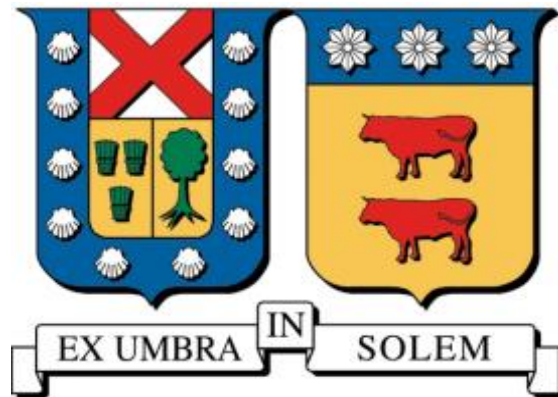


**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA**

**DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS**

**VALPARAÍSO - CHILE**



**DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA PARA SISTEMAS  
MULTIESTADO Y ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD EN  
BATERÍAS DE LI-ION PARA UN VEHÍCULO ELÉCTRICO**

**HÉCTOR IGNACIO DE LA PUENTE CÁCERES**

**TESIS DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL**

**INDUSTRIAL**

**PROFESOR GUÍA: FREDY KRISTJANPOLLER RODRÍGUEZ**

**PROFESORA CORREFERENTE: MÓNICA LÓPEZ CAMPOS**

**NOVIEMBRE 2016**

## AGRADECIMIENTOS

Dedico este trabajo a las personas que me ayudaron en esta etapa de mi vida, ya que gracias a ellas, he podido vencer los obstáculos que para mí significaron estudiar en otra ciudad:

A mis queridos padres y hermano, quienes siempre me han apoyado, entregándome la oportunidad de estudiar tanto en esta universidad como en Francia, y que con mucho amor y esfuerzo, se preocuparon para que nunca me faltara nada, dándome el valor de seguir adelante para que entregara lo mejor de mí; a mis tíos, abuelos y tíos abuelos, quienes me han recibido cariñosamente en su casa, haciéndome sentir querido y en familia; a mis profesores, en especial a Fredy - mi profesor guía - quien me encaminó en este último trabajo, teniendo muy buena disposición y motivándome a continuar; a mis compañeros y amigos de la universidad y colegio, con los que estudié y compartí momentos inolvidables a lo largo de estos años; a mi amigo Diego, quien me acompañó de principio a fin, ayudándome a estudiar y siendo un buen amigo; a mis amigos de Kendo, quienes han sido un pilar fundamental en mi vida, y con los que he disfrutado cada momento; y por sobre todo, agradezco a Dios, ya que gracias a él todo esto fue posible.

## TABLA DE CONTENIDOS

AGRADECIMIENTOS .....	2
TABLA DE CONTENIDOS.....	3
ÍNDICE DE FIGURAS .....	5
ÍNDICE DE TABLAS .....	6
1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN .....	7
2. OBJETIVOS .....	9
3. DESCRIPCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS.....	10
3.1 CONFIABILIDAD CLÁSICA .....	10
3.1.1 Costo de ciclo de vida .....	10
3.1.2 Confiabilidad aplicada a sistemas .....	11
3.1.3 Distribución de Weibull .....	14
3.1.4 Modelo de confiabilidad clásico.....	17
3.1.5 Disponibilidad de sistemas.....	21
3.2 SISTEMAS MULTIESTADO .....	22
3.2.1 Modelo genérico de sistemas multiestado.....	23
3.2.2 Extensión de métodos binarios.....	25
3.2.2.1 Método de path and cut vectors.....	25
3.2.2.2 Función multi-valued structure .....	28
3.2.2.3 Diagrama de bloques para MSS .....	30
3.2.2.4 Árboles de falla para MSS .....	31
3.2.3 Método de procesos estocásticos.....	32
3.2.3.1 Cadenas de Markov .....	33
3.2.3.2 Algoritmo de evaluación de confiabilidad .....	35
3.2.4 Método de la función generadora universal .....	39
3.2.4.1 Función generadora.....	39
3.2.4.2 Función generadora universal (UGF).....	40
3.2.4.3 Técnicas de optimización para UGF .....	42
3.2.4.4 UGF para MSS serie-paralelo .....	42
3.2.5 Método de simulación Monte Carlo.....	44
3.2.5.1 Algoritmo Monte Carlo.....	45

3.2.5.2	Identificación de distribuciones.....	46
3.2.5.3	Generación de variables aleatorias .....	47
3.2.5.4	Análisis y toma de decisiones .....	48
3.3	<b>BATERÍAS DE LI-ION.....</b>	<b>50</b>
3.3.1	Estado de carga (SOC) .....	50
3.3.2	Estado de salud (SOH) .....	51
3.3.3	Confiabilidad en baterías de Li-ion .....	53
3.3.4	Baterías redundantes .....	56
3.3.5	Costos en las baterías de Li-ion.....	58
4.	<b>ANÁLISIS Y APLICACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS.....</b>	<b>60</b>
4.1	ANÁLISIS DE MODELOS MSS .....	60
4.2	APLICACIÓN DE MODELOS MSS A BATERÍAS DE LI-ION .....	64
4.2.1	Aplicación del modelo genérico a un sistema de baterías .....	64
4.2.2	Aplicación de la extensión de métodos binarios .....	66
4.2.3	Aplicación del método de procesos estocásticos.....	68
4.2.4	Aplicación del método de la función generadora universal .....	71
4.2.5	Aplicación del método de simulación Monte Carlo .....	72
5.	<b>METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE SISTEMAS MULTIESTADO .....</b>	<b>74</b>
6.	<b>CASO DE ESTUDIO.....</b>	<b>83</b>
6.1	IDENTIFICACIÓN DE UN MSS.....	83
6.2	SELECCIÓN DE ELEMENTOS.....	84
6.3	DETERMINACIÓN DE MODELOS DE FUNCIONAMIENTO.....	84
6.4	DETERMINACIÓN DE ESTADOS .....	85
6.5	GENERACIÓN DE LA FUNCIÓN DE MASA DE PROBABILIDAD DE LOS ELEMENTOS .....	86
6.6	DETERMINACIÓN DE LA CONFIGURACIÓN DEL SISTEMA .....	87
6.7	VISUALIZACIÓN DIAGRAMA DE BLOQUES .....	87
6.8	DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA DEL SISTEMA .....	88
6.9	DETERMINACIÓN DE LOS OPERADORES GENERADORES UNIVERSALES .....	88
6.10	AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS SIMILARES .....	89
6.11	GENERACIÓN ITERATIVA DE VARIABLES ALEATORIAS .....	90

