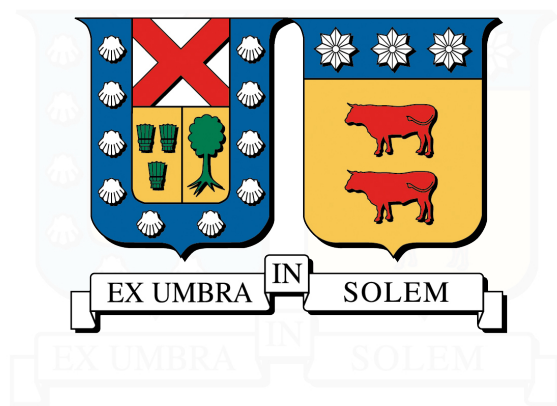


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
SANTIAGO - CHILE



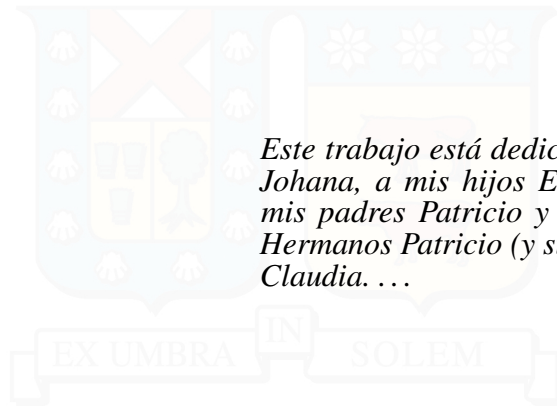
EVASIÓN EN EL TRANSPORTE PÚBLICO: EL PROBLEMA DEL PASAJERO EVASOR

CRISTIAN ANDRÉS VALENZUELA PACHECO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA : Dr. PABLO ESCALONA RODRÍGUEZ
PROFESOR CORREFERENTE : Ms.C NATHALIA WOLF GARCÍA

NOVIEMBRE 2021



Este trabajo está dedicado a mi esposa Johana, a mis hijos Elías y Aiyana, a mis padres Patricio y Brígida y a mis Hermanos Patricio (y su familia), Alex y Claudia. ...

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero dedicar el primer gran agradecimiento a mi esposa Johana, por haber enfrentado estos cuatro años de estudios, que han estado llenos de dificultades y desafíos en general. Para ella que tuvo que resistir mis ausencias físicas y mentales debido a las exigencias académicas. Sé que este esfuerzo rendirá sus frutos y que podremos salir adelante junto a nuestros hermosos hijos Elías y Aiyana. Este trabajo es de ustedes.

De igual forma, agradecer a mis padres, Patricio y Brígida, por haberme regalado la oportunidad de tener una formación académica de calidad, y por haberme entregado los valores necesarios para poder enfrentar el mundo y sus dificultades.

No puedo dejar de agradecer a mis hermanos por su compañía, apoyo y cariño incondicional. A mis hermanos Alex, Claudia y Patricio (y su familia).

Imposible resultaría lograr este objetivo sin los compañeros y actualmente amigos que he cosechado en este camino: Diego, Rodrigo, Daniel, muchas gracias por todo su apoyo, sé que esto perdurará más allá de esta etapa.

Agradecer de igual forma al equipo de evasión liderado por el profesor Pablo Escalona, a quienes he podido admirar desde la distancia por sus grandes hallazgos en la investigación que va en curso. Les deseo mucho éxito en ello. Mención especial dentro del grupo a Nathalia Wolf, quien me ayudó en la confección de la tesis y en su corrección final.

Al profesor Pablo Escalona le agradezco sinceramente el haberme dado la oportunidad de trabajar en su investigación, el compartirme conocimientos adicionales y por exigirme lo necesario para lograr un trabajo de calidad en su máxima expresión. Espero haber aportado al menos un grano de arena en su trabajo. Muchas gracias.

Finalmente, me gustaría hacer mención a todas las personas que de alguna u otra forma se están escapando de este apartado en cuanto a mención, pero que también les agradeceré su apoyo en este camino recorrido.

RESUMEN

El presente trabajo trata el tema de la evasión en el transporte público, al presentarse pasajeros que, pudiendo pagar la tarifa o ticket, deciden no realizarlo por diversas causas, pudiendo ser socioeconómicas, demográficas e incluso ideológicas. Dichos pasajeros son conocidos como oportunistas.

El primer método para tratar de inhibir estas situaciones consiste en aplicar métodos de control de pago más rígidos, pero que van en contra de la eficiencia del sistema, debiendo emplear métodos de pago que facilitan el acceso pero que reducen el control del pago efectivo del ticket o tarifa.

Chile no está exento de estas situaciones, siendo incluso uno de los países que tiene la mayor tasa de evasión, debido a la implementación del sistema de Transporte Transantiago (Actualmete denominado RED) en el año 2007. Lo anterior condicionado a la mala calidad de servicio, junto con un sistema del tipo "Proof of Payment" sin barreras (POP_S) que facilita la evasión.

Existen muchos métodos para combatir la evasión, no obstante, ciertos patrones van presentándose en todos los países, como aplicación de multas e imponer probabilidades de inspección en la red de transporte, buscando desincentivar la decisión de realizarla. Estos pueden ser incorporados en un modelo matemático que sea capaz de proponer las mejores probabilidades de inspección y valores de multa; esto a nivel de la entidad fiscalizadora.

Dentro del modelo anterior, el pasajero debe ser capaz de buscar su mejor ruta para lograr la mayor eficiencia considerando costos y tiempos de viaje, asumiendo que se comporta de manera racional, pudiendo cambiar sus decisiones frente a las condiciones que la autoridad imponga en la red de transporte.

La principal contribución de la presente tesis, busca por una parte, entregar una revisión de la literatura acerca de la evasión en el transporte público, y por otra proponer un modelo matemático que sea capaz de representar el comportamiento del pasajero oportunista. Lo anterior permitirá a las autoridades insertarlo en un problema de dos niveles, para ser resuelto con herramientas matemáticas que entreguen directrices y acciones claras para buscar inhibir la evasión en cualquier sistema de transporte en el que sea implementado.

Keywords. Evasión; Pasajeros Oportunistas; Juegos de Stackelberg; Bilevel.

ABSTRACT

This work deals with the issue of evasion in public transport, when passengers appear who, being able to pay the fare or ticket, decide not to do it for various reasons, which may be socioeconomic, demographic and even ideological. Such passengers are known as opportunists.

The first method to try to inhibit these situations is to apply more rigid payment control methods, which go against the efficiency of the system, having to use payment methods that facilitate access but reduce the control of the effective payment of the ticket.

Chile is not exempt from these situations, being even one of the countries that has the highest evasion rate, due to the implementation of the Transantiago Transportation system (currently called RED) in 2007. This is conditioned to the poor quality of service, together with a system of the type "Proof of Payment" without barriers (POP_S) that facilitates evasion.

There are many methods to combat evasion, however, certain patterns are appearing in all countries, such as the application of fines and imposing probabilities of inspection in the transport network, seeking to discourage the decision to carry it out. These can be incorporated into a mathematical model that is capable of proposing the best inspection probabilities and fine values; this at the level of the supervisory entity.

Within the previous model, the passenger must be able to find their best route to achieve greater efficiency considering costs and travel times, assuming that they behave in a rational way, being able to change their decisions in the face of the conditions imposed by the authority on the network Of transport.

The main contribution of this thesis seeks, on the one hand, to provide a review of the literature about evasion in public transport, and on the other to propose a mathematical model that is capable of representing the behavior of the opportunistic passenger. The foregoing will allow the authorities to insert it into a two-level problem, to be solved with mathematical tools that provide clear guidelines and actions to seek to inhibit evasion in any transportation system in which it is implemented.

Keywords. Evasion; Opportunistic Passengers; Stackelberg Games; Bilevel.

Índice de Contenidos

1. Problema de Investigación	1
2. Objetivos	4
2.1. Objetivo General	4
2.2. Objetivos Específicos	4
3. Marco Teórico	5
3.1. La Evasión: Una Mirada General	5
3.2. La Evasión en el Transporte Público	6
3.2.1. La Evasión en el Transantiago	8
3.3. Los Pasajeros Evasores: Comportamientos y Variables asociadas	10
3.3.1. Antecedentes Previos	10
3.3.2. Estudio Base	12
3.4. Investigación de Operaciones en el Problema de la Evasión	14
3.4.1. Introducción a la Investigación de Operaciones	14
3.4.2. Investigación de Operaciones Aplicada en la Evasión de Tarifas	15
3.4.2.1. Programación de Patrullaje de Inspección de Tarifas.	16
3.4.2.2. Programación del Equipo de Seguridad.	17
3.4.2.3. Asignación de Recursos	18
3.4.2.4. Ubicación de Inspectores en una Red de Tránsito.	19
3.4.2.5. Estrategias de Inspección de tarifas.	20
3.4.3. Modelos Matemáticos de los Pasajeros Evasores	22
3.4.3.1. Los Juegos de Stackelberg.	22
3.4.3.2. Los Problemas Bilevel.	23
3.4.3.3. Modelo 1: Estudio de Borndorfer et al. (2013)	28
3.4.3.4. Modelo 2: Estudio de Correa et al. (2017)	32
3.4.3.5. Estrategia Marginal y Mixta	34
4. Formulación del Modelo	36
4.1. Sistema de Tránsito	36
4.2. Definiciones del Seguidor	37
4.3. Enfoques de Solución para el Problema del Follower	41
4.3.1. Problema P_1	42
4.3.2. Problema P_2	43
4.3.3. Problema P_3	46
4.3.4. Comentarios Finales de los Modelos Propuestos	47
5. Experimentos Computacionales	50
5.1. Experimento 1: Modelo Ficticio	50
5.1.1. Shortest Path Problem	53
5.1.1.1. Formulación	53
5.1.1.2. Resolución	54

5.1.2. Problema del Follower	55
5.2. Experimento 2: Implementación en Metro de Montreal	58
5.2.1. Shortest Path Problem	60
5.2.2. Problema del Follower	61
5.3. Prueba Final del Modelo P_3	64
6. Conclusiones	66
A. APÉNDICE A	68
A.1. Máquina Python	68
B. APÉNDICE B	70
B.1. Shortest Path Problem	70
C. APÉNDICE C	75
D. APÉNDICE D	81
E. APÉNDICE E	85
Referencias	87

Índice de Tablas

3.1. Tabla de Definiciones por Distintos Autores	5
3.2. Sistemas de Recolección de Tarifa en Transporte Público	7
3.3. Tabla de Índices de Evasión Desde el año 2019	10
3.4. Sumario de Terminologías y Notaciones para los Problemas Bilevel.	25
4.1. Resumen de Problemas del Follower Propuestos	49
5.1. Instancias de Problema Ficticio	51
5.2. Parámetros de Red Propuesta	52
5.3. Resultados SPP en Cinco Instancias	54
5.4. Definición de Solver	55
5.5. CPU Time de Experimentos Computacionales	55
5.6. Tabla de Resumen de Resultados en Implementaciones de Red Ficticia	57
5.7. Resultado SPP en Instancia única	60
5.8. Valor de Multa F Aplicado a Cada Instancia	61
5.9. CPU Time de Experimentos Computacionales	61
5.10. CPU Time Problemas P_3	64
C.1. Resultados Instancia A	76
C.2. Resultados Instancia B	77
C.3. Resultados Instancia C	78
C.4. Resultados Instancia D	79
C.5. Resultados Instancia E	80
D.1. Resultados Instancia F	82
D.2. Resultados Instancia G	83
D.3. Resultados Instancia H	84
E.1. Resultados Problemas P_3	86

Índice de Figuras

3.1. Validaciones en Día Laboral en el Sistema de Transporte Público Metropolitano (Red) . . .	9
3.2. Validaciones en Día Laboral en el Sistema de Transporte Público Metropolitano (Red) Durante el Periodo de Perturbación.	9
3.3. Representación Gráfica de un Problema de dos Niveles (Bilevel)	23
3.4. Mapa de Red Bilevel	24
5.1. Red Ficticia	51
5.2. Red de Ejemplo	52
5.3. Gráfico de Resultados Modelo Ficticio	58
5.4. Metro de Montreal	59
5.5. Grafo de Montreal con Solución	60
5.6. Gráfico de Resultados Modelo Aplicado en Metro Montreal	63

1 | Problema de Investigación

Los sistemas de transporte público buscan el pago de una tarifa como forma de retribución del servicio prestado, así como también para poder sustentarse económicamente. Para hacerlo efectivo, adoptan uno de los siguientes sistemas de pago; Pay-on-Entry (POE), en donde el servicio es pagado en el momento de hacer uso de él previa comprobación de pago, Conductor (C), en donde el conductor del transporte es el encargado de recaudar la tarifa, siendo el sistema más básico de pago o Proof-of-Payment (POP) en donde el pago se realiza previamente, portando un respaldo que acredite el pago y que valida el paso a través de puertas o barreras de acceso, existiendo la variante con barreras (POP_B) y sin barreras (POP_S) (Barabino et al. (2020)). Estos sistemas, en mayor o menor medida presentan vulnerabilidades que provocan que existan probabilidades de evasión del pago de la correspondiente tarifa, que podría ser definida como el acto no violento de viajar en transporte público, ignorando la ley, regulaciones o contratos, habiendo de forma deliberada no pagado, no validado o correctamente adoptado el ticket de viaje requerido (Barabino et al. (2020)).

El problema de la evasión en los sistemas de transporte público está presente en todo el mundo, llegando a alcanzar un promedio del 4,2 % de los viajes totales según un estudio realizado por la International Association of Public Transport (UITP) en 31 sistemas de 18 países, que representaron en un costo estimado por concepto de esta situación de 1 Billón de Euros por Año (Bonfati and Wagenknecht (2010)).

Específicamente para el caso de los sistemas POP_S , existen evidencia que demuestra los niveles de evasión, así como las pérdidas de beneficios económicos en los sistemas de transporte que la tienen implementada en varios países. Por ejemplo, Dauby and Kovacs (2007) investigó 18 sistemas de trenes ligeros en Europa, encontrando que los niveles de evasión promediaban un 10,4 %, mientras que otros sistemas alcanzaron valores más altos, entorno al 25 %. Lee (2011) analizó el sistema de trenes ligeros en San Francisco, California y mostró que el mínimo valor medido de evasión de 9,5 % generó beneficios no captados de 19 millones de dólares, basado en las tarifas del año 2009. Troncoso and De Grange (2017) encontró que el nivel de evasión en Santiago de Chile fue de aproximadamente un 28 % y el costo estimado fue de 415 millones de dólares anuales (Buneder and Galilea (2017)). Similarmente, Currie and Delbosc (2017) encontró que las pérdidas anuales en Melbourne (Australia) llegaron a los 35 millones de Euros,

que equivalen al 11,6 % de los viajes totales realizados. Por lo tanto dada la evidencia, la evasión es una problemática que provoca grandes pérdidas en los sistemas de transporte público, y que debe ser abordada desde la raíz del problema, i.e., desde sus participantes.

El problema de la evasión en el transporte público está compuesto por dos agentes principales: la entidad fiscalizadora, que se encarga de comprobar el pago de la tarifa, y los usuarios o pasajeros, quienes finalmente tienen la posibilidad de elegir si concretar el pago o no. Entonces, en el caso de que los fiscalizadores encuentren a pasajeros que estén haciendo uso de la red de transporte y no hayan pagado la tarifa, se faculta para cursar una infracción que se traduce en el pago de una multa (Previamente fijada por las autoridades), cuyo valor será mayor o igual que el costo del ticket de viaje, lo que podría representar el primer incentivo a pagar la tarifa, y por lo tanto, de no evadir.

Estando la posición del fiscalizador reconocida, resta conocer las motivaciones que tienen los pasajeros para evadir, encontrando que existen múltiples razones que podrían explicarla y relacionarla con las decisiones de los fiscalizadores. En una primera instancia, se podría ver a los pasajeros como actores racionales que simplemente deciden maximizar su utilidad, haciendo un comparativo entre el costo de compra del ticket y el costo de ser atrapado sin este (Boyd et al. (1989), Kooreman (1993)).

Por otra parte, en términos socio-demográficos, edad y género tienen cierta relevancia en la incidencia de evasión; los jóvenes y los hombres son más propensos a evadir las tarifas (Cools et al. (2017)). También la decisión de evadir de los pasajeros podría tener relacionadas otras variables, como lo son el nivel de inspección, el nivel de ocupación de los buses, la hora del día y ubicación geográfica (Guarda et al. (2016)).

Por lo tanto, al existir una gran cantidad de variables que explican la evasión, resultaría conveniente el poder definirlas y modelarlas adecuadamente para de esta forma poder proponer distintas decisiones a las autoridades para mitigar esta situación. Y no desde el punto de vista punitivo, sino que desde un punto de vista de apoyo social, que permita disminuir las causas y beneficiar tanto a las autoridades como a los pasajeros. A esto se le denomina inhibir la evasión.

La propuesta consiste en modelar matemáticamente el problema de la evasión, puntualmente el de los pasajeros, para incorporarlo en un problema de optimización en donde se haga uso de Los Juegos de Stackelberg. En estos juegos existe un líder (en este caso, los fiscalizadores o la autoridad), quien tomará en primera instancia sus propias decisiones en cuanto a las fiscalizaciones, considerando ubicaciones, rutas y probabilidades, para que luego el seguidor (en este caso, los pasajeros) pueda tomar decisiones de pagar o no pagar las tarifas, así como también de su elección óptima de rutas de traslado desde un punto a otro, basada en distintas variables o condiciones del entorno, según sea definido (Correa et al. (2017)).

Respecto al problema de la evasión en el transporte público, y al comportamiento y decisiones de los pasajeros oportunistas o evasores, se generan las siguientes preguntas de investigación:

¿Cómo controlan la evasión los operadores en un sistema de Transporte Público?

¿Cómo se puede relacionar a la Investigación de Operaciones con el problema de la evasión en el Transporte Público?

¿Cuáles son las principales variables que influyen en la decisión de evadir de los pasajeros oportunistas en el transporte público que podrían formar parte de un problema de modelación matemática que defina las decisiones de fiscalización?

¿Cómo es posible modelar estos comportamientos y relacionarlos matemáticamente con el problema de los fiscalizadores de manera que pueda ser añadido a un problema de dos niveles?

2 | Objetivos

2.1. Objetivo General

Analizar, definir y representar las variables que afectan en la decisión de evadir de los pasajeros en el transporte público, para incluirlas en modelos matemáticos que permitan apoyar a la autoridad en cuanto a las decisiones de fiscalización que apoyen en la disminución de la evasión.

2.2. Objetivos Específicos

Identificar las variables más importantes relacionadas a los pasajeros, a través de la revisión de distintos autores en la literatura.

Proponer, diseñar e implementar un modelo matemático que permita comprender el comportamiento de los pasajeros evasores en una red de transporte ficticia.

Analizar el comportamiento que tienen los pasajeros evasores bajo distintos escenarios controlados, que permitan identificar tendencias y realizar los análisis correspondientes en los modelos implementados.

Verificar la aplicabilidad de los modelos matemáticos a sistemas reales, estableciendo condiciones que permitan conocer el comportamiento del modelo propuesto.

Proponer un modelo matemático de los pasajeros que sea capaz de representar una alternativa para ser utilizado en un modelo de dos niveles.

3 | Marco Teórico

3.1. La Evasión: Una Mirada General

Aunque los fraudes a gran escala son los que se roban los titulares de los diarios y la atención de la opinión pública, son las evasiones de impuestos, los robos a locales comerciales y el usar el transporte público sin pagar la tarifa los que tienen una mayor consecuencia tanto social como económica (Buccioli et al. (2013)).

Esta última podría ser definida como el acto no violento de viajar en transporte público, ignorando la ley, regulaciones o contratos, habiendo de forma deliberada no pagado, no validado o correctamente adoptado el ticket de viaje requerido (Barabino et al. (2020)). De igual forma existen otras definiciones de la evasión que dan cuenta de distintos puntos de vista al respecto (ver 3.1).

Tabla 3.1: Tabla de Definiciones por Distintos Autores

Fuente	Definición
Delbosc and Currie (2016)	La evasión de tarifas es una forma de infracción grave de las normas: es decir, actos no violentos como robo, falta de pago de servicios o mala educación con los empleados.
Barabino et al. (2013), Barabino et al. (2014), Barabino et al. (2015)	La evasión de tarifas es el problema de viajar en autobús cuando un pasajero lo hace no teniendo un boleto válido.
Reddy et al. (2011)	La evasión de tarifas ocurre cuando los pasajeros obtienen acceso a áreas pagadas al interactuar con los controles de tarifas de maneras inconsistentes con el pago de la misma.

Bonfati and Wagenknecht (2010)

La evasión de tarifas es la violación de las normas legales o reglamentarias o contractuales, por cuya infracción haya multa, siempre que el hecho no implique o represente un crimen.

Leung (2003)

Los pasajeros que viajen sin boletos o que tengan boletos no válidos son clasificados como evasores de tarifa sin distinguir si lo hacen intencionalmente o no.

Li and Min (1985)

La evasión de tarifas es el problema de viajar en autobús sin comprar el pasaje.

Mauri et al. (1984)

La evasión de tarifa ocurre cuando un pasajero evita pagar la totalidad o parte de la misma.

Diebel (1981)

En el tránsito de autoservicio, la evasión de tarifas significa acceder gratis o viajar sin pagar la tarifa y anular o intentar viajar varias zonas de tránsito sólo por la tarifa base.

Hauber (1980)

La evasión de tarifas se refiere al uso de sistemas de transporte sin tener un boleto válido.

Nota: Tomado de Guarda et al. (2016)

La evasión de tarifas se ha vuelto un componente común en la sociedad como lo es robar o no pagar en una gasolinera (Bonfati and Wagenknecht (2010)). Cuando los clientes pagan las tarifas, están contribuyendo con el fondo del servicio. Pero cuando esas tarifas son evadidas, los recursos financieros para operar de forma constante y confiable se reducen (Cools et al. (2017)). Estas situaciones tienden a provocar problemas en los sistemas de transporte público, en donde el pago de la tarifa asegura la sostenibilidad del sistema. En la siguiente sección se revisarán los sistemas de control de pago y su relación con la evasión.

3.2. La Evasión en el Transporte Público

Para evitar la evasión de sus tarifas, las compañías de transporte público (CTP_S) adoptan alguno de los tres siguientes sistemas de pago: Proof-of-payment (POP o Prueba de pago), Pay-on-entry (POE o Pago al entrar) y Conductor (C), la tabla 3.2 los muestra de acuerdo a la recolección y verificación del pago de tarifa;

esto es a bordo de los vehículos de transporte (on-board) o fuera de ellos (off-board):

Tabla 3.2: Sistemas de Recolección de Tarifa en Transporte Público

Recolección de Tarifa	Verificación de Tarifa	
	Ocasional	Continuo
Sistema de Ticket Fuera del Vehículo de Transporte (fBTS)	POP_S	POP_B
Sistema de Ticket a Bordo (nBTS)	POP_S	POE, C, POP_B

Nota: Tomado de [Barabino et al. \(2020\)](#)

En los sistemas POP_S , los pasajeros deben validar su ticket para probar el pago a través de su inserción dentro de máquinas validadoras antes de usar el servicio. Dichos pagos son verificados de forma aleatoria por inspectores para asegurar que los pasajeros hayan pagado correctamente. Este tipo de sistemas es usualmente utilizado tanto en nBTS (On-board ticket system) como en fBTS (Off-board ticket system) y pueden ser conocidos también como “sin barreras”.

En los sistemas POP_B , los pasajeros deben validar el ticket para ingresar por un acceso cerrado (ejemplo: barreras o torniquetes). Los tickets son validados cuando son insertados dentro de una máquina validadora, que permite la apertura para acceder al servicio. Este tipo de sistemas usualmente se utiliza en fBTS, pero recientemente también en nBTS.

En el caso de los POE, los pasajeros pueden pagar a través del conductor o necesitan mostrar una prueba del pago (por ejemplo, un pase mensual) en el lugar en donde abordan el transporte. Usualmente se encuentra en los sistemas nBTS y permite un monitoreo continuo del pago de la tarifa.

Finalmente en C, los pasajeros pueden pagar a través de los conductores a bordo. C y POE son similares, pero la diferencia se encuentra en que C es más tradicional y menos común, y requiere mayor cantidad de staff de soporte ([Barabino et al. \(2020\)](#)).

Bajo las definiciones anteriores, los sistemas POP_S debido a su estructura pueden tener asociada una alta evasión de tarifas por parte de los pasajeros, resultando en pérdidas de beneficios significativas para los operadores de tránsito; puntualmente en los sistemas nBTS- POP_S la evasión es más frecuente y depende, por ejemplo, de los patrones de inspección, estructura de multas, nivel de ocupación ([Multisystems et al. \(2002\)](#)).

