - M_c(t))}{n * R_e}\end{aligned}$$

Entonces:

$$w(t) = \frac{(k * i(t) - n * M_c(t))}{n^2 * R_e} = \frac{k}{n^2 * R_e} * i(t) - \frac{M_c(t)}{n * R_e}$$

Luego, reemplazando la expresión para $w(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L_a} * [U(t) - i_L(t) * R_a - k * \frac{(k * i_L(t) - n * M_c(t))}{n^2 * R_e}] \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L_a} * [U(t) - (R_a + (\frac{k}{n})^2 * \frac{1}{R_e}) * i_L(t) + \frac{k}{n} * \frac{M_c(t)}{R_e}]\end{aligned}\tag{3.1}$$

3.4.2.2 Subsistema rotacional

Para el subsistema rotacional se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dM_c(t)}{dt} &= \frac{1}{C_e} * w_c(t) \\ \frac{dM_c(t)}{dt} &= \frac{1}{C_e} * (w_2(t) - w_a(t))\end{aligned}$$

$$\frac{dM_c(t)}{dt} = \frac{1}{C_e} * (n * w_1(t) - w_J(t))$$

$$\frac{dM_c(t)}{dt} = \frac{1}{C_e} * (n * w(t) - w_J(t))$$

Reemplazando la expresión encontrada anteriormente para $w(t)$ se tiene:

$$\frac{dM_c(t)}{dt} = \frac{1}{C_e} * \left(\frac{k}{n * R_e} * i_L(t) - \frac{M_c(t)}{R_e} - w_J(t) \right) \quad (3.2)$$

Por otro lado, para el subsistema rotacional, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dw_j(t)}{dt} &= \frac{1}{J_m} * M_J(t) \\ \frac{dw_j(t)}{dt} &= \frac{1}{J_m} * (M_c(t) - M_r(t) - M_a(t)) \\ \frac{dw_j(t)}{dt} &= \frac{1}{J_m} * (M_c(t) - R_r * w_J(t) - r * F_a(t)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cabe destacar que solamente la ecuación (3.3) es no lineal, debido a $F_a(t)$.

3.4.2.3 Subsistema de traslación

Como primera cosa a destacar para el subsistema de traslación, se tiene que para la masa variable $m_v(t)$, la cual corresponde a la parte variable del material se utilizará la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dm_v(t)}{dt} + \beta * m_v(t) &= w_0(t) \\ \frac{dm_v(t)}{dt} &= w_0(t) - \beta * m_v(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

La cual corresponde al modelo lineal de un proceso estocástico excitado con ruido blanco, donde $w_0(t)$ es ruido blanco.

Además para el subsistema de traslación se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} F_{m_v}(t) &= \frac{d(m_v(t) * v_{m_v}(t))}{dt} \\ F_{m_v}(t) &= \frac{d(m_v(t) * v_c(t))}{dt} \\ F_{m_v}(t) &= \frac{dm_v(t)}{dt} * v_c(t) + m_v(t) * \frac{dv_c(t)}{dt} \end{aligned}$$

También:

$$F_{\bar{m}}(t) = \bar{m} * \frac{dv_{\bar{m}}(t)}{dt}$$

$$F_{\bar{m}}(t) = \bar{m} * \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Finalmente:

$$F_a(t) = R_p * v_c(t) + m_c * \frac{dv_c(t)}{dt} + \bar{m} * \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{dm_v(t)}{dt} * v_c(t) + m_v(t) * \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$F_a(t) = R_p * v_c(t) + (m_c + \bar{m} + m_v(t)) * \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{dm_v(t)}{dt} * v_c(t)$$

$$F_a(t) = R_p * (r * w_J(t)) + (m_c + \bar{m} + m_v(t)) * r * \frac{dw_J(t)}{dt} + \left(\frac{dm_v(t)}{dt}\right) * (r * w_J(t))$$

$$F_a(t) = (R_p + \frac{dm_v(t)}{dt}) * (r * w_J(t)) + (m_c + \bar{m} + m_v(t)) * r * \frac{dw_J(t)}{dt}$$

Finalmente reemplazando la expresión para $\frac{dm_v(t)}{dt}$, que corresponde al proceso estocástico, se tiene:

$$F_a(t) = (R_p + w_0(t) - \beta * m_v(t)) * (r * w_J(t)) + (m_c + \bar{m} + m_v(t)) * r * \frac{dw_J(t)}{dt} \quad (3.5)$$

Ahora, se procederá a reemplazar la ecuación (3.5) en (3.3) obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{dw_j(t)}{dt} &= \frac{1}{J_m} (M_c(t) - R_r w_J(t) - (R_p + w_0(t) - \beta m_v(t)) r^2 w_J(t) - (m_c + \bar{m} + m_v(t)) r^2 \frac{dw_J(t)}{dt}) \\ &= \frac{1}{J_m} (M_c(t) - (R_r + R_p r^2) w_J(t) - r^2 w_0 w_J(t) + \beta r^2 m_v(t) w_J(t) - (m_c + \bar{m} + m_v(t)) r^2 \frac{dw_J(t)}{dt}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Linealizando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dw_j(t)}{dt} &= \frac{1}{J_m} (M_c(t) - (R_r + R_p r^2) w_J(t) - r^2 w_{0_Q} w_J(t) - r^2 w_{J_Q} w_0(t) + \\ &\quad \beta r^2 m_{v_Q} w_J(t) + \beta r^2 w_{J_Q} m_v(t) - (m_c + \bar{m}) r^2 \frac{dw_J(t)}{dt} - \\ &\quad m_{v_Q} r^2 \frac{dw_J(t)}{dt} - r^2 \left. \frac{dw_J}{dt} \right|_Q m_v(t)) \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{dw_j(t)}{dt} &= \frac{1}{J_m}(M_c(t) - (R_r + R_p r^2)w_J(t) - r^2 w_{J_Q} w_0(t) + \beta r^2 w_{J_Q} m_v(t) - (m_c + \bar{m})r^2 \frac{dw_J(t)}{dt}) \\
J_m \frac{dw_j(t)}{dt} &= M_c(t) - (R_r + R_p r^2)w_J(t) - r^2 w_{J_Q} w_0(t) + \beta r^2 w_{J_Q} m_v(t) - (m_c + \bar{m})r^2 \frac{dw_J(t)}{dt} \\
(J_m + (m_c + \bar{m})r^2) \frac{dw_j(t)}{dt} &= M_c(t) - (R_r + R_p r^2)w_J(t) - r^2 w_{J_Q} w_0(t) + \beta r^2 w_{J_Q} m_v(t) \\
k_1 * \frac{dw_j(t)}{dt} &= M_c(t) - k_2 * w_J(t) - k_3 * w_0(t) + k_4 * m_v(t)
\end{aligned}$$

Lo que resulta con la ecuación (3.6) linealizada:

$$\frac{dw_j(t)}{dt} = \frac{M_c(t)}{k_1} - \frac{k_2}{k_1} * w_J(t) - \frac{k_3}{k_1} * w_0(t) + \frac{k_4}{k_1} * m_v(t) \quad (3.7)$$

Donde :

$$k_1 = (J_m + (m_c + \bar{m})r^2)$$

$$k_2 = (R_r + R_p r^2)$$

$$k_3 = r^2 w_{J_Q}$$

$$k_4 = \beta r^2 w_{J_Q}$$

3.4.3 Puntos de equilibrio del Sistema

Las ecuaciones que se tienen son las siguientes:

De la ecuación (3.1) se tiene:

$$u_Q - (R_a + (\frac{k}{n})^2 * \frac{1}{R_e}) * i_{L_Q} + \frac{k}{n * R_e} * M_{c_Q} = 0 \quad (3.8)$$

De la ecuación (3.2) se tiene:

$$\frac{k}{n * R_e} * i_{L_Q} - \frac{M_{c_Q}}{R_e} - w_{J_Q} = 0 \quad (3.9)$$

De la ecuación (3.3) se tiene:

$$M_{c_Q} - R_r * w_{J_Q} - R_p * r^2 * w_{J_Q} = 0 \quad (3.10)$$

De la ecuación (3.55) se tiene:

$$w_{0Q} - \beta * m_{vQ} = 0 \quad (3.11)$$

Donde:

$$w_{0Q} = 0$$

Reemplazando valores, se tiene:

Para la ecuación (3.8) :

$$i_{LQ} = 2 + \frac{M_{cQ}}{11} \quad (3.12)$$

Para la ecuación (3.9) :

$$i_{LQ} = 1.125 * w_{JQ} \quad (3.13)$$

Para la ecuación (3.10) :

$$M_{cQ} = 10.25 * w_{JQ} \quad (3.14)$$

De las ecuaciones (3.12),(3.13) y (3.14) se tiene:

$$M_{cQ} \approx 105[Nm]$$

$$i_{LQ} = 11.5[A]$$

$$w_{JQ} = 10.2[rad/s]$$

Con esto se tiene que la velocidad de equilibrio de la correa, que esta dada por:

$$V_{cQ} = r * w_{JQ}$$

Luego:

$$V_{cQ} = 1.02[m/s]$$

3.4.4 Representación matricial

Luego, con las ecuaciones (3.1),(3.2),(3.7) y (3.55) la matriz lineal resultante es la que se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{dM_c(t)}{dt} \\ \frac{dw_J(t)}{dt} \\ \frac{dm_v(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_a + (\frac{k}{n})^2 * \frac{1}{R_e})}{L_a} & \frac{k}{n * R_e * L_a} & 0 & 0 \\ \frac{k}{n * R_e * C_e} & -\frac{1}{R_e * C_e} & -\frac{1}{C_e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_1} & -\frac{k_2}{k_1} & \frac{k_4}{k_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ M_c(t) \\ w_J(t) \\ m_v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_3}{k_1} \\ 1 \end{bmatrix} w_0(t)$$

Donde se representa el sistema en variables de estado de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew_0(t)$$

Para la salida observada, que en nuestro caso es la velocidad lineal de la correa se tiene:

$$y(t) = v_c(t) = r * w_J(t)$$

Lo que se representa matricialmente como:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ M_c(t) \\ w_J(t) \\ m_v(t) \end{bmatrix}$$

Es decir, de la forma:

$$y(t) = Cx(t)$$

3.5 Simulación de la correa transportadora

A partir de la representación matricial encontrada anteriormente se procederá a simular en el software 'MATLAB-SIMULINK' la correa transportadora.

3.5.1 Sistema no lineal

Se procederá a simular primero el sistema no lineal a partir de las ecuaciones encontradas anteriormente, la representación del sistema es la que se muestra a continuación en la figura 3.14, donde se aprecia que la entrada es $U(t)$ con un valor de 220[V] y la salida es la velocidad lineal de la correa $v_c(t)$.

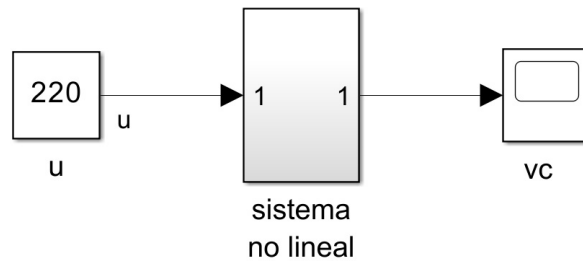


Figura 3.14: Sistema no lineal con su entrada y salida.

El interior del bloque 'sistema no lineal' presente en la figura 3.14, el cual representa las ecuaciones encontradas anteriormente, se muestra a continuación:

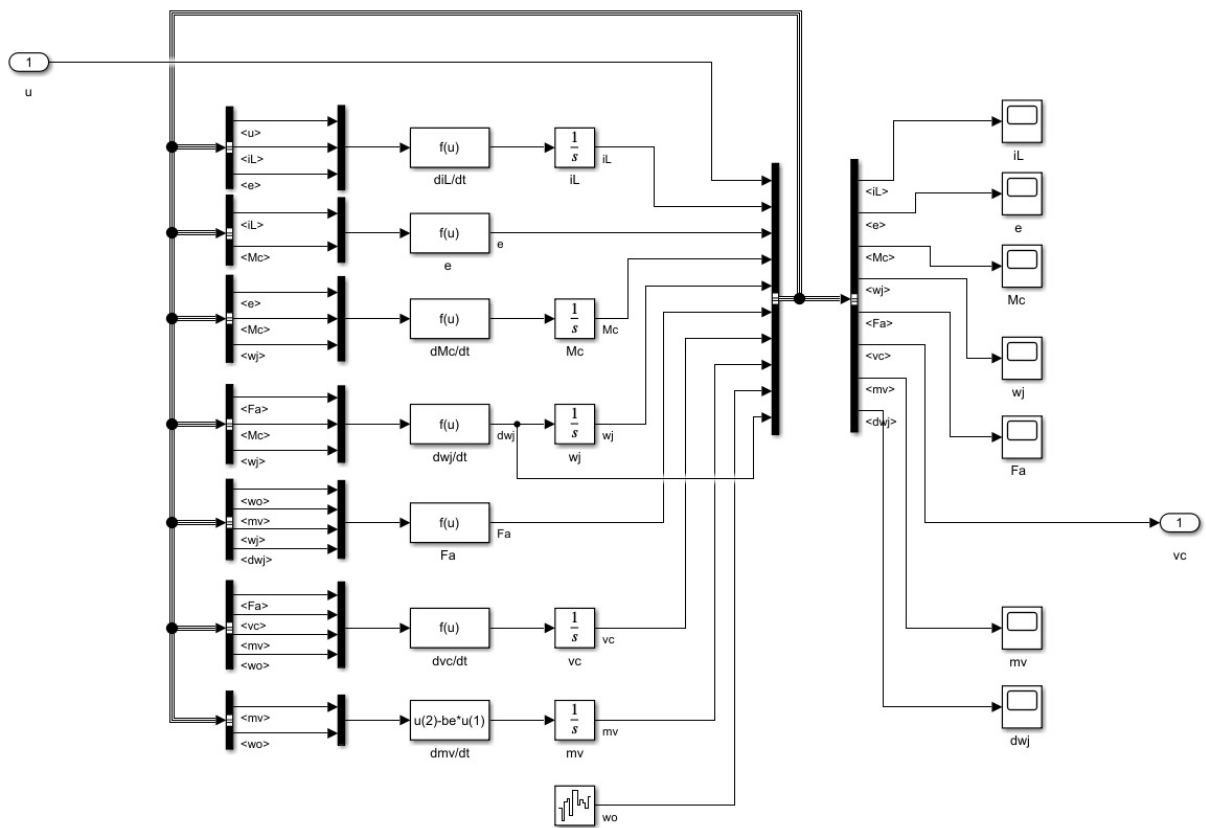


Figura 3.15: Representación ecuaciones sistema no lineal.

Luego de correr la simulación, los gráficos de las variables de nuestro interés lucen como se muestran a continuación:

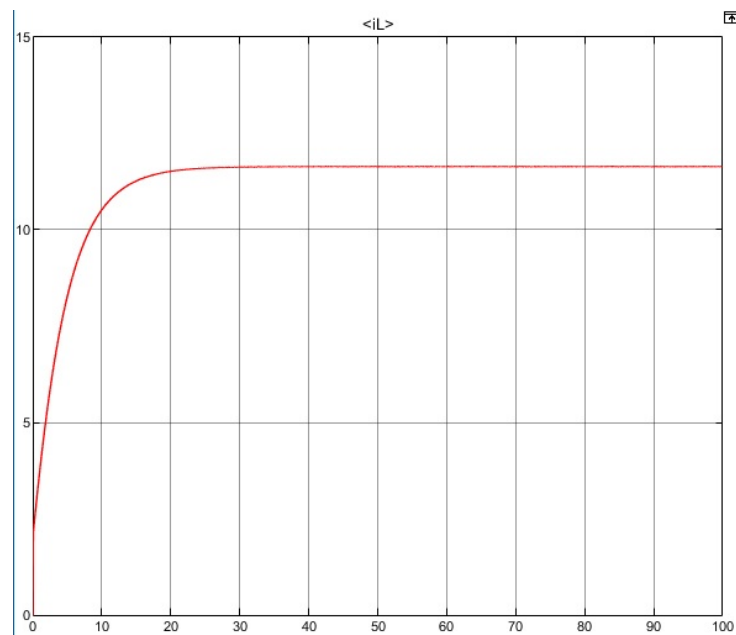


Figura 3.16: Corriente en el inductor sistema no lineal.

En la figura 3.16 se observa que la corriente en el inductor presente en el equivalente eléctrico del motor alcanza un valor máximo de $11.6[\text{A}]$ el cual es un valor dentro del rango aceptable. [9]

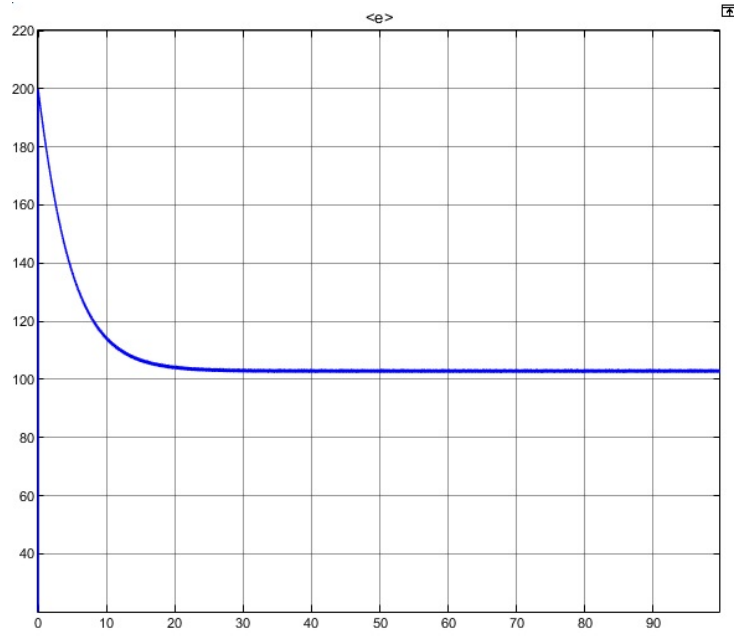


Figura 3.17: Voltaje inducido en el motor sistema no lineal.

En la figura 3.17 se observa que el voltaje inducido en el motor alcanza un valor máximo de $200[\text{V}]$ en un comienzo, y luego se estabiliza en un valor de $103[\text{V}]$ el cual es un valor dentro del rango aceptable. [9]

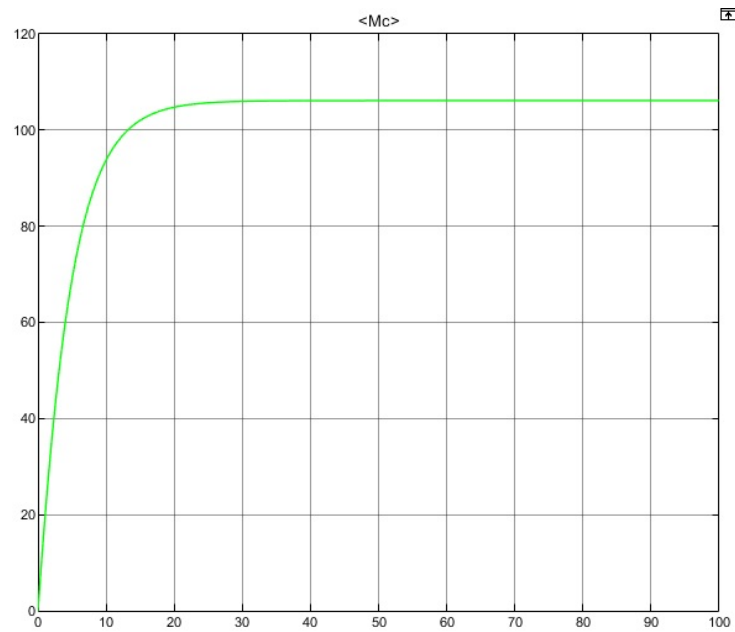


Figura 3.18: Torque de torsión en el eje sistema no lineal.

En la figura 3.18 se observa que el torque de torsión del eje alcanza un valor máximo de 106 [Nm] el cual es un valor dentro del rango aceptable. [10]

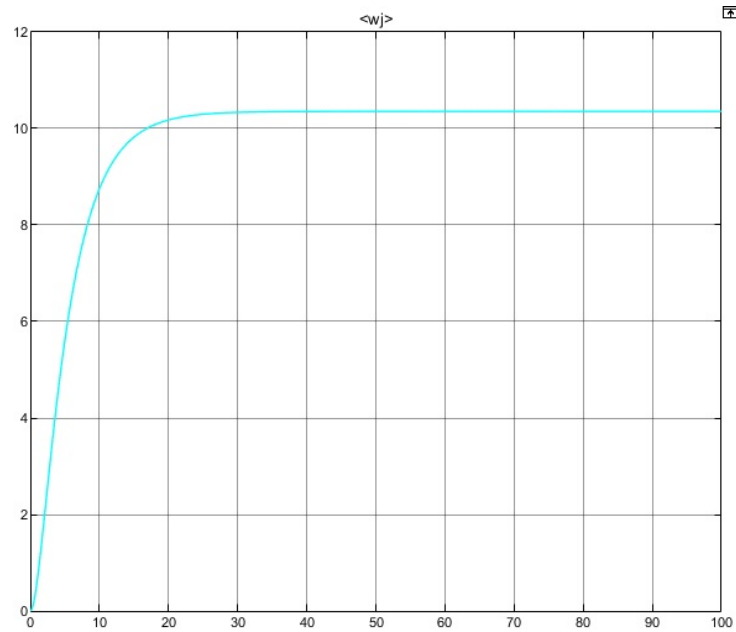


Figura 3.19: Velocidad angular del rodillo sistema no lineal.

En la figura 3.19 se observa que la velocidad angular del rodillo alcanza un valor máximo de 10.3 [rad/s] el cual es un buen valor para alcanzar la velocidad de 1[m/s] de la correa con un rodillo de 0.1[m] de radio.

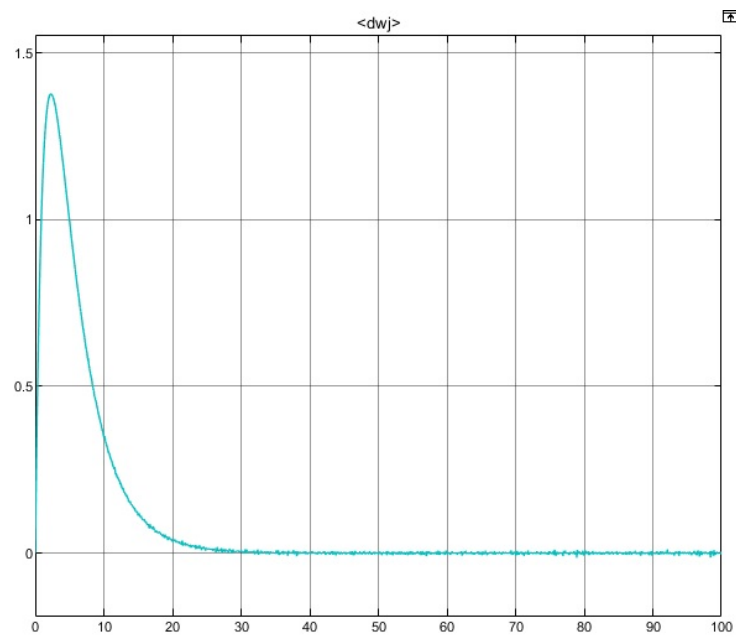


Figura 3.20: Aceleración angular del rodillo sistema no lineal.

En la figura 3.20 se observa que la aceleración angular del rodillo alcanza un valor máximo de $1.37[\text{rad}/\text{s}^2]$ y luego cuando la velocidad final es alcanzada, se estabiliza en $0[\text{rad}/\text{s}^2]$.

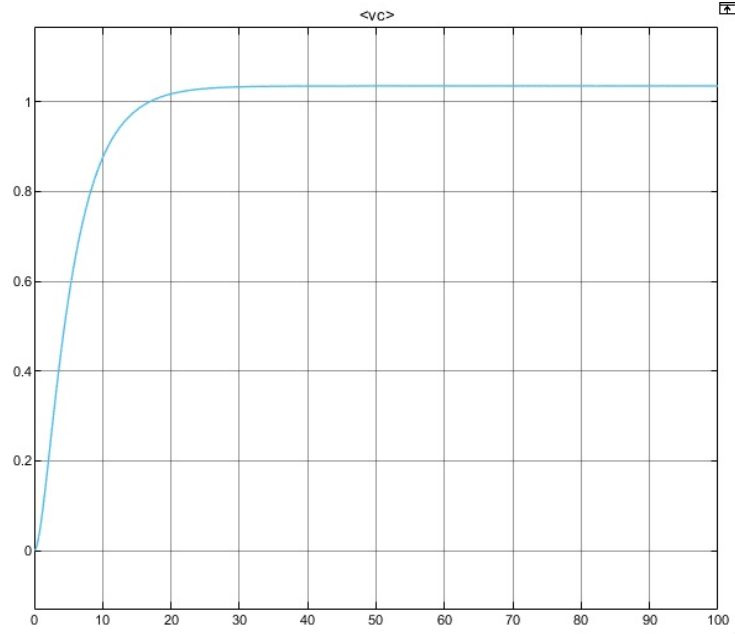


Figura 3.21: Velocidad lineal de la correa sistema no lineal.