6.12	DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN DE MASA DE PROBABILIDAD DEL SISTEMA.....	92
6.13	SELECCIÓN DE LOS NIVELES DE DEMANDA.....	92
6.14	ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	92
6.14.1	Aumento de la confiabilidad .....	96
6.14.2	Análisis de costos.....	102
6.15	CONCLUSIONES DEL CASO DE ESTUDIO.....	103
7.	CONCLUSIONES .....	105
8.	BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS .....	107

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1:	Función de densidad de probabilidad de falla $f(t)$ .....	12
Figura 2:	Ciclo de vida de un equipo .....	13
Figura 3:	Función de densidad de probabilidad de Weibull para varios valores de $\beta$ .....	15
Figura 4:	Función de confiabilidad de Weibull $R(t)$ , para distintos valores de $\beta$ .....	16
Figura 5:	Función de tasa de falla de Weibull $\lambda(t)$ , para distintos valores de $\beta$ .....	17
Figura 6:	Diagrama RBD sistema en serie .....	18
Figura 7:	Diagrama RBD sistema en redundancia total .....	18
Figura 8:	Diagrama RDB sistema en redundancia parcial .....	19
Figura 9:	Diagrama RBD sistema en <i>Stand-by</i> .....	19
Figura 10:	Estructura de investigación de sistemas multiestado .....	22
Figura 11:	Ejemplo árbol de falla.....	31
Figura 12:	Diagrama estado-espacio para un elemento multiestado reparable. ....	34
Figura 13:	Ejemplo de generación de variables aleatorias .....	48
Figura 14:	Extrapolación del ciclo de vida de una batería .....	54
Figura 15:	Ventana ideal de operación del SOC .....	55
Figura 16:	Cuadro comparativo modelos MSS .....	63
Figura 17:	Diagrama de la metodología nivel 0 .....	76
Figura 18:	Diagrama de la metodología nivel 1 .....	77
Figura 19:	Diagrama de la metodología nivel 2 .....	79
Figura 20:	Diagrama de la metodología nivel 3 parte 1 .....	81

Figura 21: Diagrama de la metodología nivel 3 parte 2 .....	82
Figura 22: Diagrama de bloque para el sistema de baterías .....	87
Figura 23: simulación Monte Carlo para el sistema de baterías.....	91
Figura 24: Confiabilidad sobre el 80% de SOH para $T = 50[^\circ\text{C}]$ .....	94
Figura 25: Confiabilidad sobre el 80% de SOH para $T = 25[^\circ\text{C}]$ .....	95
Figura 26: SOH vs número de baterías redundantes .....	98
Figura 27: Ejemplo de la primera forma de incorporación de baterías redundantes .....	99
Figura 28: Ejemplo de la segunda forma de incorporación de baterías redundantes .....	99
Figura 29: Ejemplo de la tercera forma de incorporación de baterías redundantes .....	100
Figura 30: Confiabilidad vs número de baterías redundantes .....	100
Figura 31: Costos marginales .....	102

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Valores de los parámetros $k$ a diferentes temperaturas .....	85
Tabla 2: Función de masa de probabilidad de las baterías según estado.....	87
Tabla 3: Función de masa de probabilidad del sistema por simulación Monte Carlo.....	91
Tabla 4: Funciones de masa de probabilidad para $T=50[^\circ\text{C}]$ y $d=1[\text{C}]$ .....	93
Tabla 5: Funciones de masa de probabilidad para $T=50[^\circ\text{C}]$ y $d=0,5[\text{C}]$ .....	93
Tabla 6: Funciones de masa de probabilidad para $T=25[^\circ\text{C}]$ y $d=1[\text{C}]$ .....	94
Tabla 7: Funciones de masa de probabilidad para $T=25[^\circ\text{C}]$ y $d=0,5[\text{C}]$ .....	95
Tabla 8: SOH para distintas cantidades de baterías redundantes .....	97

## 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

La evolución de los vehículos eléctricos (EVs) en los últimos años ha sido extraordinaria, llegando al mercado vehículos como el Nissan Leaf, BMW i3 y el Modelo S de Tesla Motors, este último acelera de 0 a 100 km/h en 2,7 segundos, alcanza una velocidad máxima de 250 km/h y una autonomía de 507 km en una carga, logrando altos estándares de comodidad, diseño y seguridad, bastante cercano a lo que son hoy los automóviles de lujo de combustión interna (Tesla Motors, 2016).

La introducción al mercado de los EVs ha sido exitosa, según la Agencia Internacional de Energía (IEA) la venta ha alcanzado 1.26 millones en 2015 (de donde alrededor de 750 mil corresponde a vehículos puramente eléctricos) 100 veces más que en 2010, sin embargo esto corresponde al 0,1% del mercado automotriz. Se estima que para el año 2030 existan alrededor de 100 millones de vehículos eléctricos (Declaración de Paris sobre la Electro-Movilidad y el Cambio Climático y la Llamada de Acción).

Es importante destacar las ventajas que poseen los EVs por sobre los vehículos convencionales, en primer lugar no producen gases de efecto invernadero de manera local, considerando que el sector del transporte es responsable del 34% de las emisiones totales de CO<sub>2</sub> debido principalmente a combustibles fósiles (Fiori, Ahn & Rakha, 2016), también son altamente eficientes energéticamente, donde el 80% de la energía contenida en la batería es transferida directamente al EV, comparado con solo el 14-26% de la energía utilizada por los vehículos convencionales, además los EVs requieren de menor mantención (Departamento de Energía de los Estados Unidos, 2012), y al poseer un motor eléctrico no producen contaminación acústica. Por lo que en un futuro a mediano-largo plazo, la

industria del transporte se vería revolucionada lo que causaría reales beneficios para la sociedad.

Por otro lado, uno de los mayores problemas que presentan los EVs son sus altos precios, reducida autonomía, recargas que necesitan largos periodos de tiempo y altos costos operativos. Estos problemas se materializan en las baterías de ion de litio (también denominadas baterías de Li-ion) para el almacenamiento de energía eléctrica. Si bien las baterías de Li-ion han disminuido sus costos, de 1.000 USD/kWh en 2008 a 268 USD/kWh en 2015, aumentado su densidad de energía en un 400% en este periodo y mejorado sus tiempos de recarga, se hace vital su continua optimización (IEA, 2016).

Es necesario comprender que el conjunto de baterías que alimentan al EV puede poseer distintas distribuciones de conexión y presentar distintos estados de rendimiento por lo que es necesario considerar un enfoque de Sistemas de Multi-Estados (MSS por sus siglas en inglés) el cual analiza la confiabilidad en la que se encuentra el sistema de baterías dependiendo de la gama de estados que posea, además el MSS posee cuatro formas principales de ser abordado: extensión de métodos binarios para Multi-Estados, métodos de procesos estocásticos, método de la función generadora universal, y método de simulación Monte Carlo (Lisnianski & Levitin, 2003).