Actualmente, muchos CTPS han adoptado el sistema nBTS-POPS, principalmente para reducir los costos de mano de obra y al mismo tiempo disminuir las transacciones de dinero en efectivo. Por una parte

este sistema hace posible nuevos sistemas de tarifas, servicios más rápidos, difusión de tecnologías, nuevos diseños de vehículos y bienestar psicológico de los conductores. Por ejemplo, este sistema permite muchos esquemas de tarifas, debido a que los pasajeros pagan por adelantado; gracias a ello los CTPS han logrado ahorros operacionales. Los conductores están menos estresados y no deben manejar dinero en efectivo.

Por otra parte, remover los monitoreos sistemáticos ha facilitado la evasión y originado costos por inspección de ticket y además por vandalismo a la infraestructura (máquinas validadoras). (Lorenz and Lutin (2000); Waltry and Straus (2000)).

En muchos países alrededor del mundo, la evasión de las tarifas se ha vuelto un problema crónico para operadores de buses, trenes subterráneos, trenes urbanos y tranvías que operan bajo los sistemas POP en general. Dauby and Kovacs (2007) investigó 18 sistemas de trenes ligeros en Europa, encontrando que los niveles de evasión promediaban un 10,4 %, mientras que otros sistemas alcanzaron valores más altos, entorno al 25 %. Lee (2011) analizó el sistema de trenes ligeros en San Francisco, California y mostró que el mínimo valor medido de evasión de 9,5 % generó beneficios no captados de 19 millones de dólares, basado en las tarifas del año 2009. Troncoso and De Grange (2017) encontró que el nivel de evasión en Santiago de Chile fue de aproximadamente un 28 % y el costo estimado fue de 415 millones de dólares anuales (Buneder and Galilea (2017)). Similarmente, Currie and Delbosc (2017) encontró que las pérdidas anuales en Melbourne (Australia) llegaron a los 35 millones de Euros, que equivalen al 11,6 % de los viajes totales realizados. Las pérdidas de beneficios no son las únicas consecuencias de la evasión de la tarifa, además, tiene correlación con el vandalismo, creando un efecto desmoralizador en el staff de estos sistemas y daños en la imagen pública (Reddy et al. (2011)).

En los sistemas *POPs*, los operadores de transporte pueden emplear un limitado número de mecanismos operacionales para inhibir las acciones de los evasores. Dichos mecanismos están basados principalmente en programaciones diarias de inspección de pago de tarifas.

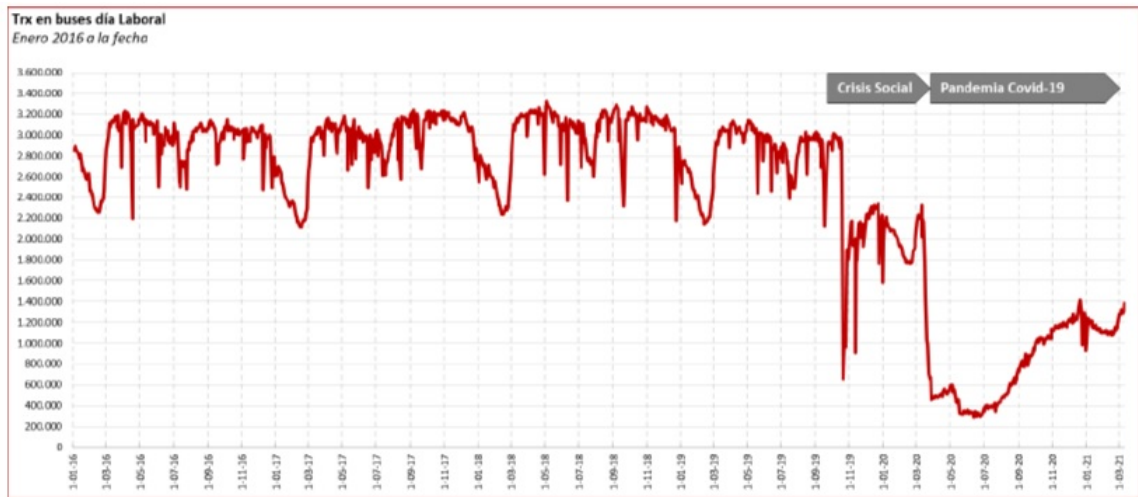
3.2.1. La Evasión en el Transantiago

Considerando el hallazgo realizado por Troncoso and De Grange (2017) respecto al sistema de transporte público, conocido inicialmente como Transantiago y, desde el 2019 como “Red”, es posible evidenciar que el 28 % informado ha ido en aumento a la actualidad, alcanzando un 35,1 % durante el primer trimestre del año 2021 (DTPM (2021)).

Al respecto, es importante destacar que el último informe emitido considera las perturbaciones desde el cuarto trimestre del año 2019, considerando en un comienzo la crisis social, y luego la Pandemia mundial.

Claramente, dichas situaciones afectaron los desplazamientos normales dentro de la Región Metropolitana, dadas las condiciones y restricciones que imperaron (Ver la figura 3.1).

Figura 3.1: Validaciones en Día Laboral en el Sistema de Transporte Público Metropolitano (Red)



Nota: Se muestra las validaciones normales (Entre los años 2012 y 2019) y las perturbaciones ocurridas desde el cuarto trimestre de 2019. Tomado de [DTPM \(2021\)](#).

En mayor detalle, la figura 3.2 detalla lo acontecido desde el cuarto trimestre de 2019. En él se presenta la evolución de las transacciones (Validaciones) en los buses del Sistema de Transporte Público de Santiago, desde el 1 de Agosto de 2019 hasta el 1 de Marzo de 2021 y se marcan en verde los últimos trimestres en los que se ha medido el índice de evasión ([DTPM \(2021\)](#)). No obstante lo anterior, la entidad

Figura 3.2: Validaciones en Día Laboral en el Sistema de Transporte Público Metropolitano (Red) Durante el Periodo de Perturbación.



Nota: Se muestra las validaciones normales y las perturbaciones ocurridas desde el cuarto trimestre de 2019. Tomado de [DTPM \(2021\)](#).

fiscalizadora contó con los equipos de trabajo adecuados para que una vez levantadas las cuarentenas más

restrictivas, se realizara la medición, esto es, desde el cuarto trimestre de 2020, obteniendo los siguientes resultados (Tabla 3.3):

Tabla 3.3: Tabla de Índices de Evasión Desde el año 2019

Trimestre Reportado	% Evasión
Tercer Trimestre 2019	26 %
Cuarto Trimestre 2019	32,7 %
Primer Trimestre 2020	35,2 %
Segundo Trimestre 2020	No medido
Tercer Trimestre 2020	No medido
Cuarto Trimestre 2020	36,5 %
Primer Trimestre 2021	35,1 %

Fuente: Tomado de [DTPM \(2021\)](#)

La tabla 3.3 permite evidenciar que el problema de la evasión en el sistema de transporte de Santiago ha aumentado respecto a la evidencia encontrada en el año 2012.

Entonces, una vez comprendido los sistemas de pago del transporte público y su relación con la evasión, además de la magnitud del problema en un sistema tan real y cercano como lo es el Transantiago, se procederá en la siguiente sección a comprender el comportamiento de los pasajeros evasores y las variables que se relacionan con ellos.

3.3. Los Pasajeros Evasores: Comportamientos y Variables asociadas

3.3.1. Antecedentes Previos

En primer lugar, es importante definir que la tasa de evasión en un sistema representa el ratio entre el número de tarifas de bus no pagadas y el número total de pasajeros abordando ([DTPM \(2012\)](#)). Dicha tasa es la que permite definir el impacto de la evasión en el transporte público, y es la que se debe apuntar a gestionar adecuadamente.

Bonfati and Wagenknecht (2010) ha examinado la evasión de las tarifas en una muestra de 800 millones de pasajeros alrededor del mundo y ha determinado un promedio de 4,2 % de pasajeros evasores, lo que permite determinar en cierto grado la magnitud de la evasión, y posiblemente establecer posibles impactos relacionados a ella. En Europa, las tarifas cubren cerca del 50 % de los costos operativos (Brueckner (2005)). Está claro que existe una gran cantidad de razones para ello, pero una de ellas es la evasión; Bijleveld (2007) indicó que la evasión de tarifas reduce los ingresos de las CTP_S.

En el caso de Chile, el sistema de transporte público fue cambiado en Febrero del año 2007 al denominado “Transantiago”, el que se volvió impopular debido a su pobre implementación inicial (Munoz et al. (2008)). El servicio de bus cambió su forma de pago a una forma más formal usando tarjetas inteligentes (Tarjeta Bip!), con tecnología electrónica. Antes de la implementación de este sistema no existía medición de la evasión en el transporte público, pero en el año 2007 de forma mensual la tasa de evasión osciló entre 12 y 16 %, mientras que al año 2012 lo hacía ya entre el 20 y 27 % (Guarda et al. (2015)), lo que demuestra un significativo aumento.

En definitiva, el problema de la evasión de tarifas en el transporte público es un tema recurrente alrededor del mundo, lo que lleva a la necesidad de buscar sus causas en orden a poder definir distintos tipos de políticas y procedimientos para disminuirla o mitigarla. Dichas causas están íntimamente relacionadas con sus clientes finales: los pasajeros. En la literatura existe una gran cantidad de estudios que han tratado de modelar el perfil del evasor de tarifas, por ejemplo determinando las características personales que están asociadas con una alta probabilidad de evadir tarifas.

Lee (2011) concluyó que en San Francisco, California, no hay evasores de tarifa tipo. En contraste a ello, Buccioli et al. (2013) encontró en sus estudios en Reggio Emilia (Italia) que los jóvenes son un 9,1 % más propensos a evadir que una persona adulta. Además, determinó que los hombres son un 16,5 % más propensos que las mujeres a evadir. Barabino et al. (2015) encontró los mismos hallazgos anteriores. DeAndrea et al. (2009), reveló que el género y la búsqueda de sensaciones son determinantes en la evasión, siendo los hombres más propensos en este caso. Eddy (2010) determinó un resultado distinto, determinando que los adultos son más propensos a evadir que los jóvenes. Por otra parte, más allá del género y la edad, Barabino et al. (2015) también determinó que bajos niveles de educación, el desempleo y los estudiantes presentan mayor propensión a la evasión, lo que resulta contradictorio respecto a lo que indica la fuente anterior. Es importante reconocer con esto que las motivaciones para evadir pueden ser muy variadas y podrían no existir patrones claros, lo que lleva necesariamente a tener que adaptar las políticas a cada sistema y sociedad en particular.

Desde un punto de vista Socio-Demográfico, hay también otros factores que influyen la evasión de tarifas. [Buccioli et al. \(2013\)](#) determinó que la vestimenta y el clima impactan a la evasión de tarifas: los pasajeros que se encuentran mal vestidos son un 26,5 % más propensos a evadir que pasajeros con vestimenta normal, y por otra parte, la propensión a evadir aumenta en un 16,1 % en días calurosos. Este mismo autor determinó la dimensión social de la evasión de tarifas: es un 20,1 % menos probable cuando se viaja con parientes.

Por otra parte, las características del viaje también son importantes: [Buccioli et al. \(2013\)](#) reportó que la evasión de tarifas se encontró más probable para viajes cortos. Similar conclusión definió [Barabino et al. \(2015\)](#), considerando un tiempo máximo del viaje de 15 minutos.

En la siguiente sección se abordará un estudio puntual basado en una encuesta que permitirá realizar definiciones concretas para la propuesta definitiva al problema.

3.3.2. Estudio Base

Para conocer las variables que gobiernan en la decisión de evadir, [Cools et al. \(2017\)](#) propuso un sistema web de encuestas aplicadas en Flanders, la parte norte de Bélgica. La población total de esta región alcanzaba los 6,4 millones de habitantes en 2013, los cuales realizaban en promedio 2,76 viajes al día ([Declerq et al. \(2014\)](#)). De esa cantidad de viajes, el 3,49 % era realizado en Bus, tranvía o metro y el 1,74 % en tren ([Declerq et al. \(2014\)](#)).

La encuesta tuvo a 636 participantes y consistió en tres partes: una relacionada a las variables socioeconómicas, la segunda relacionada a la situación de transporte del encuestado y una tercera relacionada a transporte público en general y evasión de tarifas.

Luego de un análisis y modelación econométrica, [Cools et al. \(2017\)](#) define los siguientes hallazgos importantes de su estudio:

- En primer lugar, existe un número limitado de variables consideradas como significativas en sus modelos planteados.
- Los hombres son más propensos a evadir que las mujeres.
- Las personas menores a los 25 años son más propensos a evadir.
- Una vez que la persona ha experimentado viajar gratis, existen más probabilidades de que pueda evadir el pago de la tarifa en viajes posteriores.

- La alta percepción de los precios en el sistema de transporte tienden a aumentar la evasión.
- Las personas que perciben una mayor posibilidad de ser fiscalizados muestran menores probabilidades de evadir el pago de la tarifa.
- En cuanto a las multas, de forma contraintuitiva se produce que al aumentar su valor, aumentan las probabilidades de evadir el pasaje: esta situación también es observada en [Barabino et al. \(2015\)](#).

Basado en este estudio, [Cools et al. \(2017\)](#) propone las siguientes medidas para reducir o inhibir la evasión de tarifas:

- Respecto al hecho de que los hombres jóvenes tienen más probabilidades de evadir el pago de la tarifa: implicará que las CTP_S , en sus campañas de Marketing contra la evasión dedicaran mayores esfuerzos a llegar a este subgrupo de forma directa.
- En relación a lo sociodemográfico, las percepciones de los precios y de la probabilidad de control estarían directamente impactando las tasas de evasión. Esto implica para las CTP_S , que en sus estrategias de precios, debieran incorporar directamente la potencial evasión de la tarifa relacionada con un cierto nivel de precio.

Las conclusiones anteriores han permitido acotar los esfuerzos en cuanto al tratamiento del comportamiento del pasajero evasor de tarifa en transporte público: si bien existen variables como la edad y género que afectan puntualmente según las características indicadas, estas pueden ser mitigadas focalizando esfuerzos en campañas de información y educación como ha sido mencionado.

Desde un punto de vista económico, donde existe una gran posibilidad de incidir en las tasas de evasión es en el control de las tarifas y en la asignación de probabilidades de fiscalización o inspección por parte de las autoridades dentro de la red de transporte público. Al respecto, se podría ver a los pasajeros como actores racionales que simplemente deciden maximizar su utilidad, haciendo un comparativo entre el costo de compra del ticket y el costo de ser atrapado sin este ([Boyd et al. \(1989\)](#), [Kooreman \(1993\)](#)), en un primer acercamiento.

Lo anterior lleva a considerar que existe la posibilidad de establecer algún tipo de relación entre los fiscalizadores y los pasajeros, con el objetivo de modelar sus relaciones, en búsqueda de respuestas al problema de la evasión en el transporte público, a través del área de Investigación de Operaciones (Operations Research), situación que se comenzará a revisar desde la próxima sección.

3.4. Investigación de Operaciones en el Problema de la Evasión

3.4.1. Introducción a la Investigación de Operaciones

Desde la Revolución Industrial, el mundo ha tenido un notable crecimiento en el tamaño y complejidad de las organizaciones. Los pequeños artesanos de un taller, actualmente se han transformado en corporaciones millonarias. Una parte de este cambio revolucionario ha sido influenciado por el tremendo incremento de la división del trabajo y de la segmentación de la gestión de las responsabilidades en aquellas organizaciones.

De todas formas, junto con el crecimiento, surgen nuevos problemas, los que se mantienen en múltiples organizaciones. Uno de ellos es la tendencia de muchas áreas dentro de una organización de crecer de forma autónoma con sus propios objetivos dentro de sus sistemas, no considerando a la totalidad de ella; y estas decisiones realizadas pueden ir en desmedro de otras áreas de la compañía. Entonces, un problema relacionado a esto es que a medida que la complejidad y especialización de una organización aumenta, se vuelve más difícil localizar los recursos disponibles a varias actividades de una forma de que sea la más efectiva para la organización como un todo.

Problemas como el descrito anteriormente junto a la necesidad de encontrar una mejor forma de resolverlos han generado el ambiente propicio para el nacimiento de la Investigación de Operaciones (Operations Research -OR-).

Las raíces de la OR pueden ser llevadas a la Segunda Guerra Mundial, en donde se comenzaron las aproximaciones científicas para el manejo de organizaciones. En aquel contexto, resultaba imprescindible poder disponer de los recursos de una manera efectiva en el campo de batalla.

Cuando la guerra terminó, el éxito de la OR en esta llevó a considerarla para situaciones fuera de ella; principalmente respaldado por la gran complejidad que adquirieron las industrias en la segunda mitad del siglo XX, lo que fue el motor impulsor para su rápida expansión como herramienta.

En relación a lo anterior, otros dos factores jugaron un rol fundamental en el rápido crecimiento de la OR. Por una parte, el gran progreso que fue realizado para mejorar sus técnicas, en las distintas áreas en las que fue aplicada, y por otra, la revolución de la computación, debido a la gran necesidad de disponer de equipos cada vez más potentes para poder solucionar problemas cada vez más complejos.

La OR es aplicada a problemas que conciernen como conducir y coordinar las operaciones o actividades dentro de una organización, aplicándose a diversas áreas, como manufactura, transporte, construcción,

telecomunicaciones, finanzas, planificación, cuidado de la salud, aplicaciones militares y servicios público, por nombrar algunas. Todo esto aplicando investigación en campos científicos establecidos y aplicando el método científico, lo que implica en primer lugar, observar y formular el problema, luego construir un modelo científico que intente extraer la esencia del problema real, estableciendo como hipótesis que la solución del primero resolverá al segundo. Luego, diversos experimentos son llevados a cabo para probar la hipótesis, modificándolo si es necesario.

Otra característica de la OR es que tiene un punto de vista general, esto significa que no es necesario que, por ejemplo, se entregue cada detalle de la organización, sino que puede ser estudiada como un todo.

Finalmente, su objetivo es encontrar la mejor solución (indicada normalmente como la óptima) que represente al modelo bajo estudio, realizando los siguientes pasos:

1. Definir el problema de interés y obtener datos relevantes.
2. Formular un modelo matemático para representar el problema.
3. Desarrollar un procedimiento computacional para obtener soluciones al problema a través del modelo.
4. Probar el modelo y ajustar de ser necesario.
5. Preparar para la siguiente aplicación del modelo.
6. Implementar.

Por lo tanto, en primera instancia, la OR, al ser una herramienta aplicada en múltiples áreas, resulta una alternativa viable en la búsqueda del modelado del problema de la evasión de tarifas, tal como se puede evidenciar en la siguiente sección. (Hillier and Lieberman (2010)).

3.4.2. Investigación de Operaciones Aplicada en la Evasión de Tarifas

Dentro de la Investigación de Operaciones, Barabino et al. (2020) muestra que el problema de la evasión puede ser estudiado dentro de las siguientes sub-áreas:

- Programación de patrullaje de inspección de tarifas.
- Programación del equipo de seguridad.
- Asignación de recursos.
- Ubicación de inspectores en una red de tránsito.

- Estrategias de inspección de tarifas.

Considerando una gran cantidad de estudios relacionados que pudieran permitir basar la propuesta de un modelo que permita definir la evasión de las tarifas, se analizan cada uno de ellos en las siguientes subsecciones.

3.4.2.1. Programación de Patrullaje de Inspección de Tarifas.

Existen estudios que direccionan la inspección de tarifas espacial y temporal: [Delle Fave et al. \(2014c\)](#), [Jiang et al. \(2012\)](#), [Jiang et al. \(2013\)](#), [Krogvig \(2014\)](#), [Matyasek \(2013\)](#), [Thorlacius and Clausen \(2010\)](#), [Yin et al. \(2012a\)](#) y [Yin et al. \(2012b\)](#). Dichos estudios analizan una o dos rutas sin interconexiones y donde el modo de tránsito masivo es más simple como para ser experimentado (Ejemplo; en Tren Subterráneo o Metro).

Adicionalmente, estos estudios modelan el problema como Líder-Seguidor, representando un Juego de Stackelberg. En este caso, el Líder (Por ejemplo, los inspectores) establecen una política de inspección (Representada en su movimiento temporo-espacial a través de las rutas de la red de transporte), y el Seguidor o el atacante (En este caso, los pasajeros evasores) realiza su mejor jugada considerando esto.

Todos estos estudios enfrentan este problema en el caso de la inspección a bordo (on Board) y fuera del vehículo de transporte (Off Board). Estos modelos consideran diferentes funciones objetivo, incluyendo los puntos de vista del líder y del seguidor, así como también algunas restricciones realistas. Muchos de estos estudios adoptan redes de transición: un par de puntos de estación y tiempo que representan los nodos, y en donde los movimientos (acciones) son modelados por arcos (Por ejemplo, la actividad de los inspectores).

En esta línea, [Matyasek \(2013\)](#) adopta un grafo dirigido donde las estaciones representan los nodos y sus conexiones son arcos ponderados. En este caso, la resolución de estos problemas puede ser a través de reformulaciones de programación lineal. Este autor puntualmente considera el uso de métodos heurísticos como “Hill-Climbing”, “Beam Search”, “Recursive Depth” y Algoritmos “Greedy”.

En cuanto a los resultados, [Jiang et al. \(2012\)](#) concluyó que el aumentar las horas de patrullaje disminuyen el porcentaje de evasores de tarifa e incrementa los ingresos por ticket adquiridos.

[Yin et al. \(2012a\)](#) y [Yin et al. \(2012b\)](#) presentó la aplicación ‘TRUST’ para programar patrullas de forma aleatoria para inspección de tarifas en los sistemas de tránsito. Una formulación básica y extendida para este problema fueron considerados. Sus conclusiones indicaron que ‘TRUST’ generó estrategias cercanas al

óptimo (Near Optimal Strategies) contra la evasión de tarifas que aseguraron un alto nivel de ingresos con pocas horas de patrullaje.

Por su parte, [Krogvig \(2014\)](#) comparó los métodos óptimos y heurísticos. Concluyó que el uso de los métodos heurísticos es una opción viable, especialmente para espacios pequeños de tiempo (small time windows). Conjuntos de patrullas (Joint Patrols) pueden ser creadas para pequeñas porciones de la red local con niveles realistas. No obstante, este método puede no funcionar en una red completa o durante un día completo.

[Jiang et al. \(2013\)](#) y [Delle Fave et al. \(2014c\)](#) mostraron su propio enfoque de las programaciones generadas por ‘TRUST’ y las mejoraron con conocimiento en tiempo real de data con incertidumbre durante la ejecución (Por ejemplo, definición del momento para emitir una multa).

[Matyasek \(2013\)](#) mostró que el algoritmo ‘Hill Climbing’ entrega buen desempeño tanto en tiempo como en gestión de recursos para evaluar y optimizar las programaciones.

[Thorlacius and Clausen \(2010\)](#) entregaron una herramienta computacional que determinó nuevas programaciones para inspección de pago de tarifas a través de modelos matemáticos.

3.4.2.2. Programación del Equipo de Seguridad.

Existen ciertos estudios que permiten enfrentar los problemas de programación de equipos de seguridad, en los cuales la inspección de tarifas es un componente. ([Snijders and Saldanha \(2016\)](#), [Delle Fave et al. \(2014a\)](#) y [Delle Fave et al. \(2014b\)](#)).

Este tipo de problema es referenciado al modo de tránsito masivo (mass transit mode) en dos estudios que modelan este problema como un juego de Stackelberg Líder-Seguidor. [Snijders and Saldanha \(2016\)](#) adoptan modelos de ruta mínima (Shortest path) y de cobertura (Set covering models). Además, adoptan el caso de inspección a bordo (On-Board) o fuera del vehículo de transporte (Off-Board). Algunas restricciones permiten adoptar condiciones realistas. En este estudio, se adoptan dos grafos para generación de trabajo y asignación respectivamente. En el primer grafo, los nodos son estaciones y los arcos son labores de control en los trenes, además de tiempos de espera en las estaciones. En el segundo grafo, los nodos son tareas, y los arcos representan dos tareas consecutivas para ser desarrolladas en una sola. Programación lineal y heurísticas son adoptadas.

[Delle Fave et al. \(2014a\)](#) y [Delle Fave et al. \(2014b\)](#) desarrolló el ‘Multi-Operation Patrol Scheduling System’ (MOPSS). Llevaron a cabo tres experimentos relacionados a evasión de tarifas, terrorismo y

crímenes, los que demostraron que las programaciones con dicho sistema mejoraban respecto a las decisiones humanas.

[Snijders and Saldanha \(2016\)](#) concluyeron que un incremento del 50 % de los equipos de seguridad, permite obtener un incremento del 71 % en valor de seguridad y 81 % en incremento para los CTP_S contra la evasión de tarifas.