En la figura 3.21 se observa que la velocidad lineal de la correa alcanza un valor máximo de $1.03[\text{m}/\text{s}]$ luego de 30 segundos.

3.5.2 Sistema lineal

Ahora se procederá a simular el sistema linealizado a partir de las ecuaciones encontradas anteriormente, la representación del sistema es la que se muestra a continuación en la figura 3.22, donde se aprecia que la entrada es $U(t)$ con un valor de $0[\text{V}]$, el cual corresponde a su punto de equilibrio y la salida es la velocidad lineal de la correa $v_c(t)$.

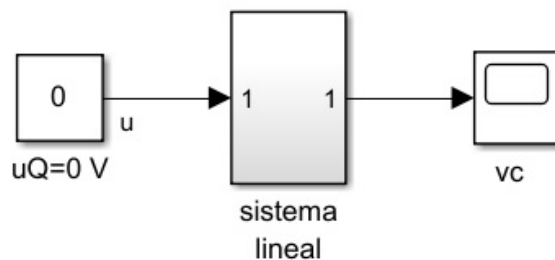


Figura 3.22: Sistema lineal con su entrada y salida.

El interior del bloque 'sistema lineal', presente en la figura 3.22, donde se representan las ecuaciones encontradas anteriormente, se muestra a continuación:

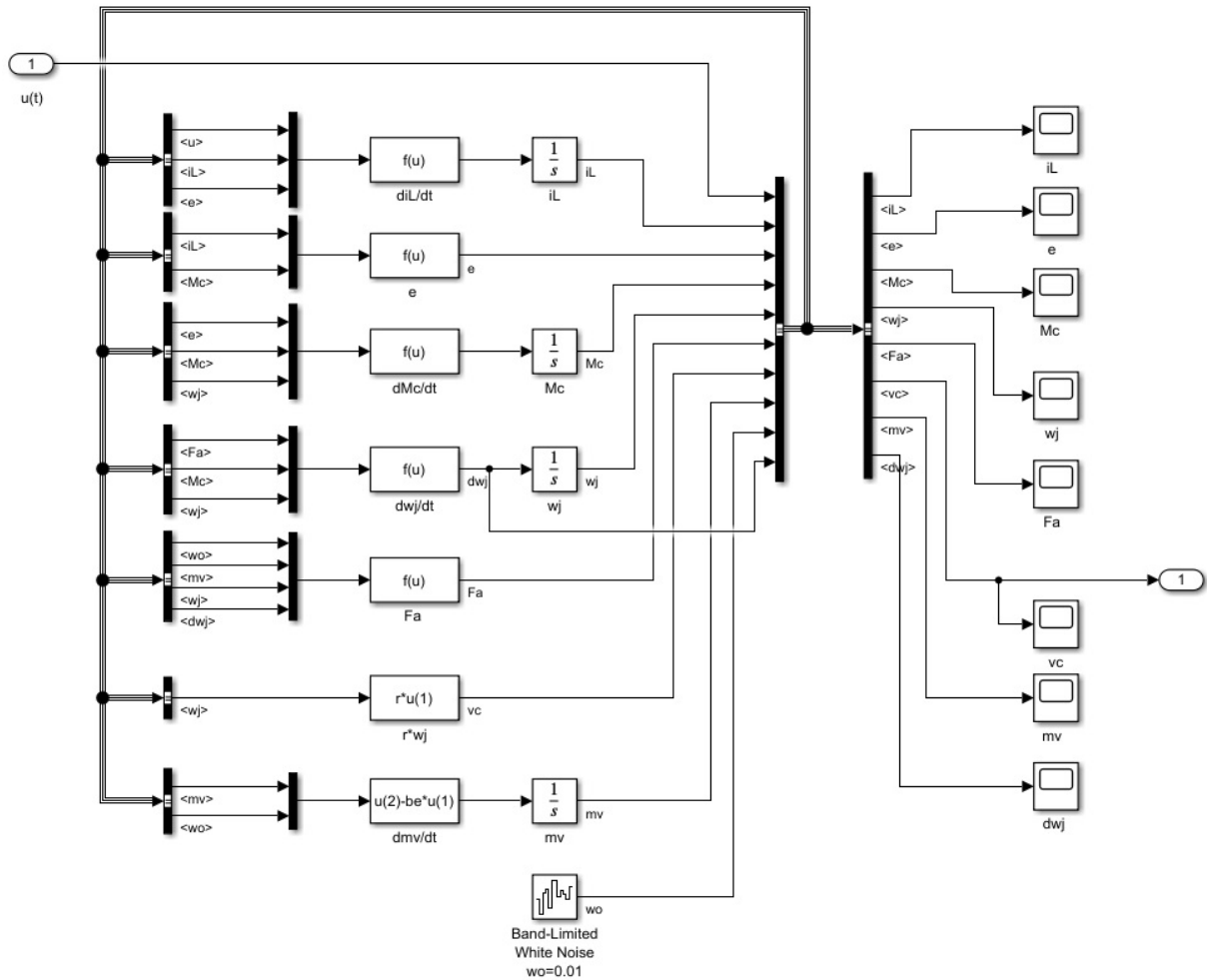


Figura 3.23: Representación ecuaciones sistema lineal.

Luego de correr la simulación, los gráficos de las variables de nuestro interés lucen como se muestran a continuación:

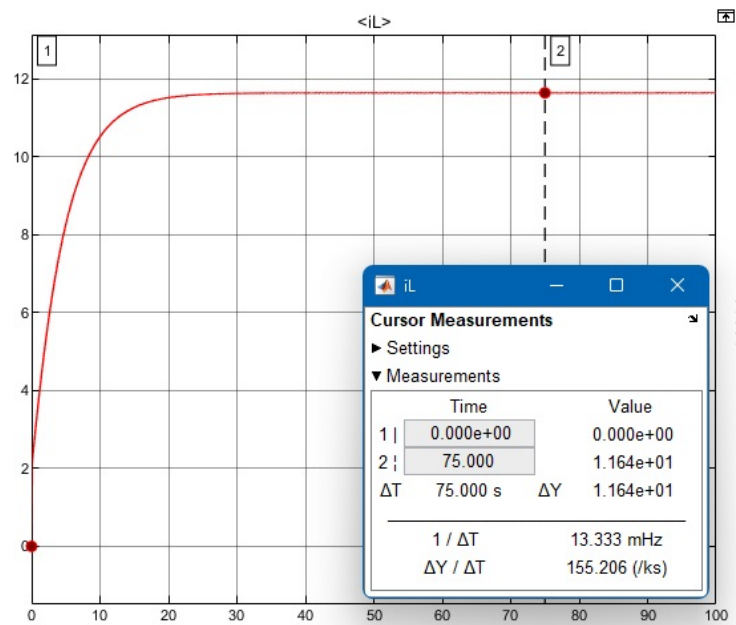


Figura 3.24: Corriente en el inductor sistema lineal.

En la figura 3.24 se observa que la corriente en el inductor presente en el equivalente eléctrico del motor alcanza un valor máximo de 11.6[A] el cual es muy cercano al punto de equilibrio esperado de 11.5[A].

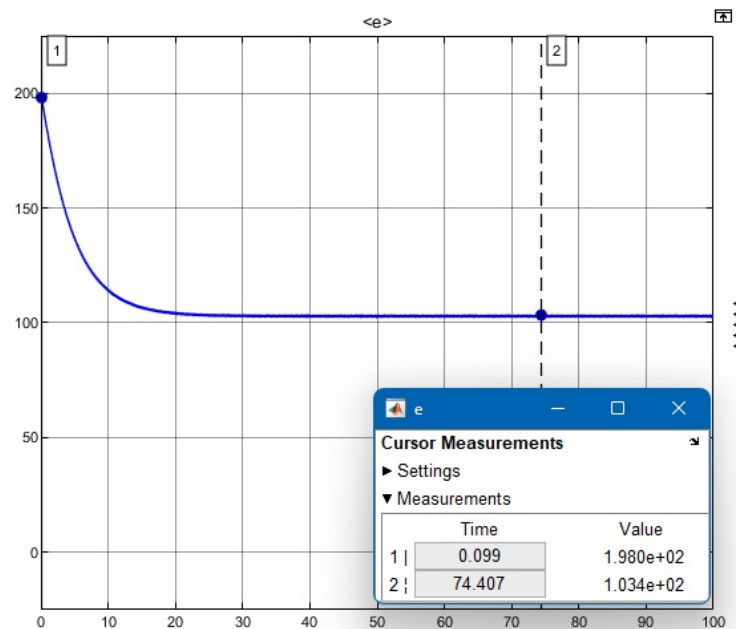


Figura 3.25: Voltaje inducido en el motor sistema lineal.

En la figura 3.25 se observa que el voltaje inducido en el motor alcanza un valor máximo de 198[V] en un comienzo, y luego se estabiliza en un valor de 103.4[V] el cual es el valor de equilibrio.

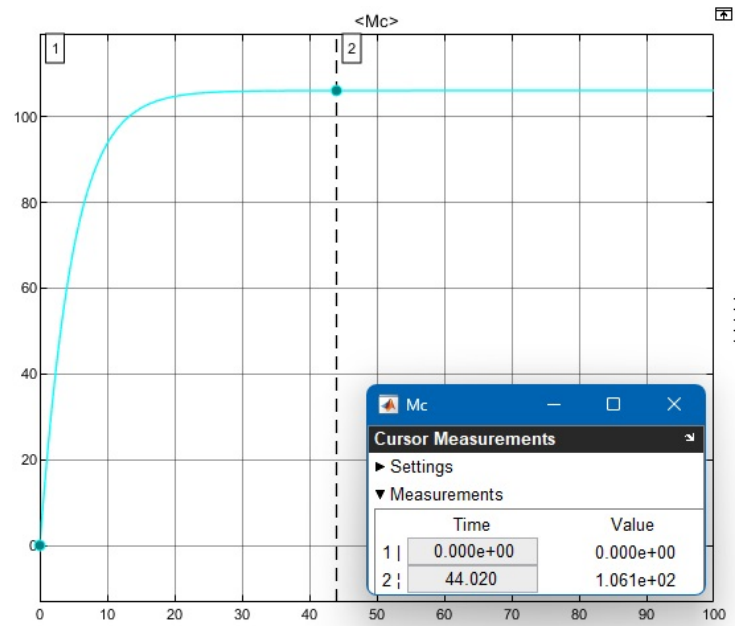


Figura 3.26: Torque de torsión en el eje sistema lineal.

En la figura 3.26 se observa que el torque de torsión del eje alcanza un valor máximo de 106[Nm] el cual es muy cercano al punto de equilibrio esperado de 105[Nm].

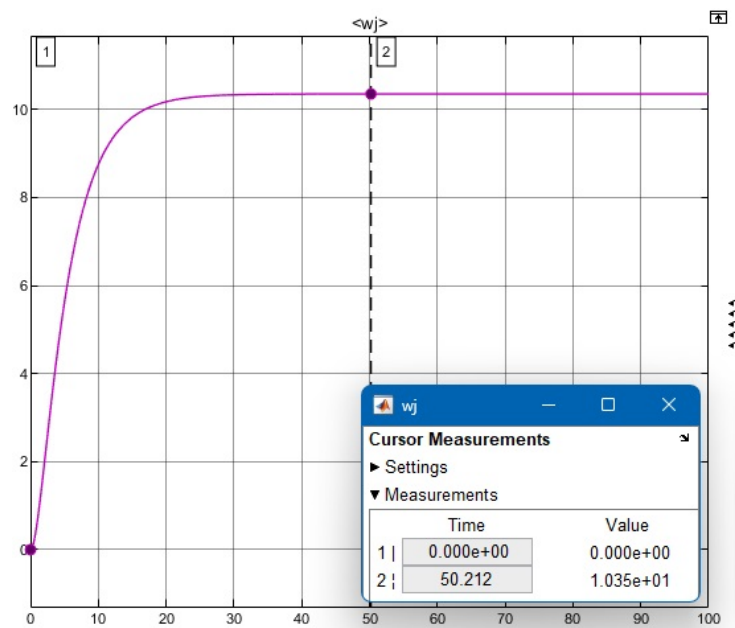


Figura 3.27: Velocidad angular del rodillo sistema lineal.

En la figura 3.27 se observa que la velocidad angular del rodillo alcanza un valor máximo de 10.3 [rad/s] el cual es muy cercano al punto de equilibrio esperado de 10.2[rad/s] y es un buen valor para alcanzar la velocidad de 1[m/s] de la correa con un rodillo de 0.1[m] de radio.

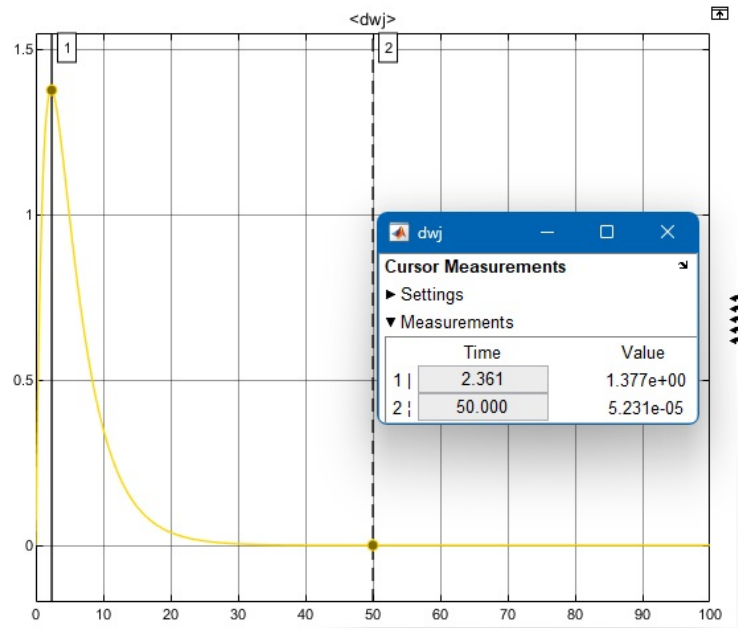


Figura 3.28: Aceleración angular del rodillo sistema lineal.

En la figura 3.28 se observa que la aceleración angular del rodillo alcanza un valor máximo de $1.37[\text{rad}/\text{s}^2]$ y luego cuando la velocidad final es alcanzada, se estabiliza en $0[\text{rad}/\text{s}^2]$, como es de esperarse.

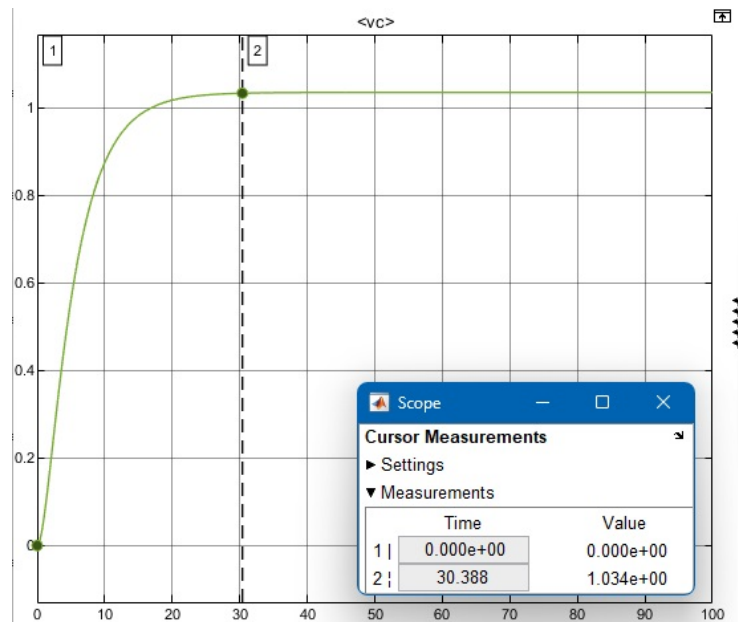


Figura 3.29: Velocidad lineal de la correa sistema lineal.

En la figura 3.29 se observa que la velocidad lineal de la correa alcanza un valor de equilibrio de $1.03[\text{m}/\text{s}]$, el cual es muy cercano al punto de equilibrio esperado de $1[\text{m}/\text{s}]$, este valor lo alcanza luego de aproximadamente 30 segundos.

3.6 Teoría de control óptimo para aplicar en la correa transportadora

Luego de que las simulaciones del sistema, tanto linealizado, como no linealizado, diera buenos resultados numéricos en cuanto a obtener los valores deseados de ciertos parámetros y el sistema tuviera un comportamiento como se espera en la realidad, se procederá a realizar el control de velocidad lineal de la correa. El análisis a continuación se obtuvo del texto [2].

3.6.1 Sistema de control con realimentación de la salida

Se propone estudiar un caso realista donde hay una variable observada de la forma:

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (3.15)$$

para el sistema:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.16)$$

que está disponible para medición y realimentación. Los sistemas de control donde la variable observada $y(t)$ sirve como entrada al controlador, y no el estado $x(t)$, los denominaremos: *sistemas de control con realimentación de la salida*.

Se puede intuir que el controlador óptimo con realimentación de la salida es una combinación de un observador, a través del cual se reconstruye el estado, y una ley de control que es una función lineal instantánea del estado reconstruido.

3.6.2 Regulación de sistemas con mediciones incompletas

3.6.2.1 Estructura del sistema de control

Consideremos el sistema descrito por:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.17)$$

y la variable observada por:

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (3.18)$$

Consideramos la ley de control de la forma:

$$u(t) = -F(t)x(t) \quad (3.19)$$

donde se supone que el estado $x(t)$ se puede medir exactamente. Si el estado no está disponible directamente se puede construir un observador de la forma de orden completo(O.C.):

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \quad (3.20)$$

y luego generar la ley de control con el estado reconstruido $\hat{x}(t)$:

$$u(t) = -F(t)\hat{x}(t) \quad (3.21)$$

donde $F(t)$ es la misma como en (3.19). La Fig. 3.30 a continuación describe la interconexión de la planta, el observador y la ley de control.

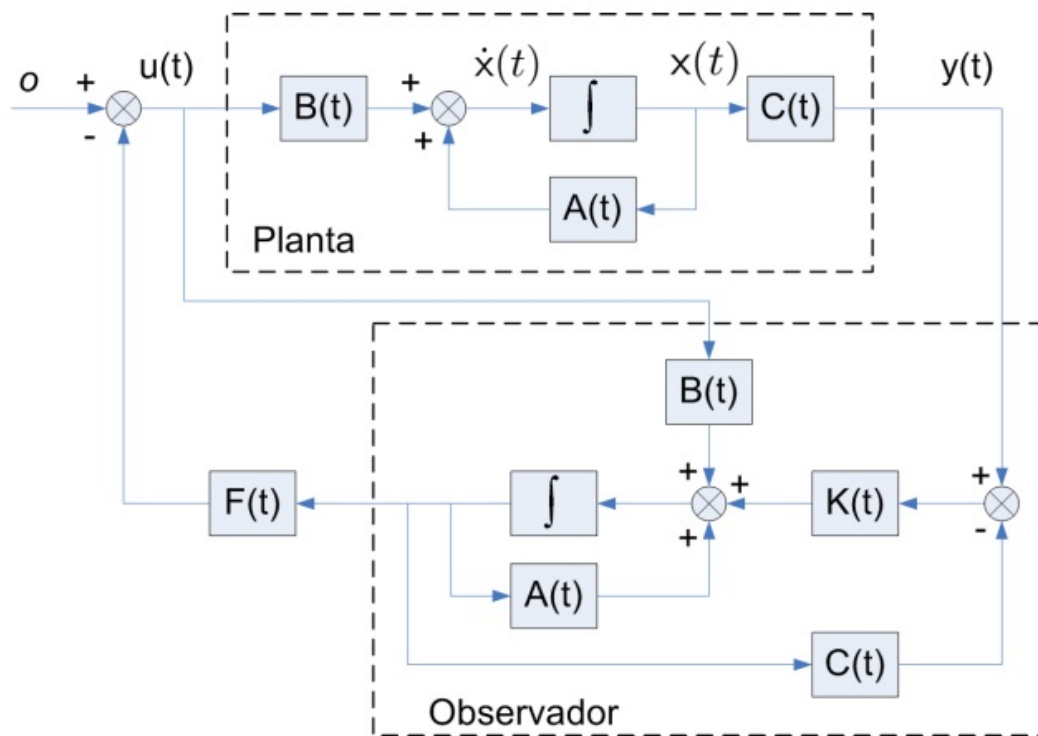


Figura 3.30: Estructura de un S.C. con R.S.

Donde una estructura de S.C. con R.S. se refiere a un sistema de control con referencia a la salida. Aquí, "S.C." significa "Sistema de Control" y "R.S." significa "Referencia de Salida".

En un sistema de control, la referencia de salida es la señal deseada que se quiere alcanzar o mantener en el proceso controlado.

Sustituyendo la ley de control (3.21) en la ecuación del observador (3.20), las ecuaciones del observador quedan como:

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A(t)\hat{x}(t) - B(t)F(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) - K(t)y(t) \quad (3.22)$$

$$u(t) = -F(t)\hat{x}(t)$$

Esto lleva a la estructura simplificada de la Fig. 3.31.

El sistema en lazo cerrado que resulta es de dimensión $2n$ (donde n es la dimensión del estado $x(t)$), que se puede describir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)F(t) \\ K(t)C(t) & A(t) - K(t)C(t) - B(t)F(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Para analizar las propiedades de estabilidad del sistema de lazo cerrado, consideremos el estado $x(t)$ y el error de reconstrucción:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.24)$$

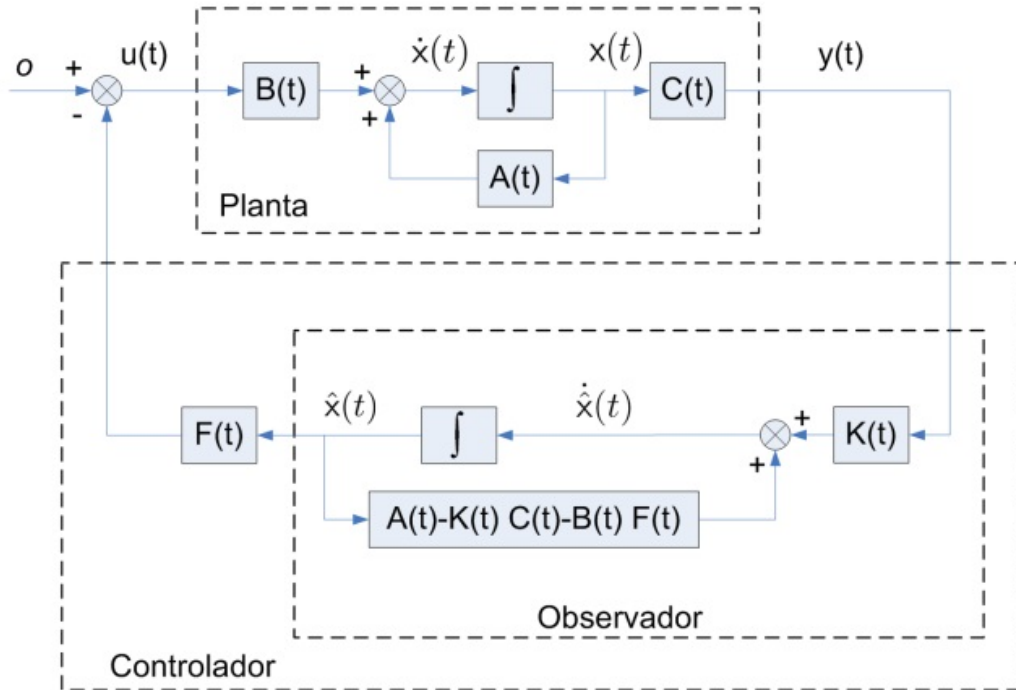


Figura 3.31: Sistema de control simplificado con realimentación de la salida

Restando (3.17) y (3.20), y usando (3.18) tenemos que $e(t)$ satisface:

$$\dot{e}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]e(t) \quad (3.25)$$

Reemplazando $\hat{x}(t) = x(t) - e(t)$ en (3.17) y (3.21) lleva a:

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)F(t)]x(t) + B(t)F(t)e(t) \quad (3.26)$$

Viendo la ecuación (3.25) $e(t)$ converge a cero, independientemente del estado inicial, si la matriz de ganancia $K(t)$ se escoge para que (3.25) sea Asintóticamente Estable (A.E.). Esto es equivalente a determinar $K(t)$ de modo que el observador sea A.E.. Sabemos que a menudo se puede encontrar.