Por lo que la pregunta que debe hacerse es: ¿Cómo analizar a las baterías de Li-ion, considerando el enfoque MSS, para conocer su confiabilidad?

## 2. OBJETIVOS

### 2.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollar una metodología para analizar el nivel de confiabilidad de baterías de Li-ion a través de distintos modelos de Sistemas Multi-Estado.

### 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar la teoría clásica de confiabilidad sobre el enfoque de Mantenimiento Basado en Confiabilidad (RCM).
- Investigar los modelos de confiabilidad de Sistemas Multi-Estado, considerando cuatro enfoques principales.
- Realizar un análisis comparativo de modelos de Sistemas Multi-Estado.
- Para los distintos modelos, se buscará abordar la problemática, definiendo una metodología de estudio.
- Ejemplificar la evaluación para la distribución de baterías de Li-ion a través de un caso práctico.

### 3. DESCRIPCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS

#### 3.1 CONFIABILIDAD CLÁSICA

Debido a la sucesión de grandes cambios generados en las últimas décadas, las empresas productivas y de servicios se han visto en la necesidad de incorporar nuevas técnicas en la gestión de sus operaciones.

La confiabilidad es una filosofía de gestión que busca resolver las nuevas dificultades, correspondientes al enorme aumento en cantidad y variedad de activos físicos que deben ser mantenidos, nuevas tecnologías con diseños más complejos de equipos y procesos, y gestión de fallas las cuales provocan elevados costos globales.

“El tiempo de parada de máquina afecta la capacidad de producción de los activos físicos al reducir la producción, aumentar los costos operacionales, y afectar el servicio al cliente.” (Moubray, 2004)

Por lo que se hace necesario comprender la identificación de los costos durante el ciclo de vida de una instalación industrial o equipo. En Arata (2009) se analizan los conceptos más importantes correspondientes a confiabilidad clásica, los cuales se estudiarán a continuación.

##### 3.1.1 Costo de ciclo de vida

El costo de ciclo de vida o *Life Cycle Cost* (LCC) es un método de análisis integral, en donde se determina el costo de una instalación industrial o equipo, desde su adquisición hasta el fin de su vida económica.

Para lograr la determinación de costos, deben ser considerados tanto los costos visibles como los costos ocultos asociados por falta de producción, estos últimos pueden ser causados por fallas en los equipos o producción de productos defectuosos.

La teoría de confiabilidad busca predecir el comportamiento operacional con el objetivo de reducir el costo global de una operación durante todo el ciclo de vida.

Uno de los costos ocultos relevantes es el costo de ineficiencia, éste corresponde al gasto incurrido por motivos de fallas o detenciones no programadas de los equipos o instalaciones, por lo cual no estarían cumpliendo con los estándares previamente establecidos respecto de su capacidad productiva, es decir, se deja de ganar al no producir.

### **3.1.2 Confiabilidad aplicada a sistemas**

Las fallas de un equipo no siempre son asignables a condiciones preestablecidas ni son generadas por causas completamente conocidas, por lo que siguen un comportamiento variable el cual cambia según las características propias de cada componente o equipo. Esto se presenta cuando se analizan las distintas fallas en equipos similares de una instalación industrial bajo regímenes de operación comparables.

Por un lado, las fallas que son de fácil asignación a las causas que las provocaron, pueden ser estudiadas y solucionadas a través del control de los hechos llegando al origen del problema, por otro lado, las fallas por causas propias del componente, equipo o sistema requieren un análisis más complejo, reconociendo al tiempo como variable fundamental la cual produce este comportamiento. Al considerar al tiempo como variable aleatoria, se puede establecer que “la confiabilidad se define como la probabilidad que un elemento funcione, sin fallar, durante un tiempo determinado bajo condiciones ambientales y de entorno preestablecidas” (Arata, 2009).

De este postulado, se desprende que un equipo, en un instante cualquiera de su vida, puede estar solo en dos estados posibles: en funcionamiento o en falla (detenido). Sin embargo, en ocasiones no es posible asignar solamente dos estados a un equipo, sobre todo en sistemas mecánicos, debido a la existencia de estados intermedios donde se logra un cumplimiento parcial de la operación.

En este contexto, una falla corresponde al estado de un equipo que, debido a un incidente o a un conjunto de condiciones, imposibiliten el funcionamiento y/o el cumplimiento de capacidad para la cual el equipo fue originalmente diseñado.

Luego de ser establecidas las condiciones en las que se reconoce que un equipo o sistema se encuentra en funcionamiento o bajo falla, la confiabilidad de un elemento es función únicamente del tiempo, y el comportamiento del elemento depende solamente de la distribución de probabilidades con que la falla pueda modelarse en el tiempo. Por lo que el objetivo principal de un proyecto es aumentar la confiabilidad para minimizar los costos globales.

La función de falla  $f(t)$  o función de densidad probabilística de falla, representa la probabilidad de que un componente o sistema falle en un instante de tiempo  $t$  cualquiera. Además, la probabilidad acumulada de falla  $F(t)$  representa la probabilidad que el equipo o sistema falle en el intervalo de tiempo desde que comenzó a operar hasta un tiempo  $t$ . Por lo que la relación entre la función de falla y la probabilidad acumulada de falla es:

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt \quad (1)$$

Por consiguiente, la confiabilidad viene dada por:

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (2)$$

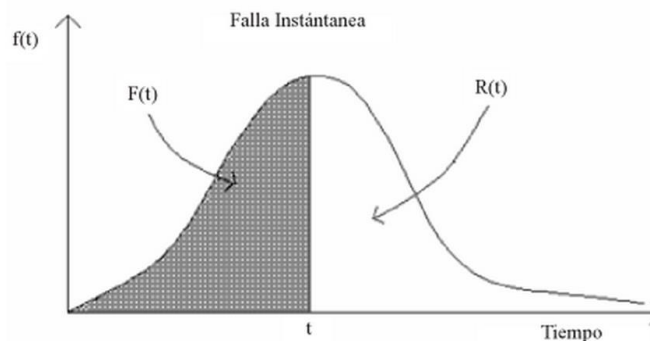


Figura 1: Función de densidad de probabilidad de falla  $f(t)$

Es importante notar que a medida que el tiempo aumenta, mayor es la probabilidad de falla y, por lo tanto, menor es la confiabilidad.