3.4.2.3. Asignación de Recursos

En esta línea también existen estudios que permiten realizar asignación de recursos para enfrentar diferentes amenazas, como lo son la evasión de tarifas en múltiples lugares (Por ejemplo, en las estaciones en la modalidad de estaciones de trenes). Se considera en este caso la asignación en zonas específicas, sin secuencias que implique el traslado de los mismos.

Ellos están basados en los modelos de Juegos de Stackelberg. La función objetivo es maximizar la utilidad esperada para encontrar un plan de seguridad óptimo contra una o más amenazas. Las principales restricciones incluyen presupuesto disponible para los recursos y el hecho de que algunas estrategias puedan ser modeladas como variables binarias (Como por ejemplo, asignar o no asignar un recurso en un lugar definido).

En esta línea, [Insua et al. \(2014\)](#) entregó una metodología para configurar un portafolio óptimo de recursos para seguridad. El portafolio incluye inspectores, puntos de control de acceso, nuevas puertas automáticas de seguridad, empleados encargados de los tickets y patrullas dentro de las instalaciones. Cuando evasores de tarifa intencionados y no intencionados fueron enfrentados separadamente (esto es, en modelaciones separadas), una pequeña cantidad de recursos fue invertida por el operador del servicio. El resultado opuesto fue obtenido cuando ambos tipos de evasores de tarifas fueron considerados simultáneamente en un mismo modelo.

Por otra parte, [Insua et al. \(2016\)](#) enriqueció la metodología empleada, aumentando el portafolio de recursos con guardias y perros de seguridad entrenados, cámaras y campañas de sensibilización del tema. De todas formas, ellos mostraron en un caso real de estudio, que invertir en puntos de control de acceso, cámaras y campañas de sensibilización no vale la pena para los CTP_S .

Las fuentes anteriores hacen referencia a un modelo en el que se busca proteger ciertos puntos estratégicos o importantes de múltiples amenazas (una de ellas el terrorismo), en donde su forma de operar se asemeja a la de teoría de juegos, en donde el defensor escoge su mejor jugada, para luego esperar a que el atacante realice también la mejor jugada, pero basado en las decisiones del primero (Definido por el autor

como "Sequential Defend-Attack model"), y considerando un efecto aleatorio definido también dentro del modelo, que influye en las decisiones de ambos. Además, es importante destacar que, frente a la incertidumbre de las decisiones de los atacantes (Dada por probabilidades condicionales), las utilidades obtenidas por el defensor son esperadas frente a la decisión de ubicación de cada elementos de defensa en determinados puntos fijos.

El operador decide la ubicación de determinadas contramedidas (Countermeasures), que hace referencia a un portafolio desplegado que busca reducir tanto los robos como la evasión de tarifas sujetas a incertidumbre en cuanto a su ocurrencia, siendo ambas situaciones independientes considerando la implicancia de una amenaza respecto a la otra.

El modelo presentado en [Insua et al. \(2016\)](#) considera un operador de metro que necesita proteger una sola estación frente a dos amenazas: la evasión de tarifas y los robos. Ambas amenazas son tratadas de forma simultánea teniendo en cuenta los costos de seguridad e imagen de la compañía, lo que genera un modelo secuencial con efecto en cascada. Lo anterior se concentra en un modelo que es capaz de entregar el portafolio de asignación óptimo considerando todas las posibles combinaciones de defensa. En él es posible destacar que cuando las amenazas son tratadas de forma simultánea, los recursos deben ser distribuidos, lo que exigirá una mayor optimización de lo disponible.

3.4.2.4. Ubicación de Inspectores en una Red de Tránsito.

En la línea de las redes de tránsito, existen modelos asociados a autopistas, que pueden ser adaptados considerando a pasajeros que son inspeccionados durante su viaje a través de las distintas rutas que puedan utilizar.

Estos modelos pueden ser aplicados a los distintos sistemas de tránsito. El problema es modelado a través de los Juegos de Stackelberg o de Nash, del tipo Líder-Seguidor. La función objetivo maximiza los ingresos por peajes (en este caso, el pago de las tarifas por parte de los pasajeros) y minimiza el número de pasajeros evasores de tarifas o las rutas mínimas que utilizan, considerando en este último caso que pueden seleccionaras. Las restricciones del problema incluyen un límite superior (upper bound) tanto en el costo promedio para el usuario en el arco como en el número de pasajeros controlados, la probabilidad de inspección en el mismo, el máximo largo de la ruta mínima, entre otras condiciones. Todos estos estudios adoptan grafos dirigidos complejos, donde los nodos representan uniones y tiempos de enlaces de los viajes.

Estos modelos son resueltos a través de métodos de programación lineal y difieren en las hipótesis principales acerca de las rutas elegidas por los pasajeros; Mientras que en [Borndorfer et al. \(2012\)](#) el pasajero

no elige libremente la ruta entre origen y destino, en [Borndorfer et al. \(2013\)](#) si lo hace.

Los resultados mostrados en ambos modelos mencionados podrían entregar significativas mejoras frente a la estrategia de controlar proporcionalmente cada tramo de acuerdo a los volúmenes de tráfico. Un incremento en los controles por hora mostraron una significativa disminución de las tasas de evasión de tarifas.

Los modelos anteriores no consideran el movimiento de los inspectores en la red de tránsito involucrada, resultando en una solución estática que involucra probabilidades de inspección en todos los puntos de la red propuesta.

3.4.2.5. Estrategias de Inspección de tarifas.

Los problemas que enfrentan las estrategias de inspección de tarifas, están basadas en los sistemas de transporte del tipo nBTS-POPS. Ellos modelan el problema como un Juego de Stackelberg o de Nash del tipo Líder-Seguidor. En la primera jugada, el líder configura las probabilidades de inspeccionar a pasajeros en algunos lugares; el seguidor responde decidiendo la ruta a tomar, de acuerdo a su conocimiento de las probabilidades de inspección y los tiempos de viaje. En este último, el juego aleatorio valorado en una distribución de probabilidad relacionado a un pago entre jugadores es usado para permitir un juego de control al azar en la red de transporte.

Las funciones objetivo se focalizan en los ingresos y aspectos logísticos como la ruta mínima (Shortest Path), inspectores empleados en una ruta y el número de penalizaciones. Un grafo espacial dirigido es usado para representar todas las redes: los nodos son estaciones y los arcos son tiempos de viaje o volúmenes de pasajeros entre estaciones consecutivas ([Alshawish et al. \(2017\)](#)). Para su resolución son utilizados los algoritmos de tiempo polinomial (Polynomial Algorithms), ruta mínima (Shortest Path), programación lineal y búsqueda local (Local Search Heuristic). Dichos métodos son implementados en solvers comerciales y algunos experimentos reales se han realizado.

Estos planteamientos de estrategia de inspección de tarifa incorporan nuevas definiciones para los pasajeros evasores de tarifas respecto a sus propias estrategias: pueden ser pasajeros adaptativos o no adaptativos. En el primer caso, los pasajeros van ganando información a medida que van avanzando en su ruta y la usan para poder adaptar sus decisiones frente a la misma, mientras que en el segundo caso, los pasajeros escogen una sola ruta y la mantienen a lo largo de todo su viaje. Estos conceptos son planteados en [Correa et al. \(2014\)](#).

Por otra parte, [Bahamondes et al. \(2017\)](#) evidenció que en la estrategia no adaptativa se podía

reducir al problema de Ruta Mínima, mientras que en una ruta libre cíclica (Cycle Free Path) puede siempre representar la estrategia adaptativa. Finalmente, [Alshawish et al. \(2017\)](#) mostró que las estrategias más efectivas tienen el mayor número de inspectores, quienes trabajan individualmente en las rutas más utilizadas por los pasajeros.

Las revisiones del documento de [Barabino et al. \(2020\)](#) permiten verificar que la posibilidad de plantear el problema de la evasión en el transporte público a través de los Problemas de Stackelberg es una posibilidad concreta, que permitirá unificar el problema de tener pasajeros evasores de tarifas con las decisiones de las autoridades en cuanto a los niveles de inspección a implementar (Representados como probabilidades de inspección en la red), de acuerdo a sus restricciones presupuestarias y/o expectativas.

Considerando las ideas de [Alshawish et al. \(2017\)](#), se establece que este tipo de estrategias exige un dominio y conocimiento experto, junto con planificadores de programación. En cuanto a las consideraciones hacia el modelo, se debe tener en cuenta que los datos de entrada son concretamente parámetros definidos por datos estadísticos o datos empíricos. Puntualmente, las estrategias que considera viables de utilizar son definidas a continuación:

- Frecuencia de Inspección: es la frecuencia a la cual el inspector inspeccionará una línea o estación específica.
- Duración de la inspección: el tiempo utilizado por el inspector para chequear una línea o viaje específico en términos del número de paradas.
- Selección de Línea: en este punto se define la forma en que el inspector selecciona la línea a ser inspeccionada, teniendo dos alternativas: Uniforme (Uniform) y Más Concurrida (Most-Crowded). El primer método se refiere al conjunto de estrategias en las cuales todas las líneas comparten la misma importancia. Lo que implica que no tienen preferencias de unas sobre otras. En cuanto al segundo método hace referencia a que las líneas con mayor volumen de pasajeros serán chequeadas más frecuentemente respecto a las otras, teniendo en cuenta de que el riesgo de evasión de tarifas sea presuntamente proporcional al volumen esperado de pasajeros en cada línea o viaje.
- Número de Inspectores: indica el número de inspectores empleados para inspeccionar la red de transporte completa.
- Colaboración: indica si los inspectores están llevando a cabo una inspección individual o de forma colaborativa como un equipo.

Puntualmente su trabajo se enfoca en los parámetros: Número total de inspectores, Colaboración y

Selección de línea, en donde generó 8 posibles estrategias, las que deben ser capaces de entregar indicadores relevantes relacionados a la estrategia de inspección de tarifas, tales como la intensidad de inspección, los costos o la intensidad de detección de evasores. No obstante, de igual forma se podrían considerar el minimizar la distancia total recorrida por los inspectores, minimizar el número de cambios de estación, maximizar la cobertura de inspección, maximizar el nivel de confort de los pasajeros y maximizar la utilidad total por ticket pagados y multas cobradas. Finalmente, el modelo se forma considerando un equilibrio de Nash o a través de los Juegos de Stackelberg tienen por objetivo determinar las probabilidades de inspección en una red de transporte. En las siguientes secciones se abordará dichos modelos de forma más exacta.

En la siguiente sección se revisarán modelos matemáticos previos que permitirán abordar este problema a través de la revisión de la teoría disponible.

3.4.3. Modelos Matemáticos de los Pasajeros Evasores

Para llevar a cabo una propuesta de un modelo matemático siempre resulta necesario apoyar esto de otras fuentes que hayan trabajado el problema en esta línea. Es por ello que se consideran dos estudios iniciales que permitirán obtener las ideas para poder proponer un nuevo modelo matemático y así, abordar el problema de la evasión a través de los Juegos de Stackelberg. Su análisis será en detalle con la finalidad de comprender el funcionamiento de estos modelos. Se iniciará con la explicación de los problemas de dos niveles, más conocidos como Bilevel, que representan a los Juegos de Stackelberg que se explican brevemente a continuación.

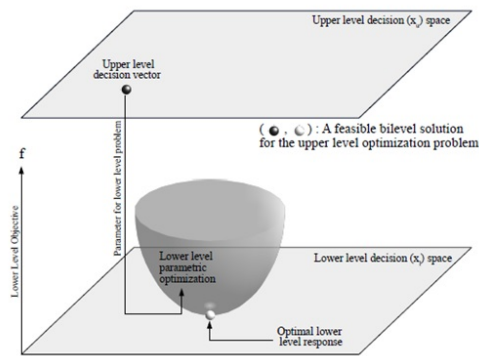
3.4.3.1. Los Juegos de Stackelberg.

En primer lugar, la situación de un líder que fija las condiciones del sistema de transporte y un seguidor que responde con su mejor jugada a dicha condición puede ser representada a través de la Teoría de Juegos por medio de los Juegos de Stackelberg. En este tipo de juegos, el operador del sistema de transporte (El Líder) podría fijar una serie de inspectores organizados en patrullas, los que se mueven a través del sistema de transporte, realizando labores de inspección de pasajeros (Los Seguidores), con el objetivo de evitar que estos evadan el pago de la tarifa impuesta. Dicho comportamiento posee matemáticamente un orden, en donde el Líder establece su estrategia de patrullaje en la red, a través de algún sistema de asignación o probabilidades de presencia, para que luego el Seguidor pueda tomar sus decisiones sin o con información completa. Estas decisiones del tipo jerárquicas pueden ser modeladas matemáticamente a través de los problemas de dos niveles o Bilevel que se describen a continuación.

3.4.3.2. Los Problemas Bilevel.

Muchos problemas de optimización de decisión (Decision-making problems) de gran escala son procesos que en organizaciones tanto públicas como privadas son jerárquicas. Al respecto, está la decisión tomada por un nivel superior en autoridad (Líder) para optimizar sus objetivos, que es afectada por las posibles decisiones tomadas en el nivel inferior (Seguidor), quienes buscan optimizar sus propias decisiones. La figura 3.3 ilustra una estructura de resolución general de un problema Bilevel, considerando optimización interrelacionada y tareas de decisión en ambos niveles.

Figura 3.3: Representación Gráfica de un Problema de dos Niveles (Bilevel)



Nota: La representación explica el proceso de resolución para un problema de dos niveles. Tomado de [Sinha et al. \(2018\)](#).

La figura 3.3 muestra que para cada vector de decisión en el nivel superior (Upper level decision vector), hay un problema paramétrico de optimización del nivel inferior (Lower level parametric optimization) a ser resuelto que entrega una respuesta racional óptima (Optimal lower level response) del seguidor para la decisión del líder.

El vector de decisión del líder es representado como x_u y el del seguidor como x_l . Por lo tanto, el par (x_u, x_l^*) (donde x_l^* es la respuesta óptima a x_u) representa una solución factible al problema de optimización en el nivel superior que también satisface las restricciones del problema.

Un aspecto importante de los problemas Bilevel es que no es simétrico en término de niveles; el tomador de decisiones en el nivel superior usualmente tiene completo conocimiento del problema del nivel inferior, mientras que el tomador de decisiones sólo observa las decisiones del líder y optimiza sus propias estrategias.

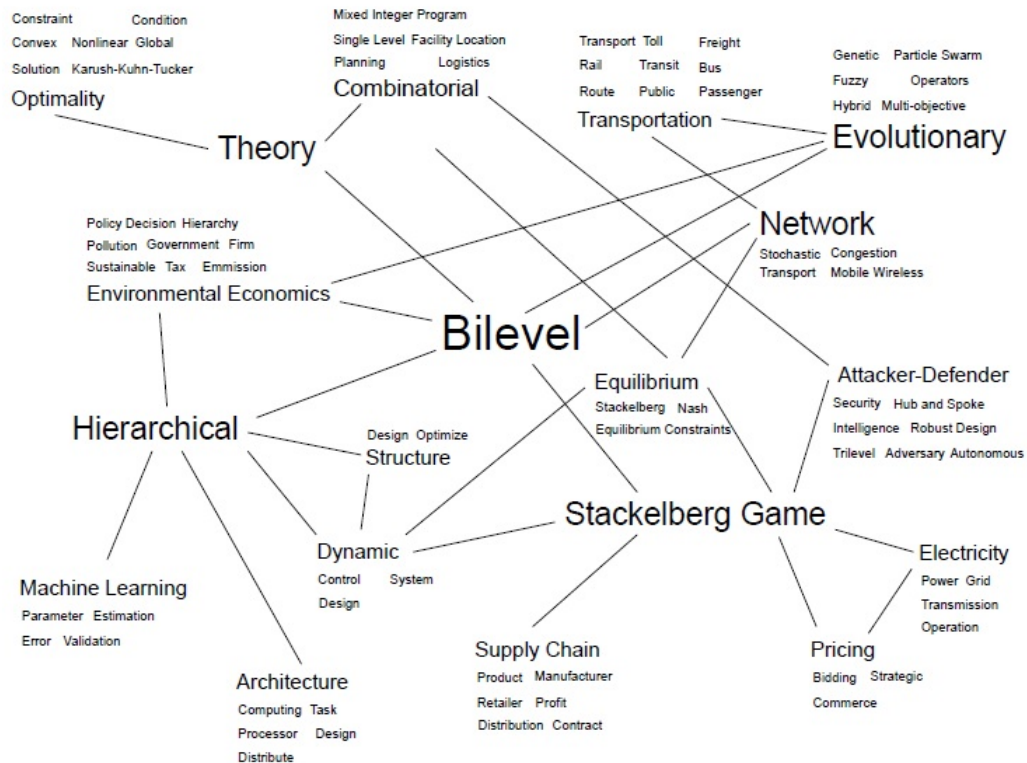
No obstante lo anterior, el hecho de que el líder tenga una información incompleta acerca del problema de optimización del seguidor podría entregar al problema Bilevel algunas incertidumbres.

No es poco común que el objetivo de buscar generalmente beneficios en los agentes privados se encuentren en contraposición con los de la autoridad controladora, como puede ocurrir en los problemas de la evasión en el transporte público.

Lo que hace a este tipo de problemas tan relevantes es que típicamente están caracterizados por grandes efectos tanto en la economía que impera como en el entorno que lo contiene.

Dados los impactos futuros de largo plazo que tienen las decisiones, no es extraño que el interés hacia la programación Bilevel haya crecido fuertemente sobre todo entre los investigadores que se relacionan con grandes problemas de decisión en el sector público.

Figura 3.4: Mapa de Red Bilevel



Nota: Se muestra las conexiones entre varias aplicaciones y teorías desde 1950. Tomado de [Sinha et al. \(2018\)](#).

La Figura 3.4 muestra un mapa de red de diferentes temas en la optimización Bilevel que han sido estudiados desde 1950. En él se pueden apreciar diferentes tópicos teóricos y de aplicación que han sido tratados bajo la optimización Bilevel. Por lo tanto, iniciando con la palabra Bilevel, se pueden apreciar los distintos subtemas que nacen de ella y que están relacionados con este tipo de problemas, y que a la vez tienen una interrelación en distintos ámbitos. Por ello, este tipo de problemas posee un gran potencial en cuanto a posibilidades de aplicación.

Las investigaciones en problemas de decisión con estructuras jerárquicas Líder-Seguidor (Optimización Bilevel) pueden ser trazadas por dos vías. La primera está en el dominio de la teoría de juegos, donde [Stackelberg \(1952\)](#) usó programación Bilevel para construir modelos descriptivos de comportamientos de decisión y establecer un equilibrio teórico. La segunda, por su parte, está en el dominio de la programación matemática, en donde los problemas aparecieron conteniendo un problema interno anidado como una restricción de un problema de optimización externo ([Bracken and McGill \(1973\)](#)), hasta el día de hoy, siendo posible encontrar una gran cantidad de literatura en optimización Bilevel.

Debido a que la optimización jerárquica puede introducir dificultades como no convexidad y desconexión incluso en las instancias más simples de una optimización Bilevel, los problemas se han vuelto sorprendentemente difíciles de manejar matemáticamente. A continuación, se muestra la primera aproximación matemática concreta de un problema Bilevel, que permitirá tener una mayor comprensión del mismo al momento de plantear el problema general del presente trabajo.

Formulación General y Definiciones. En esta sección se entrega una formulación general para un problema de optimización Bilevel. Estos contienen dos niveles de tareas de optimización, donde una de ellas se encuentra anidada dentro de la otra. El problema de optimización externo es comúnmente referenciado al del líder (Nivel superior) y el interno es conocido como el del seguidor (nivel inferior). Ambos niveles tienen sus propios objetivos y restricciones. Respectivamente, hay también dos clases de variables de decisión, llamadas variables de decisión del líder (Nivel superior) y del seguidor (Nivel inferior). El nivel inferior es un problema de optimización paramétrico que es resuelto con respecto a las variables de decisión del primer nivel, usando estas como parámetros. El problema de optimización del nivel inferior es una restricción al problema superior, de tal forma de que sólo aquellas soluciones que son un óptimo del nivel inferior y además satisfacen la restricción del superior, pueden ser consideradas como factibles. Un resumen de terminologías y notaciones usadas en un contexto de optimización Bilevel general se encuentra en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4: Sumario de Terminologías y Notaciones para los Problemas Bilevel.

Categoría	Notaciones	Descripción
Vector de Decisión	$x_u \in X_u$	Variable de decisión y espacio de decisión del líder (Nivel superior).
Vector de Decisión	$x_l \in X_l$	Variable de decisión y espacio de decisión del seguidor (Nivel inferior).
Objetivo	F	Funciones objetivo del líder (Nivel superior).

Objetivo	f	Funciones objetivo del seguidor (Nivel inferior).
Restricción	$G_k, k=1,...,K$	Funciones de restricción del líder (Nivel superior).
Restricción	$g_j, j=1,...,J$	Funciones de restricción del seguidor (Nivel inferior).
Región factible del nivel inferior	$\Omega : X_u \rightarrow X_l$	$\Omega(x_u) = \{x_l : g_l(x_u, x_l) \leq 0 \forall j\}$, representa la región factible del nivel inferior para cualquier variable de decisión del nivel superior.
Región de restricciones (Conjunto factible relajado)	$\Phi = gph(\omega)$	$\Phi = \{(x_u, x_l) : G_k(x_u, x_l) \leq 0 \forall k, g_k(x_u, x_l) \leq 0 \forall J\}$, representa la región que satisface las restricciones del nivel superior e inferior.
Conjunto de reacción de nivel inferior	$\Psi : X_u \rightarrow X_l$	$\Psi = \{x_l : x_l \in \arg \min_{x_l \in X_l} \{f(x_u, x_l) : x_l \in \Omega(x_u)\}\}$, representa la solución óptima del nivel inferior para una variable de decisión del nivel superior.
Conjunto Factible	$I = gph\Omega$	$I = \{(x_u, x_l) : (x_u, x_l) \in \Phi, x_l \in \Psi(x_u)\}$, representa las variables de decisión del nivel superior y la correspondiente solución óptima del nivel inferior que pertenece a la región de restricciones factibles.
Función Escogida	$\psi : X_u \rightarrow X_l$	$\psi(x_u)$, representa la solución escogida por el seguidor para cualquier variable de decisión del nivel superior. Esta se vuelve importante en el caso de tener múltiples soluciones óptimas en el nivel inferior.

Función de Valor Óptimo	$\varphi : X_u \rightarrow R$	$\varphi(x_u) = \min_{x_l \in X_l} \{f(x_u, x_l) : x_l \in \Omega(x_u)\}$, representa el valor mínimo de la función del nivel inferior correspondiente a una variable dada del nivel superior.
-------------------------	-------------------------------	---

Nota: Tomado de [Sinha et al. \(2018\)](#)

Con el uso de los términos indicados en la tabla 3.4, se procede a realizar las dos definiciones siguientes para llegar a la expresión general del problema Bilevel:

Definición 1. Para la función objetivo del nivel superior $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, el problema Bilevel está dado por 3.1 a 3.3

$$\min_{x_l \in X_l, x_u \in X_u} F(x_u, x_l) \quad (3.1)$$

Subject to

$$x_l \in \arg \min_{x_l \in X_l} \{f(x_u, x_l) : g_j(x_u, x_l) \leq 0, j = 1, \dots, J\} \quad (3.2)$$

$$G_k(x_u, x_l) \leq 0, k = 1, \dots, K \quad (3.3)$$

Donde $G_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, \dots, K$, denota las restricciones del nivel superior, y $g_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ representa las restricciones del nivel inferior. Restricciones de igualdad pueden existir, pero por temas de simplicidad han sido omitidas. Los conjuntos $X_u \subset \mathbb{R}^n$ y $X_l \subset \mathbb{R}^m$ en la definición pueden denotar restricciones adicionales como lo es la integralidad. Es común asumir las variables son reales, a menos que se indique lo contrario.

Una formulación equivalente al problema anterior en términos de un mapeo de valores establecidos (función multi-valores) se muestra en la siguiente definición:

Definición 2. Sea $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapeo de valores establecidos.

$\Psi(x_u) = \arg \min_{x_l \in X_l} \{f(x_u, x_l) : g_j(x_u, x_l) \leq 0, j = 1, \dots, J\}$, representa la restricción definida por el problema de optimización del nivel inferior, esto es $\Psi(x_u) \subset X_l \forall x_u \in X_u$.