En el caso de la ecuación (3.26) si $B(t)$ y $F(t)$ son acotadas y $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, $x(t)$ siempre convergerá a cero (regulación) si el sistema:

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)F(t)]x(t) \quad (3.27)$$

es A.E.. Sabemos que a menudo $F(t)$ se puede determinar de modo que (3.27) sea A.E.. Vemos que generalmente es posible encontrar las matrices $F(t)$ y $K(t)$ tales que las ecuaciones (3.25) y (3.26) constituyan un sistema A.E. ya que el sistema (3.23) se puede obtener mediante una transformación lineal no singular desde las ecuaciones (3.25) y (3.26).

Esto implica que generalmente es posible encontrar las matrices $F(t)$ y $K(t)$ tales que el sistema (3.23) sea estable.

Veamos a continuación las condiciones que se deben cumplir para que (3.25) y (3.26) sean A.E.. Combinándolas tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) - B(t)F(t) & -B(t)F(t) \\ 0 & A(t) - K(t)C(t) - B(t)F(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Consideremos el caso invariante en el tiempo, donde todas las matrices son constantes. Entonces los valores característicos del sistema (3.28), que también son los valores característicos del sistema (3.23) son los ceros de:

$$\begin{bmatrix} sI - A + BF & BF \\ 0 & sI - A + KC \end{bmatrix} = \det[sI - A + BF] * \det[sI - A + KC] \quad (3.29)$$

La razón que el sistema (3.23) y (3.28) tienen los mismos valores característicos es porque sus respectivos vectores de estados están relacionados por una transformación lineal no singular.

Consecuentemente, el conjunto de valores característicos del lazo cerrado incluye los valores característicos de $(A - BF)$ (polos del regulador) y los valores característicos de $(A - KC)$ (polos del observador).

Teorema 1.1. *Considerar la interconexión de S.I.T. [3], página 70.*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.30)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

y el observador invariante en el tiempo:

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (3.31)$$

y la ley de control invariante en el tiempo:

$$u(t) = -F\hat{x}(t) \quad (3.32)$$

Entonces los valores característicos del sistema interconectado consiste de los polos del regulador (valores característicos de $A - BF$) junto con los polos del observador (valores característicos de $A - KC$).

Observaciones:

- Este resultado muestra que se puede considerar el problema de determinar separadamente un observador A.E. y una ley de control con realimentación del estado A.E., ya que su interconexión resulta en un sistema de control A.E.

3.6.2.2 Condiciones para la asignación de polos y estabilización de los sistemas de control con realimentación de la salida

El siguiente teorema resume estas condiciones:

Teorema 1.2. *Considerar la interconexión del sistema: [3], pagina 70.*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.33)$$

$$y(t) = C(t)x(t)$$

el observador:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \quad (3.34)$$

y la ley de control:

$$u(t) = -F(t)\hat{x}(t) \quad (3.35)$$

Entonces las condiciones suficientes para la existencia de las matrices de ganancia $K(t)$ y $F(t)$, $t \geq t_0$, tales que el sistema interconectado sea exponencialmente estable, son que el sistema (3.33) sea uniformemente C.C y uniformemente C.R. o que sea exponencialmente estable. En la situación invariante en el tiempo (todas las matrices constantes), las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de matrices de ganancia K y F estabilizadoras son que el sistema (3.33) sea C.C. y C.R. En este caso, las condiciones necesarias y suficientes para asignar los polos del regulador y observador arbitrariamente (con la restricción de que los polos complejos ocurran en pares complejos conjugados) son que el sistema sea C.C. y C.R.

3.6.3 Regulador lineal óptimo con mediciones incompletas y con ruidos

3.6.3.1 Formulación del problema y solución

Se realiza mediante la siguiente definición:

Definición 1.1. Considerar el sistema: [3], página 71.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w_1(t) \quad t \geq t_0 \quad (3.36)$$

$$x(t_0) = x_0$$

donde x_0 es un vector estocástico con media $\bar{x}_0$ y matriz varianza Q_0 .

La variable observada está dada por:

$$y(t) = C(t)x(t) + w_2(t) \quad t \geq t_0 \quad (3.37)$$

Los procesos estocásticos juntos, es decir, la columna (w_1, w_2) , es un proceso de ruido blanco con intensidad:

$$V(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) & V_{12}(t) \\ V_{12}^T & V_2(t) \end{bmatrix} \quad t \geq t_0 \quad (3.38)$$

La variable controlada queda expresada como:

$$z(t) = D(t)x(t) \quad t \geq t_0 \quad (3.39)$$

Entonces, el problema del regulador óptimo lineal estocástico con realimentación de la salida es el problema de encontrar el funcional:

$$u(t) = f[y(\tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t_1] \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.40)$$

tal que el criterio:

$$\sigma = E \int_{t_0}^{t_1} [z^T(t)R_3(t)z(t) + u^T(t)R_2(t)u(t)]dt + x^T(t_1)P_1x(t_1) \quad (3.41)$$

se minimice. Donde $R_3(t)$, $R_2(t)$ y P_1 son matrices simétricas de ponderación tal que $R_2(t) > 0$, $R_3(t) > 0$, $t_0 \leq t \leq t_1$ y $P_1 \geq 0$.

Teorema 1.3. La solución lineal óptima del problema del regulador óptimo lineal estocástico es: escoger la entrada de acuerdo a la ley de control lineal: [3], página 72.

$$u(t) = -F^o(t)x(t) \quad (3.42)$$

donde:

$$F^o(t) = R_2^{-1}B^T(t)P(t) \quad (3.43)$$

$P(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati:

$$-\dot{P}(t) = R_1(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) \quad (3.44)$$

con la condición terminal:

$$P(t_1) = P_1 \quad (3.45)$$

donde

$$R_1(t) = D^T(t)R_3(t)D(t) \quad (3.46)$$

El valor mínimo del criterio está dado por:

$$\text{tr}[P(t_0)Q_0 + \int_{t_0}^{t_1} P(t)V(t)dt] \quad (3.47)$$

donde $V(t)$ es la intensidad del ruido blanco que perturba el sistema.

Teorema 1.4. Sabemos que la solución del problema del regulador óptimo lineal estocástico con realimentación de la salida está dada en el teorema 1.3. El cambio que

se debe hacer ahora es reemplazar en la ley de control el estado $x(t)$ por su estado $\hat{x}(t)$ reconstruido o estimador lineal cuadrático medio mínimo. Luego la entrada se escoge como: [3], página 72.

$$u(t) = -F^o(t)\hat{x}(t) \quad (3.48)$$

donde $F^o(t)$ es la matriz de ganancia del teorema 1.3 y $\hat{x}(t)$ es la salida del observador óptimo.

Observación:

Cuando los ruidos son procesos de ruido blanco Gaussiano y el estado inicial x_0 es Gaussiano, la solución lineal óptima es la solución óptima.

Restringiendo el caso donde el problema de estimación del estado es no singular y los ruidos sobre el estado y la observación no son correlacionados, tenemos que la entrada es:

$$u(t) = -F^o(t)\hat{x}(t) \quad (3.49)$$

con

$$F^o(t) = R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) \quad (3.50)$$

donde $P(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati:

$$-\dot{P}(t) = D^T(t)R_3(t)D(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) \quad (3.51)$$

$$P(t_1) = P_1$$

La estimación de $\hat{x}(t)$ se obtiene de la solución de:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K^o(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \quad (3.52)$$

$$\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0$$

donde:

$$K^o(t) = Q(t)C^T(t)V_2^{-1}(t) \quad (3.53)$$

La matriz de varianza $Q(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati:

$$\dot{Q}(t) = V_1(t) - Q(t)C^T(t)V_2^{-1}(t)C(t)Q(t) + A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t) \quad (3.54)$$

$$Q(t_0) = Q_0$$

La Fig. 3.32 a continuación ilustra el diagrama de bloque de este sistema de control estocástico óptimo con realimentación de la salida:

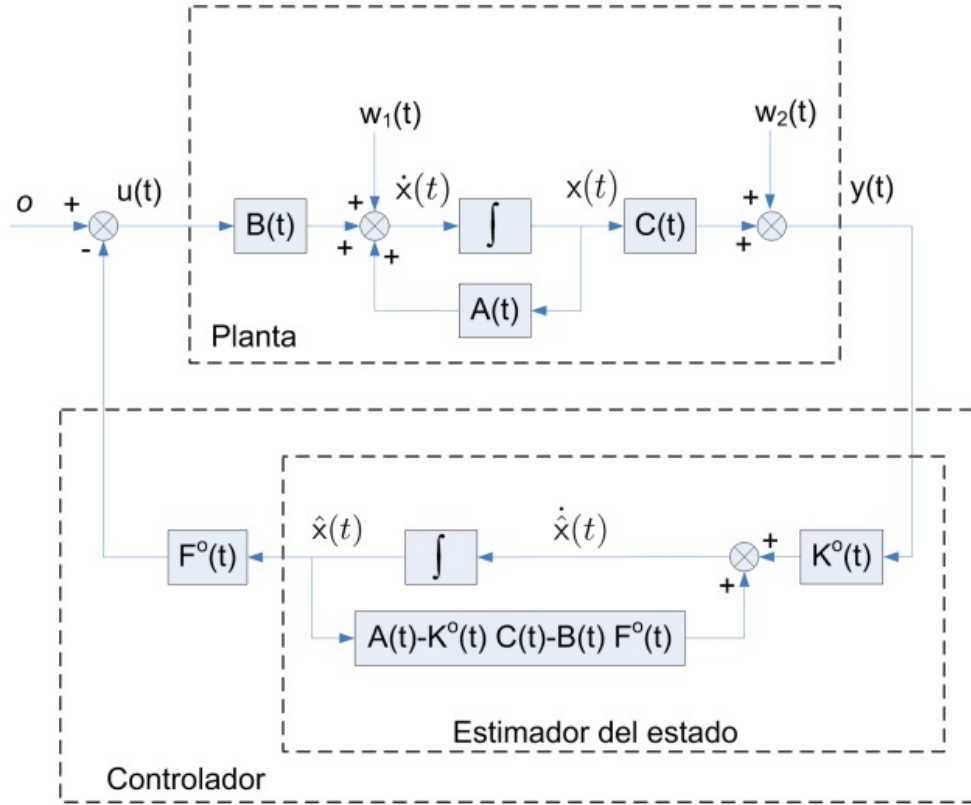


Figura 3.32: Regulador lineal óptimo con mediciones incompletas del estado y ruido en la medición.

3.7 Aplicando control óptimo a la correa transportadora

Ahora se procederá a aplicar lo anteriormente expuesto, a nuestro sistema.

Lo primero por realizar es determinar que el sistema sin la perturbación sea completamente controlable y observable, es decir, con $m_v(t) = 0$ para que el sistema sea invariante en el tiempo.

Como primera cosa a destacar para el subsistema de traslación, se tiene que para la masa variable $m_v(t)$, la cual corresponde a la parte variable del material se utilizó la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{dm_v(t)}{dt} + \beta * m_v(t) &= w_0(t) \\
\frac{dm_v(t)}{dt} &= w_0(t) - \beta * m_v(t)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

La cual corresponde al modelo lineal de un proceso estocástico excitado con ruido blanco, donde $w_0(t)$ es ruido blanco. Para este análisis, esto valdra cero.

Además para el subsistema de traslación se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
F_{m_v}(t) &= \frac{d(m_v(t) * v_{m_v}(t))}{dt} \\
F_{m_v}(t) &= \frac{d(m_v(t) * v_c(t))}{dt} \\
F_{m_v}(t) &= \frac{dm_v(t)}{dt} * v_c(t) + m_v(t) * \frac{dv_c(t)}{dt}
\end{aligned}$$

Donde para este análisis $F_{m_v}(t)$ también será cero.

También:

$$\begin{aligned}
F_{\bar{m}}(t) &= \bar{m} * \frac{dv_{\bar{m}}(t)}{dt} \\
F_{\bar{m}}(t) &= \bar{m} * \frac{dv_c(t)}{dt}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
F_a(t) &= R_p * v_c(t) + m_c * \frac{dv_c(t)}{dt} + \bar{m} * \frac{dv_c(t)}{dt} \\
F_a(t) &= R_p * v_c(t) + (m_c + \bar{m}) * \frac{dv_c(t)}{dt} \\
F_a(t) &= R_p * (r * w_J(t)) + (m_c + \bar{m}) * r * \frac{dw_J(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Ahora, se procederá a reemplazar la ecuación (3.56) en (3.3) obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{dw_j(t)}{dt} &= \frac{1}{J_m} * (M_c(t) - R_r * w_J(t) - r * R_p * (r * w_J(t)) - r * (m_c + \bar{m}) * r * \frac{dw_J(t)}{dt}) \\
\frac{dw_j(t)}{dt} &= \frac{1}{J_m} * (M_c(t) - R_r * w_J(t) - r^2 * R_p * w_J(t) - r^2 * (m_c + \bar{m}) * \frac{dw_J(t)}{dt})
\end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{dw_J(t)}{dt} = \frac{1}{J_m + r^2 * (m_c + \bar{m})} * (M_c(t) - R_r * w_J(t) - r^2 * R_p * w_J)$$

Finalmente:

$$\frac{dw_J(t)}{dt} = \frac{1}{J_m + r^2 * (m_c + \bar{m})} * (M_c(t) - w_J(t) * (R_r + r^2 * R_p)) \quad (3.57)$$

Lo siguiente por realizar es encontrar la representación en variables de estado del sistema, lo cual ya fue previamente hecho, pero esta vez utilizando la expresión (3.57) obteniendo lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{dM_c(t)}{dt} \\ \frac{dw_J(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_a + (\frac{k}{n})^2 * \frac{1}{R_e})}{L_a} & \frac{k}{n * R_e * L_a} & 0 \\ \frac{k}{n * R_e * C_e} & -\frac{1}{R_e * C_e} & -\frac{1}{C_e} \\ 0 & \frac{1}{J_m + r^2 * (m_c + \bar{m})} & \frac{R_r + r^2 * R_p}{J_m + r^2 * (m_c + \bar{m})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ M_c(t) \\ w_J(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(t)$$

Donde se representa el sistema en variables de estado de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Para la salida observada, que en nuestro caso es la velocidad lineal de la correa se tiene:

$$y(t) = v_c(t) = r * w_J(t)$$

Lo que se representa matricialmente como:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ M_c(t) \\ w_J(t) \end{bmatrix}$$

Es decir, de la forma:

$$y(t) = Cx(t)$$

3.7.1 Controlabilidad

Con las nuevas matrices A, B y C que representan el sistema sin la perturbación se procederá a utilizar el comando '`ctrb`' en el software 'MATLAB' [6] que recibe como argumentos las matrices 'A' y 'B' del sistema. El sistema es controlable si la matriz de

controlabilidad generada por 'ctrb'

$$Co = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{(n-1)}B \end{bmatrix}$$

tiene un rango total, es decir, el rango es igual al número de estados del modelo de espacio de estados, para calcular el rango de la matriz se procederá a utilizar el comando 'rank' en el software 'MATLAB' [8] que recibe como argumento una matriz, en este caso la matriz 'Co'. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, dado que el rango de la matriz 'Co' es 3, lo cual es igual al numero de estados del modelo.

3.7.2 Observabilidad

Con las nuevas matrices A, B y C que representan el sistema sin la perturbación se procederá a utilizar el comando 'obsv' en el software 'MATLAB' [7] que recibe como argumentos las matrices 'A' y 'C' del sistema. El sistema es observable si la matriz de observabilidad generada por 'obsv'

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

tiene un rango total, es decir, el rango es igual al número de estados del modelo de espacio de estados, para calcular el rango de la matriz se procederá a utilizar el comando 'rank' en el software 'MATLAB' [8] que recibe como argumento una matriz, en este caso la matriz 'Ob'. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, dado que el rango de la matriz 'Ob' es 3, lo cual es igual al numero de estados del modelo.

3.7.3 Determinación de la ley de control óptimo

De lo expuesto anteriormente se tiene que:

$$u^o(t) = -F^o(t)x(t)$$

donde:

$$F^o(t) = R_2^{-1}B^T(t)P(t) \quad (3.58)$$

Reemplazando tendríamos:

$$F^o(t) = 1 * \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * P(t) \quad (3.59)$$

Donde $P(t)$ presente en (3.59) es la solución de la ecuación de Riccati:

$$-\dot{P}(t) = R_1(t) - P(t)B(t)R_2^T(t)B^T(t)P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t)$$

Para resolver la ecuación de manera rápida y sencilla se recurrirá a utilizar el comando 'care' en el software 'MATLAB' [4] que recibe como argumentos las matrices 'A', 'B' y 'C' del sistema, obteniendo como resultados importantes la matriz 'P' y la matriz 'F' presentes en (3.58), de esto se obtiene:

$$P = \begin{bmatrix} 1.8935e^{-10} & 2.0829e^{-7} & 2.1772e^{-7} & 2.2526e^{-9} \\ 2.0829e^{-7} & 0.0002 & 0.0002 & 2.4782e^{-6} \\ 2.1772e^{-7} & 0.0002 & 0.0053 & 4.3268e^{-5} \\ 2.2526e^{-9} & 2.4782e^{-6} & 4.3268e^{-5} & 3.8376e^{-7} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$F^o = \begin{bmatrix} 1.8935e^{-8} & 2.0829e^{-5} & 2.1772e^{-5} & 2.2526e^{-7} \end{bmatrix}$$

3.7.4 Determinación de la ganancia del observador óptimo

De lo expuesto anteriormente (ec. (3.53) en adelante) la matriz ganancia del observador óptimo es:

$$K^o(t) = Q(t)C^T(t)V_{w_1}^{-1}(t)$$

Reemplazando:

$$K^o(t) = Q(t) * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} * 1 \quad (3.60)$$

Donde la matriz de varianza $Q(t)$ presente en (3.60) es la solución de la ecuación de Riccati:

$$\dot{Q}(t) = V_1(t) - Q(t)C^T(t)V_2^{-1}C(t)Q(t) + A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t)$$

Para determinar la ganancia del observador óptimo, al igual que en el caso anterior se

procederá a calcular en el software 'MATLAB', en este caso se utilizará el comando `'kalman'` [5] que recibe como argumentos las matrices 'A','B','C' y 'D' del sistema y los datos de covarianza de ruido, como lo son :

- Covarianza de ruido de proceso: Especificada como escalar o matriz de N_w por N_w , donde N_w es el número de entradas de ruido de la planta, en nuestro caso 1.
- Covarianza de ruido de medición: Especificada como escalar o matriz de N_y por N_y , donde N_y es el número de salidas de la planta, en nuestro caso 1.
- Covarianza cruzada de ruido: Especificada como escalar o matriz de N_y por N_w . Si las dos fuentes de ruido no están correlacionadas, puede omitir N, lo que es equivalente a establecer $N = 0$, como es nuestro caso.

De los datos que el comando nos entrega utilizaremos la matriz de las ganancias de Kalman ' K^o '.

Obteniendo:

$$K^o = \begin{bmatrix} 1.7645e^{-5} \\ 0.0001 \\ 1.8935e^{-5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.7.5 Determinación de filtro de entrada

Para conseguir error de control cero cuando la referencia es constante se necesita colocar un filtro en la referencia que cumpla con:

$$H(0) = \frac{1}{T_0(0)}$$

Luego:

$$T_0(s) = C[sI - (A - BF)]^{-1}B$$

$$T_0(0) = C[-(A - BF)]^{-1}B$$

Por comodidad y rapidez se procederá a calcular $T_0(0)$ y por ende $H(0)$ en el software 'MATLAB' , obteniendo lo siguiente:

$$T_0(0) = 0.0047$$

$$H(0) = \frac{1}{T_0(0)}$$

$$H(0) = 212.5024$$

3.7.6 Simulación del control óptimo

La simulación del control óptimo aplicado al sistema se realizará en el software 'MATLAB - SIMULINK'.

A continuación en la figura 3.33 se presenta el diagrama de bloque del sistema con control óptimo:

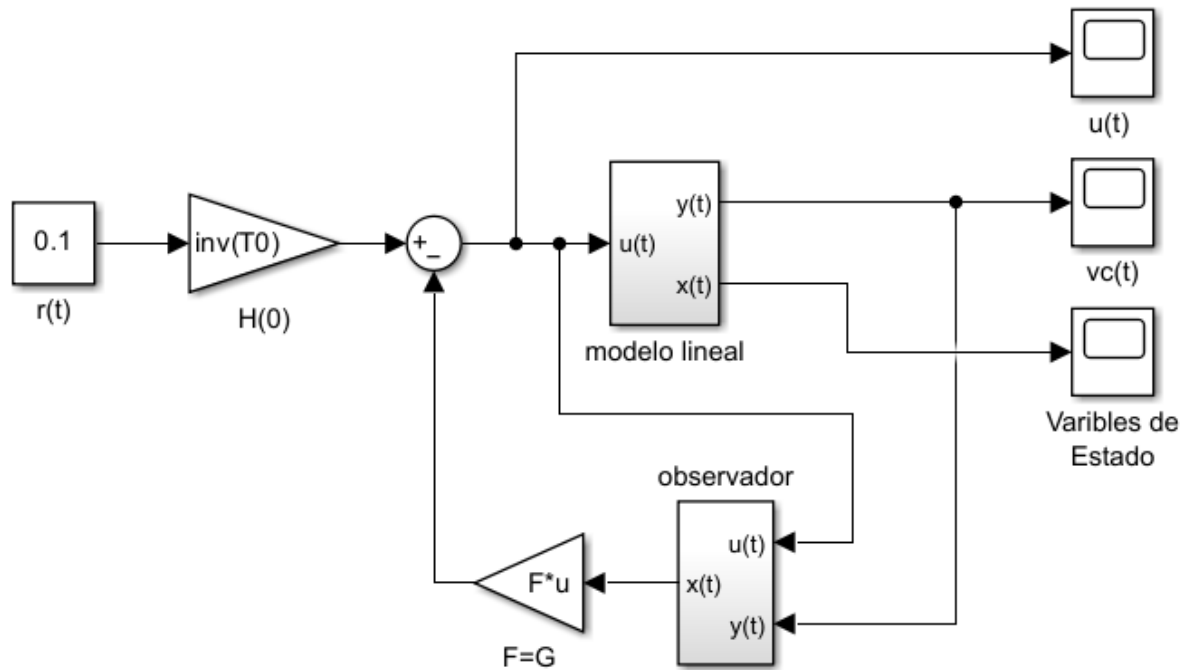


Figura 3.33: Diagrama de bloque del sistema con control óptimo.

El bloque 'modelo lineal' presente en la figura 3.33 contiene el modelo lineal de la correa representado a través de las matrices 'A', 'B', 'C', 'D' y 'E' como se muestra a continuación en la figura 3.34

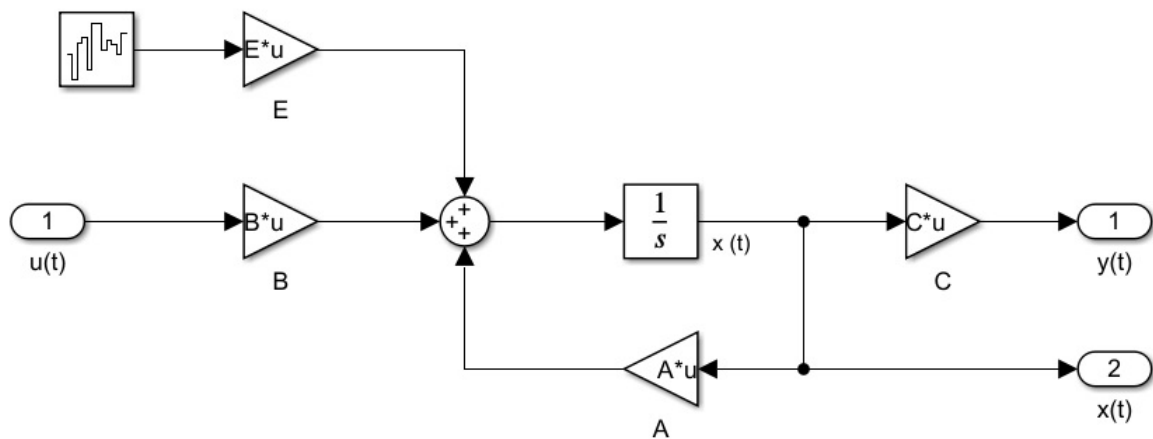


Figura 3.34: Diagrama de bloque del modelo lineal .