A través de modelos probabilísticos es posible observar el comportamiento de la confiabilidad de un equipo en función del tiempo, el cual puede ser dividido en distintas etapas de vida las cuales tienen relación con la tasa de falla  $\lambda(t)$  del equipo, que es la probabilidad de tener una falla entre los instantes  $t$  y  $t+\Delta t$  a condición de que el sistema haya sobrevivido hasta el tiempo  $t$ .

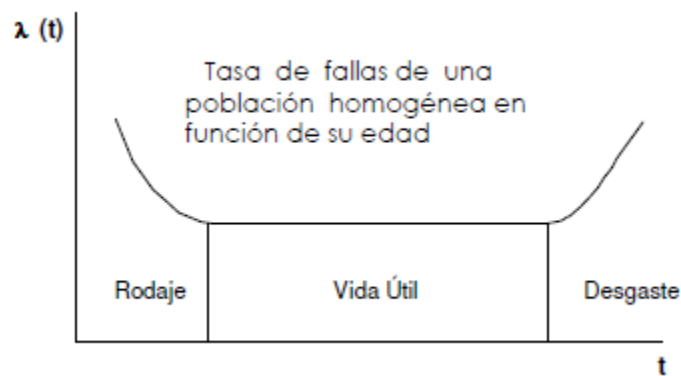


Figura 2: Ciclo de vida de un equipo

La figura anterior presenta la llamada curva de la bañera, en donde en una primera etapa, llamada etapa de rodaje, el equipo es propenso a sufrir fallas debido a distintas razones, tales como equipos defectuosos, instalaciones incorrectas o por falta de un establecimiento firme entre las partes y piezas de un equipo las cuales mejoran a medida que el tiempo transcurre, por lo que la tasa de falla es decreciente, posteriormente el equipo entra a la etapa de vida útil donde la tasa de falla permanece relativamente constante y cada elemento tiene la misma probabilidad de sufrir una falla, finalmente en la etapa de desgaste, el equipo nuevamente se vuelve propenso a fallar, debido a la fatiga o deterioro generalizado, y la su tasa de falla se vuelve creciente a través del tiempo.

La ecuación que relaciona la confiabilidad y la tasa de falla es la siguiente:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (3)$$

Las cuatro funciones fundamentales para el modelamiento de la confiabilidad son  $f(t)$ ,  $F(t)$ ,  $R(t)$  y  $\lambda(t)$ , de donde al conocer una de ellas, es posible determinar las demás.

Una forma de modelar la curva de la bañera es a través de distribuciones probabilísticas, como la que describió detalladamente el ingeniero y matemático sueco Waloddi Weibull.

### 3.1.3 Distribución de Weibull

Conforme al trabajo de Salazar Moreno et. al (2011), se abordarán los conceptos relevantes para la distribución de Weibull.

La función de Weibull tiene la característica de poder tomar distintas formas dependiendo de los valores que adopten sus parámetros, por lo que se genera una gama de distribuciones cuyos casos específicos coinciden con otras distribuciones como la exponencial, gaussiana, o chi-cuadrada, entre otras.

La función de Weibull de densidad está dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{t - \gamma}{\alpha} \right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left( \frac{t-\gamma}{\alpha} \right)^\beta} \quad (4)$$

donde:

$\alpha$  es el parámetro de escala y representa la vida característica.

$\beta$  es el parámetro de forma e indica el mecanismo de falla.

$\gamma$  es el parámetro de localización y representa la vida mínima.

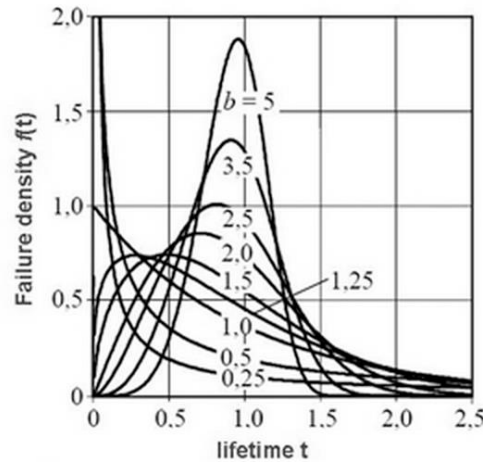


Figura 3: Función de densidad de probabilidad de Weibull para varios valores de  $\beta$

Para valores de  $\beta$  entre 0 y 1,  $f(t)$  decrece monótonamente y es convexa

Para  $\beta = 1$  se obtiene la función exponencial con dos parámetros.

Para  $\beta$  estrictamente mayor a 1,  $f(t)$  asume formas parecidas a la distribución normal, cuyas aplicaciones están ligadas a la tasa de falla de la etapa de desgaste de un equipo.

Por otro lado, una variación del parámetro de escala  $\alpha$ , genera un cambio en la escala de la abscisa, es decir, que para un mismo valor de  $\beta$  y  $\gamma$  en una distribución normal, si  $\alpha$  se incrementa la distribución se contrae y si  $\alpha$  disminuye la distribución se expande.

Por su parte, el parámetro de localización  $\gamma$  sirve para ubicar el inicio de la distribución a lo largo del eje x.

El parámetro  $\beta$  es un número adimensional, mientras que los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  tienen las mismas unidades que  $t$ .

La función de confiabilidad de Weibull viene dada por:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\alpha}\right)^\beta} \quad (5)$$

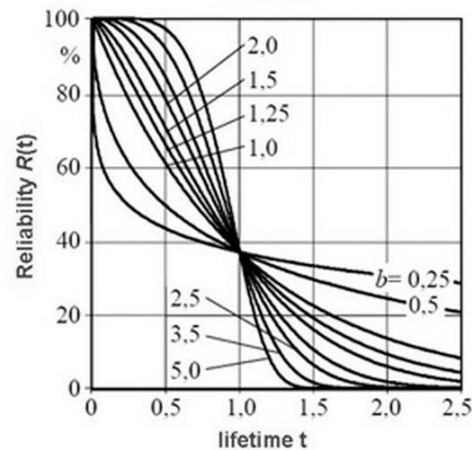


Figura 4: Función de confiabilidad de Weibull  $R(t)$ , para distintos valores de  $\beta$

El equipo al comenzar a funcionar, se supone en buenas condiciones y su confiabilidad corresponde a 1, luego, mientras transcurre el tiempo su confiabilidad irá disminuyendo, en donde para valores de  $\beta$  menores a 1 la función de confiabilidad disminuye de manera asintótica. Se debe notar que para el valor de  $\beta = 1$  la función de confiabilidad toma la forma exponencial.