Con lo anterior, el problema Bilevel puede ser expresado como un problema de optimización restringido como se muestra a continuación (3.4 a 3.6):

$$\min_{x_l \in X_l, x_u \in X_u} F(x_u, x_l) \quad (3.4)$$

Subject to

$$x_l \in \Psi(x_u) \quad (3.5)$$

$$G_k(x_u, x_l) \leq 0, k = 1, \dots, K \quad (3.6)$$

Como se puede apreciar, en ambas definiciones se establece la función del problema de minimización como “min” (entre comillas en texto del autor), debido a que existe una ambigüedad en el caso de que existan múltiples soluciones óptimas en el nivel inferior, para cualquier variable de decisión del nivel superior. Ante esta situación hay una falta de claridad acerca de qué solución óptima del nivel inferior deba ser utilizada, debiendo existir supuestos debidamente establecidos por el líder para poder esclarecer la situación en cada caso.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que el sistema Bilevel permite modelar matemáticamente el problema de la evasión dados los participantes que considera, se hace necesario establecer modelos de referencia que ayuden a diseñar posteriormente un modelo para los pasajeros (seguidores) que pueda ser incorporado en un nivel inferior, en donde en el superior sería posible encontrar el problema de líder o las autoridades fiscalizadoras en el transporte público. A continuación se revisan algunos trabajos.

3.4.3.3. Modelo 1: Estudio de [Borndorfer et al. \(2013\)](#)

El documento de [Borndorfer et al. \(2013\)](#) aborda una aproximación juego-teórica para optimizar las estrategias de aplicación de peaje en una red de autopistas en Alemania. Su objetivo es pesar a los camiones de 20 toneladas o más, para de esta manera poder justificar los aumentos en inversión de mantención y extensión en sus autopistas. En esta línea, 300 vehículos realizan rutas de control de inspección en toda su red.

El problema de localización de inspectores en ubicaciones espaciales en una red de transporte para inhibir la evasión del pago del peaje es estudiado desde un punto de vista juego-teórico.

Este problema representa mucha similitud con otros estudios relacionados a la aplicación de teoría de

juegos, en una clase de problemas en donde el objetivo es hacer aleatorios diferentes tipos de inspecciones de una forma estratégica; dentro de estos se encuentra un trabajo en la selección óptima de puntos de chequeo y rutas de patrullaje para proteger el Aeropuerto de Los Ángeles contra su competencia (Paruchuri et al. (2008)), un estudio de programación y localización de fiscalizadores de tráfico aéreo en los Estados Unidos (Jain et al. (2010)), o el problema de la programación óptima de inspectores de tarifas en el metro de Los Ángeles (Yin et al. (2012a)).

En Borndorfer et al. (2013) se abordan las dificultades relacionadas a la gran cantidad de rutas disponibles por la red de usuarios, mientras se toma en cuenta los costos adicionales de viaje cuando hacen un desvío (Detour). Por otra parte, se añade la posibilidad de que el usuario pueda escoger sus propias rutas para alcanzar su destino.

La teoría de juegos (Game Theory) considera el concepto de la mejor estrategia (Best Strategy), que es muy utilizada en los equilibrios de los Juegos de Stackelberg. En él se considera un juego en donde cada jugador $i = 1, \dots, N$ puede escoger una estrategia p^i de un conjunto Δ_i y decide maximizar su propio pago (Payoff o utilidad) $u_i(p_i, p_{-i})$. Es posible decir que la estrategia p_i es la mejor respuesta respecto a las otras estrategias p_{-i} si su pago no puede incrementarse (O mejorar) cuando p_{-i} es fijo, tal como se explica matemáticamente en 3.7:

$$\forall p'_i \in \Delta_i, \quad u_i(p'_i, p_{-i}) \leq u_i(p_i, p_{-i}) \quad \forall i \quad (3.7)$$

La red de transporte es modelada con un grafo dirigido $G(V, E, w)$, donde V es conjunto de nodos, E conjunto de arcos, y $w = \{w_e\}$ es el costo de viaje a través del arco $e \in E$. Se asume en este caso que los usuarios de esta red son un conjunto de “commodities” $K = \{k_1, \dots, k_m\}$. Cada commodity es representado por un par origen-destino, donde $k = (src(k), dst(k))$, $src(k)$ es origen del commodity k , y $dst(k)$ es el destino del commodity k . Considerar a S como el conjunto de fuentes de “commodities” $\{s : \exists (s, t) \in K\}$, y a $s \in S$ se define $D_s := \{t : (s, t) \in K\}$.

Para todo $k \in K$, se denota a R_k como el conjunto de rutas desde $src(k)$ a $dst(k)$. En particular, $R_k^* \in R_k$ es la ruta más corta entre un conjunto origen-destino k (Teniendo en cuenta los costos w_e , considerado como el costo dentro de la red). Adicionalmente, se incorpora la demanda x_k del commodity k , que podría estar representando al número de usuarios que realizan un viaje con un commodity k en un periodo de tiempo determinado.

Los usuarios de alguno de los commodities k esperan pagar un peaje T_k . Si un usuario evade un peaje, toma el riesgo de pagar una multa $P \gg T_k$ en caso de que sea controlado. Si un inspector se encuentra presente en el arco e , se considera σ_e como la probabilidad de que un individuo que pase por el arco e sea

inspeccionado.

En primer lugar, desde el punto de vista de los inspectores, el conjunto de arcos se particiona como $E = E_{pay} \cup E_{free}$, en donde E_{free} representa algunos arcos de peaje gratis, en donde los usuarios no deberían ser controlados, mientras que en E_{pay} esto sí podría ocurrir. Se consideran κ equipos de inspectores en toda la red, quienes pueden controlar un arco $e \in E_{pay}$. Finalmente se considera una probabilidad marginal q_e de que algún inspector esté presente en el arco $e \in E$.

Luego, considerando a los usuarios, la evasión de tarifas y la selección de la ruta, este autor asocia cada commodity k con un jugador (llamado desde ahora jugador k). El jugador k puede escoger entre pagar el peaje y tomar la ruta más corta, o tratar de evadir el peaje tomando cualquier ruta $R \in R_k$ (La cual podría ser un desvío). Su estrategia mixta (Combinación de estrategias) puede ser interpretada como la proporción de k -usuarios que pagan o evaden en una ruta particular $R \in R_k$.

Por motivos de simplicidad, [Borndorfer et al. \(2013\)](#) genera el arco artificial e_k^* con peso $w_{e_k^*} := \sum_{e \in R_k^*} w_e + T_k$ el cual va directamente desde el origen al destino de k , y además se define $\bar{E}_k := E \cup \{e_k^*\}$; cuya interpretación es que el jugador k paga el peaje si toma el arco e_k^* , lo que puede ser representado como un flujo, según la siguiente expresión compactada:

$$\sum_{u:(v,u) \in \bar{E}_k} p_{(v,u)}^k - \sum_{u:(u,v) \in \bar{E}_k} p_{(u,v)}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } v = \text{src}(k) \\ -1 & \text{si } v = \text{dst}(k) \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad \forall v \in V \quad (3.8)$$

Se debe hacer notar que la expresión (3.8) tiene su sustento en los problemas de puntos de origen y destinos separados, en donde los commodities no vuelven al mismo lugar de origen. Esta expresión se conoce como condiciones de divergencia, la cual queda definida para cada nodo v como la capacidad del mismo de absorber y eliminar flujos según el tipo de nodo en el que se encuentre el jugador. Si se considerara la divergencia de un nodo i como y_i quedaría definida de forma general de la siguiente forma:

$$\text{Salida} - \text{Entrada} = y_i$$

Entonces, cada una de las tres expresiones de (3.8) quedan explicadas de la siguiente forma:

$$\sum_{u:(v,u) \in \bar{E}_k} p_{(v,u)}^k - \sum_{u:(u,v) \in \bar{E}_k} p_{(u,v)}^k = 1; \text{ si } v = \text{src}(k) \quad (3.9)$$

La expresión (3.9) indica que cuando se está en el nodo de origen $v=src(k)$ siempre saldrán los flujos, representando un valor 1 como la sumatoria de las probabilidades de salir desde el nodo v (Por tanto siempre deberán salir los flujos de un nodo source o fuente). Estos son nodos conocidos también como de salida.

Por otra parte, la siguiente expresión:

$$\sum_{u:(v,u) \in \tilde{E}_k} p_{(v,u)}^k - \sum_{u:(u,v) \in \tilde{E}_k} p_{(u,v)}^k = -1; \text{ si } v = dst(k), \quad (3.10)$$

hace referencia a que cuando se está en el nodo de destino $v=dst(k)$ siempre deberán entrar todos los flujos, representando esto como un -1 en señal de que sólo existirán flujos de entrada al nodo v . Este nodo es conocido como sumidero. Y finalmente, la siguiente expresión:

$$\sum_{u:(v,u) \in \tilde{E}_k} p_{(v,u)}^k - \sum_{u:(u,v) \in \tilde{E}_k} p_{(u,v)}^k = 0; \text{ si } v \neq src(k) \neq dst(k), \quad (3.11)$$

explica que al momento de encontrarse en un nodo intermedio (es decir, ni de origen ni de destino) no es posible permanecer en el mismo, por lo que no habrá una acumulación o descarga como en los casos anteriores sino que simplemente una transferencia, en donde lo que entra es igual a lo que sale. La expresión (3.8) recién analizada podría ser utilizada en la formulación del pasajero evasor dentro de un problema de modelación matemática, como restricción del problema principal.

Por último, considerando que las probabilidades de que exista un inspector en el arco e es q_e y que las de que un individuo en el arco e sea inspeccionado son σ_e , se puede definir las probabilidades de ser inspeccionado en el arco e como el producto de ambas probabilidades, es decir, $q_e \sigma_e$. Por lo tanto, considerando a p_e^k la estrategia de arcos que toma el jugador k , se puede obtener el número esperado de controles durante su viaje de la siguiente forma:

$$\sum_{e \in R} p_e^k q_e \sigma_e, \quad (3.12)$$

que ayuda a definir la expresión final de pago esperado (Payoff o Costo en este caso) del jugador k :

$$\text{Payoff}_k(p, q) = -\left(\sum_{e \in \tilde{E}_k} p_e^k w_e + \sum_{e \in E} p_e^k q_e \sigma_e P\right), \quad (3.13)$$

en la que se explica, en la primera expresión (De la izquierda), el pago normal de los peajes a pagar a lo largo de toda la ruta mínima, mientras que en la segunda (De la derecha), el costo que se debería pagar si el pasajero

se inspecciona a lo largo de la ruta distinta la mínima, cuando se encuentra evadiendo la tarifa.

Para finalizar, [Borndorfer et al. \(2013\)](#) permite un primer acercamiento a lo que es la modelación matemática concreta de este tipo de problemas, induciendo a la implementación de grafos dirigidos. En ellos se encontrará por una parte el inspector con sus respectivas probabilidades de fiscalización a los pasajeros en cada punto de la red, y por la otra los pasajeros, quienes buscarán pagar lo menos posible en su viaje tomando en cuenta las probabilidades de ser inspeccionado, según las disposiciones que haya entregado inicialmente la autoridad.

3.4.3.4. Modelo 2: Estudio de [Correa et al. \(2017\)](#)

Tal como ya ha sido mencionado, en la actualidad la instalación de barreras físicas no es siempre posible, por lo que el control del sistema recae en dos situaciones: por una parte la honestidad de los pasajeros, y por otra el apropiado control de los inspectores a bordo de los vehículos de transporte. Aquellos pasajeros que son inspeccionados y que no poseen un ticket de comprobante, son multados con sumas superiores a las de la tarifa regular.

Este estudio aborda la optimización de estrategias de inspección de tarifas en los sistemas de transporte tomando en cuenta reacciones realistas de los pasajeros relacionadas directamente a su decisión de pagar o no la tarifa, una vez que las autoridades han definido sus probabilidades de inspección en cada uno de sus arcos de la red. Dicha decisión está sustentada en la evaluación de su costo esperado (o percibido).

En la propuesta, si el pasajero escoge no pagar la tarifa, su costo es la suma de él a lo largo de la ruta (expresada en unidades monetarias) y la multa esperada, relacionada a las probabilidades a lo largo de toda la misma. Por otra parte, si decide pagar la tarifa, su costo es definido como el de la ruta mínima, considerando un precio del ticket y la distancia expresada en unidades monetarias.

Fijando el análisis únicamente en las propuestas de [Correa et al. \(2017\)](#) hacia el modelamiento del comportamiento de los pasajeros, se considera lo siguiente:

En primer lugar, se propone un gráfico dirigido $G=(V,E)$ con costos $c : E \rightarrow Z_+$ modelando los tiempos de transporte por los arcos (como el costo monetario incurrido por los pasajeros cuando transitan por ellos). Para prevenir la evasión, el operador de la red (el Líder) configura las probabilidades de inspección $p_e \in [0, 1]$ en los arcos sujetas a la restricción presupuestaria $\sum_{e \in E} p_e \leq B$, en donde $B \leq 0$ corresponde a un número limitado de inspectores de tarifas en la red de transporte. Los pasajeros (denominados Seguidores) son modelados como un conjunto de commodities K (Al igual que en [Borndorfer et al. \(2013\)](#)). Para cada

commodity $i \in K$ se asigna la demanda $d_i \geq 0$ que especifica el número de pasajeros con origen $s_i \in V$ y destino $t_i \in V$.

La elección del pasajero se encuentra entre comprar el pasaje al precio $T_i \geq 0$ o escoger una ruta sin pagar.

Si un pasajero es inspeccionado sin haber pagado la tarifa, tiene que pagar una multa $F \gg T_i$. En este modelo, se asume que la multa incluye el costo de la tarifa, por lo que habilitaría al pasajero para que pueda continuar su viaje.

La decisión del pasajero se asume que es racional, por lo que está basada unicamente en su costo personal esperado, el cual es expresado como la sumatoria de los tiempos de viaje a lo largo de la ruta escogida y el costo monetario; en definitiva, los pasajeros del commodity i deciden entre pagar la tarifa y seguir la ruta mínima, o evadir, escogiendo una ruta $P \in P_i$ que minimiza una función de costos (Donde P_i representa el conjunto de rutas $s_i - t_i$).

La propuesta de [Correa et al. \(2017\)](#) involucra la consideración del seguidor adaptativo y no adaptativo, por lo que se tratarán por separado para efectos de análisis.

Seguidor No Adaptativo (Nonadaptive Follower). En esta variante, se asume que los pasajeros eligen su ruta antes de comenzar su viaje y continúan a lo largo de él, independiente de que encuentren o no un inspector. Para una ruta P , se define su costo total de viaje como $c(P) := \sum_{e \in P} c_e$, y a la probabilidad de que un inspector no sea encontrado en la misma como $\pi(P) := \prod_{e \in P} (1 - p_e)$, que corresponde a la productoria de las probabilidades de no encontrar un inspector para cada arco e de la ruta P escogida.

Por lo tanto, el costo esperado de la ruta P para el pasajero i en una configuración no adaptativa es el siguiente:

$$f_{N,p,i}(P) := c(P) + (1 - \pi(P)) \cdot F, \quad (3.14)$$

en donde se puede apreciar que en la primera expresión (Izquierda) se encuentra el costo total de viaje, y en la segunda (Derecha), el costo esperado ante las eventuales fiscalizaciones durante su ruta, en caso de que haya evadido la tarifa.

Seguidor Adaptativo (Adaptive Follower). En esta variante, una vez que el pasajero es atrapado, es decir fiscalizado, continuará a través de su ruta más corta con respecto al costo c . Considerando a $SP_c(v, w)$

como la distancia de la ruta mínima de v a w con respecto a c , el seguidor trata de encontrar una ruta $P = (e_1, \dots, e_l) \in P_i$. Finalmente, se considera el arco $e_j = (v_j, v_{j+1})$ como aquel en que se encuentra el pasajero ante una eventual inspección.

Se tiene la siguiente función de costos propuesta por el autor:

$$f_{A,p,i}(P) := \sum_{j=1}^l \prod_{k=1}^{j-1} (1 - p_{e_k}) \cdot (c_{e_j} + p_{e_j}(F + SP_c(v_{j-1}, t_i))). \quad (3.15)$$

Notar que en la expresión (3.15) $1 - p_{e_k}$, representa la probabilidad de no ser inspeccionado hasta el arco e_k , lo que se encuentra acotado por la productoria hasta $j-1$, que representa el arco inmediatamente anterior en el que se es inspeccionado por las autoridades.

Luego, c_{e_j} representa el costo añadido desde el nodo j , y la expresión $p_{e_j}(F + SP_c(v_{j-1}, t_i))$ representa el costo esperado de haber sido inspeccionado en el nodo j , considerando el pago de la multa, y el costo de la ruta mínima SP_c tomada una vez que se fue fiscalizado, para alcanzar el nodo destino t_i . Esta última consideración tiene el supuesto de que el pasajero en todo momento conoce la ruta mínima a tomar luego de ser fiscalizado y multado.

3.4.3.5. Estrategia Marginal y Mixta

Ya se ha revisado que la relación jerárquica que se genera entre los participantes del sistema de transporte público pueden ser modelados a través de los Juegos de Stackelberg.

En estos modelos, el líder utiliza un conjunto fijo de inspectores organizados en patrullas, que se mueven dentro de la red de transporte. De forma más específica, el operador de transporte establece una ruta temporo-espacial a cada patrulla basada en una programación diaria, lo que genera un conjunto de rutas (Patroll Paths) para ellas que representan las estrategias puras del líder en un Juego de Stackelberg. Y para inducir incertidumbre, el operador además define un conjunto de rutas unidas (Joint Patroll Paths), donde cada una de ellas tiene asignada una probabilidad de ser implementada, que representa la Estrategia Mixta bajo los Juegos de Stackelberg, lo que es definido por el operador de transporte.

En una aproximación a una implementación real, las probabilidades de seleccionar un Joint Patroll Path son interpretadas como las frecuencias a las cuales el operador implementaría cada una de ellas. El llevar a cabo esto, además le permite establecer las probabilidades de inspección de pasajeros a diferentes horas del día (Probabilidades de inspección), lo que influye directamente en la decisión de estos últimos de comprar o

no el ticket. Por lo tanto, se debe tener en cuenta el comportamiento del pasajero al momento de definir las Estrategias Mixtas.

De todas formas, debido a que la cantidad de Joint Patroll Paths crece de forma exponencial con el tamaño de la red y la duración del programa del sistema de transporte, es que la literatura se ha focalizado en determinar explícitamente las probabilidades de inspección en la red sin determinar el conjunto de Joint Patroll Paths y su correspondiente probabilidad de ser seleccionada, lo que se define como Estrategia Marginal bajo los Juegos de Stackelberg.

Este enfoque Marginal es operacionalmente inútil para el operador de transporte, a menos que una Estrategia Mixta sea obtenida a partir de la Marginal, en donde se requiere seleccionar todos los días un Joint Patroll Path con una cierta probabilidad que contribuya con su objetivo.

El enfoque Marginal fue primero aplicado por [Kiekintveld et al. \(2009\)](#) en el contexto de los Juegos de Stackelberg de seguridad. Ellos mostraron, para clases típicas de Juegos de Stackelberg de seguridad con múltiples fuentes, que es posible encontrar formulaciones del líder de tamaño polinomial que sólo hacen referencia a probabilidades marginales (Estrategia Marginal) y que para cada Estrategia Marginal factible existe una Estrategia Mixta (Esto es, un conjunto de estrategias puras para el líder y su respectiva probabilidad de ser seleccionada). Con esto, bajo un enfoque marginal se define el desafío de desarrollar algoritmos que entreguen una Estrategia Mixta desde una Marginal.

En el siguiente capítulo se realizará la formulación del problema del pasajero o follower, para poder posteriormente implementarlo, junto con sus posibles alternativas.

4 | Formulación del Modelo

En la sección anterior se han planteado los fundamentos del problema de la evasión, llegando hasta la revisión de modelos que buscan explicar y modelar el comportamiento de los distintos actores que lo componen. Al respecto, en esta sección se presentan los modelos del pasajero oportunista, los que deberán ser insertados en el problema principal del Líder, que en este caso es la entidad fiscalizadora de transporte público.

En primer lugar, dada la evidencia existente acerca de la gran evasión que se ocasiona en los sistemas POP_S a nivel mundial, y además a su uso cada vez más masivo en los sistemas de transporte público es que se propondrá un modelo en aquella línea, basado en el enfoque de Estrategias Marginales. Por lo tanto, se buscará definir las probabilidades de inspección en la totalidad de los arcos de la red.

Para la presente sección se presentan distintos problemas para el seguidor, teniendo en consideración que las propuestas para el problema del Líder deben ser tratadas de forma aislada e independiente. Esto debido a que forma parte de un problema particular, cuyos recursos y restricciones permitirán decidir de forma óptima las decisiones de fiscalizar en cada uno de los arcos de cualquier tipo de red.

Para efectos del presente trabajo se asume que el Líder ya ha sido capaz de entregar una configuración de probabilidades de inspección en la red, previo análisis de la misma y a la espera de la decisión del pasajero o follower.

4.1. Sistema de Tránsito

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, en donde V es el conjunto de nodos o vértices tal que $v \in V$ y E es el conjunto de arcos de tal forma que $e \in E$.

Por otra parte, un tipo de pasajero $k \in K$ es definido como un conjunto de $d_k \leq 0$ pasajeros que pueden seleccionar su ruta teniendo en cuenta su origen y destino dentro de la red de transporte. En primera

instancia, los pasajeros honestos pagan las tarifas, mientras que los pasajeros evasores (también conocidos como oportunistas) realizan su decisión acerca de pagar o no basados fundamentalmente en el costo esperado de su viaje, el cual depende de la probabilidad de ser inspeccionado. De forma particular, los pasajeros oportunistas pueden decidir entre comprar un ticket al precio B o escoger viajar sin pagarlo, pero teniendo el riesgo de incurrir en una multa F (en donde $F \gg B$) si es fiscalizado. Se define f_k^o como la proporción de pasajeros oportunistas del tipo k , y así, $d_k^o = f_k^o d_k$ define el número de pasajeros oportunistas tipo k .

Para prevenir la evasión, el operador de la línea (el líder) configura las probabilidades de inspección en la red de tránsito considerando un conjunto determinado de patrullas. Dichas probabilidades son establecidas para cada arco $e \in E$, haciendo referencia a la posibilidad de que un pasajero tipo k sea inspeccionado en cada uno de ellos, lo que se puede interpretar como una percepción de ser fiscalizado.

En cuanto al traslado de los pasajeros en la red, estos consideran que saldrán desde un nodo $v_k^+ \in V$ y llegarán a uno $v_k^- \in V$ que dependerá del tipo de pasajero $k \in K$. Bajo esta misma línea, se definen los conjuntos $\delta^+(v)$ y $\delta^-(v)$ como el de arcos de entrada y salida a un nodo $v \in V$ respectivamente, que representan las distintas alternativas de traslado de los pasajeros dentro de la ruta escogida. Por lo tanto, con las definiciones anteriores relacionadas a la ruta, se puede notar que el pasajero tipo $k \in K$ conoce su origen y destino dentro de la red, pero que se le da al mismo tiempo la alternativa de escoger su propia ruta, la que no necesariamente va corresponder a la mínima en términos de tiempo, pero si siempre en términos de su costo.

En relación a la forma de seleccionar la ruta los pasajeros dentro de la red, en primera instancia lo efectúan a través de la revisión inicial de su ruta mínima usando Shortest Path Problem (SPP), para posteriormente analizar dentro de la red las alternativas de inspección que genera dicha ruta. Y con esta información, lograr encontrar una que le permita reducir su costo esperado de traslado dadas probabilidades de inspección $\mathbb{P}_e$ en la red.

4.2. Definiciones del Seguidor

En este trabajo se asume que los pasajeros oportunistas tienen un comportamiento racional, en donde la decisión de comprar o no el ticket está relacionada a su costo esperado. Particularmente, en esta oportunidad el pasajero buscará disminuir su costo esperado al seleccionar determinada ruta, la que tiene una estrecha relación con las probabilidades de inspección en la red.

Sea W_k^o igual a 1 si el pasajero decide pagar el ticket, y 0 si no lo hace, concretando la evasión. Además,

al igual que en [Correa et al. \(2017\)](#) y [Borndorfer et al. \(2013\)](#), se asigna el valor del ticket B ya conocido y que dependerá de cada sistema de transporte. Respecto al valor w_e y en particular $w_{e_k^*}$, considerados en [Borndorfer et al. \(2013\)](#), se excluyen de la presente modelación debido a que la estructura del sistema de transporte normalmente no considera tarifas relacionadas a distancia o tiempos de permanencia en la misma, lo que podría restar realismo al planteamiento. De igual forma se considera la multa F. En cuanto a la asignación de la ruta de cada pasajero tipo k , se define la variable H_e^k que toma el valor 1 si el pasajero tipo k hace uso del arco e , dentro de su ruta, y 0 si no lo hace.