El bloque 'observador' presente en la figura 3.33 contiene el modelo del observador óptimo presente en la figura 3.30 como se muestra a continuación en la figura 3.35

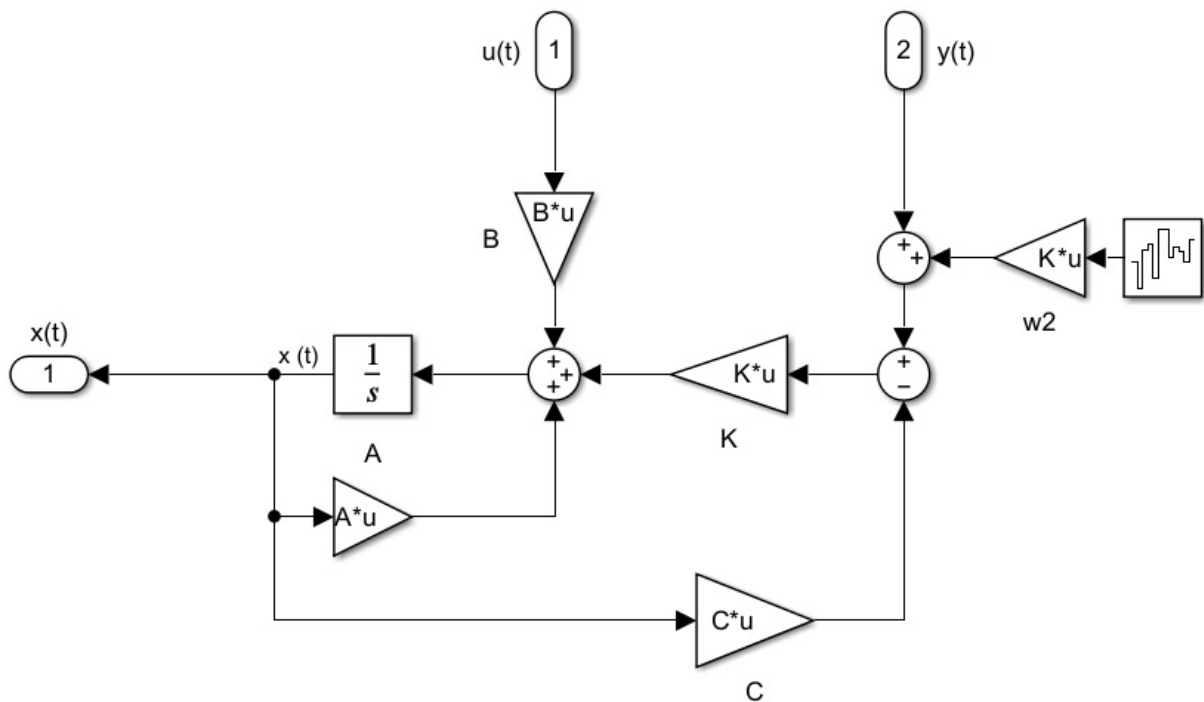


Figura 3.35: Diagrama de bloque observador óptimo.

3.8 Aplicando control óptimo

Se procederá a hacer la simulación del control óptimo sobre el sistema no lineal, linealizado en torno al punto de equilibrio de 1 [m/s], para mostrar en que valores se estacionan las variables de estado, esto bajo el supuesto de que debiera haber diferencias si usamos una referencia muy distante del punto de equilibrio.

Considerando el rango de variación de la velocidad de la correa, hay que estudiar como se comporta el control en los extremos, esto se hará en el sistema lineal en torno al punto de operación.

También se procederá a evaluar que sucede si se aumenta la intensidad del ruido, es decir, cambiar la masa variable de material (Granulidad del material), es decir, en la ecuación (3.55) se cambiará el parámetro w_0 .

3.8.1 Control óptimo en el rango de variación de velocidad de la correa

Se procederá a simular la aplicación del control óptimo en la correa para velocidades de 0.8[m/s], 1[m/s] y 1.2[m/s] observando tanto el voltaje de actuación, la velocidad lineal de la correa, y las variables de estado. Para esto, debido a que se esta evaluando en el modelo lineal en torno al punto de equilibrio de 1[m/s], se procederá a poner referencias de -0.2[m/s], 0[m/s] y 0.2[m/s].

3.8.1.1 Control óptimo a 0.8[m/s]

Simulando con una referencia de -0.2 [m/s] se obtiene lo siguiente de la simulación:
La velocidad lineal de la correa se muestra a continuación en la figura 3.36:

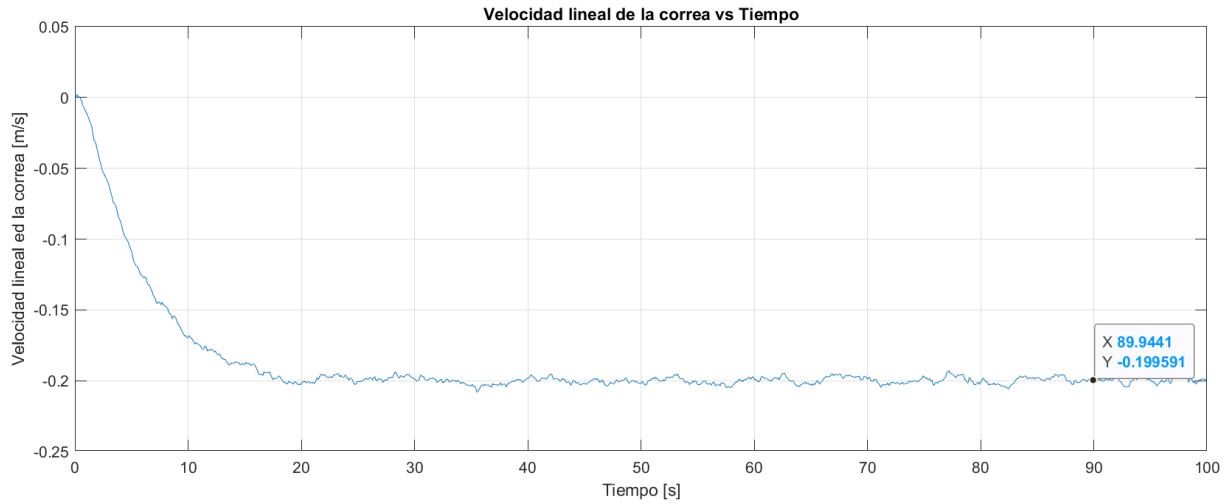


Figura 3.36: Velocidad lineal de la correa con control óptimo. (0.8 [m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.36), se logra llegar a la velocidad deseada de 0.8 [m/s], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (velocidad de equilibrio = 1[m/s]).

La actuación sobre el sistema se muestra a continuación en la figura 3.37 :

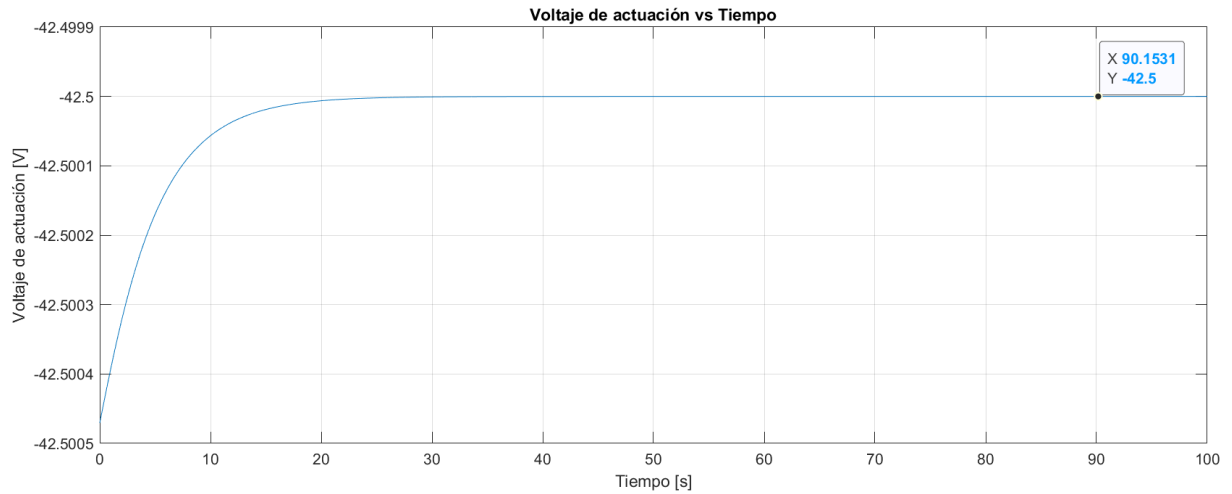


Figura 3.37: Actuación sobre el sistema con control óptimo.(0.8 [m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.37), se logra llegar a una variación del voltaje de actuación de -42.5 [V], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (voltaje de equilibrio = 220[V]). Las variables de estado se muestran a continuación en las figuras 3.38, 3.39, 3.40, 3.41 :

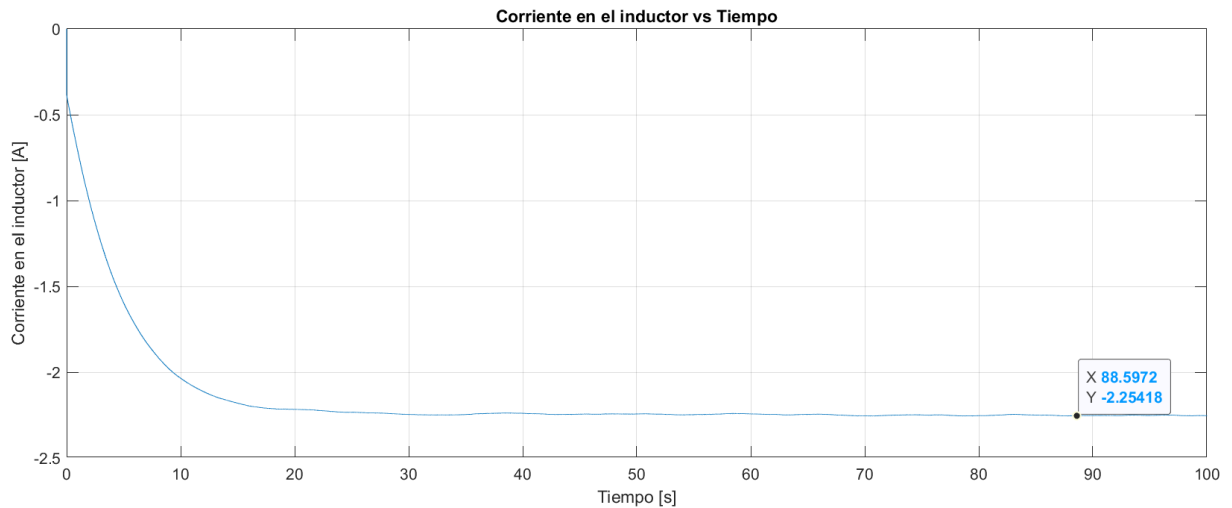


Figura 3.38: Corriente en el inductor $i_L(t)$. (0.8[m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.38), se logra llegar a una variación de la corriente en el inductor de -2.25 [A], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (corriente en el inductor de equilibrio = 11.5[A]).

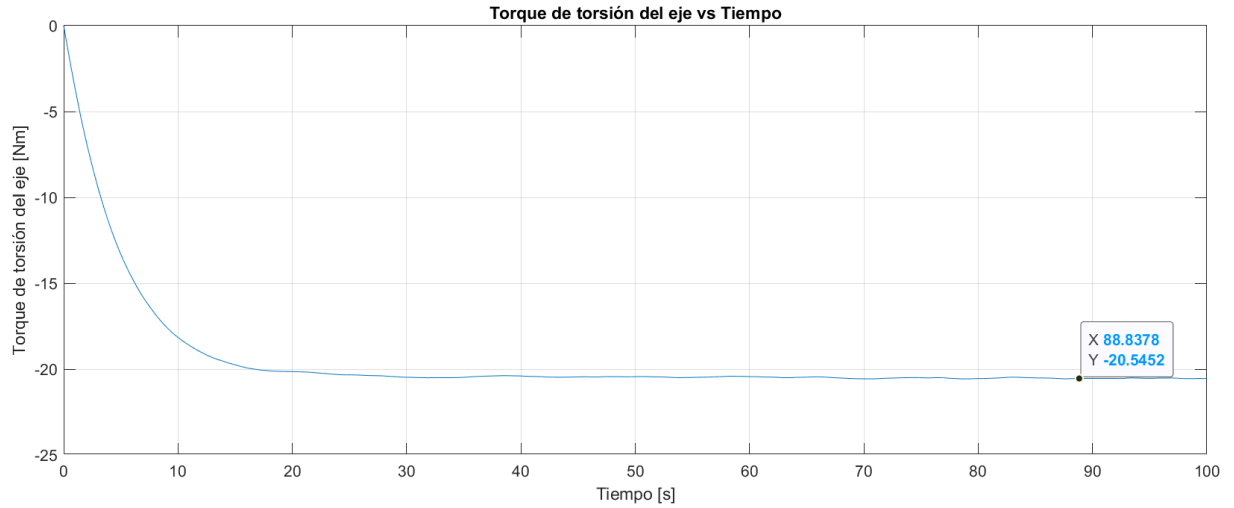


Figura 3.39: Torque de torsión del eje $M_c(t)$. (0.8 [m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.39), se logra llegar a una variación de el torque de torsión del eje de -20.5 [Nm], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (Torque de torsión del eje de equilibrio = 105[Nm]).

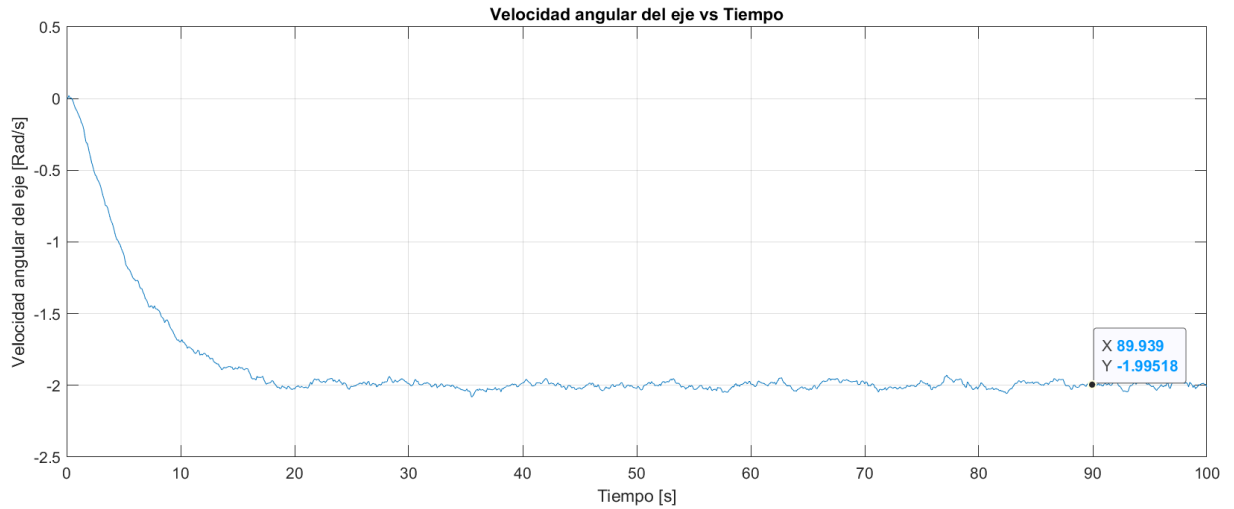


Figura 3.40: Velocidad angular del eje $w_J(t)$. (0.8[m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.40), se logra llegar a una variación de la velocidad angular del eje de -2 [Rad/s], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (velocidad angular del eje de equilibrio = 10[Rad/s]).

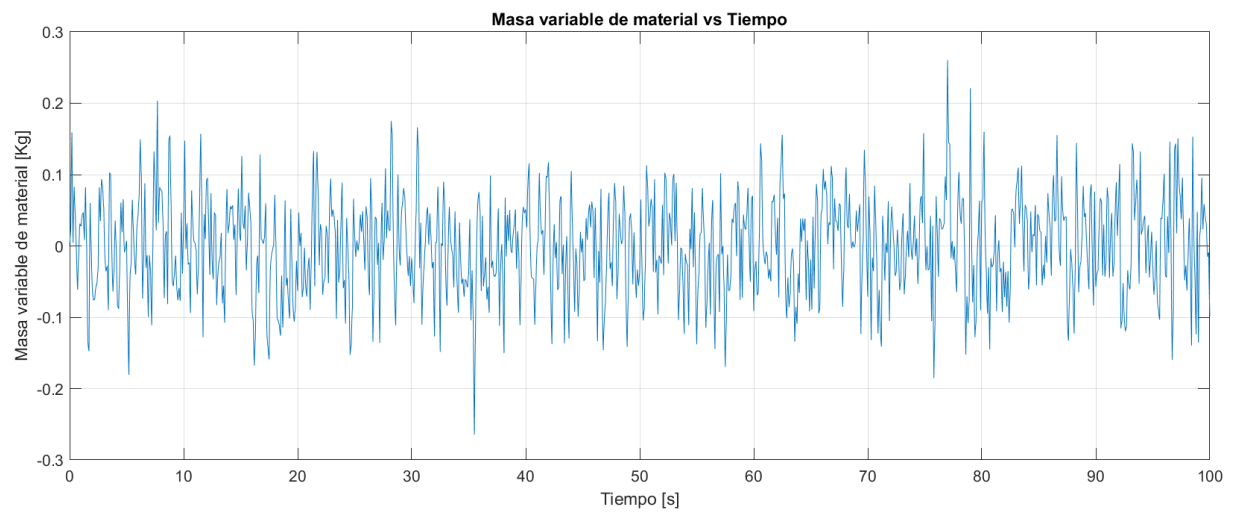


Figura 3.41: Masa variable de material $m_v(t)$. (0.8[m/s]).

3.8.1.2 Control óptimo a 1[m/s]

Simulando con una referencia de 0 [m/s] se obtiene lo siguiente de la simulación:
La velocidad lineal de la correa se muestra a continuación en la figura 3.42:

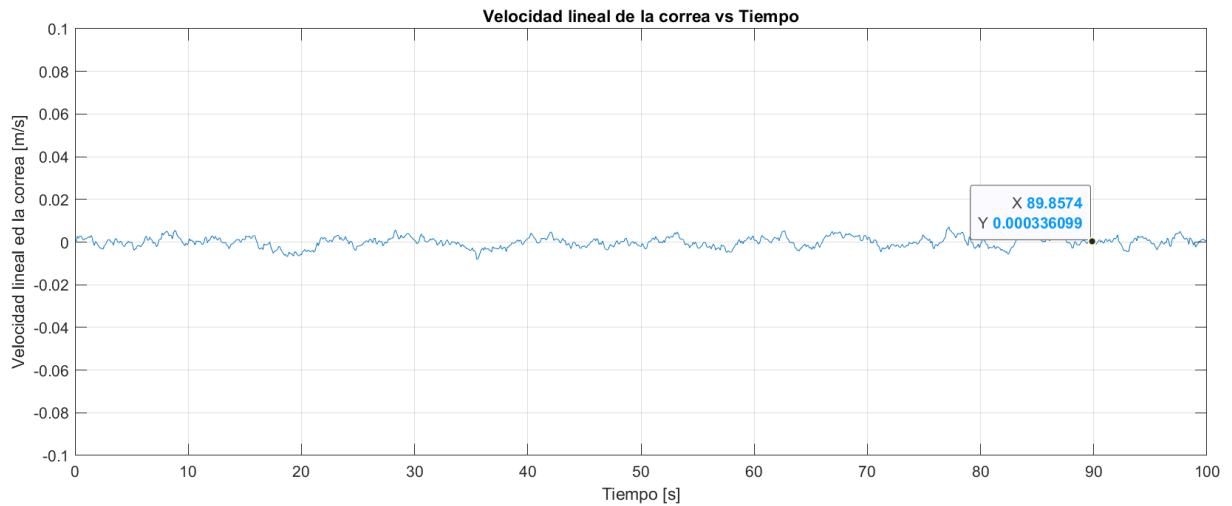


Figura 3.42: Velocidad lineal de la correa con control óptimo. (1 [m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.42), se logra llegar a la velocidad deseada de 1 [m/s], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (velocidad de equilibrio = 1[m/s]).

La actuación sobre el sistema se muestra a continuación en la figura 3.43 :

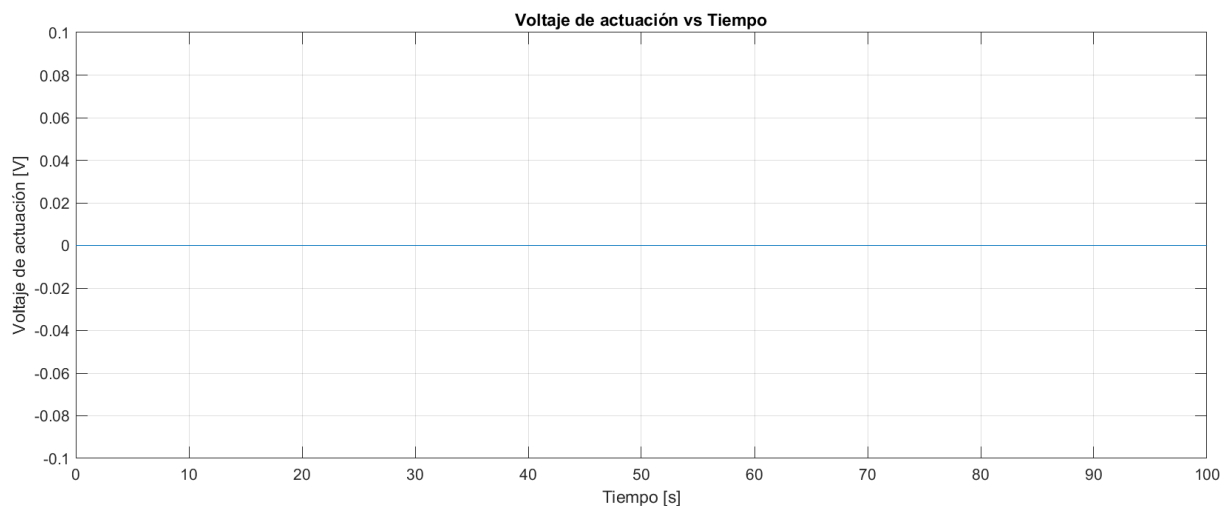


Figura 3.43: Actuación sobre el sistema con control óptimo.(1[m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.43), se logra llegar a una variación del voltaje de actuación de 0[V], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (voltaje de equilibrio = 220[V]).

Las variables de estado se muestran a continuación en las figuras 3.44, 3.45, 3.46, 3.47 :

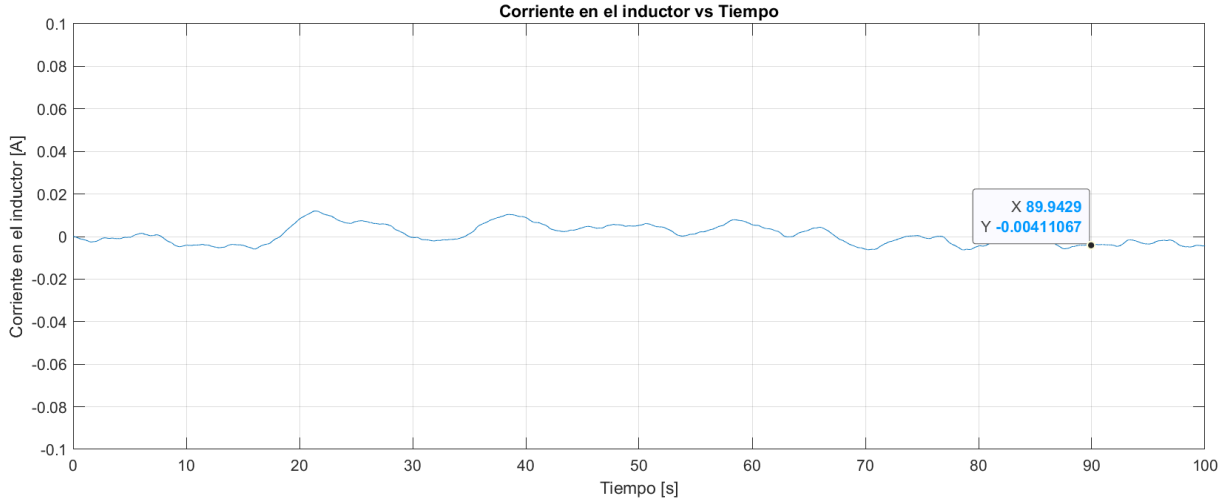


Figura 3.44: Corriente en el inductor $i_L(t)$. (1[m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.44), se logra llegar a una variación de la corriente en el inductor cercana a cero, recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (corriente en el inductor de equilibrio = 11.5[A]).