La función de tasa de falla de Weibull se expresa de la siguiente forma:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{t - \gamma}{\alpha} \right)^{\beta-1} \quad (6)$$

Para valores de  $\beta$  entre 0 y 1, la tasa de falla de Weibull decrece monótonamente a medida que  $t$  tiende al infinito y  $\lambda(t)$  tiende a 0, por lo que coincide con la etapa de rodaje de un equipo el cual su tasa de falla decrece con el tiempo.

Para el valor de  $\beta = 1$ , la tasa de falla se mantiene constante, representando la etapa de vida útil de un equipo.

Para valores de  $\beta$  mayores a 1, la tasa de falla crece cuando  $t$  aumenta, correspondiendo a la etapa de desgaste de un equipo.

Estas tres etapas son posibles observarlas en la siguiente figura:

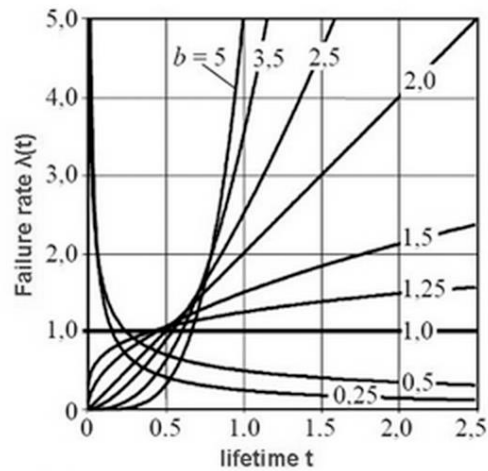


Figura 5: Función de tasa de falla de Weibull  $\lambda(t)$ , para distintos valores de  $\beta$

A través de las funciones descritas es posible conocer el comportamiento de un elemento o equipo, sin embargo, los sistemas pueden estar compuestos por múltiples equipos y el cálculo de la confiabilidad se verá modelada por la configuración que estos equipos presenten. Una forma de abordar este tipo de problemas es a través de la utilización de un diagrama RBD (*Reliability Block Diagram*), el cual se presentará a continuación.

### 3.1.4 Modelo de confiabilidad clásico

Continuando con Arata (2009), para determinar la confiabilidad de un sistema, se debe conocer la complejidad del sistema, esto es, conocer el comportamiento de cada componente y la relación entre ellos. De esta manera se podrá determinar la jerarquización en base a componentes críticos y se podrán orientar estrategias de mantenimiento para el sistema.

Las reglas aplicables a la combinación de probabilidades de elementos son aplicables a la combinación de confiabilidad en sistemas. Es importante destacar que la falla de un elemento que forma parte de un sistema es estadísticamente independiente de que se produzca una falla en otro de los elementos de éste.

La lógica RBD o *Reliability Block Diagram* considera estas reglas y establece una serie de configuraciones posibles para los elementos de un sistema, de forma gráfica a través de bloques conectados entre sí, los cuales representan los elementos del sistema y sus configuraciones.

Las principales configuraciones RBD son las siguientes:

- Sistema en serie: la falla de uno de los elementos implica la falla del sistema.

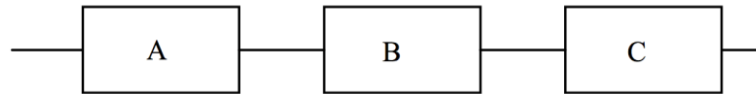


Figura 6: Diagrama RBD sistema en serie

El cálculo de la confiabilidad del sistema en serie viene dado por:

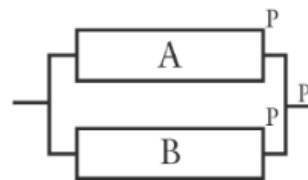
$$R_s(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \quad (7)$$

donde

$R_s(t)$ : confiabilidad del sistema en un tiempo  $t$ .

$R_i(t)$ : confiabilidad del elemento  $i$ -ésimo en un tiempo  $t$ .

- Sistema en redundancia total: cada elemento por sí solo puede soportar el buen funcionamiento del sistema.



P: Potencia requerida

Figura 7: Diagrama RBD sistema en redundancia total

El cálculo de la confiabilidad del sistema en redundancia total viene dado por:

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) \quad (8)$$

- Sistema en redundancia parcial: un grupo de elementos es capaz de soportar el buen funcionamiento del sistema.

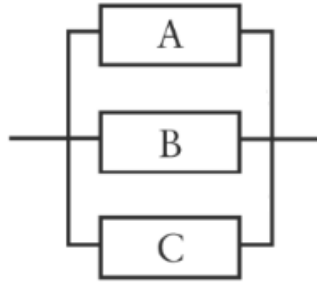


Figura 8: Diagrama RDB sistema en redundancia parcial

El cálculo de la confiabilidad del sistema en redundancia parcial viene dado por:

$$R_s(t) = P(r \leq j \leq n) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} R^j (1 - R)^{n-j} \quad (9)$$

Una cierta cantidad mínima de elementos  $r$ , de la totalidad de  $n$  elementos iguales, debe estar en funcionamiento para alimentar la potencia requerida.  $R$  representa la confiabilidad individual de cada elemento.

- Sistema en *Stand-by*: cada elemento por sí solo puede soportar el buen funcionamiento del sistema, sin embargo, solo uno de ellos opera.

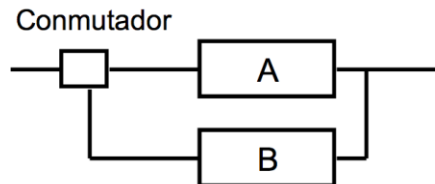


Figura 9: Diagrama RBD sistema en *Stand-by*

La particularidad de este sistema, es que, si falla el equipo que se encuentra operando, el otro comienza a soportar la carga para cumplir con el buen funcionamiento del sistema. Este cambio entre equipos es posible gracias al conmutador.

El cálculo de la confiabilidad del sistema en *Stand-by* viene dado por:

$$R_s(t) = R_A(t) + \int_0^t f_A(\tau)R_B(t - \tau)d\tau \quad (10)$$

En el caso que la confiabilidad del conmutador sea menor a 1, se debe agregar como el producto entre la confiabilidad del sistema en *Stand-by* y la confiabilidad del conmutador.

- Sistema en fraccionamiento: los elementos se reparten de forma proporcional o no la carga de trabajo, siendo posible operar a menos de la carga requerida del sistema, generándose una pérdida de carga.

El diagrama correspondiente a este sistema se representa de igual forma que para sistemas en redundancia parcial.