En cuanto al pago que realiza el pasajero oportunista tipo k , se define la variable aleatoria μ_k^o , generando la expresión $\mu_k^o = BW_k^o + F(1 - W_k^o)\Pi_k^o$, en donde Π_k^o es una indicatriz estocástica que es igual a 1 si el pasajero oportunista tipo k es inspeccionado durante su viaje, y en otros casos es igual a 0. Si se considera a U_k^o como el valor esperado de la cantidad pagada por un pasajero oportunista tipo k , se obtiene:

$$U_k^o = \mathbb{E}(\mu_k^o) = BW_k^o + F(1 - W_k^o)\mathbb{P}_k^o, \quad (4.1)$$

donde la indicatriz se ha transformado en $\mathbb{P}_k^o$, que es la probabilidad de que un pasajero oportunista tipo k sea inspeccionado durante su viaje. Se asume un estado estable en donde los pasajeros oportunistas tipo k han podido llegar a conocer los valores de la probabilidad $\mathbb{P}_k^o$, considerando la siguiente expresión que permite decidir los arcos a utilizar por el pasajero oportunista tipo k :

$$\mathbb{P}_k^o = 1 - \bar{\mathbb{P}}_k^o \quad (4.2)$$

$$\mathbb{P}_k^o = 1 - \prod_{e \in E} (1 - \mathbb{P}_e)^{H_e^k}, \quad (4.3)$$

donde $\mathbb{P}_e$ es la probabilidad de que en el arco $e \in E$ sea inspeccionado. Se debe notar que al igual que en [Correa et al. \(2017\)](#), se asume que $\mathbb{P}_e = \mathbb{P}_{k,e}^o$, esto es, que la probabilidad de que un pasajero oportunista de tipo k sea inspeccionado en el arco $e \in E$ es igual a la probabilidad de inspección del arco $e \in E$. Dicha probabilidad corresponde a un parámetro para el problema del pasajero oportunista tipo k . Adicionalmente se añade a H_e^k como exponente a la productoria de las probabilidades de ser inspeccionado en cada arco $e \in E$ para que esta influya sobre el valor de la probabilidad de inspección de acuerdo a la ruta escogida por el pasajero tipo k . Con este arreglo matemático, simplemente formarán parte influyente de la productoria las probabilidades cuyos arcos son utilizados por el pasajero tipo k , registrados con el valor 1 en la variable de decisión H_e^k .

De esta forma se incluye en el problema la decisión de cada pasajero tipo k acerca de su propia ruta, influyendo en el resultado de los operadores.

Por otra parte, en cuanto al movimiento o traslado de dichos pasajeros por el grafo, se deben tener las mismas consideraciones de flujo ya revisadas en el problema del Líder así como también revisadas en el documento de [Borndorfer et al. \(2013\)](#), de donde se proponen las siguientes restricciones:

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} H_e^k - \sum_{e \in \delta^-(v)} H_e^k = 0 \quad \forall v \in V, v \neq v_k^+, v_k^- \quad (4.4)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v_k^+)} H_e^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{e \in \delta^-(v_k^-)} H_e^k = 1 \quad \forall k \in K, \quad (4.6)$$

en donde la expresión 4.4 asegura que el pasajero que ingresa a un nodo v salga del mismo, mientras que las 4.5 y 4.6 indica que los pasajeros sólo pueden salir una vez desde el nodo v_k^+ y entrar una vez al nodo v_k^- respectivamente.

En relación a la decisión que cada pasajero tipo k debe realizar en su viaje, este se traduce en buscar la ruta que logre minimizar su tiempo de permanencia en la red, resolviendo su propio Shortest Path Problem (SPP), basado en el conocimiento del tiempo t_e que tarda en recorrer cada arco $e \in E$ de la ruta escogida. Por ello, se tienen en cuenta que previamente cada pasajero tipo k ha determinado su tiempo de ruta mínima tsp^k , con lo que se propone la siguiente expresión:

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \leq \theta \text{tsp}^k \quad \forall k \in K, \quad (4.7)$$

en donde 4.7 hace referencia a que el pasajero oportunista considerará un desvío respecto a su tiempo de ruta mínima tsp^k de a los más $\theta > 1$ veces el tiempo de la ruta mínima.

En cuanto a las condiciones para asegurar que el pasajero oportunista tipo k haga uso de la ruta mínima en el momento en el que hace pago del ticket, se proponen las siguientes expresiones:

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \geq \text{tsp}^k W_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.8)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \leq \text{tsp}^k W_k^o + M(1 - W_k^o) \quad \forall k \in K, \quad (4.9)$$

en donde M es un número muy grande.

De esta forma, cuando el pasajero oportunista tipo k paga su pasaje, las expresiones 4.8 y 4.9 en su lado derecho tienen el valor tsp^k , con lo que el único camino que puede considerar es el de la ruta mínima (Esto significa que la expresión se transformaría en $\sum_{e \in E} H_e^k t_e = \text{tsp}^k$). En cambio, cuando decide no pagar,

la expresión 4.8 en su lado derecho alcanza el valor cero, mientras que la 4.9, el valor M , por lo tanto, el pasajero oportunista podrá seguir cualquier ruta que contemple un tiempo de viaje dentro del intervalo $[0, M]$, dando libertad de elección en cuanto a su ruta.

Por lo tanto, considerando que el pasajero oportunista buscará disminuir su costo esperado visualizando las probabilidades de ser inspeccionado es que se propone el siguiente problema P_0 a resolver:

$$\min_{H, W, \mathbb{P}} U_k^o = BW_k^o + F(1 - W_k^o)\mathbb{P}_k^o \quad (4.1)$$

s.t.:

$$\mathbb{P}_k^o = 1 - \prod_{e \in E} (1 - \mathbb{P}_e)^{H_e^k} \quad \forall k \in K \quad (4.3)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} H_e^k - \sum_{e \in \delta^-(v)} H_e^k = 0 \quad \forall v \in V, v \neq v_k^+, v_k^- \quad (4.4)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v_k^+)} H_e^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{e \in \delta^-(v_k^-)} H_e^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.6)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \leq \theta \text{tsp}^k \quad \forall k \in K \quad (4.7)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \geq \text{tsp}^k W_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.8)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \leq \text{tsp}^k W_k^o + M(1 - W_k^o) \quad \forall k \in K \quad (4.9)$$

$$H_e^k \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, k \in K \quad (4.10)$$

$$U_k^o \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.11)$$

$$W_k^o \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \quad (4.12)$$

$$\mathbb{P}_k^o \in [0, 1] \quad \forall k \in K \quad (4.13)$$

En donde las restricciones adicionales 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13 son de naturaleza de las variables.

Por lo tanto, P_0 corresponde al problema original, sin realizar ninguna revisión de su condición matemática que lleve a su resolución.

En la siguiente sección se presentarán alternativas de resolución del problema planteado.

4.3. Enfoques de Solución para el Problema del Follower

La presente sección establece alternativas para el problema del Follower P_0 , teniendo en consideración la estructura matemática del problema original y sus procedimientos de resolución.

La resolución del problema del follower o pasajero evasor en sí mismo tal como se ha revisado es un problema difícil de resolver, que dependerá de las probabilidades de inspección establecidas por la autoridad fiscalizadora en cada uno de los arcos $e \in E$. Antes de resolverlo se debe tener en cuenta que el problema de optimización es no lineal en la medida de que la función objetivo tiene un producto de variables (una continua por una binaria):

$$U_k^o = \mathbb{E}(\mu_k^o) = BW_k^o + F(1 - W_k^o)\mathbb{P}_k^o \quad (4.14)$$

$$U_k^o = \mathbb{E}(\mu_k^o) = BW_k^o + F\mathbb{P}_k^o - FW_k^o\mathbb{P}_k^o \quad (4.15)$$

Por otra parte una de sus restricciones contemple una productoria de valores elevados por una variable binaria, cada una independiente de la otra, lo que impone desafíos para su resolución, debido a que es una función de restricción no cóncava ni convexa (Por estar en igualdad):

$$\mathbb{P}_k^o = 1 - \prod_{e \in E} (1 - \mathbb{P}_e)^{H_e^k} \quad \forall k \in K \quad (4.3)$$

Así, el problema P_0 es un Mixed-Integer Nonlinear Problem (MINLP), en donde la función objetivo es no lineal y la función de restricción 4.3 no es cóncava ni convexa.

Por lo tanto, el primer paso a efectuar corresponde a la linealización de dichas expresiones, con el objetivo de poder resolver el problema con una menor cantidad de recursos y logrando resultados razonables y muy cercanos al problema original.

4.3.1. Problema P_1

Sea $Z = \mathbb{P}_k^o W_k^o$, donde $\mathbb{P}_k^o$ corresponde a una variable del tipo continua comprendida en el intervalo $[0, 1]$ y W_k^o una variable binaria en $\{0, 1\}$, se establece de acuerdo a [Coelho \(2013\)](#):

$$Z = W_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.16)$$

$$Z \leq \mathbb{P}_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.17)$$

$$Z \geq \mathbb{P}_k^o - (1 - W_k^o) \quad \forall k \in K \quad (4.18)$$

$$Z \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.19)$$

Que corresponden a las expresiones a incluir como restricciones para que la nueva variable creada pueda ser incluida en la función objetivo, en reemplazo del producto entre ambas variables.

Proponiendo el siguiente problema P_1 :

$$\min_{H, W, \mathbb{P}} BW_k^o + F W_k^o - FZ \quad (4.20)$$

s.t:

$$\mathbb{P}_k^o = 1 - \prod_{e \in E} (1 - \mathbb{P}_e)^{H_e^k} \quad \forall k \in K \quad (4.3)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} H_e^k - \sum_{e \in \delta^-(v)} H_e^k = 0 \quad \forall v \in V, v \neq v_k^+, v_k^- \quad (4.4)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v_k^+)} H_e^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{e \in \delta^-(v_k^-)} H_e^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.6)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \leq \theta \text{tsp}^k \quad \forall k \in K \quad (4.7)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \geq \text{tsp}^k W_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.8)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \leq \text{tsp}^k W_k^o + M(1 - W_k^o) \quad \forall k \in K \quad (4.9)$$

$$Z = W_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.16)$$

$$Z \leq \mathbb{P}_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.17)$$

$$Z \geq \mathbb{P}_k^o - (1 - W_k^o) \quad \forall k \in K \quad (4.18)$$

$$Z \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.19)$$

$$H_e^k \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, k \in K \quad (4.10)$$

$$U_k^o \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.11)$$

$$W_k^o \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \quad (4.12)$$

$$\mathbb{P}_k^o \in [0, 1] \quad \forall k \in K \quad (4.13)$$

Que corresponde a un problema linealizado en su función objetivo, pero que sigue siendo un MINLP porque la restricción 4.3 es no cóncava ni convexa. De todas formas, es posible resolverlo a través de algún Solver Global para problemas no convexos, como lo es KNITRO.

4.3.2. Problema P_2

Respecto a la segunda función no convexa ni cóncava 4.3, se concuerda en realizar el modelamiento de forma directa para visualizar comportamiento de los Solver, y posteriormente, en caso de ser necesario,

implementar la siguiente propuesta:

$$y_k \leq \prod_{e \in E} (1 - \mathbb{P}_e)^{H_e^k} \quad \forall k \in K \quad (4.21)$$

$$\ln(y_k) \leq \sum_{e \in E} H_e^k \ln(1 - \mathbb{P}_e) \quad \forall k \in K \quad (4.22)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k \ln(1 - \mathbb{P}_e) - \ln(y_k) \leq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.23)$$

En donde y_k corresponde a una variable auxiliar que permite simplificar el proceso de convexificación de la restricción en su totalidad.

La restricción final 4.23 posee el primer término que es lineal en H_e^k , mientras que el segundo es convexo, debido a que como $\ln(y_k)$ es cóncava, la función $-\ln(y_k)$ se hace convexa.

Finalmente, se hace necesario en caso de utilizar la expresión anterior, incluir en las restricciones la siguiente expresión:

$$\mathbb{P}_k^o = 1 - y_k \quad \forall k \in K \quad (4.24)$$

En donde se indica la relación de entre las variables que formarían parte del modelo de programación.

Con lo anterior se obtiene el siguiente modelo P_2 :

$$\min_{H, W, \mathbb{P}} BW_k^o + FW_k^o - FZ \quad (4.20)$$

s.t.:

$$\mathbb{P}_k^o = 1 - y_k \quad \forall k \in K \quad (4.24)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k \ln(1 - \mathbb{P}_e) - \ln(y_k) \leq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.23)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} H_e^k - \sum_{e \in \delta^-(v)} H_e^k = 0 \quad \forall v \in V, v \neq v_k^+, v_k^- \quad (4.4)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v_k^+)} H_e^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{e \in \delta^-(v_k^-)} H_e^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.6)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \leq \theta \text{tsp}^k \quad \forall k \in K \quad (4.7)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \geq \text{tsp}^k W_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.8)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \leq \text{tsp}^k W_k^o + M(1 - W_k^o) \quad \forall k \in K \quad (4.9)$$

$$Z = W_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.16)$$

$$Z \leq \mathbb{P}_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.17)$$

$$Z \geq \mathbb{P}_k^o - (1 - W_k^o) \quad \forall k \in K \quad (4.18)$$

$$Z \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.19)$$

$$H_e^k \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, k \in K \quad (4.10)$$

$$U_k^o \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.11)$$

$$W_k^o \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \quad (4.12)$$

$$\mathbb{P}_k^o \in [0, 1] \quad \forall k \in K \quad (4.13)$$

Que si bien es un problema linealizado en la función objetivo 4.20, para efectos de la segunda función de restricción en desigualdad 4.23, debido a que se está en presencia de un problema de minimización, debe ser considerada del tipo mayor o igual, lo que la transforma en una función del tipo cóncava y aún siendo clasificado como un MINLP. Por lo tanto, cualquier algoritmo de solución no va a garantizar un óptimo global para el problema P_2 .

4.3.3. Problema P_3

Debido a que la resolución de un MINLP no convexo, es más difícil que un MILP (Mixed Integer Linear Problem), en esta sección se considera la siguiente relación inicial para la función de restricción del tipo no convexa ni cóncava 4.3:

$$\mathbb{P}_k^o = 1 - \prod_{e \in E} (1 - \mathbb{P}_e)^{H_e^k} \leq \sum_{e \in E} H_e^k \mathbb{P}_e \quad \forall k \in K \quad (4.25)$$

Y realizando una aproximación lineal se propone establecer la siguiente igualdad:

$$1 - \prod_{e \in E} (1 - \mathbb{P}_e)^{H_e^k} = \sum_{e \in E} H_e^k \mathbb{P}_e \quad \forall k \in K \quad (4.26)$$

Lo que finalmente lleva a la siguiente restricción para el problema del Follower:

$$\mathbb{P}_k^o = \sum_{e \in E} H_e^k \mathbb{P}_e \quad \forall k \in K \quad (4.27)$$

Lo que finalmente lleva a proponer el siguiente problema P_3 :

$$\min_{H, W, \mathbb{P}} BW_k^o + FW_k^o - FZ \quad (4.20)$$

s.t.:

$$\mathbb{P}_k^o = \sum_{e \in E} H_e^k \mathbb{P}_e \quad \forall k \in K \quad (4.27)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} H_e^k - \sum_{e \in \delta^-(v)} H_e^k = 0 \quad \forall v \in V, v \neq v_k^+, v_k^- \quad (4.4)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v_k^+)} H_e^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{e \in \delta^-(v_k^-)} H_e^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.6)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \leq \theta \text{tsp}^k \quad \forall k \in K \quad (4.7)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \geq \text{tsp}^k W_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.8)$$

$$\sum_{e \in E} H_e^k t_e \leq \text{tsp}^k W_k^o + M(1 - W_k^o) \quad \forall k \in K \quad (4.9)$$

$$Z = W_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.16)$$

$$Z \leq \mathbb{P}_k^o \quad \forall k \in K \quad (4.17)$$

$$Z \geq \mathbb{P}_k^o - (1 - W_k^o) \quad \forall k \in K \quad (4.18)$$

$$Z \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.19)$$

$$H_e^k \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, k \in K \quad (4.10)$$

$$U_k^o \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (4.11)$$

$$W_k^o \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \quad (4.12)$$

$$\mathbb{P}_k^o \in [0, 1] \quad \forall k \in K \quad (4.13)$$

En donde se ha incorporado la restricción 4.27 en reemplazo de la 4.3 logrando con este cambio proponer una aproximación lineal que establece un problema P_3 a resolver del tipo Lineal, siendo clasificado como un Mixed-Integer Linear Problem (MILP).

4.3.4. Comentarios Finales de los Modelos Propuestos

En primer lugar, destacar que el modelo a resolver debe ser capaz de representar las decisiones del pasajero evasor (oportunisto), dadas las probabilidades de inspección en cada uno de los arcos de la red. Por lo tanto, debe ser sometido a pruebas de funcionamiento en búsqueda de que la respuesta sea consistente con la condición de un pasajero que busca minimizar su costo esperado de viaje, buscando al mismo tiempo

llegar a su destino.

En primer lugar, estas decisiones son sustentadas por restricciones de flujo, asemejando un Shortest Path Problem, luego con restricciones de tiempo en la red, junto con las que permiten que seleccione la ruta mínima cuando pague el pasaje. Finalmente, se añade en el modelo la probabilidad de inspección $\mathbb{P}_k^o$ como una variable propia del mismo que es condicionada por las probabilidades que la componen los arcos por los que transitará según ha quedado confirmado en las restricciones de los cuatro problemas propuestos.

En resumen, bajo cualquier modelo el pasajero deberá planificar su ruta considerando tres factores; la ruta escogida, esto es cada uno de los arcos que utilizará para llegar a su destino, la probabilidad de ser inspeccionado en toda la ruta, originada desde la productoria de todas las probabilidades de inspección en los arcos $e \in E$, y finalmente la decisión de pagar o no el pasaje o ticket de acuerdo a las probabilidades de inspección y a las posibles rutas que puede seguir. Resultaría lógico que un pasajero decida pagar o no una vez realizado un análisis de todas las posibles rutas alternativas, en búsqueda de disminuir su costo esperado en base a aquella decisión.

Respecto a los cuatro modelos propuestos, en primer lugar se puede mencionar que el problema P_0 es un problema del tipo no lineal y no convexo (MINLP), por lo que, siendo la base de la propuesta, no sería posible considerarlo para las pruebas computacionales a realizar. Por su parte, el problema P_1 , habiendo realizado la linealización de la función objetivo, si bien debido a su restricción 4.3 es un problema no convexo aún (MINLP), ya puede ser llevado a un análisis computacional a través de Solver Globales del tipo no convexo, como lo es KNITRO. Respecto al problema P_2 , debido a la naturaleza Cóncava de la restricción 4.23 no es posible asegurar que el valor de la función objetivo a obtener sea un óptimo global, por lo que su uso queda limitado sólo a su análisis teórico realizado en su sección correspondiente (Problema MINLP). Finalmente, si bien el problema P_3 es sólo una aproximación de una relación matemática entre una productoria y una suma, es candidato a ser llevado a un análisis computacional debido a la condición de problema lineal y convexo en que se transforma, para verificar la eficiencia con respecto a otros tipos de problemas más exactos.

Tabla 4.1: Resumen de Problemas del Follower Propuestos

Problema	Función Objetivo	Funciones de Restricciones	Tipo de Problema
P_0	No Lineal	No Convexa	MINLP
P_1	Lineal	No Convexa	MINLP
P_2	Lineal	Cóncava	MINLP
P_3	Lineal	Convexa	MILP

Nota: Elaboración propia

La tabla 4.1 hace un resumen de los tipos de modelos propuestos en este capítulo. Debido a la necesidad de encontrar soluciones óptimas es que se realizarán pruebas computacionales sólo con los modelos P_1 y P_3 . Buscando en el caso del primero definir los tiempos computacionales, así como su valor óptimo, y para el segundo, establecer su eficiencia en relación a las soluciones propuestas en el primer caso, verificando que las decisiones de evadir o no hacerlo sean las mismas (Variable W_k^o). Lo anterior con el objetivo de lograr proponerlo como una alternativa viable hacia la propuesta en el problema Bilevel del que podría formar parte.

La siguiente sección presentará las pruebas computacionales efectuadas en los modelos indicados, basándose en redes preestablecidas.

5 | Experimentos Computacionales

Este capítulo considera la ejecución de distintos experimentos computacionales utilizando el Lenguaje de Programación AMPL, en un computador personal con procesador Intel(R) Core(TM) i7-7500U CPU 2.70GHz 2.90GHz, Memoria RAM 16GB y sistema operativo 64 bits Windows 10 Pro.

Dichos experimentos serán ejecutados usando los modelos P_1 y P_3 definidos en el capítulo anterior, buscando analizar y comparar los resultados obtenidos, y que el segundo problema sea candidato a ser incorporado en un problema Bilevel.

5.1. Experimento 1: Modelo Ficticio

La presente sección presentará un modelo ficticio que permitirá realizar pruebas en los problemas P_1 y P_3 del modelo del Follower, y además, entregará los primeros resultados que lograrán confirmar el buen funcionamiento del mismo.

La prueba consiste en la resolución del problema del Follower, en donde se busca comprender el comportamiento del pasajero con respecto a las probabilidades de ser inspeccionado. Para ello se ha creado una red ficticia, en donde se definen los tiempos entre los nodos de forma arbitraria, así como sus probabilidades de inspección de forma aleatoria.

La prueba se realiza en tamaños de instancias de 150, 175, 200, 225 y 250 nodos (Ver tabla 5.1) con 20 escenarios. Cada uno con probabilidades $\mathbb{P}_e$ distintas y aleatorias, representando un grafo dirigido en todos los casos en el que el nodo de inicio es el número 1 y el de destino es el 50.

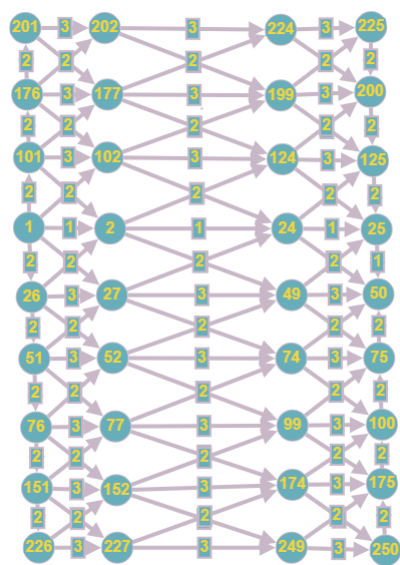
Tabla 5.1: Instancias de Problema Ficticio

Instancia	Cantidad de Nodos de la Red
A	150
B	175
C	200
D	225
E	250

Nota: Elaboración propia

La figura 5.1 muestra la red, en donde cada una de las líneas rectas representa una línea unidireccional, la que está comunicada con el resto a través de nodos cruzados, que asemejan una red con una gran cantidad de alternativa de rutas. Por lo tanto, cada una de las líneas contiene un total de 25 nodos, enumerados de forma secuencial, y que cumplen con los mismos patrones indicados al inicio y fin de la figura representativa.

Figura 5.1: Red Ficticia



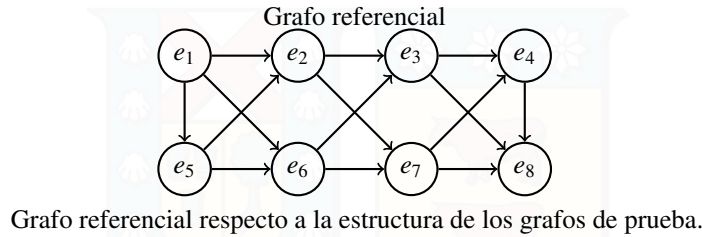
Nota: Se detallan los nodos y arcos de la red completa propuesta para efectos de pruebas computacionales.

Notar que cada línea posee 25 nodos enumerados secuencialmente. (Elaboración propia).

De forma análoga, tal como se puede apreciar en la red de ejemplo de la figura 5.2, y asumiendo que el inicio del viaje por la red se realiza en e_1 y finaliza en e_8 se generan los arcos indicados en la misma red,

de tal forma que el usuario puede escoger entre múltiples rutas, dadas por la combinación entre los distintos nodos de la red y sus respectivos arcos. Finalmente, se induce a que la ruta mínima se realice en la secuencia $e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_8$ introduciendo los valores mínimos de t_e en cada uno de los arcos involucrados.

Figura 5.2: Red de Ejemplo



Esta red, para su funcionamiento debe considerar parámetros de entrada, los que se detallan en la tabla 5.2.