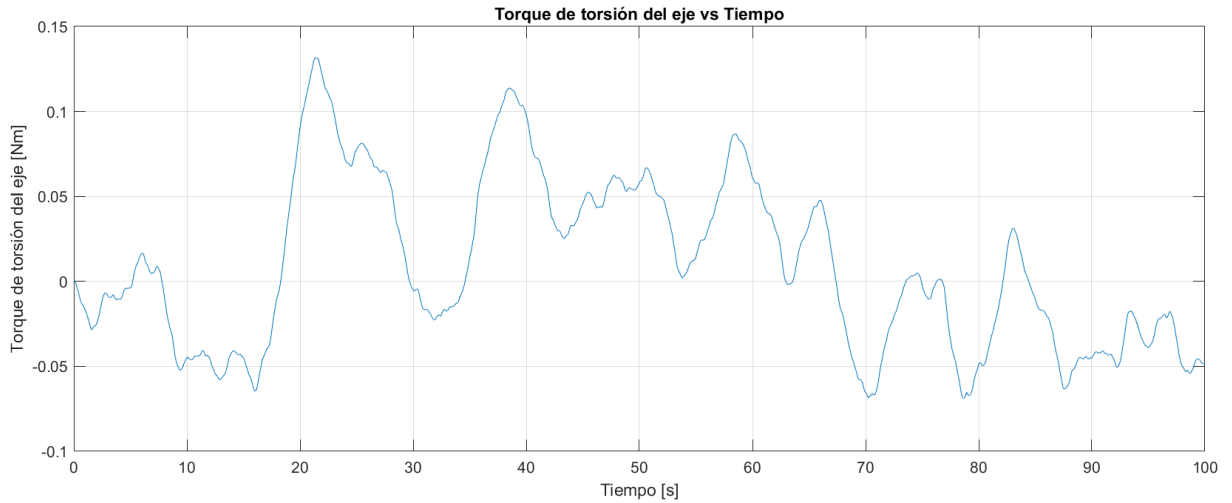


Figura 3.45: Torque de torsión del eje $M_c(t)$. (1 [m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.45), se logra llegar a una variación de el torque de torsión máxima del eje de 0.15 [Nm], es decir, muy cercana a cero, recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (Torque de torsión del eje de equilibrio = 105[Nm]).

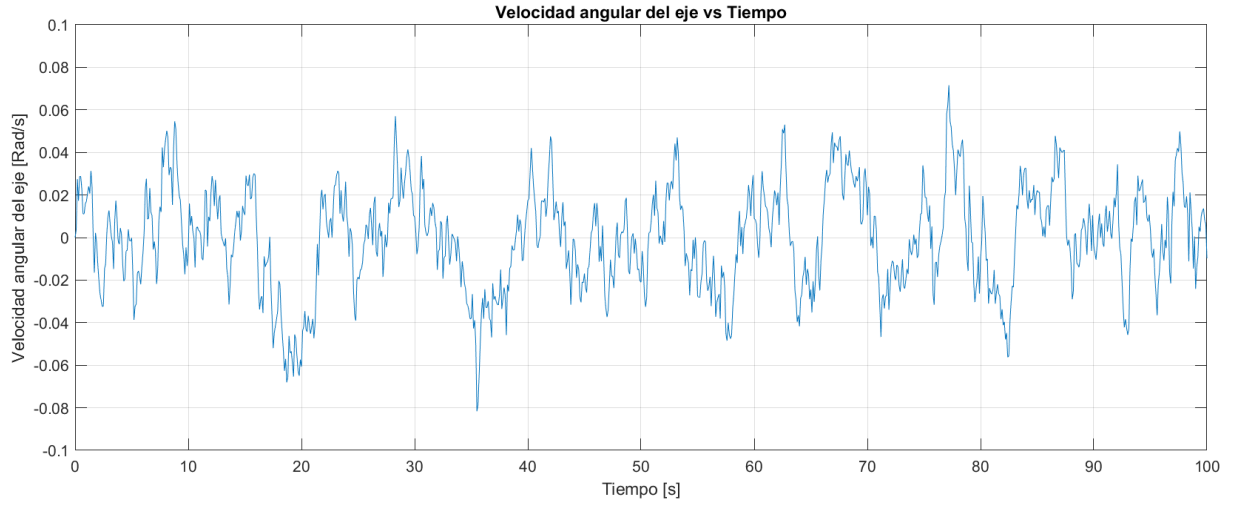


Figura 3.46: Velocidad angular del eje $w_J(t)$. (1[m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.46), se logra llegar a una variación de la velocidad angular de prácticamente 0 [Rad/s], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (velocidad angular del eje de equilibrio = 10[Rad/s]).

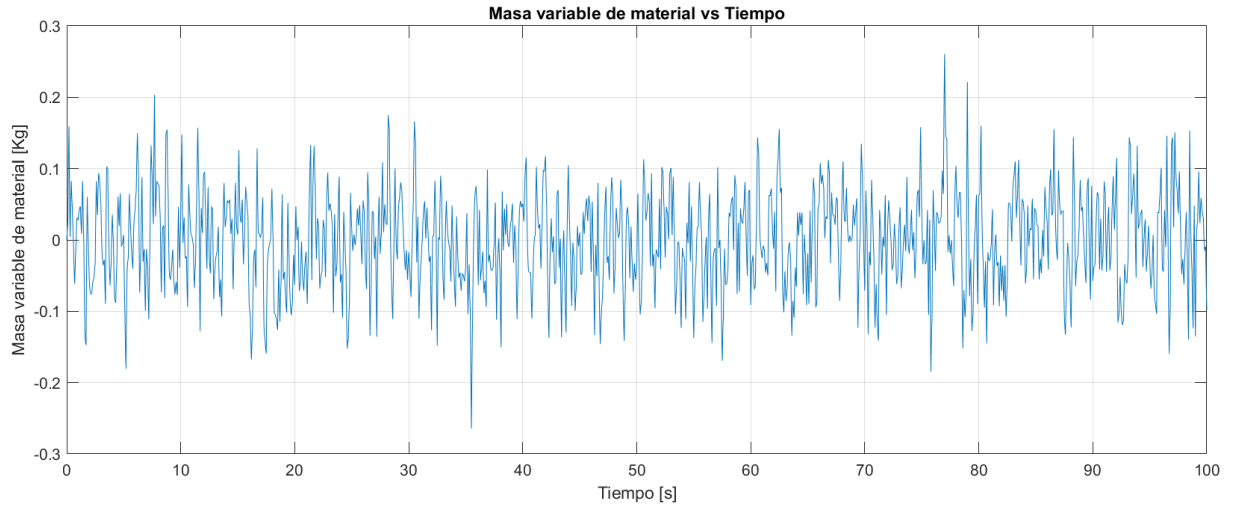


Figura 3.47: Masa variable de material $m_v(t)$. (1[m/s]).

3.8.1.3 Control óptimo a 1.2[m/s]

Simulando con una referencia de 0.2 [m/s] se obtiene lo siguiente de la simulación:

La velocidad lineal de la correa se muestra a continuación en la figura 3.48:

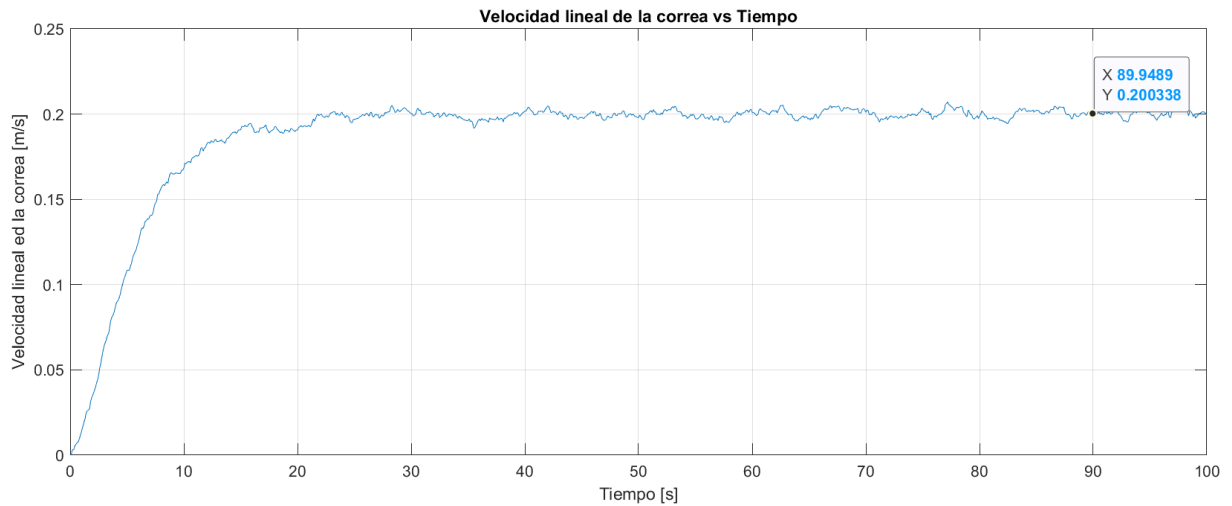


Figura 3.48: Velocidad lineal de la correa con control óptimo. (1.2 [m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.48), se logra llegar a la velocidad deseada de 1.2 [m/s], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (velocidad de equilibrio = 1[m/s]).

La actuación sobre el sistema se muestra a continuación en la figura 3.49 :

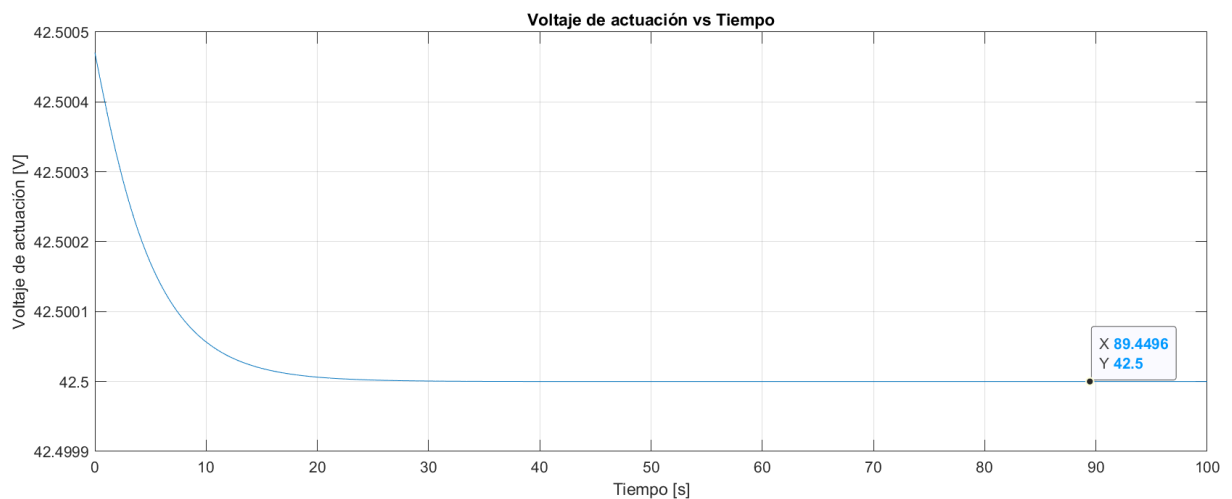


Figura 3.49: Actuación sobre el sistema con control óptimo.(1.2[m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.49), se logra llegar a una variación del voltaje de actuación de 42.5 [V], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (voltaje de equilibrio = 220[V]).

Las variables de estado se muestran a continuación en las figuras 3.50, 3.51, 3.52, 3.53 :

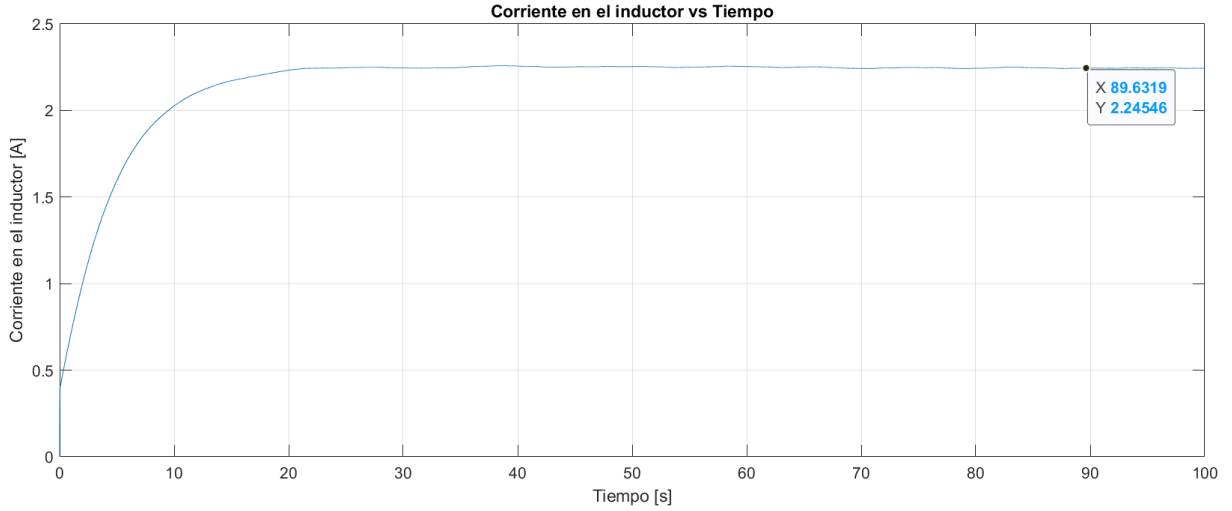


Figura 3.50: Corriente en el inductor $i_L(t)$. (1.2[m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.50), se logra llegar a una variación de la corriente en el inductor de 2.25 [A], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (corriente en el inductor de equilibrio = 11.5[A]).

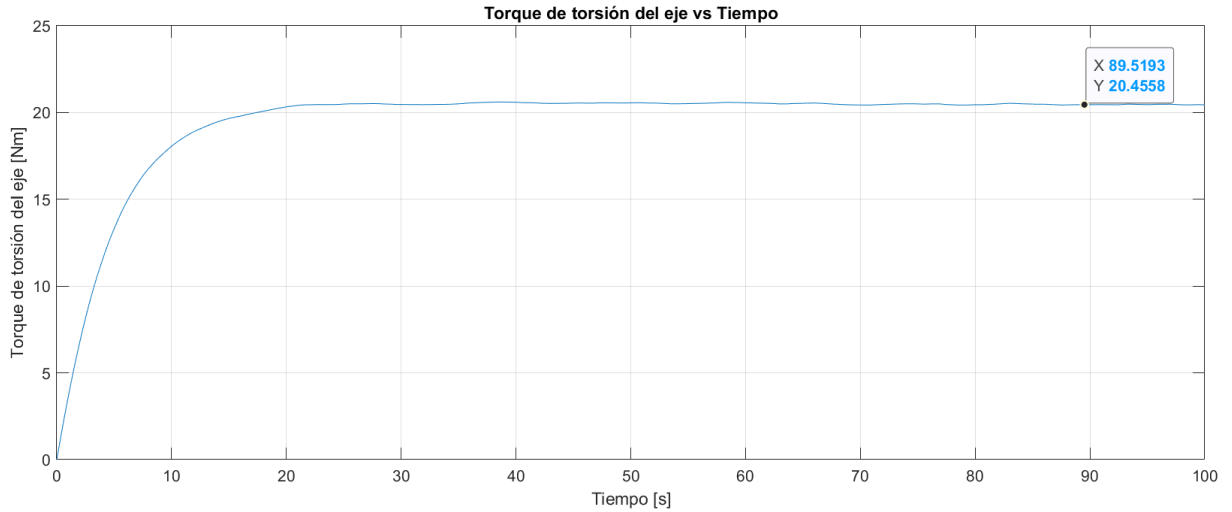


Figura 3.51: Torque de torsión del eje $M_c(t)$. (1.2 [m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.51), se logra llegar a una variación de el torque de torsión del eje de 20.5 [Nm], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (Torque de torsión del eje de equilibrio = 105[Nm]).

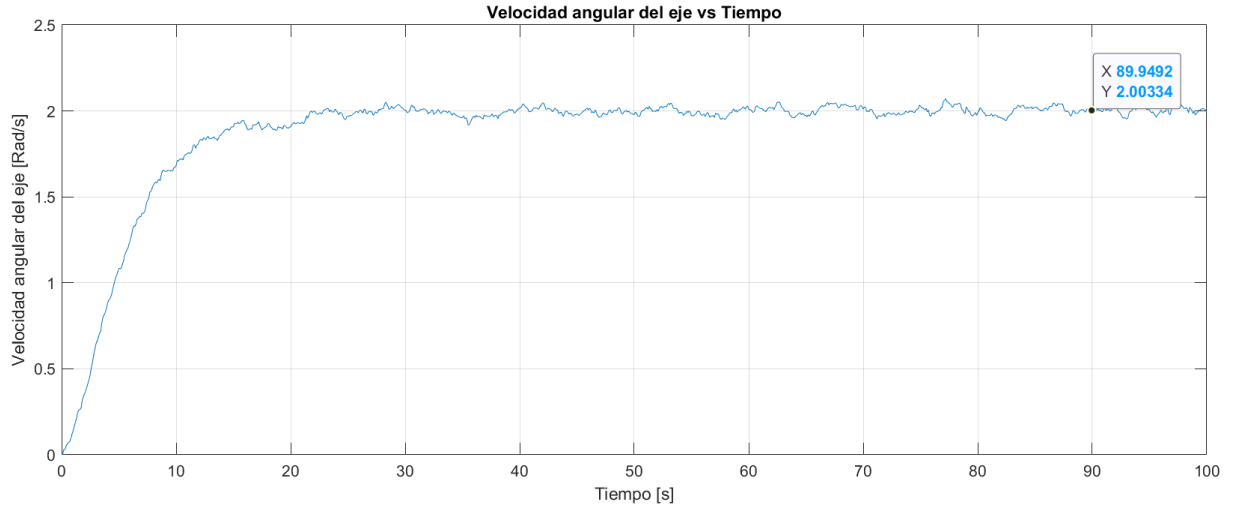


Figura 3.52: Velocidad angular del eje $w_J(t)$. (1.2[m/s]).

Como se puede notar en la figura (3.52), se logra llegar a una variación de la velocidad angular del eje de 2 [Rad/s], recordar que se esta trabajando en torno al punto de equilibrio por lo que el gráfico muestra una variación respecto a éste (velocidad angular del eje de equilibrio = 10[Rad/s]).

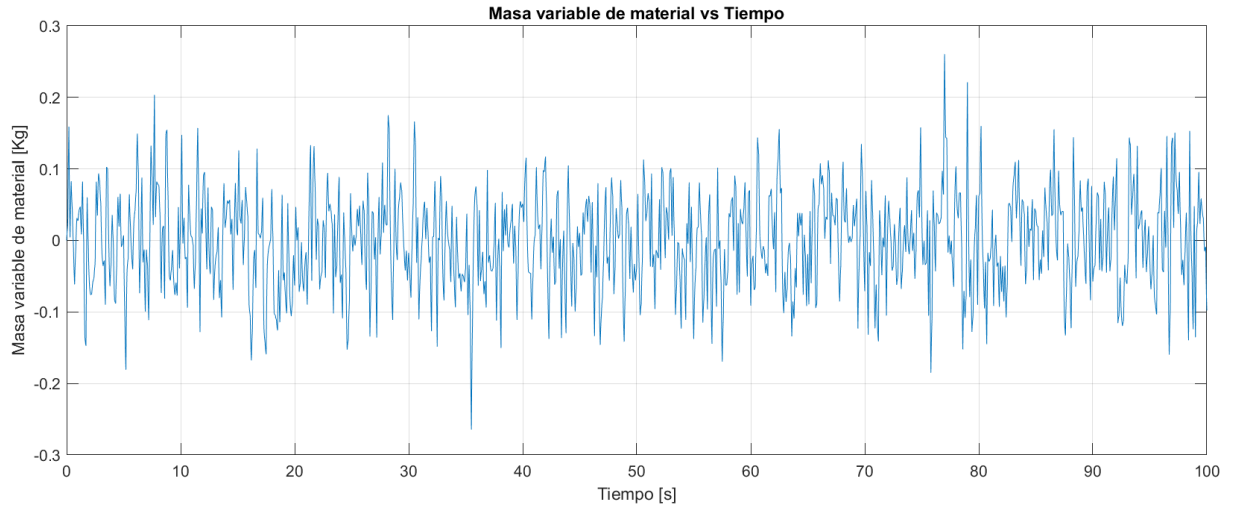


Figura 3.53: Masa variable de material $m_v(t)$. (1.2[m/s]).

3.8.2 Control óptimo con cambio de granulidad del material

Se procederá a simular la aplicación del control óptimo en la correa para velocidades de 0.8[m/s], 1[m/s] y 1.2[m/s], es decir, usando referencias de -0.2[m/s], 0[m/s] y 0,2[m/s] cambiando la granulidad del material, es decir se procederá a cambiar la masa variable de material, esto lo haremos modificando en la ecuación (3.55) el parámetro w_0 , que tomara valores de 0.1 , 0.5 , 1 , 2 y 10. Para ver si el control óptimo está minimizando la perturbación, se determinará la varianza en la salida cuando el sistema está sin control y cuando está con control óptimo.

Para el sistema sin control óptimo se procederá a utilizar la siguiente simulación en 'MATLAB - simulink' con los voltajes de actuación encontrados anteriormente para las distintas velocidades:

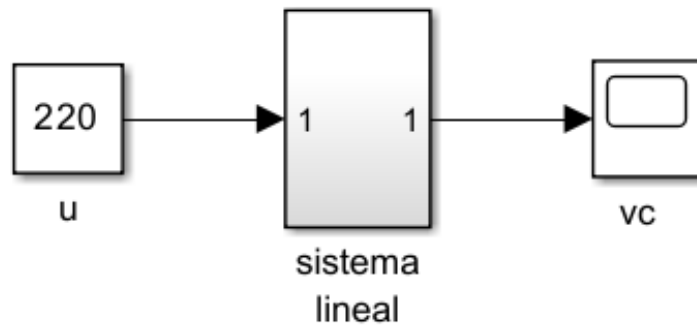


Figura 3.54: Sistema lineal con su entrada y salida.