De acuerdo a Kristjanpoller et al. (2010), el cálculo de la confiabilidad del sistema en fraccionamiento viene dado por:

$$R_s(t) = \sum_{i=1}^n R_i(t)I_i + \left(1 - \sum_{i=1}^n I_i\right) \prod_{i=1}^n R_i(t) \quad (11)$$

donde:

$$I_i = \frac{Q_i}{Q_{requerida}}, \text{ con } Q: \text{ carga.}$$

Cabe señalar que la ecuación (11) considera sistemas sin equipos en exceso, es decir, se cumple que, al eliminar un equipo cualquiera del sistema, éste posee menos del 100% de la carga con todos los demás equipos en funcionamiento a carga máxima.

Junto con la confiabilidad asociada a cada configuración proporcionada por la lógica RBD, es posible determinar la disponibilidad para cada una de estas configuraciones.

### 3.1.5 Disponibilidad de sistemas

La disponibilidad se define como la proporción de tiempo utilizable de una instalación o equipo. Esta proporción viene dada por la relación entre el tiempo en que el equipo puede ser utilizado y el tiempo total, el cual incluye el tiempo de utilización más el tiempo en que el equipo se encuentre no disponible.

$$A = \frac{UT}{UT + DT} \quad (12)$$

Donde  $A$  corresponde a la disponibilidad del sistema o equipo,  $UT$  o *up-time* representa el tiempo utilizable para el funcionamiento del equipo y  $DT$  o *down-time* representa el tiempo fuera de servicio del equipo atribuible a causas técnicas.

Por otro lado, también es posible estimar la disponibilidad a través de la esperanza de los tiempos, en donde se utilizan los conceptos de tiempo medio entre fallas y tiempo medio de reparación. El primero de ellos también conocido como *MTBF* o *Mean Time Between Failures*, corresponde a la esperanza en tiempo de buen funcionamiento del equipo, y el segundo es el *MTTR* o *Mean Time To Repair*, el cual corresponde a la esperanza en tiempo de mantención del equipo, donde se lo repara con el fin de ponerlo en funcionamiento. La disponibilidad esperada está dada por:

$$A = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} \quad (13)$$

El cálculo de disponibilidad en sistemas, a través de los elementos que los componen, es análogo al cálculo de confiabilidad, por lo que se pueden considerar las configuraciones ya descritas.

De manera clásica, tanto la confiabilidad como la disponibilidad se basan en modelos binarios, es decir, solo permiten dos estados funcionales: perfecto funcionamiento (*UP*) y falla total (*DOWN*), lo cual no siempre representa la realidad de las operaciones de una instalación o equipo, ya que éstos pueden presentar múltiples estados funcionales. Esta problemática se abordará a través de un análisis de confiabilidad en sistemas multiestado.

### 3.2 SISTEMAS MULTIESTADO

Lisnianski & Levitin (2003), estudian los sistemas multiestado o MSS (*Multi-State System*) y sus diferentes enfoques, definiendo a los primeros como sistemas en los cuales una variedad de estados son factibles, es decir, que existen sistemas en los que ya no es posible solamente definir dos estados (sistemas binarios), sino que necesitan de estados adicionales para representar de mejor manera la capacidad de cumplir con sus funciones.

Los elementos que componen los MSS, por lo general, también cumplen con ser multiestado. Debido a esto, la falla en algunos de los elementos puede provocar la degradación del MSS y no necesariamente su falla total, por lo que éste operaría a distintos niveles de rendimiento dependiendo a su vez de los distintos niveles de rendimiento de cada uno de sus elementos.

El orden en que se investigará a los sistemas multiestado sigue la siguiente estructura:

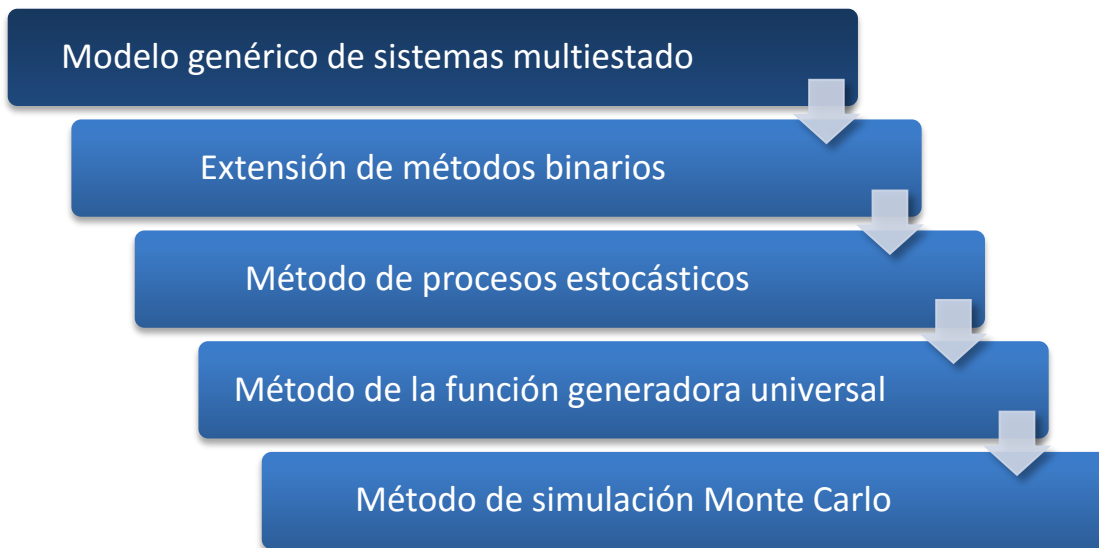


Figura 10: Estructura de investigación de sistemas multiestado

### 3.2.1 Modelo genérico de sistemas multiestado

A través del conocimiento de las características de los elementos que componen un MSS, se puede analizar su comportamiento. Cualquier elemento  $j$  en un MSS posee las siguientes características:  $k_j$  estados diferentes correspondientes a las tasas de rendimiento,  $g_{jh}$  tasas de rendimiento en el estado  $h$ ,  $h \in \{1, 2, \dots, k_j\}$  y  $G_j(t)$  tasa de rendimiento en cualquier instante  $t \geq 0$ , la cual es una variable estocástica. Las tasas de rendimiento pueden ser representadas por el conjunto  $g_j = \{g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jk_j}\}$ , de donde la variable estocástica toma sus valores, por lo que:  $G_j(t) \in g_j$ .

Se define el conjunto  $p_j(t) = \{p_{j1}(t), p_{j2}(t), \dots, p_{jk_j}(t)\}$  como la probabilidad asociada a cada estado del elemento  $j$  en cualquier instante de tiempo, donde  $p_{jh}(t) = Pr\{G_j(t) = g_{jh}\}$  define la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta  $G_j(t)$  en cualquier instante  $t$ . Se puede determinar la distribución de rendimiento del elemento  $j$  para cualquier instante  $t$  usando el conjunto de pares  $g_{jh}, p_{jh}(t), h = 1, 2, \dots, k_j$ .