Tabla 5.2: Parámetros de Red Propuesta

Parámetro	Valor
B	1,5
F	75
θ	3
M	$\sum_{e \in E} t_e$
t_e	Arbitrario según red
tsp^k	Según resolución de Shortest Path Problem de red
$\mathbb{P}_e$	Deben cumplir $\sum_{e \in E} \mathbb{P}_e = n$
Nota: Elaboración propia	

Siendo los primeros dos parámetros de la tabla 5.2 fundamentalmente económicos y que están muy relacionados con los niveles de probabilidad de inspección que podrá establecer la red. Por su parte, el parámetro θ es un factor que permitirá limitar la decisión del desvío máximo del pasajero evasor. M es un número muy grande, tal que permita generar una cota superior en la restricción de la que forma parte para dar alternativas de elección al pasajero evasor. Su valor está condicionado como mínimo a la sumatoria de los tiempos de viaje de todos los arcos de la red (Propuesto para este modelo). Los tiempos de viaje entre nodos t_e son arbitrarios. Respecto al tiempo de ruta mínima tsp^k será el primer valor a confirmar previo al funcionamiento del problema del Follower. Finalmente, la probabilidad de ser inspeccionado en cada arco de la red $\mathbb{P}_e$, si bien se considera aleatoria, debe pasar en una primera instancia por un proceso de normalización,

de modo de que la sumatoria de todos ellos, independiente de la cantidad de arcos en la red sea igual al número de inspectores n (Que para efectos de las presentes pruebas se considera 1) por medio de la siguiente relación matemática:

$$\mathbb{P}_e = \frac{\mathbb{P}_e^A}{\sum_{e \in E} \mathbb{P}_e^A} \quad \forall e \in E \quad (5.1)$$

En donde el parámetro adicional $\mathbb{P}_e^A$ corresponde a valores dentro del intervalo $[0, 1]$ por cada arco que originalmente se obtienen de forma aleatoria desde algún tipo de máquina generadora de valores de esta naturaleza (Ver Apéndice A). La expresión indicada hace referencia a que dividiendo cada uno de dichos valores por la sumatoria de ellos permite normalizar y obtener valores que entregan la relación impuesta en el presente problema. Se debe destacar que esta obtención de parámetros es utilizada sólo para efectos de prueba, debido a que estas probabilidades son impuestas por la autoridad en el problema principal o del Líder, previo a la resolución del problema del Follower o Seguidor.

5.1.1. Shortest Path Problem

5.1.1.1. Formulación

La ruta mínima de la red ficticia propuesta debe ser obtenida y confirmada, para así poder proceder a obtener el valor del parámetro tsp^k en el problema del Follower.

Por lo anterior, se hace necesario, considerando las mismas variables del modelo propuesto generar diversas instancias que permitan resolver el siguiente subproblema del Follower para cada pasajero de tipo k (Ver Apéndice B):

$$\min_H \sum_{e \in E} t_e H_e^k$$

s.t:

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in \delta^+(v)} H_e^k - \sum_{e \in \delta^-(v)} H_e^k &= 0 & \forall v \in V, v \neq v_k^+, v_k^- \\
 \sum_{e \in \delta^+(v_k^+)} H_e^k &= 1 \\
 \sum_{e \in \delta^-(v_k^-)} H_e^k &= 1 \\
 H_e^k &\in \{0, 1\} & \forall e \in E,
 \end{aligned}$$

que permite obtener la ruta mínima de acuerdo a los parámetros de tiempo t_e impuestos en la instancia.

Se debe tener en consideración que este problema es común tanto para el problema P_1 como el P_3 .

5.1.1.2. Resolución

Siendo el problema de ruta mínima (SPP) del tipo Lineal, se utiliza el Solver CPLEX para su resolución, obteniéndose los resultados indicados en la tabla 5.3, en donde es posible constatar que en todos ellos el tsp^k es de 25 unidades de tiempo, realizando la ruta mínima en cada caso, la que es común para cada una de las cinco instancias.

Tabla 5.3: Resultados SPP en Cinco Instancias

Instancia	tsp^k	CPU Time (s)
A	25	0,015625
B	25	0,015625
C	25	0,015625
D	25	0,015625
E	25	0,015625
Nota: Elaboración propia		

En cuanto a los tiempos computacionales, no existen diferencias entre las distintas instancias, y además, los costos computacionales son reducidos y permiten considerar que en instancias mayores la situación podría no aumentar de forma tan importante.

5.1.2. Problema del Follower

Teniendo en consideración los parámetros establecidos en la tabla 5.1 y 5.3, a continuación se realizará la implementación computacional utilizando los modelos P_1 y P_3 . En primer lugar, para la resolución de los problemas indicados, en la tabla 5.4 se pueden verificar los Solver Globales utilizados en cada caso según el tipo de problema que se enfrenta según la tabla 4.1.

Tabla 5.4: Definición de Solver

Problema	Solver
P_1	KNITRO
P_3	CPLEX
Nota: Elaboración propia	

Los resultados obtenidos en las cinco diferentes instancias pueden ser revisados en las tablas C.1, C.2, C.3, C.4, C.5, en Apéndice C.

En relación a los resultados, los tiempos computacionales promedio se muestran en la tabla 5.5, en donde es posible notar la diferencia sustancial de tiempos computacionales en cuanto al uso de Cplex respecto a Knitro, en donde el primero, en cada una de las cinco instancias, representa un porcentaje muy bajo, promediando un 1,44 % entre todas ellas.

Tabla 5.5: CPU Time de Experimentos Computacionales

Problema	Solver	CPU Time Promedio (s)				
		A	B	C	D	E
P_1	Knitro	3,3711	4,3570	6,2445	7,6914	16,5183
P_3	Cplex	0,0734	0,0844	0,0844	0,0906	0,0922
	Δ_t (%)	4490,43 %	5063,89 %	7300,93 %	8387,07 %	17818,12 %

Nota: CPU Time por problema e instancia.

Donde $\Delta_t = \frac{t_{Knitro} - t_{Cplex}}{t_{Cplex}} * 100$, representa la diferencia porcentual de los tiempos computacionales (CPU Time) de ambos Solver, con respecto al tiempo de CPLEX.

Respecto a los resultados de las distintas instancias, en primer lugar, comenzando con la A (Ver tabla

C.1 en Apéndice C), con una cantidad de 150 nodos y 394 arcos en la red, a los que se asignan los valores de probabilidad en cada uno de los arcos $e \in E$. Se puede verificar que en ningún caso el pasajero ha decidido no pagar el pasaje, considerando que en todos los escenarios W_k^o tuvo un valor de 1, en los problemas P_1 y P_3 . Esta situación se produce debido a que no existe una combinación de arcos tal que sean capaces de generar una probabilidad $\mathbb{P}_k^o$ inferior a la relación $\frac{B}{F}$, que en este caso representa un valor de 0,002 o un 2 %, siendo este valor bajo el que el pasajero puede decidir evadir, debido a que de esta forma el costo esperado a pagar evadiendo sería inferior al valor de B, que en este caso es 1,5, situación que se identifica en los dos problemas implementados. Una diferencia significativa entre los problemas implementados es que en el caso de P_1 , al momento de decidir pagar la tarifa, de igual forma se indica la probabilidad de inspección alcanzada $\mathbb{P}_k^o$ dada la ruta seleccionada, que resulta ser la ruta mínima. Mientras en el caso de P_3 se hace referencia a un valor de 1, que si bien puede parecer incorrecto, para efectos informativos no resta de información al problema, debido a que si paga, de todas formas dicha probabilidad pasa a ser una variable irrelevante, ya que siempre el pasajero pagará 1,5, independiente si es fiscalizado o no. Finalmente, los costos computacionales del uso del Solver KNITRO para el problema P_1 son 45,9 veces los del problema P_3 con Solver CPLEX.

La instancia B (Ver tabla C.2 en Apéndice C), con una cantidad de 175 nodos y 468 arcos en la red, muestra resultados muy similares entre los dos problemas, en donde es posible verificar que al momento de decidir no pagar, siempre el problema P_3 representa una cota superior, entregando un costo esperado para el pasajero un 0,86 % más en promedio entre los 12 escenarios en los que se ha decidido no pagar en ambos problemas. La efectividad del modelo P_3 es de un 95 %, considerando que en 19 de los 20 escenarios acertó respecto a la decisión tomada en P_1 teniendo en cuenta de que sólo en un escenario la decisión de evasión es distinta en esta instancia en particular. Finalmente, los costos computacionales del uso del Solver KNITRO para el problema P_1 son 51,63 veces los del problema P_3 con Solver CPLEX.

En la instancia C (Ver tabla C.3 en Apéndice C), con una cantidad de 200 nodos y 542 arcos en la red, es posible notar, en primer lugar que en el 95 % de los casos decide evadir, y sólo en un 5 % decide pagar la tarifa. Esto es debido en primer lugar a que las probabilidades asignadas para $\mathbb{P}_e$ resultan menores, dada la expresión impuesta en la relación matemática 5.1 para este parámetro. Por otra parte, ya en este caso no existen diferencias en la decisión del pasajero en los 20 escenarios establecidos, existiendo nuevamente una diferencia en el costo esperado obtenido de un 0,74 % superior en el problema P_3 con respecto al P_1 , pero con una efectividad del 100 % en cuanto a los aciertos que entregó este último, lo que está condicionado por la diferencia en aquel mismo porcentaje en la probabilidad $\mathbb{P}_k^o$, que permite que, al evadir el pasaje, se pueda tener un costo esperado inferior al valor de B de 1,5, pero claramente teniendo tiempos de viaje producto del desvío superior al doble del tiempo de ruta mínima (25 unidades de tiempo) Finalmente, los costos

computacionales del uso del Solver KNITRO para el problema P_1 son 74 veces los del problema P_3 con Solver CPLEX.

Con respecto a la instancia D (Ver tabla C.4 en Apéndice C), con una cantidad de 225 nodos y 616 arcos en la red, muestra a la totalidad de los escenarios con la decisión de evadir, en ambos problemas, influenciado por las bajas probabilidades asignadas dada la mayor cantidad de arcos en la red; esto notando que las probabilidades de inspección $\mathbb{P}_k^o$ encontradas en la resolución de los problemas estuvieron cercanas al 1,5 % de probabilidades y manteniendo respecto a la instancia C tiempos de viaje producto del desvío superiores al doble del de la ruta mínima. Con respecto a los costos esperados, se puede verificar nuevamente que son en promedio un 0,72 % superiores los obtenidos en el P_3 respecto al P_1 , pero coincidiendo ambos en el 100 % de los escenarios. Finalmente, los costos computacionales del uso del Solver KNITRO para el problema P_1 son 84,87 veces los del problema P_3 con Solver CPLEX.

Como última instancia, se tiene la E (Ver tabla C.5 en Apéndice C), con una cantidad de 250 nodos y 690 arcos en la red, muestra a la totalidad de los escenarios con la decisión de evadir, al igual que en la instancia E, con probabilidades de inspección $\mathbb{P}_k^o$ más cercanas en promedio a un 1,3 % y con costos esperados un 0,62 % superiores en los resultados del problema P_3 con respecto los del P_1 pero con coincidencia en la decisión de evadir en el 100 % de los escenarios. Finalmente, los tiempos computacionales del uso del Solver KNITRO para el problema P_1 son 179,18 veces los del problema P_3 con Solver CPLEX.

El análisis anterior puede revisarse comparativamente entre instancias en la tabla 5.6.

Tabla 5.6: Tabla de Resumen de Resultados en Implementaciones de Red Ficticia

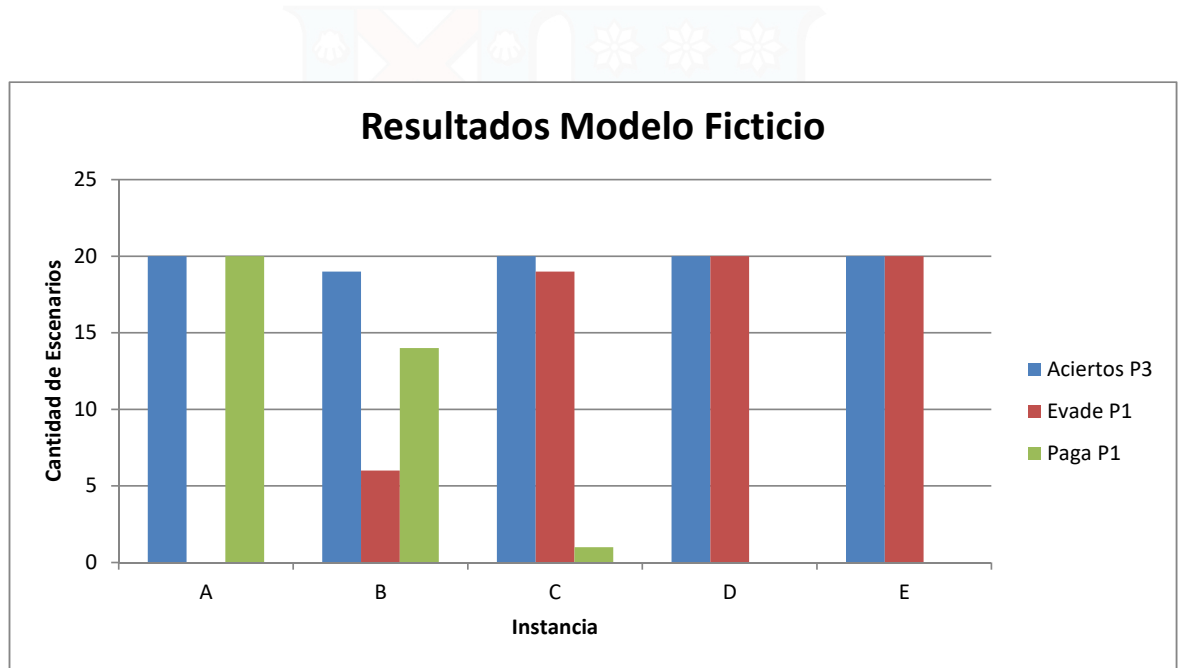
Instancia	Nodos	Arcos	Escenarios Paga P_1	Escenarios Evade P_1	Decisión $P_1=P_3$	Diferencia Costos Esperados (%)	CPU Time P_1 respecto a P_3
A	150	394	20	0	20	0,00	45,90
B	175	468	8	12	19	0,86	51,63
C	200	542	1	19	20	0,74	74,00
D	225	616	0	20	20	0,72	84,87
E	250	690	0	20	20	0,62	179,18

Nota: Tabla resumen de principales resultados descritos de implementación de Red Ficticia

En definitiva, con los resultados de las 5 instancias es posible establecer que el problema P_3 es un problema que puede ser utilizado como alternativa de resolución respecto al P_1 , en relación a reducir los tiempos computacionales, y al mismo tiempo, tener resultados razonablemente cercanos al óptimo global del modelo. El gráfico 5.3 reafirma los resultados en cuanto a aciertos entre ambos problemas, así como los comportamientos de decisión de evasión en el problema P_1 . En él se puede identificar que sólo existió un escenario en el que la decisión de evadir fue distinta entre ambos modelos, además, se destaca que al

aumentar el número de arcos de la red, las decisiones de evadir aumentaron de forma directa.

Figura 5.3: Gráfico de Resultados Modelo Ficticio



Nota: Se presentan los resultados de aciertos del modelo P_3 en relación al P_1 , así como las decisiones del pasajero por instancia. Elaboración Propia.

5.2. Experimento 2: Implementación en Metro de Montreal

La presente sección presentará un modelo real a implementar para experimentar con los problemas P_1 y P_3 del modelo del Follower propuesto, ya teniendo claro el comportamiento de este en un problema creado y controlado en la sección anterior.

Se modela el metro de Montreal en Canadá, que tiene un total de 68 estaciones, que representan los nodos de la red, con 4 líneas de colores distintos y 73 arcos, quienes permiten completar el circuito de la misma, tal como se puede apreciar en la figura 5.4.

Figura 5.4: Metro de Montreal



Nota: Se presenta el Metro de Montreal, en donde se realizará una prueba de una ruta, que considera alternativas de viaje.

Los tiempos de viaje fueron definidos considerando información real del viaje entre estaciones. De igual forma, a cada una de las estaciones les corresponde un número referencial de nodo.

Los experimentos consisten en modelar el comportamiento bajo 20 escenarios distintos para un pasajero que se traslada desde la estación Angrignon (1) hasta la Montmorency (68). Este viaje puede ser realizado de tres formas distintas, lo que permite entregar alternativas frente a las distintas probabilidades asignadas de forma aleatoria a cada uno de los arcos de la red.

Al igual que en el modelo ficticio, la resolución comienza con la definición del Shortest Path Problem para obtener el parámetro tsp^k . Y en relación a los parámetros se consideran los mismos que en la tabla

5.2.

5.2.1. Shortest Path Problem

La primera decisión a tomar por cualquier pasajero $k \in K$ corresponde al cálculo de su ruta mínima. Tal como ya fue descrito, en este caso el pasajero para efectos de análisis es uno que se trasladará desde el nodo 1 al 68.

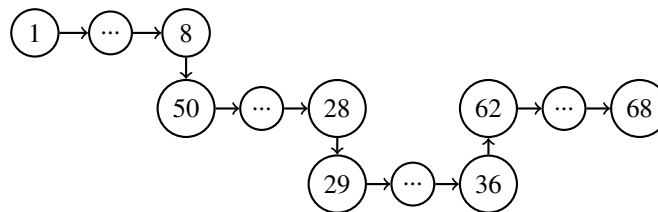
Haciendo uso de Solver CPLEX, se obtienen los resultados que se indican en la siguiente tabla (5.7):

Tabla 5.7: Resultado SPP en Instancia única

Red	tsp^k	CPU Time (s)
Metro Montreal	39,005	0,015625
Nota: Elaboración propia		

Dados los parámetros establecidos para $t_e \quad \forall e \in E$, se obtiene un tsp^k de 39,005 unidades de tiempo, las que representan un viaje que inicia en la estación Angrignon (1), que luego hace combinación en Lionel-Groulx (8) hacia la línea naranja, para continuar hasta la estación Snowdon (28), combinando con línea azul hasta alcanzar Jean-Talon (36), en donde se hace uso de la línea naranja nuevamente para alcanzar la estación terminal Montmorency (68), completando el viaje (Ver figura 5.5). Con respecto al viaje, cabe destacar que el modelo no tiene considerado los tiempos de combinación, lo que podría cambiar las decisiones de la ruta en caso de considerarlo. De todas formas, se considera una aproximación razonable para una red real.

Figura 5.5: Grafo de Montreal con Solución



Grafo de Montreal con solución para el problema de la ruta mínima. Cada cambio de nivel representa una combinación de línea en la red de metro.

5.2.2. Problema del Follower

Una vez definida la ruta mínima de la red se procede a la implementación del problema del Follower en la red, con las condiciones ya establecidas en las secciones anteriores. Los Solver a utilizar se encuentran en la tabla 5.4.

Se debe considerar que las 3 instancias se diferencian entre sí por la variación del valor de la multa F , según la tabla 5.8. En este caso, la red no tiene un cambio en su tamaño (Número de Arcos).

Tabla 5.8: Valor de Multa F Aplicado a Cada Instancia

Instancia	F
F	75
G	5
H	4

Nota: Elaboración propia

Por temas de evitar duplicidad de denominaciones, estas consideran las instancias ya identificadas en el modelo ficticio.

En primer lugar, los tiempos computacionales de la resolución de estos problemas se pueden verificar en la tabla 5.9.

Tabla 5.9: CPU Time de Experimentos Computacionales

Problema	Solver	CPU Time Promedio (s)		
		F	G	H
P_1	Knitro	0,0695	0,0711	0,0672
P_3	Cplex	0,0195	0,0172	0,0242
	$\Delta_f(\%)$	256,00 %	313,64 %	177,42 %

Nota: CPU Time por problema e instancia.

Las diferencias fluctúan entre un 177 % y 313 % respecto al tiempo computacional de implementación que considera el uso de P_3 con Solver CPLEX.

En la instancia F, que es la que considera los parámetros originales del problema indicados en la tabla

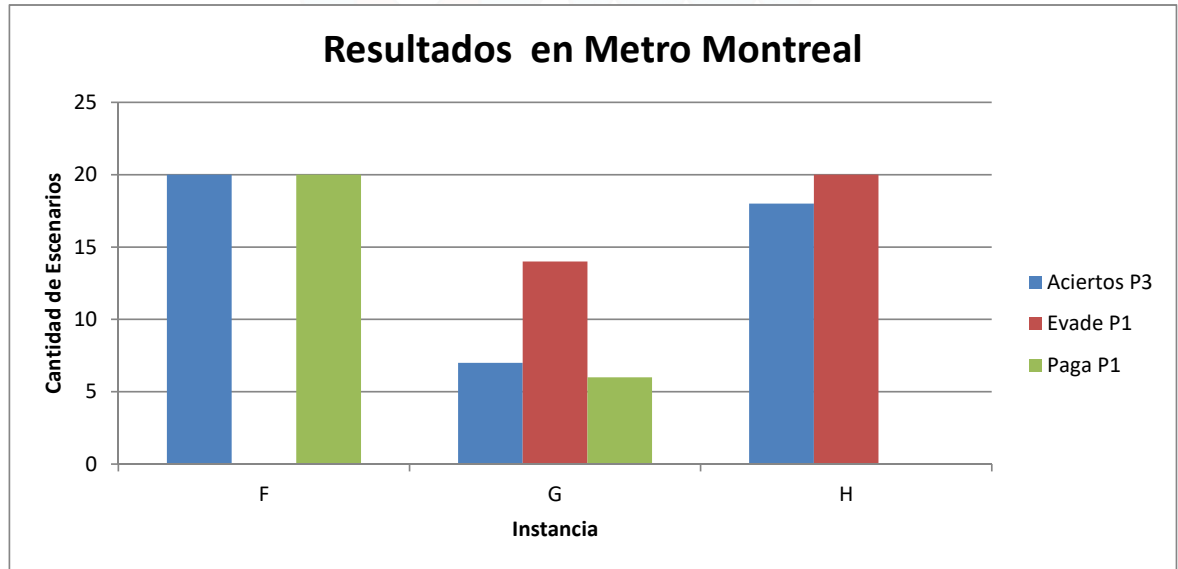
5.2, se puede apreciar que en ambos tipos de problema en todos los casos el pasajero decide pagar la tarifa B de 1,5, teniendo en cuenta que el porcentaje de evasión debiera ser inferior a la relación $\frac{B}{F}$ que es de un 2 %. En promedio, dada la cantidad de arcos en la red, la probabilidad de inspección $\mathbb{P}_k^o$ está en un promedio de 30,49 % entre las 20 instancias, tal como se puede ver en la tabla D.1 en el Apéndice D, puntualmente en el resultado obtenido en el problema P_1 . Debido a la gran diferencia entre la probabilidad $\mathbb{P}_k^o$ mínima a obtener en cada escenario y el 2 % mínimo, es que el problema P_3 tiene un acierto del 100 % respecto al obtenido en el P_1 .

Por motivo de que los resultados obtenidos en la instancia F son iguales en ambos tipos de problema, se propone realizar 2 pruebas adicionales, considerando el hecho de aumentar el valor de la relación $\frac{B}{F}$ para que esta pueda acercarse al valor crítico entorno al 30,49 % referenciado en el párrafo anterior. Por ello, las instancias G y H utilizan valores de F de 5 y 4 respectivamente, lo que les entrega un valor de relación de $\frac{B}{F}$ del 30 % y 37,5 % en cada caso.

Respecto a la instancia G, tal como puede verificarse en la tabla D.2 en el Apéndice D, la cantidad de aciertos del problema P_3 con respecto al P_1 son un total de 7, lo que representa un 35 % de los escenarios totales del experimento. Haciendo un análisis, considerando el escenario 12, en donde en ambos problemas el pasajero ha decidido no pagar ($W_K^o = 0$), se puede decir que la probabilidad $\mathbb{P}_k^o$ en el problema P_3 ha resultado tener una diferencia 13,67 % superior a la obtenida respecto al problema P_1 , bajo la misma ruta seleccionada (La ruta mínima con 39,005 unidades de tiempo), lo que claramente podría ser una diferencia elevada, explicada por la distorsión que genera la restricción en sumatoria que se considera en el problema P_3 , propuesta como aproximación, ante valores más elevados de $\mathbb{P}_k^o$.

En cuanto a la instancia H, revisando la tabla D.3 en el Apéndice D, la cantidad de aciertos del problema P_3 con respecto al P_1 aumentan a un 90 % de los escenarios experimentados. En relación a las diferencias de los valores de probabilidad de inspección $\mathbb{P}_k^o$ entre ambos problemas, se destacan que aumentan en un 17,05 % en promedio en P_3 con respecto al resultado obtenido en el problema P_1 .

Los resultados y análisis de las diferencias entre las distintas instancias puede ser verificado en el gráfico 5.6. En él se puede visualizar que los aciertos del modelo P_3 respecto al P_1 son prácticamente totales al momento de tener instancias en donde las probabilidades de inspección $\mathbb{P}_k^o$ son más distintas a la relación $\frac{B}{F}$, lo que permite de cierta forma realizar ciertas recomendaciones al modelo, en cuanto a que el uso del modelo P_3 debe considerar ciertos análisis en dichos valores y relaciones al momento de obtener resultados, sea cual sea el modelo implementado.