El interior del bloque 'sistema lineal', presente en la figura anterior, donde se representan las ecuaciones que representan el sistema lineal, se muestra a continuación:

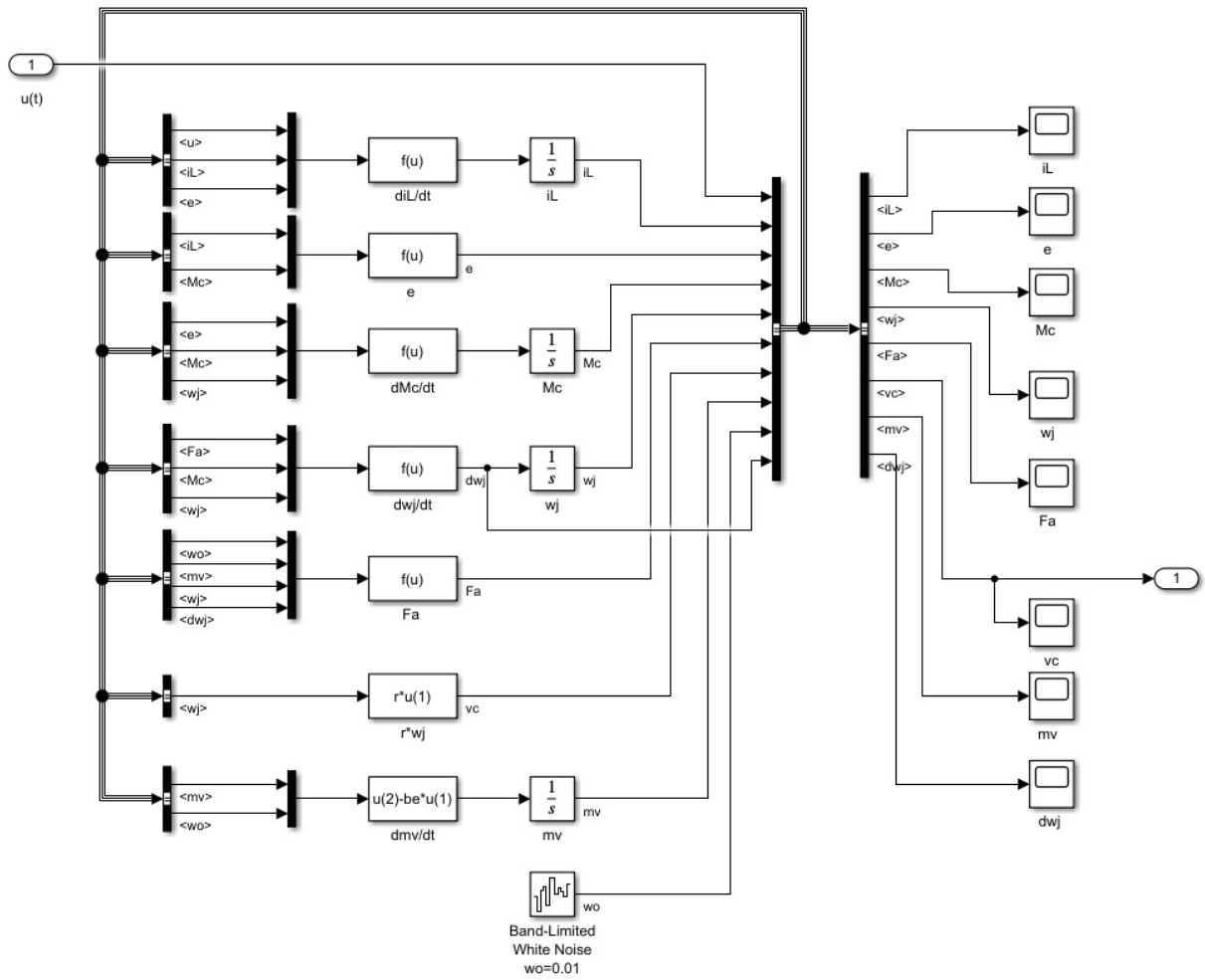
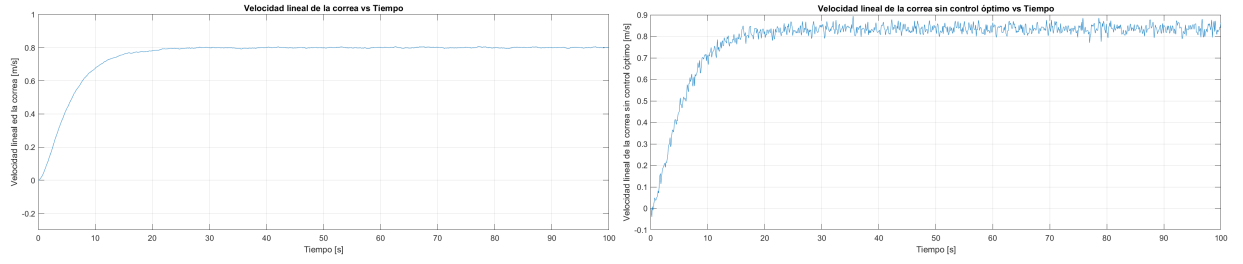


Figura 3.55: Representación ecuaciones sistema lineal.

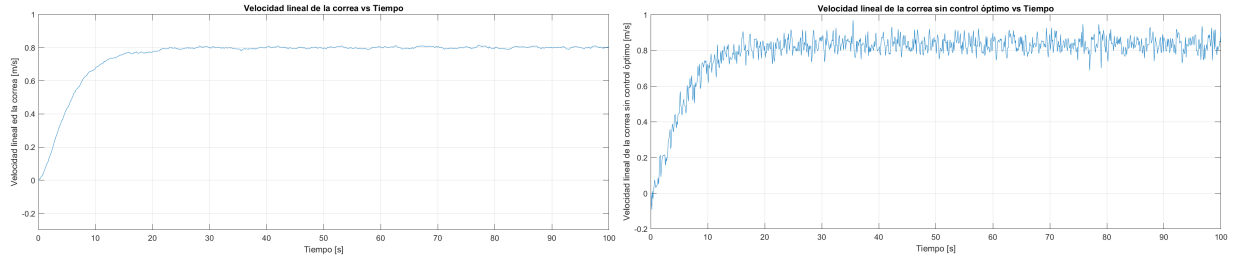
3.8.2.1 Control óptimo a 0.8 [m/s] con distintas granulidades

Simulando con una referencia de -0.2 [m/s] para el sistema con control óptimo y un voltaje de actuación de 177.5 [V] y masa variable del material $m_v(t)$ con w_0 con valores de 0.1 , 0.5 , 1 y 10 se obtiene lo siguiente de la simulación:

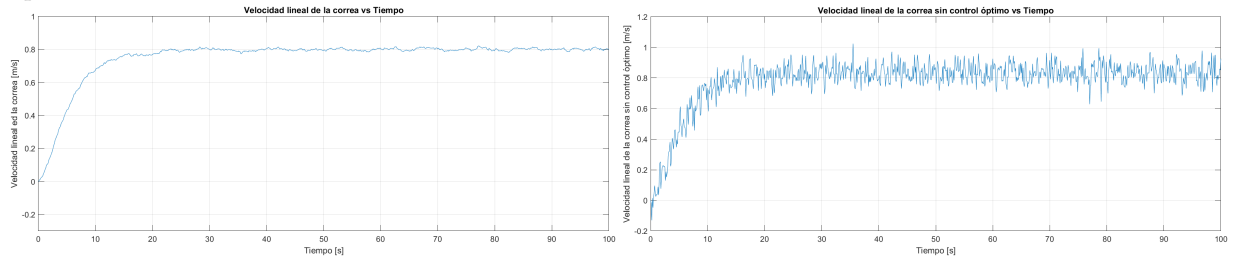
La velocidad lineal de la correa se muestra a continuación en la figura 3.56:



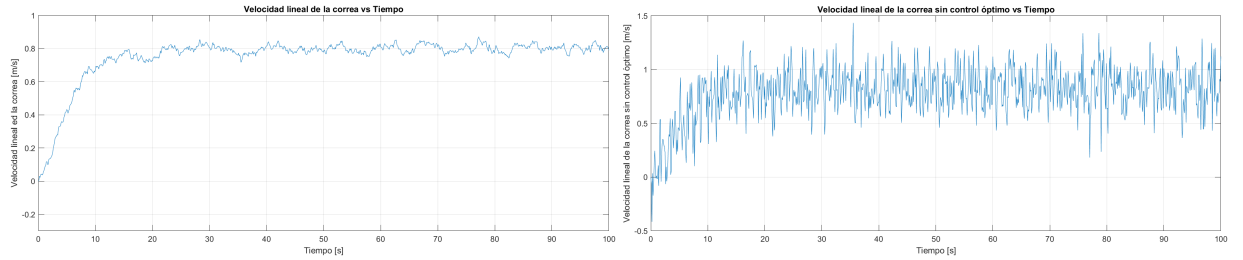
(a) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.1$ c/control óptimo. (b) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.1$ s/control óptimo.



(c) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.5$ c/control óptimo. (d) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.5$ s/control óptimo.



(e) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 1$ c/control óptimo. (f) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 1$ s/control óptimo.



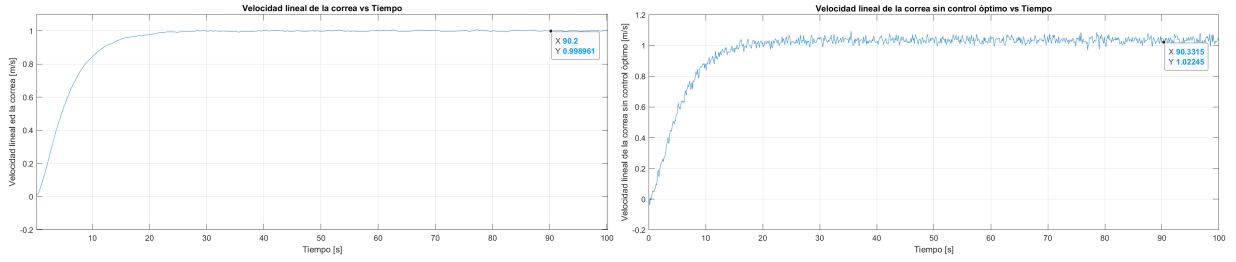
(g) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 10$ c/control óptimo. (h) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 10$ s/control óptimo.

Figura 3.56: Velocidad lineal de la correa ($0.8[m/s]$) para distintas granulidades del material con y sin control óptimo.

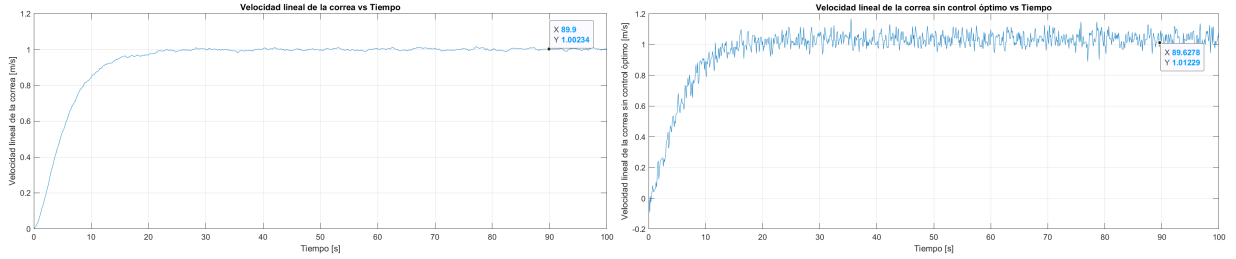
3.8.2.2 Control óptimo a 1 [m/s] con distintas granulidades

Simulando con una referencia de 0 [m/s] para el sistema con control óptimo y un voltaje de actuación de 220 [V] y masa variable del material $m_v(t)$ con w_0 con valores de 0.1 , 0.5 , 1 y 10 se obtiene lo siguiente de la simulación:

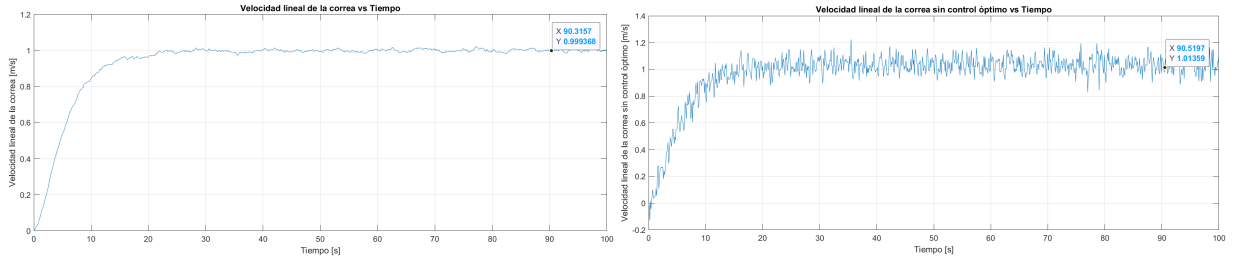
La velocidad lineal de la correa se muestra a continuación en la figura 3.57:



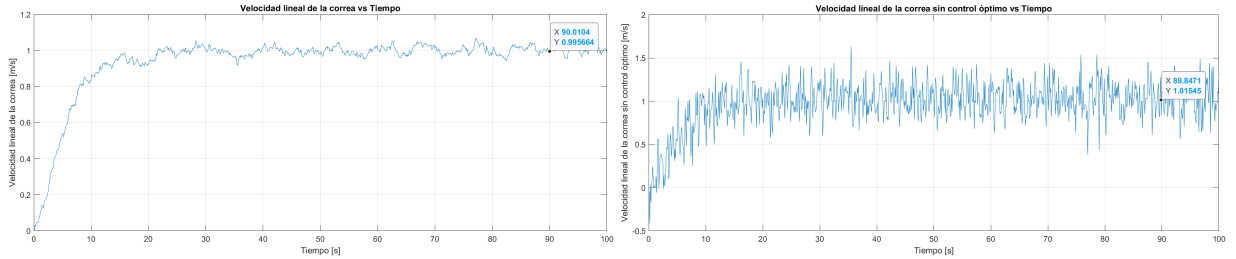
(a) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.1$ c/control óptimo. (b) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.1$ s/control óptimo.



(c) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.5$ c/control óptimo. (d) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.5$ s/control óptimo.



(e) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 1$ c/control óptimo. (f) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 1$ s/control óptimo.



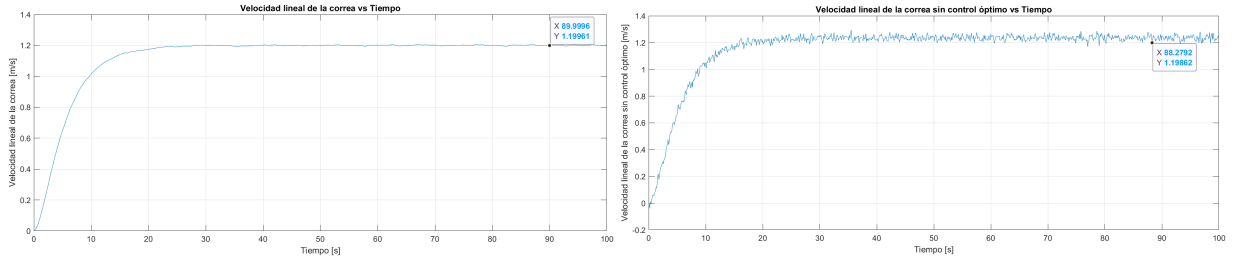
(g) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 10$ c/control óptimo. (h) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 10$ s/control óptimo.

Figura 3.57: Velocidad lineal de la correa (1[m/s]) para distintas granulidades del material con y sin control óptimo.

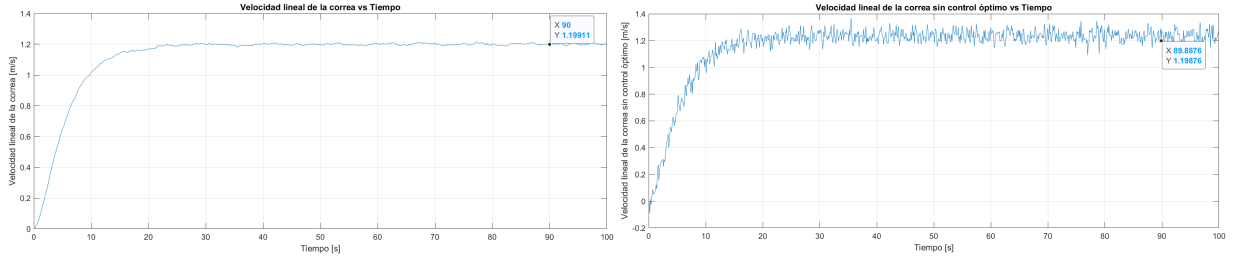
3.8.2.3 Control óptimo a 1.2 [m/s] con distintas granulidades

Simulando con una referencia de 0.2 [m/s] para el sistema con control óptimo y un voltaje de actuación de 262.5 [V] y masa variable del material $m_v(t)$ con w_0 con valores de 0.1 , 0.5 , 1 y 10 se obtiene lo siguiente de la simulación:

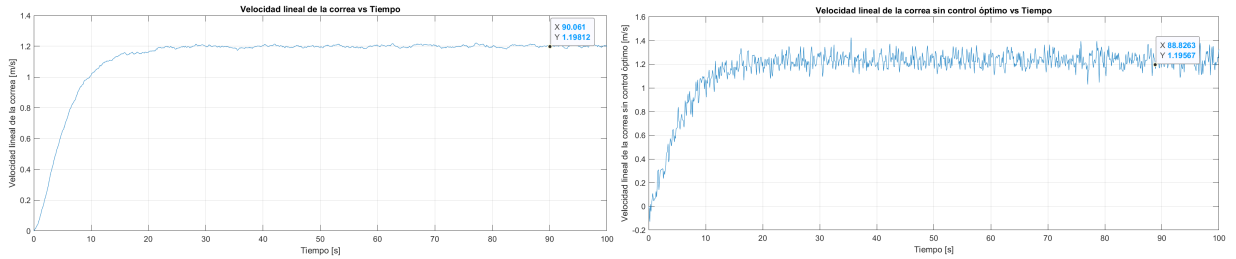
La velocidad lineal de la correa se muestra a continuación en la figura 3.58:



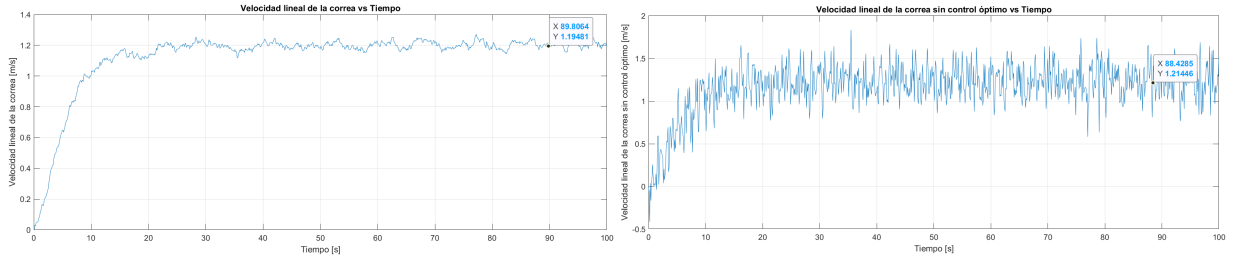
(a) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.1$ c/control óptimo. (b) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.1$ s/control óptimo.



(c) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.5$ c/control óptimo. (d) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 0.5$ s/control óptimo.



(e) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 1$ c/control óptimo. (f) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 1$ s/control óptimo.



(g) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 10$ c/control óptimo. (h) Velocidad lineal de la correa $w_0(t) = 10$ s/control óptimo.

Figura 3.58: Velocidad lineal de la correa (1[m/s]) para distintas granulidades del material con y sin control óptimo.

3.8.3 Control óptimo sobre una correa sin mantención

Se procederá a simular el control óptimo sobre la correa en un escenario adverso que podría suceder, como podría ser el que no se haya realizado mantención en los polines de la correa.

Como vimos anteriormente en el modelado el subsistema de traslación esta compuesto por:

- Masa de la correa (energía cinética).
- Masa del material (energía cinética)
- Roce viscoso de los polines de carga.

El equivalente eléctrico de la correa y el material que transporta se encuentra a continuación:

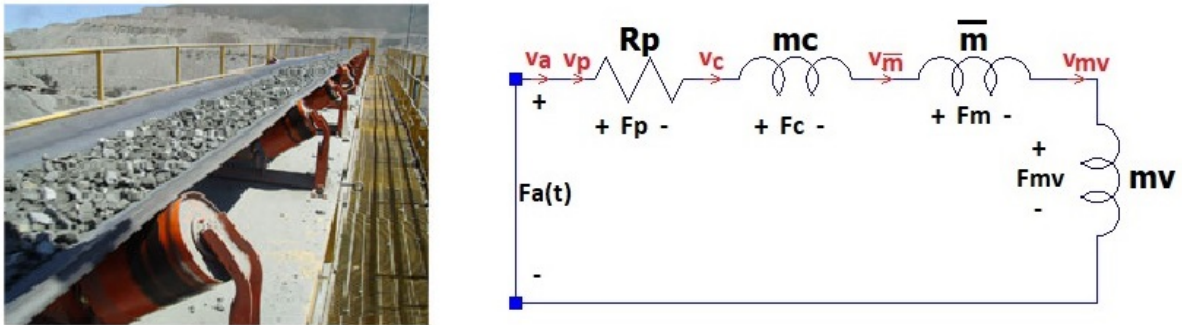


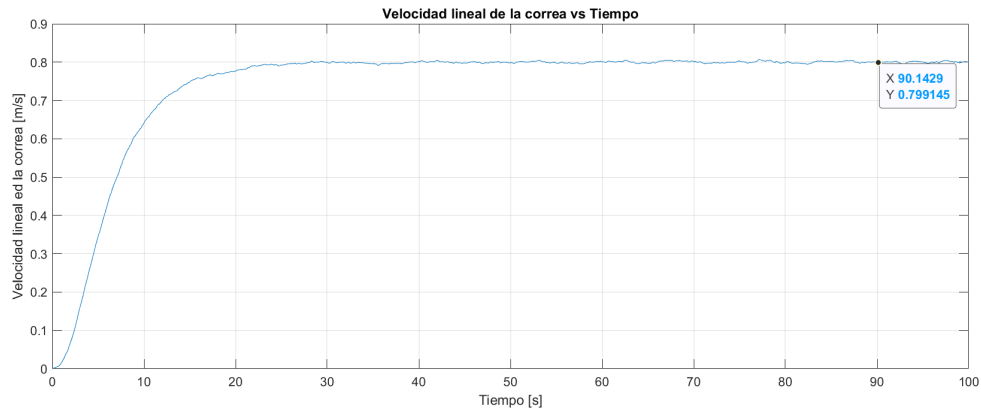
Figura 3.59: Carga que debe mover el rodillo y su equivalente eléctrico

Como podemos ver en la figura (3.59) la componente que esta directamente relacionada con el roce viscoso de los polines es R_p , la cual es la constante de roce viscoso de los polines, que durante todas las simulaciones anteriores se utilizó con un valor de 25 [Nms/rad], para las siguientes simulaciones se utilizará un valor de 50 [Nms/rad], es decir, el doble de resistencia al movimiento.

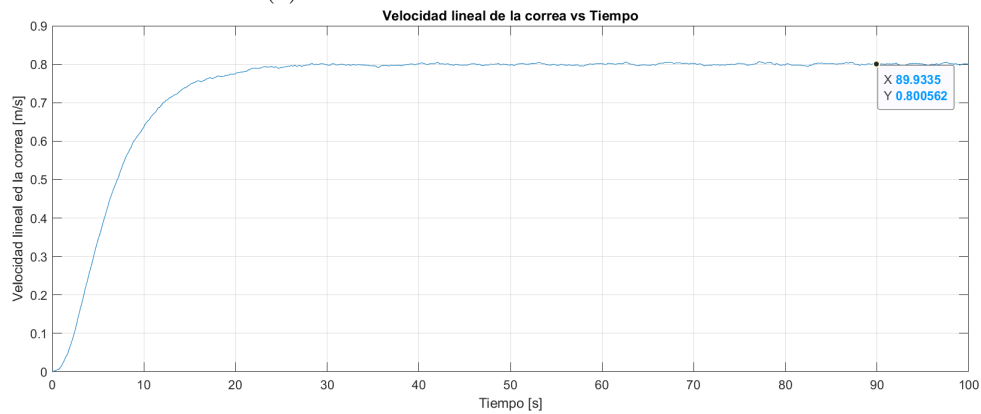
Se procederá a simular el control en los extremos, es decir, a velocidades de 0.8[m/s], 1[m/s] y 1.2[m/s]. Los resultados se muestran a continuación:

3.8.3.1 Control óptimo a 0.8 [m/s]

La velocidad lineal de la correa se muestra a continuación en la figura 3.60:



(a) Velocidad lineal de la correa normal

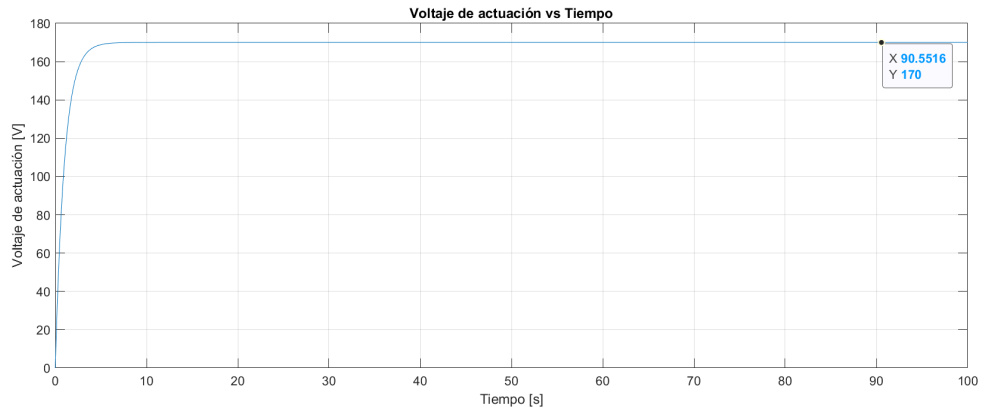


(b) Velocidad lineal de la correa sin mantención

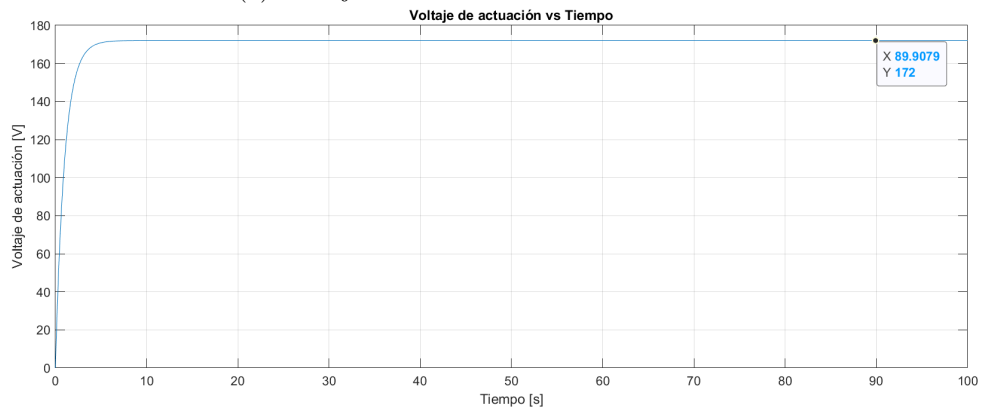
Figura 3.60: Velocidad lineal de la correa (0.8 [m/s]) con y sin mantención

Como se puede apreciar en la figura (3.60) la velocidad lineal de la correa no se ve afectada, como es de esperarse, el efecto de un mayor roce viscoso de los polines debería afectar al esfuerzo que realiza el motor, por lo que veríamos cambios en el voltaje de actuación, en la corriente por el inductor y cambios en el torque de torsión del eje por el esfuerzo extra.