Una condición necesaria en cuanto a los elementos y sus estados, es que los primeros puedan estar en uno y solo uno de los  $k_j$  estados, es decir, que éstos son eventos mutuamente excluyentes:

$$\sum_{h=1}^{k_j} p_{jh}(t) = 1 \quad (14)$$

La tasa de rendimiento del MSS es determinada por las tasas de rendimiento de los  $n$  elementos que lo componen, estas tasas de rendimiento correspondientes a los estados de los elementos cambian mediante transcurre el tiempo, generando el estado del sistema en el instante  $t$ . Por lo que el estado de todo el sistema es determinado por los estados de sus elementos. De manera análoga a los elementos, el MSS posee las siguientes características:  $K$  estados diferentes correspondientes a las tasas de rendimiento,  $v_i$  tasas de rendimiento en el estado  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, K\}$  y  $V(t)$  tasa de rendimiento en el instante  $t \geq 0$ , la cual es una

variable aleatoria de donde toma sus valores del conjunto  $M = \{v_1, \dots, v_K\}$ . La función de masa de probabilidad del rendimiento de todo el sistema se define como  $q_i(t) = Pr\{V(t) = v_i\}$ .

Para que los estados de los elementos determinen al sistema, se necesita una transformación desde el espacio de las combinaciones posibles de tasas de rendimiento para todos los elementos del sistema  $L^n = \{g_{11}, \dots, g_{1k_1}\} \times \{g_{21}, \dots, g_{2k_2}\} \times \dots \times \{g_{n1}, \dots, g_{nk_n}\}$  al espacio de los valores posibles para la tasa de rendimiento de todo el sistema  $M = \{v_1, \dots, v_K\}$ . Esta transformación es denominada función de estructura del sistema  $\phi(G_1(t), \dots, G_n(t)): L^n \rightarrow M$ .

El modelo genérico de sistemas multiestado se basa en la probabilidad de distribución de rendimientos para todos los elementos del sistema en cualquier instante de tiempo  $t$  y la función de estructura del sistema que produce el proceso estocástico correspondiente al rendimiento de todo el MSS:

$$g_j, p_j(t), 1 \leq j \leq n, \quad (15)$$

$$V(t) = \phi(G_1(t), \dots, G_n(t)). \quad (16)$$

Es importante notar que este simple modelo de MSS, si bien satisface una gran cantidad de aplicaciones, falla al describir algunas características importantes del MSS, tales como el tiempo medio de falla, número promedio de fallas durante el periodo de operación, etc.

A partir del modelo genérico se han desarrollado diferentes enfoques por los cuales se puede abordar un MSS, principalmente son cuatro: extensión de métodos binarios, método de procesos estocásticos, función generadora universal y simulación Monte Carlo.

### 3.2.2 Extensión de métodos binarios

Históricamente el primer método desarrollado y aplicado para la evaluación de confiabilidad en MSS es el enfoque basado en la extensión de modelos binarios (*boolean models*).

Algunos de estos modelos son diagrama de bloques y árbol de falla, los cuales son ampliamente utilizados en análisis de confiabilidad. Estas dos técnicas están muy bien desarrolladas y generalmente son aplicadas para la evaluación de confiabilidad en sistemas complejos de estados binarios.

Para utilizar estas técnicas es necesario comprender el método de *path and cut vectors*, y la función *multi-valued structure*. El método busca determinar la confiabilidad de un sistema a través de vectores de tasas de rendimiento de los elementos que componen el sistema. Mientras que la función transforma el modelo genérico de MSS a un sistema binario equivalente.

#### 3.2.2.1 Método de path and cut vectors

Un sistema de estados binarios puede estar en funcionamiento si un determinado conjunto de elementos se encuentra en funcionamiento, este conjunto de elementos se define como conjunto *path*. De manera similar, un sistema puede fallar si un determinado conjunto de elementos falla, este conjunto de elementos se define como conjunto *cut*. El primer conjunto hace alusión a la capacidad de los elementos de describir una ruta o camino a través de un conjunto de bloques en un diagrama lógico desde la entrada a la salida del diagrama, por otro lado, la eliminación del segundo conjunto representa un corte que interrumpe la continuidad en esta ruta.

Se define un conjunto *path* mínimo como un conjunto *path* en donde al eliminar cualquiera de sus elementos deja de ser un conjunto *path*. Análogamente, un conjunto *cut* mínimo es un conjunto *cut* en donde al eliminar cualquiera de sus elementos deja de ser un conjunto *cut*.

Si un sistema de estados binarios tiene  $s$  conjuntos *path* mínimos, entonces la confiabilidad del sistema puede ser obtenida como:

$$R(t) = Pr\{S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_s\} \quad (17)$$

donde  $S_i$  representa el evento donde todas las unidades pertenecientes al conjunto *path*  $i$  se encuentran en un estado de operación durante el periodo  $[0, t]$ . Debido a que una gran cantidad de conjuntos de ruta pueden existir, la unión de todos estos eventos garantiza la operación exitosa de todo el sistema.

En general, debido a que los conjuntos *path* pueden compartir elementos, es decir, que los conjuntos pueden estar superpuestos, se genera un problema en el cálculo de la confiabilidad del sistema al utilizar (17). Sin embargo, si se hace el supuesto donde los eventos  $S_i$  son mutuamente excluyentes, entonces es posible calcular una cota superior de la confiabilidad del sistema, la que corresponde a  $R(t) \leq Pr(S_1) + \dots + Pr(S_s)$ , la cual realiza una estimación relativamente precisa para valores pequeños de confiabilidad. Pero, debido a que generalmente no es el caso, esta cota no es precisa para el uso en aplicaciones prácticas.

De manera análoga, la confiabilidad en sistemas de estados binarios puede ser determinada a través de conjuntos *cut* mínimos. Si el sistema posee  $c$  conjuntos *cut* mínimos, la confiabilidad del sistema puede ser obtenida como:

$$R(t) = 1 - Pr\{C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_c\} \quad (18)$$

donde  $C_c$  representa el evento en que todas las unidades pertenecientes al conjunto *cut*  $c$  falle durante el periodo de operación  $[0, t]$ . El término  $Pr\{C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_c\}$  representa la probabilidad en que todo el sistema falle antes del tiempo  $t$ .