Figura 5.6: Gráfico de Resultados Modelo Aplicado en Metro Montreal

Nota: Se presentan los resultados de aciertos del modelo P_3 en relación al P_1 , así como las decisiones del pasajero por instancia. Elaboración Propia.

Por lo anterior es posible destacar que la aproximación realizada con el problema MILP representado como P_3 , debe ser utilizada teniendo en consideración factores como la probabilidad de inspección generada por la relación $\frac{B}{F}$, y haciendo análisis de iteraciones adicionales con valores alternativos en búsqueda de confirmar la buena respuesta de este modelo. Esto a nivel de resultados y teniendo en cuenta que los tiempos computacionales entregados involucran una gran mejora para el tratamiento de instancias en donde la cantidad de arcos de la red sean mucho mayores a los tratados hasta el momento.

5.3. Prueba Final del Modelo P_3

Una vez revisado el funcionamiento y respuesta del modelo MILP P_3 , es necesario llevarlo a una prueba final relacionada a la relajación de la integrabilidad de las variables de decisión W_k^o y H_e^k .

Para ello, se utilizará la instancia C, que es una de las que acertó en el 100 % de los escenarios con respecto al problema P_1 .

En cuanto a la resolución de ambos problemas, en primer lugar se considera la tabla 5.10, en donde se puede destacar que los tiempos computacionales del problema P_3 , habiendo efectuado la relajación de las variables ya mencionadas, conduce a una diferencia respecto al problema relajado (Denominado P_3^*) del 369,57 %.

Tabla 5.10: CPU Time Problemas P_3

Problema	Solver	CPU Time Promedio (s)
C		
P_3	Cplex	0,0844
P_3^*	Cplex	0,0180
	Δ_t (%)	369,57 %

Nota: CPU Time de problemas lineales P_3

En donde P_3^* corresponde al modelo en el que se eliminó la integrabilidad del modelo original P_3 en las variables W_k^o y H_e^k .

En la tabla E.1 del Apéndice E, se entregan los resultados de los problemas P_3 y P_3^* , que son analizados a continuación.

Al momento de realizar un análisis de los resultados, es posible verificar en primer lugar que la integrabilidad de la variable W_k^o no se cumple, igualándose en cada uno de los 20 escenarios al valor de la variable $\mathbb{P}_k^o$. No obstante lo anterior, en todos los escenarios en los que en el problema original P_3 se decidió no pagar, las probabilidades, así como las rutas coincidieron sin diferencias. Para el caso del escenario 5, en donde el pasajero en el problema original P_3 ha decidido pagar, se puede notar que en el problema sin integrabilidad se define una probabilidad $\mathbb{P}_k^o$ de 2,1 %, lo que claramente se encuentra por sobre el valor de $\frac{B}{F}$, resultando inconsistente desde el punto de vista que al momento de no verificarse la presencia de rutas que sean inferiores a dicha relación, siempre decide pagar.

En cuanto a la integrabilidad de variable H_e^k , esta se mantiene en la totalidad de los 20 escenarios de prueba, correspondiendo a la variable que posee la mayor cantidad de ellas, ya que como es conocido, la variable W_k^o es sólo una por escenario y pasajero.

En resumen, según los resultados obtenidos, si bien estos impiden indicar la mantención de la integrabilidad en la totalidad del problema, es posible identificar que los tiempos computacionales se reducen aún más respecto a los ya disminuidos por la aproximación en el problema original P_3 respecto al P_1 , además de resultar coincidentes los resultados cuando la decisión de evadir se encuentra presente. Y que si bien, en el momento en el que el problema original P_3 indica no evadir, el problema P_3^* no indica el valor de 1 en la variable W_k^o , es posible bajo un análisis del valor entregado en la variable $\mathbb{P}_k^o$ compararlo con la relación $\frac{B}{F}$, buscando comprobar si se está en presencia de un escenario como el indicado. Por todo lo anterior, el modelo se recomienda utilizar, tomando resguardos en cuanto al análisis de los resultados.

Esta posibilidad de utilizar un modelo totalmente lineal, del tipo LP (Linear Problem) como sería el P_3^* , podría incluir muchas ventajas en la resolución de un problema Bilevel como lo es el de la evasión, debido a que serían aplicables las condiciones de KKT (Karush-Khun-Tucker) para la resolución de estos tipos de problemas, que se encuentra fuera del alcance del presente trabajo pero que debe ser tomado en consideración como contribución a un problema general.

6 | Conclusiones

En esta memoria se ha tratado el problema de la evasión, comprendiendo en primer lugar sus motivaciones, así como la evidencia, para posteriormente buscar a través de la investigación de operaciones interpretar y representar el problema, desde el punto de vista de los pasajeros oportunistas o evasores con el objetivo de inhibir la evasión.

Este problema es globalmente estudiado y analizado, encontrando diversas causas, algunas contradictorias. Chile no está exento de esta situación, siendo uno de los países con mayor tasa de evasión en el mundo, potenciado por el Transantiago desde el año 2007.

Impulsado por el uso de las tecnologías, buscando una mayor eficiencia en los tiempos de arribo a los buses, se han disminuido los controles concretos de pago de tarifa, principalmente en los sistemas POP_S . Esto ha obligado a implementar una mayor fiscalización, la que puede ser representada en términos de probabilidades, resultando en un modelo del Follower en el que los pasajeros son capaces de seleccionar su ruta teniendo en cuenta las condiciones de la red impuestas por la autoridad, específicamente las probabilidades de inspección en cada uno de los arcos de la red. Dicho modelo ha resultado ser un No lineal, por lo que no es posible asegurar su optimalidad con Solver Globales.

Buscando resolver el problema propuesto, se implementaron dos alternativas al problema original, buscando obtener un problema del tipo LP que refleje los mismos resultados que el primero, y que además permita ser más eficiente en términos de tiempos computacionales, para poder ser insertado en un problema Bilevel.

Se pudo confirmar que el problema P_3 representa una buena aproximación al problema original, al contrastarlo con el P_1 , definiendo un problema MIP que ya mejora la resolución de este tipo de problemas. No obstante, en una prueba final, el problema P_3^* no pudo ser validado en su totalidad como una alternativa LP debido a que los resultados, si bien son semejantes, deben considerar un análisis de interpretación para demostrar que lo son. Los hallazgos relevantes de los experimentos fueron:

- En el modelo en general es posible notar que los valores de la multa y del valor del ticket tienen una directa relación con la probabilidad de inspección que incide en los pasajeros. Esto, porque a medida que la multa se vuelve mucho mayor que el valor del ticket, con pequeñas probabilidades de inspección ya es posible inhibir la decisión de evadir, debido a que los costos esperados al hacerlo superan el del pago de la tarifa.
- Respecto al tamaño de la red, se infiere que en la medida de que esta va aumentando su tamaño, las probabilidades de inspección en cada uno de los arcos va disminuyendo, lo que puede tender a provocar un aumento en la decisión de evadir. Esto puede ser mejorado aumentando las patrullas en la red, al considerar un valor entero de n mayor que uno.
- El problema puede ser adaptado a cualquier tamaño de red, recomendando el problema P_3 , que al ser un MIP disminuye los tiempos computacionales, lo que podría representar una ventaja para instancias de mayor envergadura.
- La propuesta busca proveer de herramientas para poder inhibir la evasión en el transporte público, lo que va más allá de un aspecto netamente punitivo, que es lo que comúnmente se busca en las fiscalizaciones.

La presente propuesta de modelo para el comportamiento del Pasajero Oportunista, así como sus pruebas relacionadas, pretenden ser el inicio de un modelo que pueda ser modificado para ser insertado en un problema Bilevel, como es el problema de la evasión en el transporte público.

Como temas a tratar en investigaciones futuras, está la implementación de este modelo en un modelo general del líder o la entidad fiscalizadora, para posteriormente ser resuelto como un problema general, en donde la decisión del pasajero va a ser consecuencia de las decisiones iniciales del primero, considerando estas como parámetros, como los presentados en la presente tesis.

A | APÉNDICE A

A.1. Máquina Python

La programación realizada en Python permite obtener las probabilidades de inspección P_e de tal forma que la sumatoria de ellos sea igual a la unidad. Por simplicidad, a continuación se entrega el código para generar una sola columna con 73 probabilidades distintas (Valor de z que puede ser modificado en la tercera línea del programa), pudiendo incorporar en la programación tantas como sean necesarias, teniendo en cuenta que cada una debe almacenarse en columnas distintas dentro del documento creado.

```
#MAQUINA GENERADORA DE Pe, DEPENDIENDO DE LA CANTIDAD DE ARCOS DE LA RED
#COLUMNA 1
z=73 #CAMBIAR VALOR SEGUN NUMERO DE ARCOS DE LA RED A OBTENER
import random
numeros_aleatorios = [random.uniform(0,1) for _ in range(z)] #MODIFICAR VALOR EN
    RANGE (NUMEROS ARCOS)
print(numeros_aleatorios) #MUESTRA CONJUNTO
    DE NUMERO ALEATORIOS
print()
suma_aleatorios = 0
for aleatorios in numeros_aleatorios:
    suma_aleatorios += aleatorios
print(suma_aleatorios) #OBTIENE LA
    SUMATORIA DEL CONJUNTO DE NUMEROS ALEATORIOS
print()
list(numeros_aleatorios) #TRANSFORMA
    CONJUNTO HORIZONTAL EN VERTICAL PARA LLEVAR A AMPL
factor = 1/suma_aleatorios #FACTOR PARA
    NORMALIZAR
```

```

print(factor)                                #MUESTRA FACTOR QUE
    NORMALIZA
print()
import numpy as np                            #FUNCION PARA
    MULTIPLICAR EL FACTOR POR CADA ELEMENTO DEL GRUPO
list1 = factor
list2 = numeros_aleatorios

product = np.multiply(list1,list2)
#print(product)
a = list(product)                             #LISTADO RESULTADO
    QUE SUMA 1
print()
lst = a
print(*lst)                                  #SACAR CORCHETES Y
    COMAS
#print(lst)
print()
vertical = lst                                #HACER EL LISTADO
    NORMALIZADO VERTICAL Y SIN COMAS
print(*vertical, sep = '\n')
#IMPRESORA DE EXCEL
import xlswriter                              #OBTENGO ARCHIVO
    EXCEL PARA PODER LLEVARLO LUEGO A AMPL

workbook = xlswriter.Workbook('P_e.xlsx')
worksheet = workbook.add_worksheet()
my_lista = a
#IMPRESION POR COLUMNA
for row_num, data in enumerate(my_lista):
    worksheet.write(row_num, 0, data)

workbook.close()

```

B | APÉNDICE B

B.1. Shortest Path Problem

El Shortest Path Problem es un modelo matemático que es aplicable a grafos dirigidos como los utilizados en las pruebas computacionales. A continuación se muestra la implementación realizada en el lenguaje de programación AMPL, con sus tres documentos.

Archivo SP150nodos.mod

```
param N;                                #CONSIDERAR A MODIFICAR EN PROBLEMA FOLLOWER

set Nodos = 1..N;

param In symbolic in Nodos;
param Out symbolic in Nodos, !=In;

set Arcos within (Nodos diff {Out}) cross (Nodos diff {In});

param t{Arcos} >=0;
var X{(i,j) in Arcos} binary;

minimize Total_Time: sum{(i,j) in Arcos} t[i,j]*X[i,j];

subject to R1 {k in Nodos diff {In, Out}}:
sum{(i,k) in Arcos} X[i,k]-sum{(k,j) in Arcos} X[k,j]=0;

subject to R2:
sum{(In,j) in Arcos} X[In,j]=1;

subject to R3:
sum{(i,Out) in Arcos} X[i,Out]=1;
```

Archivo SP150nodos.run

```

reset;
model SP150nodos.mod;
data SP150nodos.dat;
option solver cplex;
solve;
option omit_zero_rows 1;
option omit_zero_cols 1;
display X;

```

Archivo SP150nodos.dat

```

param N:= 150;
param In:= 1;
param Out:= 50;

param: Arcos: t:=

```

1	2	1	53	54	3	77	53	2
2	3	1	54	55	3	53	79	2
3	4	1	55	56	3	78	54	2
4	5	1	56	57	3	54	80	2
5	6	1	57	58	3	79	55	2
6	7	1	58	59	3	55	81	2
7	8	1	59	60	3	80	56	2
8	9	1	60	61	3	56	82	2
9	10	1	61	62	3	81	57	2
10	11	1	62	63	3	57	83	2
11	12	1	63	64	3	82	58	2
12	13	1	64	65	3	58	84	2
13	14	1	65	66	3	83	59	2
14	15	1	66	67	3	59	85	2
15	16	1	67	68	3	84	60	2
16	17	1	68	69	3	60	86	2
17	18	1	69	70	3	85	61	2
18	19	1	70	71	3	61	87	2
19	20	1	71	72	3	86	62	2
20	21	1	72	73	3	62	88	2
21	22	1	73	74	3	87	63	2
22	23	1	74	75	3	63	89	2
23	24	1	26	51	2	88	64	2
24	25	1	26	52	2	64	90	2
25	50	1	51	27	2	89	65	2

26	27	3	27	53	2	65	91	2
27	28	3	52	28	2	90	66	2
28	29	3	28	54	2	66	92	2
29	30	3	53	29	2	91	67	2
30	31	3	29	55	2	67	93	2
31	32	3	54	30	2	92	68	2
32	33	3	30	56	2	68	94	2
33	34	3	55	31	2	93	69	2
34	35	3	31	57	2	69	95	2
35	36	3	56	32	2	94	70	2
36	37	3	32	58	2	70	96	2
37	38	3	57	33	2	95	71	2
38	39	3	33	59	2	71	97	2
39	40	3	58	34	2	96	72	2
40	41	3	34	60	2	72	98	2
41	42	3	59	35	2	97	73	2
42	43	3	35	61	2	73	99	2
43	44	3	60	36	2	98	74	2
44	45	3	36	62	2	74	100	2
45	46	3	61	37	2	99	75	2
46	47	3	37	63	2	100	75	2
47	48	3	62	38	2	101	102	3
48	49	3	38	64	2	102	103	3
49	50	3	63	39	2	103	104	3
1	26	2	39	65	2	104	105	3
1	27	2	64	40	2	105	106	3
26	2	2	40	66	2	106	107	3
2	28	2	65	41	2	107	108	3
27	3	2	41	67	2	108	109	3
3	29	2	66	42	2	109	110	3
28	4	2	42	68	2	110	111	3
4	30	2	67	43	2	111	112	3
29	5	2	43	69	2	112	113	3
5	31	2	68	44	2	113	114	3
30	6	2	44	70	2	114	115	3
6	32	2	69	45	2	115	116	3
31	7	2	45	71	2	116	117	3
7	33	2	70	46	2	117	118	3
32	8	2	46	72	2	118	119	3
8	34	2	71	47	2	119	120	3
33	9	2	47	73	2	120	121	3

9	35	2	72	48	2	121	122	3
34	10	2	48	74	2	122	123	3
10	36	2	73	49	2	123	124	3
35	11	2	49	75	2	124	125	3
11	37	2	74	50	2	1	101	2
36	12	2	75	50	2	1	102	2
12	38	2	76	77	3	101	2	2
37	13	2	77	78	3	102	3	2
13	39	2	78	79	3	2	103	2
38	14	2	79	80	3	103	4	2
14	40	2	80	81	3	3	104	2
39	15	2	81	82	3	104	5	2
15	41	2	82	83	3	4	105	2
40	16	2	83	84	3	105	6	2
16	42	2	84	85	3	5	106	2
41	17	2	85	86	3	106	7	2
17	43	2	86	87	3	6	107	2
42	18	2	87	88	3	107	8	2
18	44	2	88	89	3	7	108	2
43	19	2	89	90	3	108	9	2
19	45	2	90	91	3	8	109	2
44	20	2	91	92	3	109	10	2
20	46	2	92	93	3	9	110	2
45	21	2	93	94	3	110	11	2
21	47	2	94	95	3	10	111	2
46	22	2	95	96	3	111	12	2
22	48	2	96	97	3	11	112	2
47	23	2	97	98	3	112	13	2
23	49	2	98	99	3	12	113	2
48	24	2	99	100	3	113	14	2
24	50	2	51	76	2	13	114	2
49	25	2	51	77	2	114	15	2
51	52	3	76	52	2	14	115	2
52	53	3	52	78	2	115	16	2
15	116	2	137	138	3	109	135	2
116	17	2	138	139	3	135	111	2
16	117	2	139	140	3	110	136	2
117	18	2	140	141	3	136	112	2
17	118	2	141	142	3	111	137	2
118	19	2	142	143	3	137	113	2
18	119	2	143	144	3	112	138	2

119	20	2	144	145	3	138	114	2
19	120	2	145	146	3	113	139	2
120	21	2	146	147	3	139	115	2
20	121	2	147	148	3	114	140	2
121	22	2	148	149	3	140	116	2
21	122	2	149	150	3	115	141	2
122	23	2	101	126	2	141	117	2
22	123	2	101	127	2	116	142	2
123	24	2	126	102	2	142	118	2
23	124	2	127	103	2	117	143	2
124	25	2	102	128	2	143	119	2
24	125	2	128	104	2	118	144	2
125	25	2	103	129	2	144	120	2
126	127	3	129	105	2	119	145	2
127	128	3	104	130	2	145	121	2
128	129	3	130	106	2	120	146	2
129	130	3	105	131	2	146	122	2
130	131	3	131	107	2	121	147	2
131	132	3	106	132	2	147	123	2
132	133	3	132	108	2	122	148	2
133	134	3	107	133	2	148	124	2
134	135	3	133	109	2	123	149	2
135	136	3	108	134	2	149	125	2
136	137	3	134	110	2	124	150	2
137	138	3				150	125	2;

C | APÉNDICE C

A continuación se puede hacer revisión de las tablas de resultados de los modelos P_1 y P_3 aplicado al modelo ficticio, considerando cada una de las instancias, y considerando 20 escenarios distintos en cuanto a probabilidades de inspección en los arcos $\mathbb{P}_e \quad \forall e \in E$.

Tabla C.1: Resultados Instancia A

Modelo	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_1	CPU Time (Knitro) (s)	3,2969	3,375	3,5781	3,3281	3,5313	3,375	3,3281	3,3438	3,4063	3,3125	3,5156	3,2969	3,4063	3,3438	3,3438	3,3438	3,4219	3,2188	3,1719	3,4688
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	P_k^o	0,0686	0,0654	0,0543	0,5947	0,0582	0,0523	0,0551	0,0476	0,0615	0,0736	0,0693	0,0639	0,0604	0,0621	0,0582	0,0514	0,0527	0,0464	0,0475	0,0684
	tiempo desvío(S/A)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Número Arcos Red	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394
Modelo	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	5,1438	4,9039	4,0731	44,604	4,3659	3,9204	4,1331	3,5681	4,6145	5,522	5,1981	4,792	4,5329	4,6576	4,3625	3,8575	3,9544	3,4765	3,5606	5,132
	Parámetro	Escenario																			
P_3	CPU Time (Cplex) (s)	0,0625	0,0625	0,125	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0469	0,0625	0,0938	0,0938	0,0781	0,0781	0,1094	0,0469	0,0625	0,0938	0,0781	0,0781
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	P_k^o	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	tiempo desvío(S/A)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Número Arcos Red	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394	394
Modelo	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75

Nota: En la tabla se pueden evidenciar para cada escenario las diferencias entre los modelos P_1 y P_3 en cuanto a resultados en la Instancia A. Elaboración propia.

Tabla C.2: Resultados Instancia B

Modelo	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_1	CPU Time (Knitro) (s)	5,125	5,1875	3,9219	3,8906	4,0781	3,8594	4,4375	4,5781	3,9844	3,9375	4,0313	3,7344	4,2656	4,9844	3,7188	5,1094	4,2969	5,0313	5,1719	3,7969
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
	P_k^o	0,0547	0,0537	0,0195	0,019	0,019	0,0171	0,0189	0,0183	0,0197	0,0186	0,0194	0,0167	0,0167	0,0502	0,0167	0,0465	0,02	0,06	0,0581	0,0185
	Tiempo desvío(S/A)	-	-	49	51	53	49	55	54	53	51	50	57	57	-	61	-	47	-	-	53
	Número Arcos Red	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468
P_3	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	4,1017	4,0243	1,4639	1,4278	1,4279	1,2847	1,4138	1,3758	1,4746	1,3935	1,4549	1,2549	1,2534	3,7658	1,2537	3,4908	1,4993	4,4998	4,3563	1,3881
	Parámetro	Escenario																			
P_3	CPU Time (Cplex) (s)	0,125	0,0938	0,0469	0,0625	0,0469	0,0625	0,0625	0,0938	0,0781	0,0938	0,0625	0,1094	0,0938	0,0781	0,0938	0,0938	0,0938	0,1094	0,0938	0,0938
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
	P_k^o	1	1	0,0197	0,0192	0,0192	0,0173	0,019	0,0185	0,0198	0,0187	0,0196	0,0169	0,0168	1	0,0168	1	1	1	1	0,0187
	Tiempo desvío(S/A)	-	-	49	51	53	49	55	54	53	51	50	57	57	-	61	-	-	-	-	53
	Número Arcos Red	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468	468
P_3	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	75	75	1,4773	1,4406	1,4407	1,295	1,4263	1,3875	1,4885	1,4054	1,4683	1,2649	1,2631	75	1,2635	75	75	75	75	1,4001
	Parámetro	Escenario																			

Nota: En la tabla se pueden evidenciar para cada escenario las diferencias entre los modelos P_1 y P_3 en cuanto a resultados en la Instancia B. Elaboración propia.

Tabla C.3: Resultados Instancia C

Modelo	Escenario																				
Parámetro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
P_1	CPU Time (Knitro) (s)	5,2969	5,4844	5,5156	5,9844	7,2656	5,7031	6,6875	8,1875	5,6406	6,125	5,8125	7,0313	7,6094	7,6406	5,8594	6,0625	6,1563	5,5938	5,8125	5,4219
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_k^o	0,0195	0,0197	0,0152	0,0181	0,0446	0,0169	0,0187	0,0151	0,0135	0,0162	0,0116	0,0173	0,0144	0,014	0,0143	0,0154	0,0154	0,0146	0,0157	0,014
	Tiempo desvío(S/A)	55	45	49	54	-	60	55	52	49	47	57	47	49	51	55	57	59	53	51	55
	Número Arcos Red	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Costo Esperado ($F * P_k^o$)	1,4656	1,4782	1,1436	1,3578	3,3447	1,2665	1,4025	1,1341	1,0114	1,2142	0,8671	1,2946	1,0796	1,0499	1,0693	1,1536	1,1578	1,0969	1,1812	1,0511	
Modelo	Escenario																				
Parámetro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
P_3	CPU Time (Cplex) (s)	0,0938	0,1094	0,0781	0,0938	0,0781	0,0938	0,0781	0,0781	0,0313	0,0625	0,0938	0,0781	0,0938	0,0625	0,0938	0,1094	0,0938	0,0938	0,0938	0,0781
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_k^o	0,0197	0,0199	0,0154	0,0183	1	0,017	0,0189	0,0152	0,0136	0,0163	0,0116	0,0174	0,0145	0,0141	0,0144	0,0155	0,0155	0,0147	0,0159	0,0141
	Tiempo desvío(S/A)	55	45	49	54	-	60	55	52	49	47	57	47	49	51	55	57	59	53	51	55
	Número Arcos Red	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
Costo Esperado ($F * P_k^o$)	1,4792	1,4919	1,1519	1,3692	75	1,2767	1,415	1,1423	1,0178	1,2235	0,8718	1,305	1,0869	1,0569	1,0765	1,1621	1,1662	1,1044	1,1896	1,058	

Nota: En la tabla se pueden evidenciar para cada escenario las diferencias entre los modelos P_1 y P_3 en cuanto a resultados en la Instancia C. Elaboración propia.