El voltaje de actuación sobre la correa se muestra a continuación en la figura 3.61:



(a) Voltaje de actuación de la correa normal

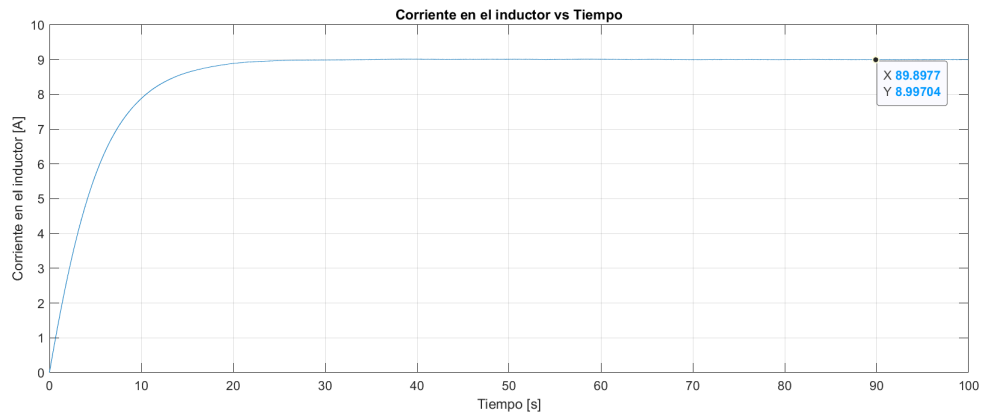


(b) Voltaje de actuación sobre la correa sin mantención

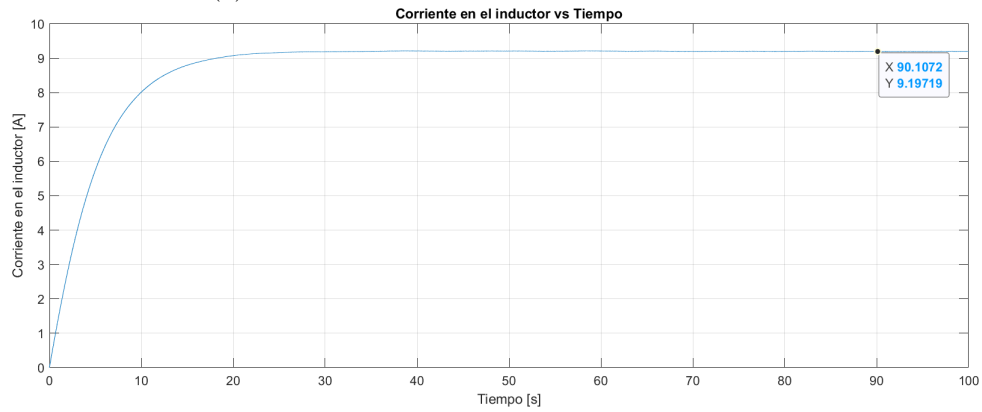
Figura 3.61: Voltaje de actuación sobre de la correa (0.8 [m/s]) con y sin mantención

Como se puede apreciar en la figura (3.61) el voltaje de actuación sobre la correa se ve ligeramente afectado teniendo una variación de 170 a 172 [V], como es de esperarse, por el esfuerzo extra.

La corriente en el inductor se muestra a continuación en la figura 3.62:



(a) Corriente en el inductor con la correa normal

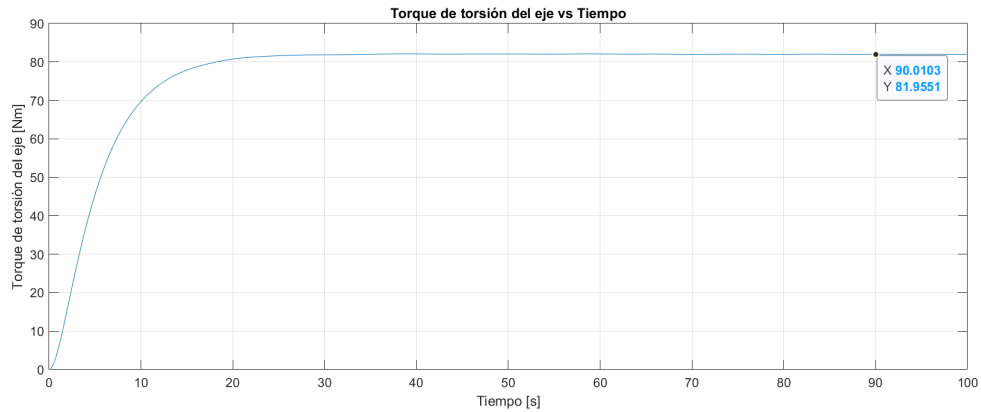


(b) Corriente en el inductor con la correa sin mantención

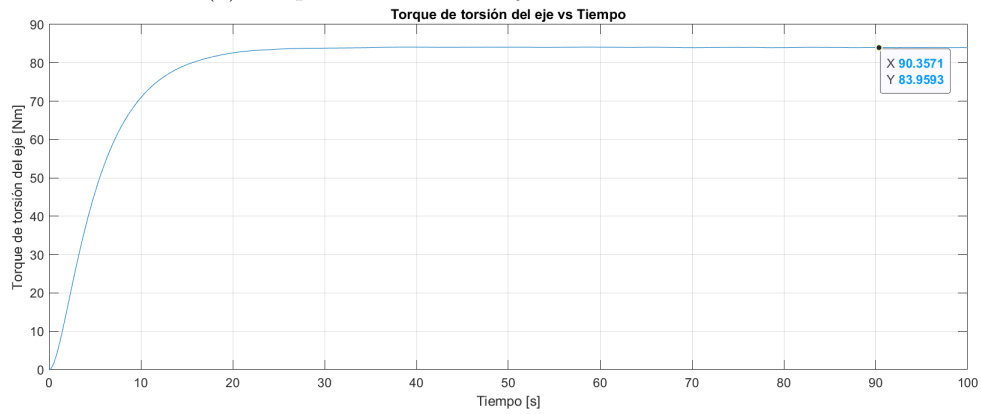
Figura 3.62: Corriente en el inductor con la correa (0.8 [m/s]) con y sin mantención

Como se puede apreciar en la figura (3.62) la corriente por el inductor se ve ligeramente afectada teniendo una variación de 9 a 9.2 [A], como es de esperarse, por el esfuerzo extra.

El torque de torsión del eje se muestra a continuación en la figura 3.63:



(a) Torque de torsión del eje con la correa normal

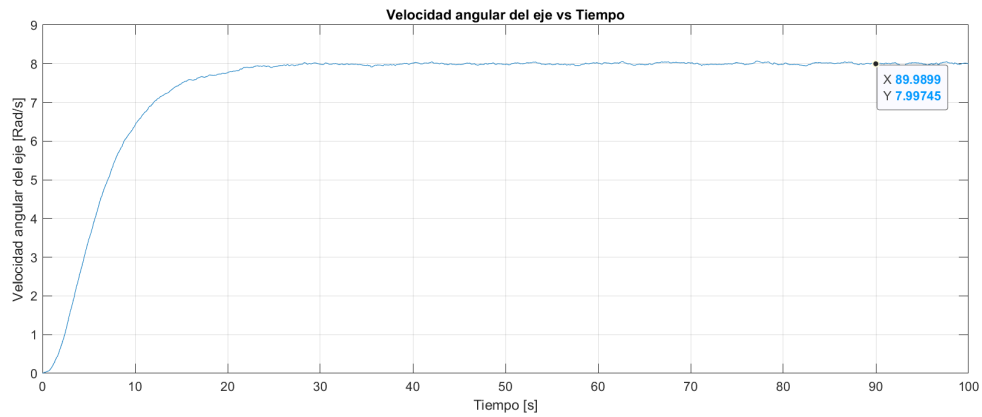


(b) Torque de torsión del eje con la correa sin mantención

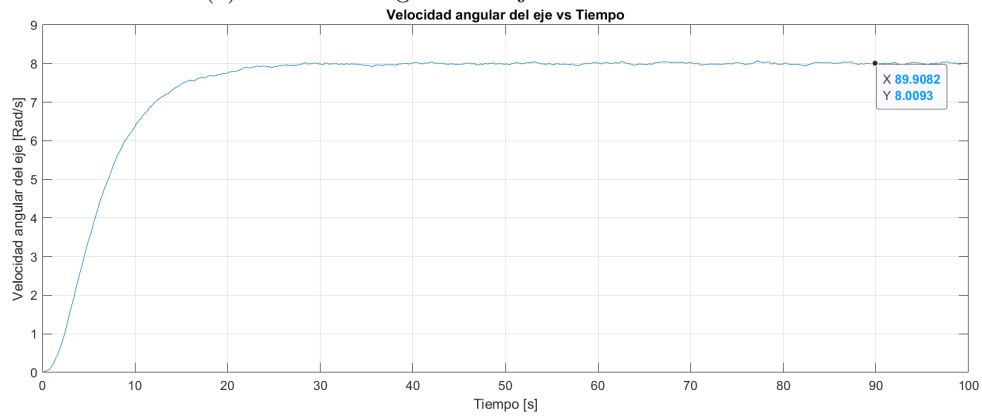
Figura 3.63: Torque de torsión del eje con la correa (0.8 [m/s]) con y sin mantención

Como se puede apreciar en la figura (3.63) el torque de torsión del eje se ve ligeramente afectado teniendo una variación de 82 a 84 [Nm], como es de esperarse, por el esfuerzo extra.

La velocidad angular del eje se muestra a continuación en la figura 3.64:



(a) Velocidad angular del eje con la correa normal



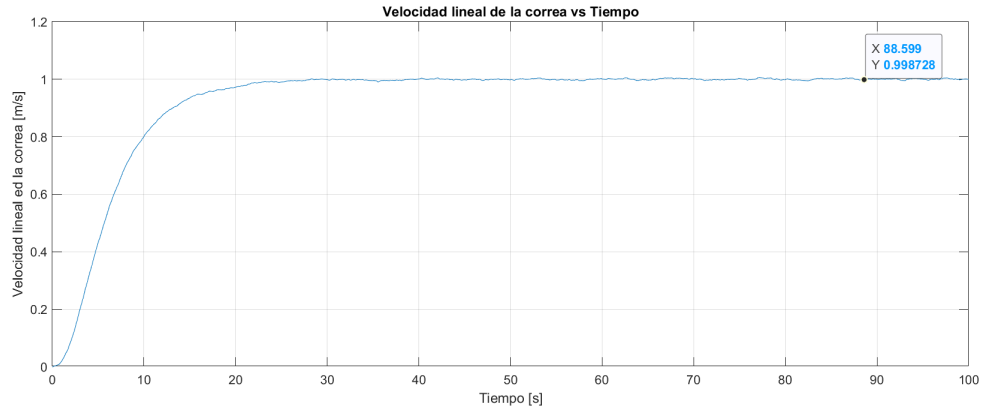
(b) Velocidad angular del eje con la correa sin mantención

Figura 3.64: Velocidad angular del eje con la correa (0.8 [m/s]) con y sin mantención

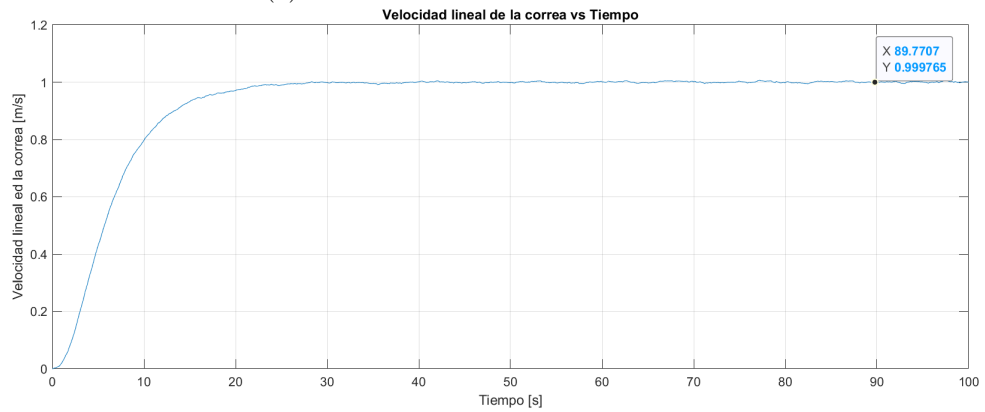
Como se puede apreciar en la figura (3.64) la velocidad angular del eje no se ve afectada como es de esperarse, debido a que es la variable controlada.

3.8.3.2 Control óptimo a 1 [m/s]

La velocidad lineal de la correa se muestra a continuación en la figura 3.65:



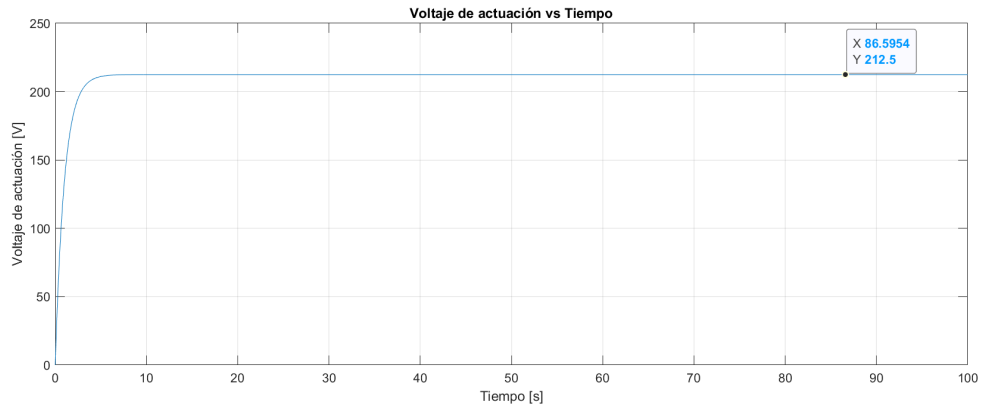
(a) Velocidad lineal de la correa normal



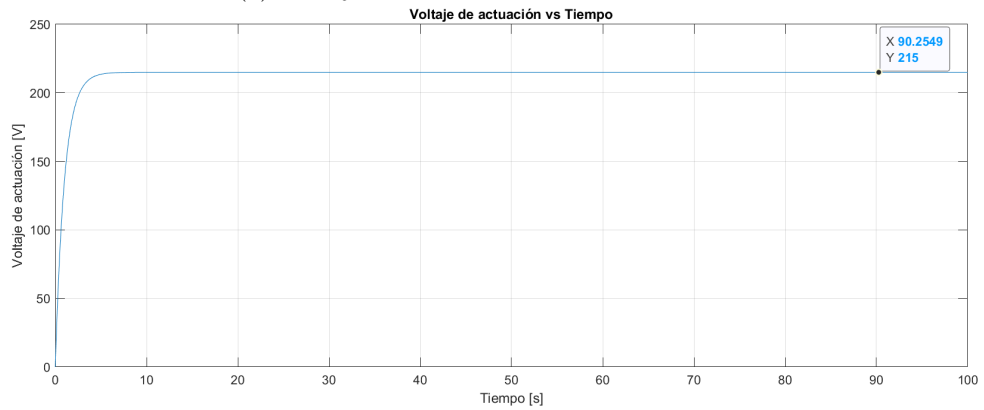
(b) Velocidad lineal de la correa sin mantención

Figura 3.65: Velocidad lineal de la correa (1 [m/s]) con y sin mantención

El voltaje de actuación sobre la correa se muestra a continuación en la figura 3.66:



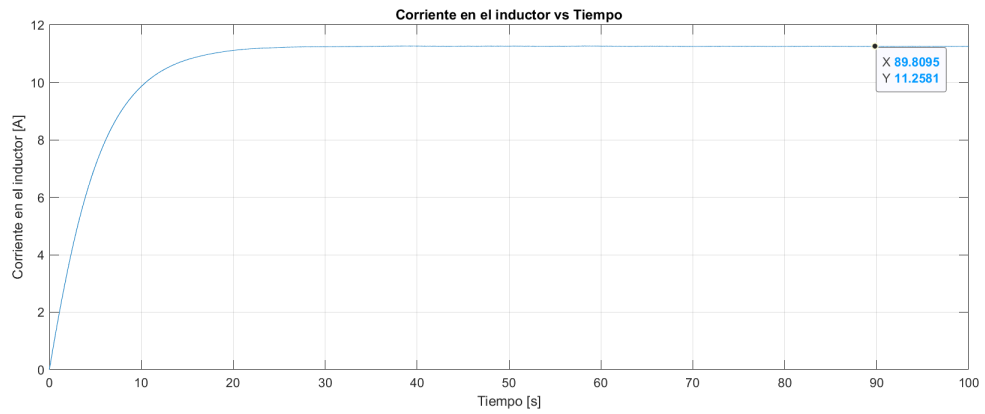
(a) Voltaje de actuación de la correa normal



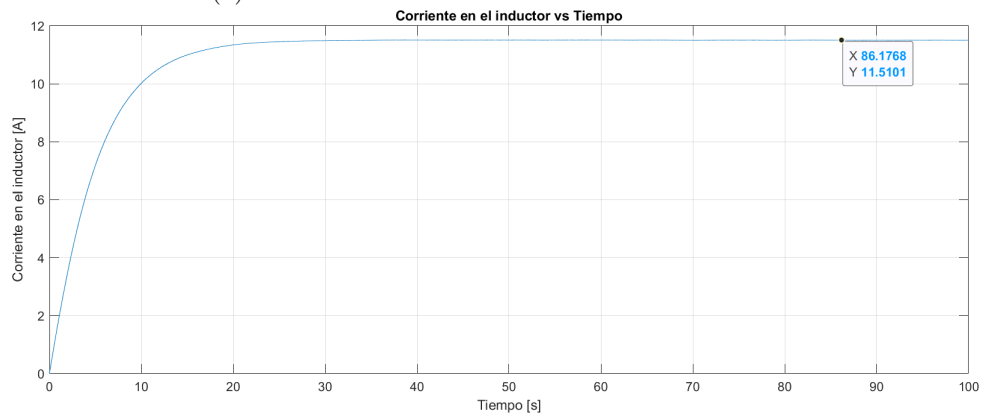
(b) Voltaje de actuación sobre la correa sin mantención

Figura 3.66: Voltaje de actuación sobre de la correa (1 [m/s]) con y sin mantención

La corriente en el inductor se muestra a continuación en la figura 3.67:



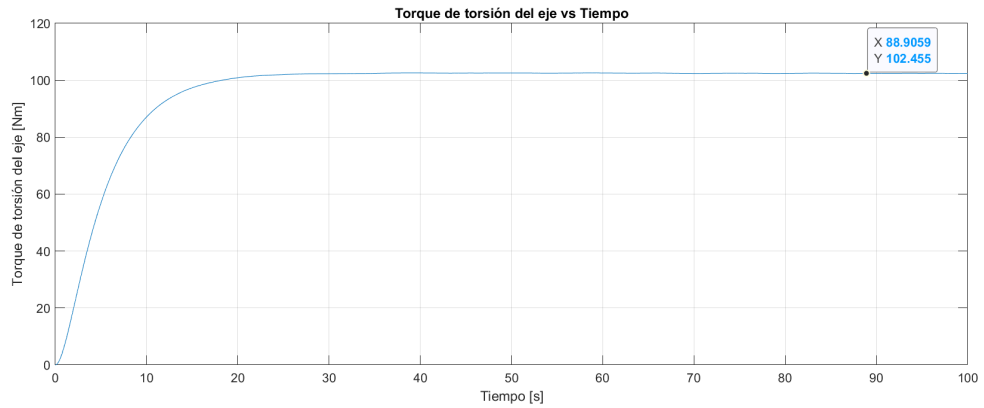
(a) Corriente en el inductor con la correa normal



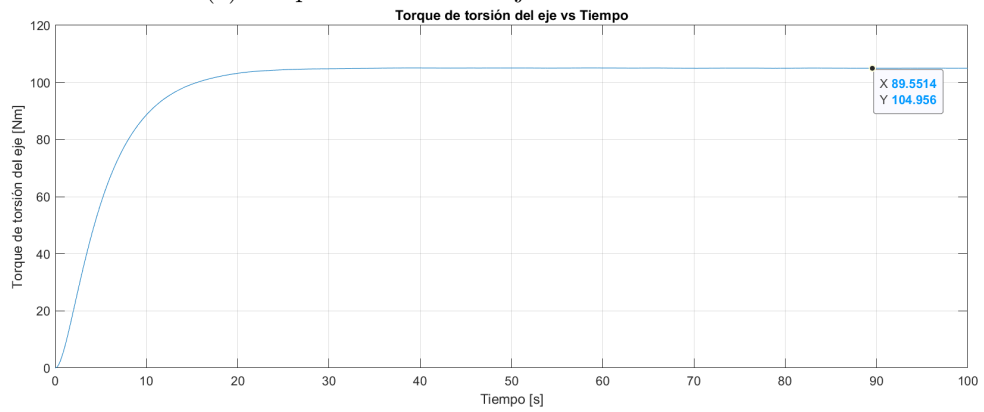
(b) Corriente en el inductor con la correa sin mantención

Figura 3.67: Corriente en el inductor con la correa (1 [m/s]) con y sin mantención

El torque de torsión del eje se muestra a continuación en la figura 3.68:



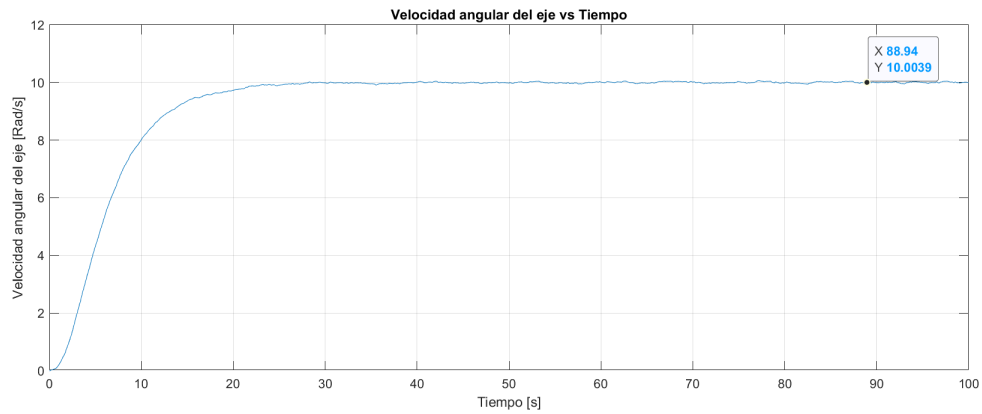
(a) Torque de torsión del eje con la correa normal



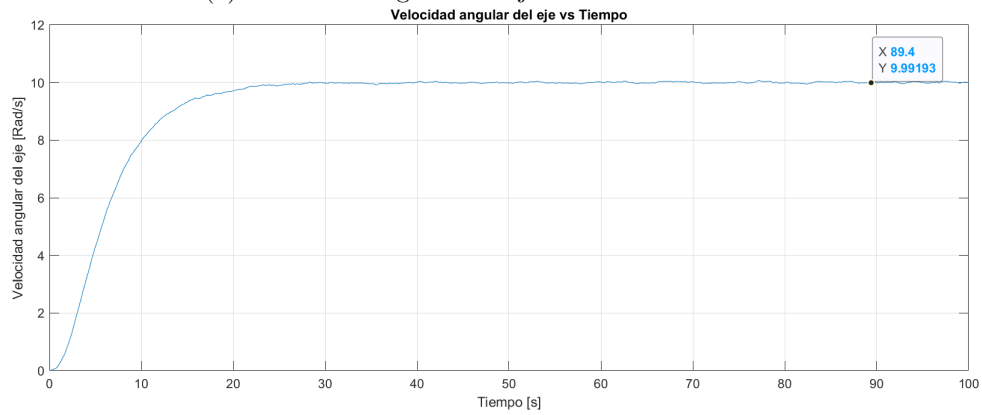
(b) Torque de torsión del eje con la correa sin mantención

Figura 3.68: Torque de torsión del eje con la correa (1 [m/s]) con y sin mantención

La velocidad angular del eje se muestra a continuación en la figura 3.69:



(a) Velocidad angular del eje con la correa normal



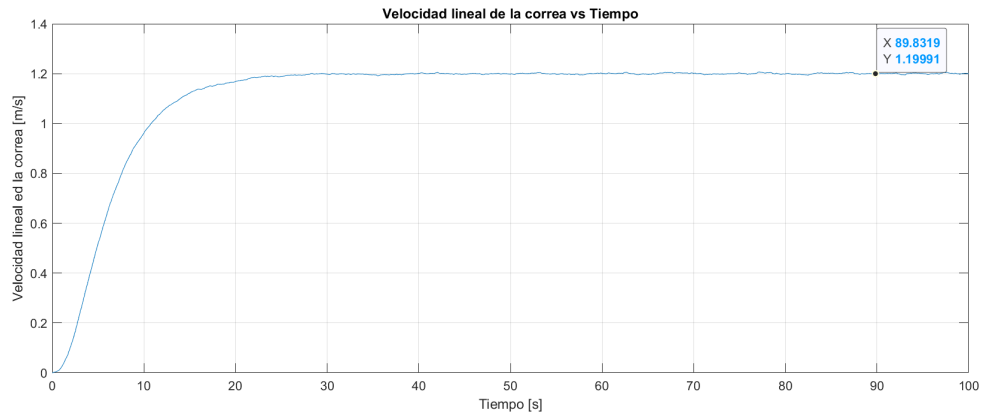
(b) Velocidad angular del eje con la correa sin mantención

Figura 3.69: Velocidad angular del eje con la correa (1 [m/s]) con y sin mantención

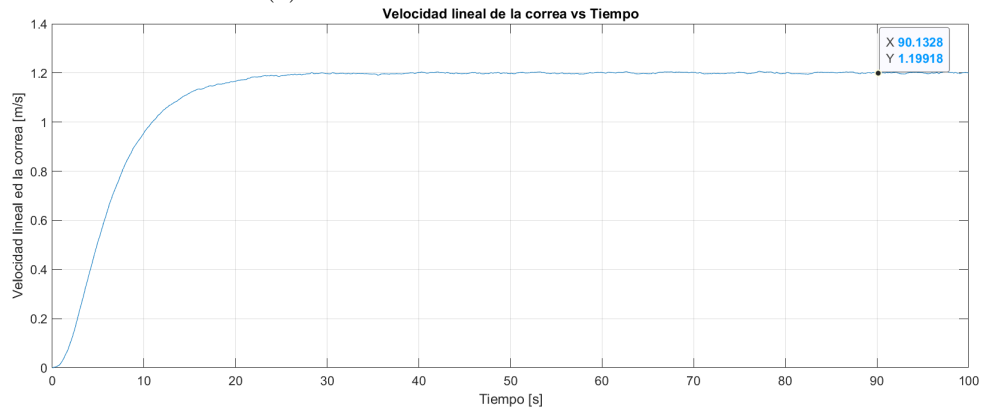
Al igual que en el caso anterior, como es de esperarse, solamente se ven variaciones en el voltaje de actuación (figura (3.66)), corriente en el inductor (figura (3.67)), torque de torsión del eje (figura (3.68)), no se aprecian cambios ni en la velocidad lineal de la correa (figura (3.65)) ni en la velocidad angular del eje (figura (3.69)).