Tabla C.4: Resultados Instancia D

Modelo	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_1	CPU Time (Knitro) (s)	7,5938	7,875	7,6094	7,2813	7,6875	8,1563	7,1719	7,1563	7,6563	7,5156	7,5625	7,875	7,4219	7,2656	7,7969	8,4219	9,3281	7,1563	7,9063	7,3906
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_k^o	0,0131	0,0166	0,0147	0,0156	0,0149	0,0158	0,0136	0,0155	0,0184	0,0168	0,0147	0,0145	0,0129	0,0167	0,0147	0,0178	0,0152	0,0165	0,0127	0,0155
	Tiempo desvío(S/A)	53	57	58	51	53	65	55	49	51	53	49	53	47	45	43	53	53	56	54	49
	Número Arcos Red	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616
P_3	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	0,9841	1,2453	1,1029	1,1697	1,1141	1,1837	1,0189	1,1626	1,377	1,2615	1,1018	1,0899	0,9667	1,253	1,1019	1,3374	1,1408	1,2397	0,9528	1,1594
Modelo	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_3	CPU Time (Cplex) (s)	0,0469	0,125	0,125	0,0938	0,0938	0,0625	0,0625	0,0625	0,1094	0,0938	0,0938	0,0625	0,0625	0,1094	0,1094	0,1094	0,1563	0,0781	0,0781	0,0781
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_k^o	0,0132	0,0167	0,0148	0,0157	0,015	0,0159	0,0137	0,0156	0,0185	0,017	0,0148	0,0146	0,013	0,0168	0,0148	0,018	0,0153	0,0167	0,0128	0,0156
	Tiempo desvío(S/A)	53	57	58	51	53	65	55	49	51	53	49	53	47	45	43	53	53	56	54	49
	Número Arcos Red	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616	616
P_3	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	0,9901	1,2549	1,1105	1,1782	1,1219	1,1926	1,0255	1,1711	1,3889	1,2716	1,1095	1,0974	0,9726	1,2628	1,1095	1,3487	1,1488	1,2496	0,9586	1,1679

Nota: En la tabla se pueden evidenciar para cada escenario las diferencias entre los modelos P_1 y P_3 en cuanto a resultados en la Instancia D. Elaboración propia.

Tabla C.5: Resultados Instancia E

Modelo	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_1	CPU Time (Knitro) (s)	16,625	14,984	14,641	14,016	13,875	13,85	14,125	14	13,906	13,734	13,328	59,109	14,016	14,453	14,203	14,25	14,047	14,234	14,609	14,359
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_k^o	0,0118	0,013	0,0146	0,0124	0,0126	0,0135	0,0109	0,0122	0,0149	0,0124	0,0118	0,0151	0,0138	0,0139	0,0145	0,0144	0,0132	0,0122	0,0125	0,0139
	Tiempo desvío(S/A)	49	49	58	53	64	57	50	57	62	55	56	58	69	58	54	52	53	51	57	51
	Número Arcos Red	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690
P_2	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	0,8879	0,9728	1,0936	0,9265	0,9459	1,0124	0,8185	0,9126	1,1202	0,9289	0,8845	1,131	1,0343	1,0459	1,0904	1,0794	0,9871	0,9116	0,9387	1,0462
	Parámetro	Escenario																			
P_3	CPU Time (Cplex) (s)	0,0781	0,0781	0,125	0,0781	0,1094	0,1094	0,0781	0,1094	0,0781	0,0938	0,0625	0,1094	0,0625	0,125	0,125	0,0781	0,0781	0,1094	0,0469	0,1094
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_k^o	0,0119	0,0131	0,0147	0,0124	0,0127	0,0136	0,011	0,0122	0,015	0,0125	0,0119	0,0152	0,0139	0,014	0,0146	0,0145	0,0132	0,0122	0,0126	0,014
	Tiempo desvío(S/A)	49	49	58	53	64	57	50	57	62	55	56	58	69	58	54	52	53	51	57	51
	Número Arcos Red	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690	690
P_3	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	0,8927	0,9788	1,1011	0,9319	0,9516	1,0188	0,8227	0,9178	1,1281	0,9343	0,8894	1,1391	1,0409	1,0528	1,0979	1,0867	0,9932	0,9167	0,9442	1,0532
	Parámetro	Escenario																			

Nota: En la tabla se pueden evidenciar para cada escenario las diferencias entre los modelos P_1 y P_3 en cuanto a resultados en la Instancia E. Elaboración propia.

D | APÉNDICE D

A continuación se puede hacer revisión de las tablas de resultados de los modelos P_1 y P_3 aplicado a la red de Metro de Montreal, considerando cada una de las 3 instancias, y considerando 20 escenarios distintos en cuanto a probabilidades de inspección en los arcos $\mathbb{P}_e \quad \forall e \in E$.

Tabla D.1: Resultados Instancia F

Modelo	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_1	CPU Time (Knitro) (s)	0,0625	0,0781	0,0625	0,0625	0,0781	0,0781	0,0938	0,0781	0,0625	0,0781	0,0625	0,0625	0,0781	0,0625	0,0781	0,0469	0,0781	0,0625	0,0625	0,0625
	SP	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005
	W_k^o	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	P_k^o	0,2789	0,3255	0,3209	0,2998	0,3569	0,3346	0,3258	0,3111	0,303	0,3419	0,2877	0,243	0,3279	0,2738	0,2955	0,2969	0,3033	0,2973	0,2847	0,2904
	Tiempo desvío(S/A)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Número Arcos Red	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73
Modelo	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	20,918	24,412	24,065	22,485	26,766	25,092	24,438	23,33	22,723	25,643	21,575	18,224	24,596	20,533	22,159	22,265	22,75	22,297	21,349	21,782
	Parámetro	Escenario																			
P_3	CPU Time (Cplex) (s)	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0313	0,0156	0,0156	0,0156	0,0313	0,0313	0,0313	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0313	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156
	SP	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005
	W_k^o	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	P_k^o	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Tiempo desvío(S/A)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Número Arcos Red	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73
Modelo	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75

Nota: En la tabla se pueden evidenciar para cada escenario las diferencias entre los modelos P_1 y P_3 en cuanto a resultados en Instancia F. Elaboración propia.

Tabla D.2: Resultados Instancia G

Modelo	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_1	CPU Time (Knitro) (s)	0,0781	0,0625	0,0625	0,0625	0,0781	0,0625	0,0625	0,0781	0,0625	0,0781	0,0625	0,0625	0,0938	0,0469	0,0625	0,0781	0,0938	0,0781	0,0625	0,0938
	SP	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005
	W_k^o	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
	P_k^k	0,2789	0,2852	0,2981	0,2998	0,3569	0,2895	0,2805	0,3111	0,303	0,3419	0,2877	0,243	0,3279	0,2738	0,2907	0,2969	0,3033	0,2973	0,2847	0,285
	Tiempo desvío(S/A)	39,005	41,346	41,346	39,005	-	41,346	41,346	-	-	-	39,005	39,005	-	39,005	41,346	39,005	-	39,005	39,005	41,346
	Número Arcos Red	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73
P_2	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	1,3945	1,426	1,4907	1,499	1,7844	1,4474	1,4027	1,5554	1,5149	1,7096	1,4384	1,2149	1,6397	1,3689	1,4536	1,4843	1,5166	1,4865	1,4233	1,4249
	Parámetro	Escenario																			
P_3	CPU Time (Cplex) (s)	0	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0313	0,0313	0	0,0156	0,0156	0,0313	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0313
	SP	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005
	W_k^o	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	P_k^k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,2762	1	1	1	1	1	1	1	1
	Tiempo desvío(S/A)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	39,005	-	-	-	-	-	-	-	-
	Número Arcos Red	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73
P_4	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1,381	5	5	5	5	5	5	5	5
	Parámetro	Escenario																			

Nota: En la tabla se pueden evidenciar para cada escenario las diferencias entre los modelos P_1 y P_3 en cuanto a resultados en Instancia G. Elaboración propia.

Tabla D.3: Resultados Instancia H

Modelo	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_1	CPU Time (Knitro) (s)	0.0313	0.0625	0.0625	0.0469	0.1094	0.0625	0.0625	0.0625	0.0781	0.0938	0.0625	0.0625	0.0938	0.0781	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625
	SP	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005
	W_k^o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_k^o	0.2789	0.2852	0.2981	0.2998	0.3569	0.2895	0.2805	0.3053	0.303	0.3419	0.2877	0.243	0.3098	0.2738	0.2907	0.2969	0.3033	0.2973	0.2847	0.285
	Tiempo desvío(S/A)	41,346	41,346	41,346	39,005	39,005	41,346	41,346	41,346	39,005	39,005	39,005	39,005	41,346	39,005	41,346	39,005	39,005	39,005	39,005	41,346
	Número Arcos Red	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73
P_3	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	1,1156	1,1408	1,1926	1,1992	1,4275	1,1579	1,1222	1,2211	1,2119	1,3676	1,1507	0,9719	1,2391	1,0951	1,1629	1,1875	1,2133	1,1892	1,1386	1,1399
	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	CPU Time (Cplex) (s)	0.0156	0.0313	0.0313	0.0156	0.0156	0.0313	0.0156	0.0156	0.0156	0.0313	0.0156	0.0469	0.0156	0.0156	0.0313	0.0469	0.0156	0.0313	0.0156	0.0313
	SP	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005	39,005
	W_k^o	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_3	P_k^o	0.3242	0.3327	0.3508	0.353	1	0.3389	0.3264	0.3611	0.3578	1	0.3357	0.2762	0.3674	0.3168	0.3405	0.3492	0.3583	0.3498	0.3323	0.3327
	Tiempo desvío(S/A)	39,005	41,346	41,346	39,005	-	41,346	41,346	41,346	39,005	-	39,005	39,005	41,346	39,005	41,346	39,005	39,005	39,005	39,005	41,346
	Número Arcos Red	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73
	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	1,2969	1,331	1,4034	1,4121	4	1,3557	1,3058	1,4445	1,4311	4	1,3428	1,1048	1,4697	1,2672	1,3619	1,397	1,433	1,3992	1,3293	1,3309

Nota: En la tabla se pueden evidenciar para cada escenario las diferencias entre los modelos P_1 y P_3 en cuanto a resultados en Instancia H. Elaboración propia.

E | APÉNDICE E

A continuación se puede hacer revisión de las tablas de resultados de los modelos P_3 y P_3^* aplicado al modelo ficticio generado, bajo la instancia C de 200 nodos, en donde en el segundo problema se aplica una eliminación de la integrabilidad de las variables binarias H_e^k y W_k^o .

Tabla E.1: Resultados Problemas P_3

Modelo	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_3	CPU Time (Cplex) (s)	0,0938	0,1094	0,0781	0,0938	0,0781	0,0938	0,0781	0,0781	0,0313	0,0625	0,0938	0,0781	0,0938	0,0625	0,0938	0,1094	0,0938	0,0938	0,0938	0,0781
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	P_k^o	0,0197	0,0199	0,0154	0,0183	1	0,017	0,0189	0,0152	0,0136	0,0163	0,0116	0,0174	0,0145	0,0141	0,0144	0,0155	0,0155	0,0147	0,0159	0,0141
	Tiempo desvío(S/A)	55	45	49	54	-	60	55	52	49	47	57	47	49	51	55	57	59	53	51	55
	Número Arcos Red	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
P_3^*	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	1,4792	1,4919	1,1519	1,3692	75	1,2767	1,415	1,1423	1,0178	1,2235	0,8718	1,305	1,0869	1,0569	1,0765	1,1621	1,1662	1,1044	1,1896	1,058
	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	CPU Time (Cplex) (s)	0,0156	0,0156	0,0156	0,0313	0,0313	0,0469	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156
	SP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
	W_k^o	0,0197	0,0199	0,0154	0,0183	0,021	0,017	0,0189	0,0152	0,0136	0,0163	0,0116	0,0174	0,0145	0,0141	0,0144	0,0155	0,0155	0,0147	0,0159	0,0141
P_3^*	P_k^o	0,0197	0,0199	0,0154	0,0183	0,021	0,017	0,0189	0,0152	0,0136	0,0163	0,0116	0,0174	0,0145	0,0141	0,0144	0,0155	0,0155	0,0147	0,0159	0,0141
	Tiempo desvío(S/A)	55	45	49	54	54	60	55	52	49	47	57	47	49	51	55	57	59	53	51	55
	Número Arcos Red	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542	542
	Costo Esperado ($F * P_k^o$)	1,4792	1,4919	1,1519	1,3692	1,5758	1,2767	1,415	1,1423	1,0178	1,2235	0,8718	1,305	1,0869	1,0569	1,0765	1,1621	1,1662	1,1044	1,1896	1,058
	Parámetro	Escenario																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Nota: En la tabla se pueden evidenciar para cada escenario las diferencias entre los modelos P_3 y P_3^* , considerando relajación de integrabilidad en este último. Elaboración propia.

Referencias

- Alshawish, A., Abid, M., Rass, M., and De Meer, H. (2017). Playing a multi-objective spot-checking game in public transportation systems. *Proceedings of the 4th workshop on security in highly connected IT systems*, pages 31–36. 3.4.2.5
- Bahamondes, B., Correa, J., Matuschke, J., and Oriolo, G. (2017). Adaptivity in network interdiction. *International conference on decision and game theory for security*, pages 40–52. 3.4.2.5
- Barabino, B., Lai, C., and Olivo, A. (2020). Fare evasion in public transport systems: a review of the literature. *Public Transport*, (12):27–88. 1, 3.1, 3.2, 3.4.2, 3.4.2.5
- Barabino, B., Salis, S., and Useli, B. (2013). A modified model to curb fare evasion and enforce compliance: empirical evidence and implications. *Transp Res Part A*, (58):29–39. 3.1
- Barabino, B., Salis, S., and Useli, B. (2014). Fare evasion in proof-of-payment transit systems: deriving the optimum inspection level. *Transp Res Part B*, (70):1–17. 3.1
- Barabino, B., Salis, S., and Useli, B. (2015). What are the determinants in making people free riders in proof-of-payment transit systems? evidence from Italy. *Transp Res Part A: Policy Pract*, (80):184–196. 3.1, 3.3.1, 3.3.2
- Bijleveld, C. (2007). Fare dodging and the strong arm of the law: an experimental evaluation of two different penalty schemes for fare evasion. *J. Exp. Criminol*, 3(2):183–199. 3.3.1
- Bonfati, G. and Wagenknecht, T. (2010). Human factors reduce aggression and fare evasion. *Public Transport Int*, (59):28–32. 1, 3.1, 3.3.1
- Borndorfer, R., Omont, B., Sagnol, G., and Swarat, E. (2012). A stackelberg game to optimize the distribution of controls in transportation networks. *Game theory for networks*. 3.4.2.4
- Borndorfer, R., Omont, B., Sagnol, G., and Swarat, E. (2013). Optimizing toll enforcement in transportation networks: a game-theoretic approach. *Electron Notes Discrete Math*, (41):253–260. (document), 3.4.2.4, 3.4.3.3, 3.4.3.3, 3.4.3.3, 3.4.3.4, 4.2, 4.2
- Boyd, C., Martini, C., Rickard, J., and Russell, A. (1989). Fare evasion and noncompliance. *Journal of Transport Economics and Policy*, (23):189–197. 1, 3.3.2
- Bracken, J. and McGill, J. (1973). Mathematical programs with optimization problems in the constraints. *Operations Research*, 1(21):37–44. 3.4.3.2
- Brueckner, J. (2005). Transport subsidies, system choice, and urban sprawl. *Reg. Sci. Urban Econ*, 35(6):715–733. 3.3.1
- Bucciol, A., Landini, F., and Piovesan, M. (2013). Unethical behavior in the field: demographic characteristics and beliefs of the cheater. *J. Econ. Behav. Organ*, (93):248–257. 3.1, 3.3.1
- Buneder, C. and Galilea, P. (2017). Temporal and spatial analysis of fare evasion in transantiago. *Technical Report*. 1, 3.2

- Coelho, L. (2013). Linearization of the product of two variables. 4.3.1
- Cools, M., Fabbro, Y., and Bellemans, T. (2017). Identification of the determinants of fare evasion. *Case Studies on Transport Policy*, 6(3). 1, 3.1, 3.3.2
- Correa, J., Harks, T., Kreuzen, V., and Matuschke, J. (2014). Fare evasion in transit networks. *arXiv preprint*. 3.4.2.5
- Correa, J., Harks, T., Kreuzen, V., and Matuschke, J. (2017). Fare evasion in transit networks. *Operations Research*, 65(1):165–183. (document), 1, 3.4.3.4, 4.2, 4.2
- Currie, G. and Delbosc, A. (2017). An empirical model for the psychology of deliberate and unintentional fare evasion. *Transport Policy* 54, pages 21–29. 1, 3.2
- Dauby, L. and Kovacs, Z. (2007). Fare evasion in light rail systems. *Transportation Research Circular*. 1, 3.2
- DeAndrea, D., Carpenter, C., Shulman, H., and Levine, T. (2009). The relationship between cheating behavior and sensation-seeking. *Pers. Individ. Differ*, 47(8):944–947. 3.3.1
- Declercq, K., Janssens, D., and Wets, G. (2014). Travel behaviour research flanders 4.5 (2012–2013): Tabular rapport (original tile tin dutch: ‘onderzoek verplaatsingsgedrag vlaanderen 4.5 (2012–2013): Tabellenrapport’). *Transportation Research Institute (IMOB), Diepenbeek, Belgium*. 3.3.2
- Delbosc, A. and Currie, G. (2016). Four types of fare evasion: a qualitative study from melbourne, australia. *Transp Res Part F*, (43):254–264. 3.1
- Delle Fave, F., Brown, M., Zhang, C., Shieh, E., Jiang, A., Rosoff, H., and Sullivan, J. (2014a). Security games in the field: an initial study on a transit system. *Proceedings of the 2014 international conference on autonomous agents and multi-agent systems. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pages 1363–1364. 3.4.2.2
- Delle Fave, F., Brown, M., Zhang, C., Shieh, E., Jiang, A., Rosoff, H., and Sullivan, J. (2014b). Security games in the field: deployments on a transit system. *International workshop on engineering multi-agent systems. Springer International Publishing*, pages 103–126. 3.4.2.2
- Delle Fave, F., Jiang, A., Yin, Z., Zhang, C., Tambe, M., Kraus, S., and Sullivan, J. (2014c). Game-theoretic patrolling with dynamic execution uncertainty and a case study on a real transit system. *J Artif Intell Re*, (50):321–367. 3.4.2.1
- Diebel, L. (1981). The introduction of european fare collection techniques in the united states. *J Adv Transp*, 15(1):55–60. 3.1
- DTPM (2012). Informe de gestión 2012: Directorio de transporte público metropolitano. 3.3.1
- DTPM (2021). Índice de evasión en buses del sistema de transporte público metropolitano - primer trimestre 2021. 3.2.1, 3.1, 3.2.1, 3.2, 3.3
- Eddy, D. (2010). Fare evasion – is it a youth issue? transit aust. *Aust. Urban Passenger Transp J*, 65(12):1–7. 3.3.1
- Guarda, P., Galilea, P., Handy, S., Muñoz, J., and Ortúzar, J. (2016). Decreasing fare evasion without fines? a microeconomic analysis. *Research in Transportation Economics*, 59:151–158. 1, 3.1
- Guarda, P., Galilea, P., Paget-Seekins, L., and Ortúzar, J. (2015). What is behind fare evasion? the case of transantiago. *Transportation Research Board 94th Annual Meeting, January*, pages 11–15. 3.3.1
- Hauber, A. (1980). Daily life and the law: discrepancies in behavior. *Int J Law Psychiatry*, 3(2):187–192. 3.1
- Hillier, F. and Lieberman, G. (2010). *Introduction to Operations Research*. 9na. edition. 3.4.1

- Insua, D., Cano, J., Pellot, M., and Ortega, R. (2014). From risk analysis to adversarial risk analysis. *Upadhyay SK, Singh U, Dey DK, Loganathan A (eds) Current trends in Bayesian methodology with applications. CRC Press, Boca Raton*, page 311. 3.4.2.3
- Insua, D., Cano, J., Pellot, M., and Ortega, R. (2016). Multithreat multisite protection: a security case study. *Eur J Oper Res*, 252(3):888–889. 3.4.2.3
- Jain, M., Kardes, E., Kiekintveld, C., Ordoñez, F., and Tambe, M. (2010). Security games with arbitrary schedules: A branch and price approach. *Proc. Of The 24th AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 792–797. 3.4.3.3
- Jiang, A., Yin, Z., Johnson, M., Tambe, M., Kiekintveld, C., Leyuton-Brown, K., and Sandholm, T. (2012). Towards optimal patrol strategies for fare inspection in transit systems. *AAAI Spring symposium: game theory for security, sustainability, and health*. 3.4.2.1
- Jiang, A., Yin, Z., Zhang, C., Tambe, M., and Kraus, S. (2013). Game-theoretic randomization for security patrolling with dynamic execution uncertainty. *Proceedings of the 2013 international conference on autonomous agents and multi-agent systems. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pages 207–214. 3.4.2.1
- Kiekintveld, C., Jain, M., Tsai, J., Pita, J., Ordoñez, F., and Tambe, M. (2009). Computing optimal randomized resource allocations for massive security games. *Proceedings of The 8th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, 1:689–696. 3.4.3.5
- Kooreman, P. (1993). Fare evasion as a result of expected utility maximisation: Some empirical support. *Journal of Transport Economics and Policy*, (27):69–74. 1, 3.3.2
- Krogvig, L. (2014). Fare inspection optimization in train networks. 3.4.2.1
- Lee, J. (2011). Uncovering san francisco, california, muni’s proof-of-payment patterns to help reduce fare evasion. *Transp. Res. Rec.* 2216, pages 75–84. 1, 3.2, 3.3.1
- Leung, L. (2003). A study of fare evasion in railway systems in hong kong. degree thesis. 3.1
- Li, S. and Min, J. (1985). Riding public buses without tickets results in numerous problems. *Chin Sociol Anthropol*, 17(3):49–61. 3.1
- Lorenc, J. and Lutin, J. (2000). Conversion of newark city subway from conventional fare payment to proof of payment fare system. *Light rail: investment for the future. 8th Joint conference on light rail transit*. 3.2
- Matyasek, M. (2013). Optimization of ticket inspection in public transport networks. (degree thesis). czech technical university, prague. 3.4.2.1
- Mauri, R., Cooney, N., and Prowe, G. (1984). Transit security: a description of problems and countermeasures (no. umta-ma-06-0152-84-2). *United States Urban Mass Transportation Administration*. 3.1
- Multisystems, I., Mundle and Associates, I., and Parsons Transportation Group, I. (2002). A toolkit for self-service, barrier-free fare collection. *Transit Cooperative Research Program, Report 80. TRB, Washington, D.C.* 3.2
- Munoz, J., Ortúzar, J., and Gschwender, A. (2008). Transantiago: the fall and rise of a radical public transport intervention. *Saleh, W., and Sammer, G. (Eds.), Travel Demand Management and Road User Pricing: Success, Failure and Feasibility. Ashgate Publishing*, pages 151–172. 3.3.1
- Paruchuri, P., Pearce, J., Marecki, J., Tambe, M., Ordoñez, F., and Kraus, S. (2008). Playing games for security: an efficient exact algorithm for solving bayesian stackelberg games. *Proceedings of the 7th AAMAS*, pages 895–902. 3.4.3.3
- Reddy, A., Kuhls, J., and Lu, A. (2011). Measuring and controlling subway fare evasion. *Transp Res Rec* 2216, pages 85–99. 3.1, 3.2

- Sinha, A., Malo, P., and Deb, K. (2018). A review on bilevel optimization: From classical to evolutionary approaches and applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 22(2):276–295. 3.3, 3.4, 3.4
- Snijders, H. and Saldanha, R. (2016). Decision support for scheduling security crews at netherlands railways. *Publ Transp* 9, pages 193–215. 3.4.2.2
- Stackelberg, H. (1952). The theory of the market economy. *Oxford University Press New York Oxford*. 3.4.3.2
- Thorlacius, P. and Clausen, J. (2010). Scheduling of inspectors for ticket spot checking in urban rail transportation. *DSB S-tog (Copenhagen)*. 2008 Trafikdage på Aalborg Universitet. 3.4.2.1
- Troncoso, R. and De Grange, L. (2017). Sfare evasion in public transport: A time series approach. *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 100, pages 311–318. 1, 3.2, 3.2.1
- Waltry, D. and Straus, P. (2000). Muni metro goes pop: implementing proof of payment fare collection on muni metro. *Light rail: investment for the future*. 8th joint conference on light rail transit. 3.2
- Yin, Z., Jiang, A., Johnson, M., Tambe, M., Kiekintveld, C., Leyton-Brown, K., Sandholm, T., and Sullivan, J. (2012a). Trusts: scheduling randomized patrols for fare inspection in transit systems. *Proceedings of the twenty-fourth AAAI conference on innovative applications of artificial intelligence (IAAI)*. AAAI Press, Menlo Park. 3.4.2.1, 3.4.3.3
- Yin, Z., Jiang, A., Johnson, M., Tambe, M., Kiekintveld, C., Leyton-Brown, K., Sandholm, T., and Sullivan, J. (2012b). Trusts: scheduling randomized patrols for fare inspection in transit systems using game theory. *AI Mag*, 33(4):59–72. 3.4.2.1