3.8.3.3 Control óptimo a 1.2 [m/s]

La velocidad lineal de la correa se muestra a continuación en la figura 3.70:



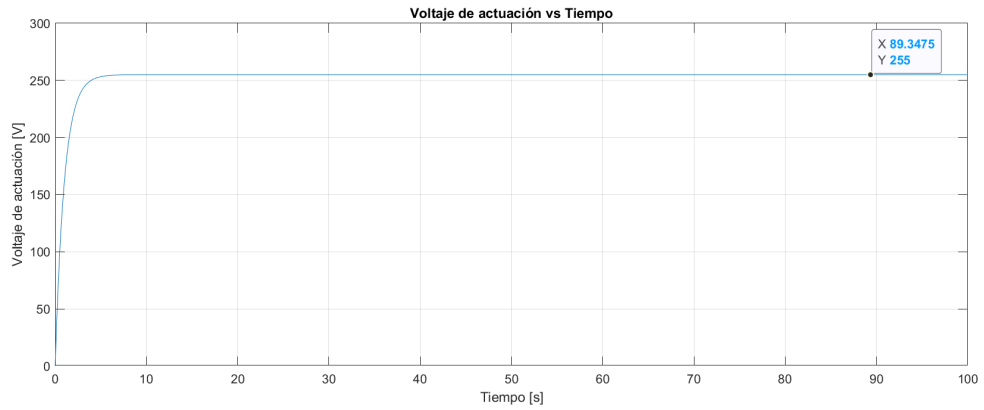
(a) Velocidad lineal de la correa normal



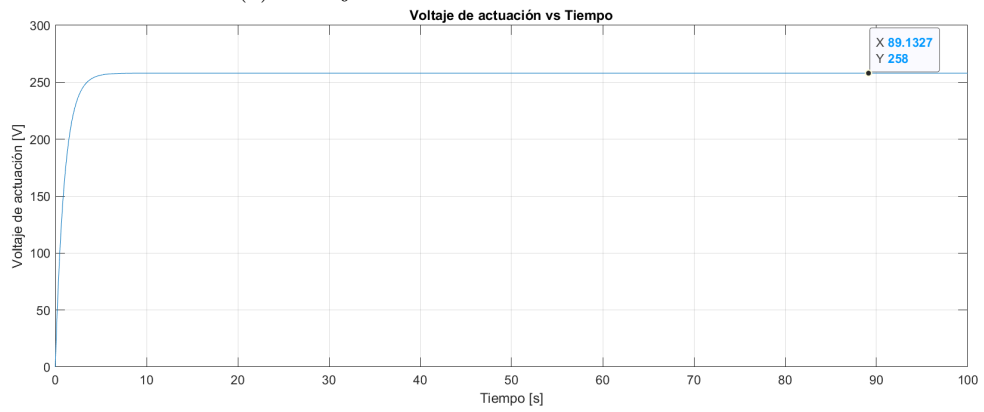
(b) Velocidad lineal de la correa sin mantención

Figura 3.70: Velocidad lineal de la correa (1.2 [m/s]) con y sin mantención

El voltaje de actuación sobre la correa se muestra a continuación en la figura 3.71:



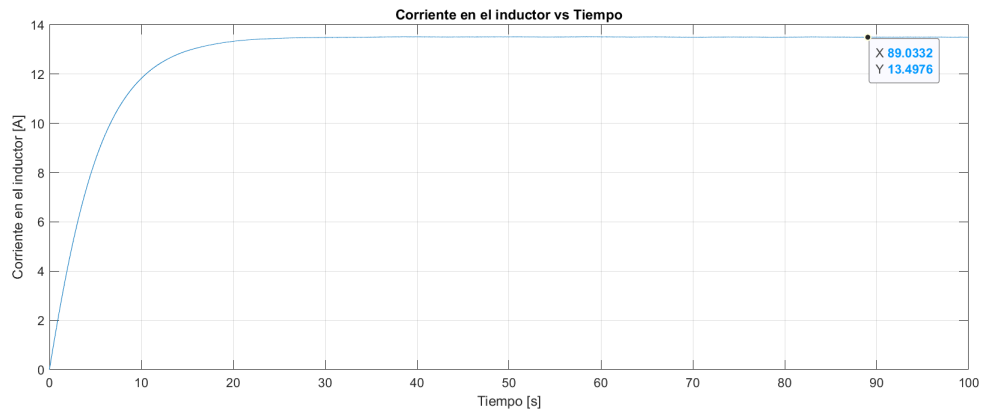
(a) Voltaje de actuación de la correa normal



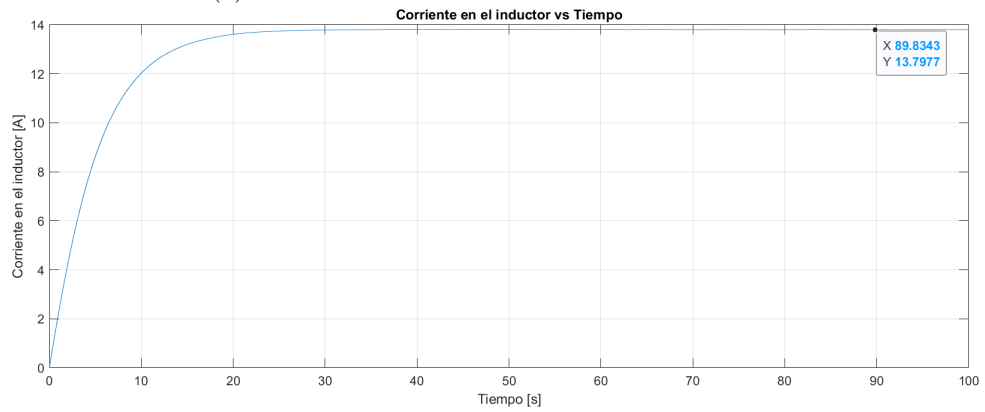
(b) Voltaje de actuación sobre la correa sin mantención

Figura 3.71: Voltaje de actuación sobre de la correa (1.2 [m/s]) con y sin mantención

La corriente en el inductor se muestra a continuación en la figura 3.72:



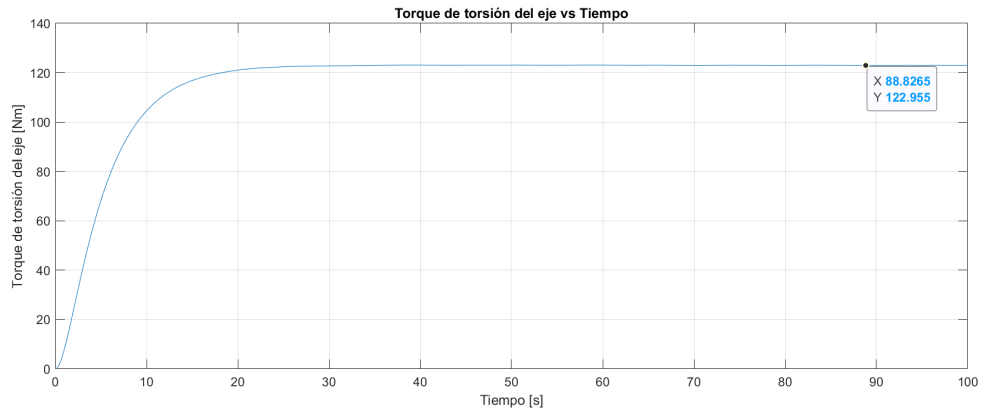
(a) Corriente en el inductor con la correa normal



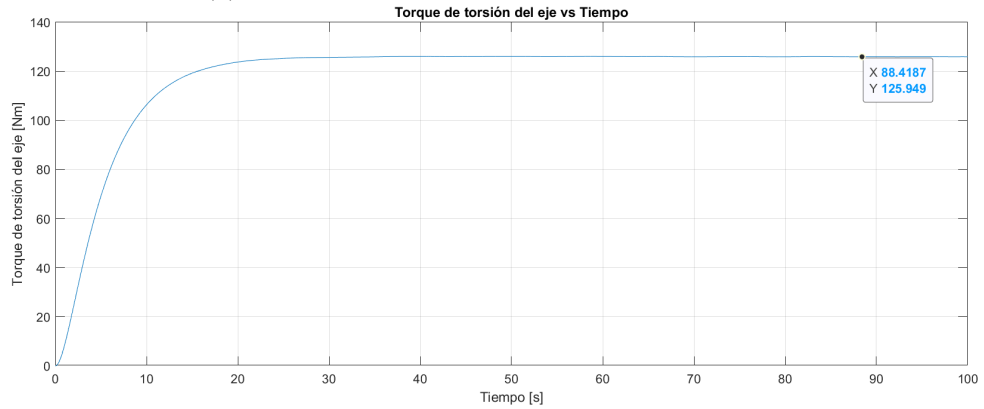
(b) Corriente en el inductor con la correa sin mantención

Figura 3.72: Corriente en el inductor con la correa (1.2 [m/s]) con y sin mantención

El torque de torsión del eje se muestra a continuación en la figura 3.73:



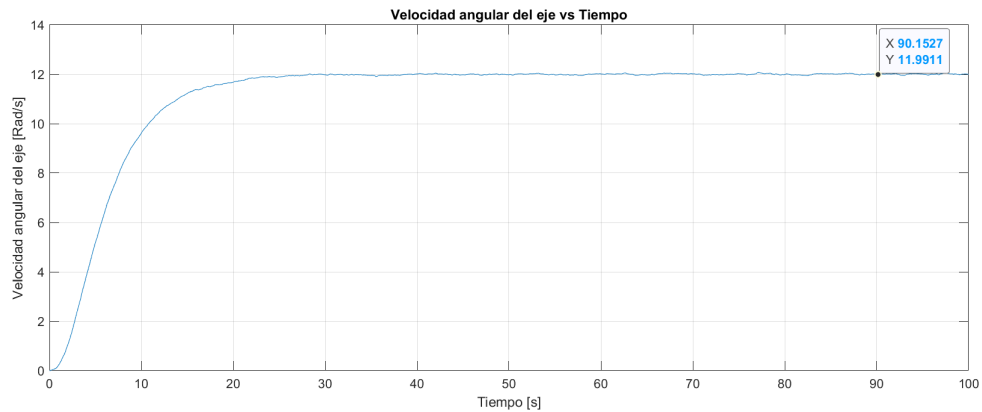
(a) Torque de torsión del eje con la correa normal



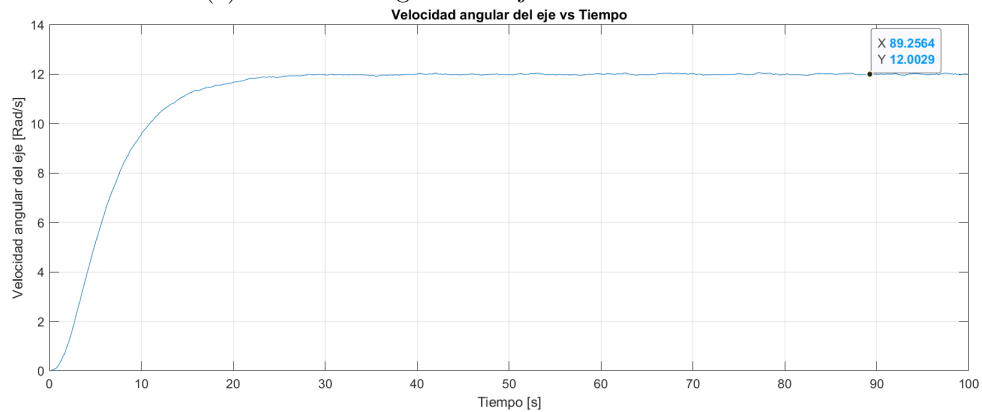
(b) Torque de torsión del eje con la correa sin mantención

Figura 3.73: Torque de torsión del eje con la correa (1.2 [m/s]) con y sin mantención

La velocidad angular del eje se muestra a continuación en la figura 3.74:



(a) Velocidad angular del eje con la correa normal



(b) Velocidad angular del eje con la correa sin mantención

Figura 3.74: Velocidad angular del eje con la correa (1.2 [m/s]) con y sin mantención

Al igual que en el caso anterior, como es de esperarse, solamente se ven variaciones en el voltaje de actuación (figura (3.71)), corriente en el inductor (figura (3.72)), torque de torsión del eje (figura (3.73)), no se aprecian cambios ni en la velocidad lineal de la correa (figura (3.70)) ni en la velocidad angular del eje (figura (3.74)).

Capítulo 4

Resultados

4.1 Control óptimo en el rango de variación de velocidad de la correa

4.1.1 Control óptimo a 0.8 [m/s]

4.1.1.1 Velocidad lineal de la correa

Como se puede apreciar en la figura (3.36) se logra controlar la velocidad lineal de la correa, la cual llega a un valor estacionario cercano a la referencia de 0.8 [m/s] después de unos 20 segundos de funcionamiento.

4.1.1.2 Voltaje de actuación sobre el sistema

Como se puede apreciar en la figura (3.37) el voltaje de actuación tiene un valor de 170 [V] lo cual es un valor esperado debido a que para el punto de operación del sistema de una velocidad de 1 [m/s] se opera con un voltaje cercano a 220 [V] y como sabemos el voltaje aplicado al motor esta directamente relacionado con la velocidad. El voltaje de actuación se estabiliza luego de unos 20 segundos de funcionamiento.

4.1.1.3 Corriente en el inductor

Como se puede apreciar en la figura (3.38) la corriente en el inductor, que representa la corriente por el motor DC alcanza un valor cercano a los 9 [A], lo que es un valor esperable, debido a que en el punto de operación del sistema a una velocidad de 1 [m/s] la corriente es de unos 11 [A] y como sabemos que la corriente por el motor esta directamente rela-

cionada con el esfuerzo que realiza éste. La corriente por el inductor se estabiliza luego de unos 20 segundos de funcionamiento.

4.1.1.4 Torque de torsión del eje

Como se puede apreciar en la figura (3.39) el torque de torsión del eje, que representa cuanto torque esta sufriendo el eje que conecta al motor con el rodillo primario, alcanza un valor cercano a los 82 [Nm], lo que es un valor esperable, debido al esfuerzo al que está siendo sometido. No representa ningún problema mientras se mantenga dentro de el torque de torsión que resiste el material. El torque de torsión se estabiliza luego de unos 20 segundos de funcionamiento, cuando el sistema deja de acelerar y alcanza la velocidad objetivo.

4.1.1.5 Velocidad angular del eje

Como se puede apreciar en la figura (3.40) la velocidad angular del eje, que que esta directamente relacionada con la velocidad lineal de la correa y con el radio del rodillo primario, alcanza un valor cercano a los 8 [Rad/s], lo que es un valor esperable, debido a que el rodillo primario tiene un radio de 0.1 [m] y estamos operando a una velocidad de 0.8 [m/s]. La velocidad angular del eje se estabiliza luego de unos 20 segundos de funcionamiento, cuando el sistema deja de acelerar y alcanza la velocidad objetivo.

4.1.2 Control óptimo a 1 [m/s]

Al igual que en el caso anterior se observa que la correa llega a la velocidad objetivo y los valores la actuación y de las variables de estado son muy cercanos a los valores teóricos en el punto de equilibrio, debido a que nos encontramos trabajando en éste. Figuras (3.42), (3.43), (3.44), (3.45), (3.46).

4.1.3 Control óptimo a 1.2 [m/s]

Al igual que en el caso anterior se observa que la correa llega a la velocidad objetivo. En este caso, a diferencia de los anteriores, debido a que nos encontramos trabajando por sobre el punto de operación, los valores la actuación y de las variables de estado son un poco superiores a los encontrados en el punto de equilibrio. Ninguno alcanza valores

riesgosos como podrían ser la corriente en el inductor o el torque de torsión del eje. Figuras (3.48), (3.49), (3.50), (3.51), (3.52).

4.2 Control óptimo con cambio de granulidad del material

Se procedió a simular la aplicación del control óptimo en la correa para velocidades de 0.8[m/s], 1[m/s] y 1.2[m/s], es decir, usando referencias de -0.2[m/s], 0[m/s] y 0.2[m/s] cambiando la granulidad del material, es decir se procederá a cambiar la masa variable de material, esto lo haremos modificando en la ecuación (3.55) el parámetro w_0 , que tomara valores de 0.1 , 0.5 , 1 , 2 y 10. observando la velocidad lineal de la correa tanto para el sistema con control óptimo y para el sistema lineal sin aplicarle control óptimo.

4.2.1 Control óptimo a 0.8 [m/s] con distintas granulidades

Simulando con referencias de -0.2 [m/s], 0 [m/s] y 0.2 [m/s] y masa variable del material $m_v(t)$ con w_0 con valores de 0.1 , 0.5 , 1 y 10 se obtiene lo siguiente de la simulación:

4.2.1.1 Velocidad lineal de la correa

Como se puede observar en las figuras (3.56),(3.57) y (3.58) las velocidades lineales de la correa logran llegar al de referencia y se puede apreciar claramente, sin medir la varianza que el control óptimo disminuye las perturbaciones sobre la velocidad de la correa, y como es de esperarse se nota el efecto de las distintas granulidades del material.

4.3 Control óptimo sobre una correa sin mantención

Se procedió a simular el control óptimo sobre la correa en un escenario adverso que podría llegar a ocurrir, como podría ser el que no se haya realizado mantención en los polines de la correa.

4.3.1 Control óptimo a 0.8 [m/s]

4.3.1.1 Velocidad lineal de la correa

Como se puede apreciar en la figura (3.60) la velocidad lineal de la correa no se ve afectada, como es de esperarse, el efecto de un mayor roce viscoso de los polines debería afectar al

esfuerzo que realiza el motor, por lo que veríamos cambios en el voltaje de actuación, en la corriente por el inductor y cambios en el torque de torsión del eje por el esfuerzo extra.

4.3.1.2 Voltaje de actuación sobre la correa

Como se puede apreciar en la figura (3.61) el voltaje de actuación sobre la correa se ve ligeramente afectado teniendo una variación de 170 a 172 [V], como es de esperarse, por el esfuerzo extra.

4.3.1.3 Corriente en el inductor

Como se puede apreciar en la figura (3.62) la corriente por el inductor se ve ligeramente afectada teniendo una variación de 9 a 9.2 [A], como es de esperarse, por el esfuerzo extra.

4.3.1.4 Torque de torsión del eje

Como se puede apreciar en la figura (3.63) el torque de torsión del eje se ve ligeramente afectado teniendo una variación de 82 a 84 [Nm], como es de esperarse, por el esfuerzo extra.

4.3.1.5 Velocidad angular del eje

Como se puede apreciar en la figura (3.64) la velocidad angular del eje no se ve afectada como es de esperarse, debido a que es la variable controlada.

4.3.2 Control óptimo a 1 [m/s]

Al igual que en el caso anterior, como es de esperarse, solamente se ven variaciones en el voltaje de actuación (figura (3.66)), corriente en el inductor (figura (3.67)), torque de torsión del eje (figura (3.68)), no se aprecian cambios ni en la velocidad lineal de la correa (figura (3.65)) ni en la velocidad angular del eje (figura (3.69)).

4.3.3 Control óptimo a 1.2 [m/s]

Al igual que en el caso anterior, como es de esperarse, solamente se ven variaciones en el voltaje de actuación (figura (3.71)), corriente en el inductor (figura (3.72)), torque de torsión del eje (figura (3.73)), no se aprecian cambios ni en la velocidad lineal de la correa (figura (3.70)) ni en la velocidad angular del eje (figura (3.74)).

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo se ha abordado la problemática del modelamiento y control óptimo sobre una correa de transporte de material sujeta a perturbaciones estocásticas. El objetivo ha sido desarrollar estrategias efectivas para mitigar la influencia de estas perturbaciones y mejorar el desempeño de la correa en aplicaciones prácticas. A lo largo de este trabajo, se ha resaltado la importancia de comprender y caracterizar adecuadamente la naturaleza de estas perturbaciones, así como aplicar estrategias de control robustas que permitan enfrentar su influencia de manera eficiente.

Como se ha podido demostrar con los ensayos previamente realizados el control óptimo permite mitigar las perturbaciones en la velocidad de la correa. Además al simular la correa sin mantención se puede desprender que observando la corriente en el motor se puede informar cuando se debe hacer mantención preventiva de los polines de carga.

Recomendaciones:

- Comparar resultados con un control clásico PID.
- Analizar los efectos en el control considerando la desviación estándar de la perturbación en la salida con y sin control.
- Hacer ensayos no sobre el sistema linealizado sino sobre el modelo real trabajando en el punto de operación.

Referencias

- [1] Allis Chalmers. Allis chalmers method: Design of conveyor belts. page 32, 2019.
- [2] Huibert Kwakernaak y Raphael Sivan. Linear optimal control systems. 1972.
- [3] Alejandro Suárez S. Libro guía tmcl: Linear optimal control systems. page 74.
- [4] Matlab '[care](#)' command: Continuous-time algebraic riccati equation solution.
- [5] Matlab '[kalman](#)' command: Design a kalman filter for state estimation.
- [6] Matlab '[ctrb](#)' command: Controlability of the state-space model.
- [7] Matlab '[obsv](#)' command: Observability of the state space model.
- [8] Matlab '[rank](#)' command: Rank of matrix.
- [9] Motor dc winkelmann elektromotoren gmbh co. kg [link](#).
- [10] Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de estructuras. Universidad de Valladolid. Resistencia de materiales: Torsión en barras de seccion circular [link](#). page 78.