Existe un problema con el cálculo de la confiabilidad del sistema al utilizar (18), debido a que los conjuntos *cut* al igual que en el caso de los conjuntos *path*, pueden no ser disjuntos, lo que induciría únicamente al cálculo de una cota inferior de la confiabilidad del sistema si se considera a los eventos  $C_i$  mutuamente excluyentes:  $R(t) \geq 1 - [Pr(C_1) + \dots + Pr(C_c)]$ . Debido a que, en general, la mayoría de los elementos poseen valores de

confiabilidad altos durante las operaciones, la técnica de cotas inferiores posee una mejor representación de la confiabilidad del sistema.

El concepto de conjuntos *path* y conjuntos *cut* que son utilizados en sistemas binarios, pueden ser extendidos para sistemas multiestado. En donde cada estado del MSS está representado por el vector de tasas de rendimiento de los elementos, es decir, que los conjuntos *path* y los conjuntos *cut* dejan de ser una representación del funcionamiento o falla de los elementos y se convierten en vectores los cuales consideran las múltiples tasas de rendimiento de estos elementos.

Considerando un MSS coherente el cual consiste en elementos numerados de manera consecutiva de 1 a  $n$ . Se definen los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  los cuales representan el rendimiento de los elementos. Usando la convención que:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} > \mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \quad (19)$$

lo cual significa que  $x_i \geq y_i, i = 1, 2, \dots, n$  y existe al menos un  $i$  tal que  $x_i > y_i$ .

Se define  $\mathbf{y}$  como un vector *path* para un nivel de demanda  $w$  si  $\phi(\mathbf{y}) \geq w$ . Un vector *path*  $\mathbf{y}$  es mínimo para un nivel  $w$  si  $\phi(\mathbf{x}) < w$  para todo  $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ .

Se define  $\mathbf{y}$  como un vector *cut* para un nivel de demanda  $w$  si  $\phi(\mathbf{y}) < w$ . Un vector *cut*  $\mathbf{y}$  es mínimo para un nivel  $w$  si  $\phi(\mathbf{x}) \geq w$  para todo  $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ .

Recordando el modelo genérico de sistemas multiestado el cual se basa en la probabilidad de distribución de rendimientos para todos los elementos del sistema en cualquier instante de tiempo  $t: g_j, p_j(t), 1 \leq j \leq n$  y la función de estructura del sistema que produce el proceso estocástico correspondiente al rendimiento de todo el MSS:  $V(t) = \phi(G_1(t), \dots, G_n(t))$ . Se define la confiabilidad  $R(w)$  para un MSS no reparable a un nivel de demanda constante  $w$  como la probabilidad que la tasa de rendimiento del sistema sea mayor o igual a  $w$ :

$$R(w) = Pr\{\phi(G_1, \dots, G_n) \geq w\} \quad (20)$$

Para MSS reparables, la probabilidad  $Pr\{\phi(G_1, \dots, G_n) \geq w\}$  representa la confiabilidad  $R(w)$  del sistema, donde la dificultad reside en la determinación de las probabilidades  $p_{jh}$  para cada elemento considerando su reparación.

Debido a que los estados del sistema son mutuamente excluyentes, se puede calcular las probabilidades de los estados correspondientes a cada vector *path* y *cut* como el producto de las probabilidades de los estados de los elementos. Por lo que la confiabilidad puede ser calculada utilizando (17) o (18).

### 3.2.2.2 Función multi-valued structure

El MSS puede ser representado usando sistemas binarios equivalentes. Por lo que se realizarán modificaciones tanto a las características de los elementos como al sistema completo. Entonces, comenzando por el elemento  $j$ , su tasa de rendimiento  $G_j \in \{g_{j1}, \dots, g_{jk_j}\}$  corresponde a la variable entera  $X_j \in \{0, \dots, k_j - 1\}$  por lo que el evento  $G_j = g_{jh}$  corresponde al evento  $X_j = h - 1$  (consecuentemente  $p_{jh} = Pr\{G_j = g_{jh}\} = Pr\{X_j = h - 1\}$ ). El vector aleatorio entero  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$  representa los estados de todos los elementos del sistema.

En cuanto al sistema, su función de estructura  $\phi(X)$  se define de una forma tal que el rendimiento estocástico de todo el sistema  $V \in \{v_1, \dots, v_K\}$  corresponde a la variable entera  $\phi(X) \in \{0, \dots, K - 1\}$  y el evento  $V = v_i$  corresponde al evento  $\phi(X) = i - 1$  ( $q_i = Pr\{V = v_i\} = Pr\{\phi(X) = i - 1\}$ ).

Luego,  $\phi$  es una función discreta tal que:

$$\phi: \{0, \dots, k_1 - 1\} \times \{0, \dots, k_2 - 1\} \times \dots \times \{0, \dots, k_n - 1\} \rightarrow \{0, \dots, K - 1\} \quad (21)$$

Si los estados de los elementos que componen el MSS determinan el estado de éste, entonces cuando todos los elementos del sistema se encuentren en los peores estados o fallen, entonces el sistema completo se encontrará en el peor estado o fallará, y cuando todos los elementos del sistema se encuentren en los mejores estados o perfecto

funcionamiento, entonces el sistema completo se encontrará en el mejor estado o perfecto funcionamiento. Por lo que se pueden definir las siguientes condiciones de borde:

$$\phi(0, 0, \dots, 0) = 0 \text{ y } \phi(k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_n - 1) = K - 1 \quad (22)$$

En aplicaciones de confiabilidad, la función discreta  $\phi(X)$  se define en concordancia a (21), (22) y es llamada función *multi-valued structure*.

Para calcular la confiabilidad de todo el MSS para un cierto nivel de demanda  $w$ , se utilizará la siguiente expresión general:

$$R(w) = Pr\{\phi(X) \geq w\} = E\{1(\phi(X) \geq w)\} \quad (23)$$

Donde  $E$  es el valor medio de la función de variable binaria  $1(\phi(X) \geq w)$ .

De acuerdo a (23), la probabilidad  $p_w$  en que el rendimiento del sistema corresponderá a un nivel  $w \in \{0, 1, \dots, K - 1\}$ , puede ser obtenida como:

$$p_w = Pr\{\phi(X) = w\} = R(w) - R(w + 1) \quad (24)$$

Para representar la función *multi-valued structure* en términos de variables binarias, se definen las siguientes variables las cuales representarán los estados de los elementos y de todo el MSS:

$$Y_{jh} = 1(X_j \geq h), j \in \{1, 2, \dots, n\}, h \in \{0, 1, \dots, k_j - 1\} \quad (25)$$

$$Z_i = 1(\phi(X) \geq i), i \in \{0, 1, \dots, K - 1\} \quad (26)$$

De acuerdo a estas definiciones el estado del elemento  $j$  puede ser obtenido a través de la sumatoria:

$$X_j = \sum_{h=0}^{k_j-1} Y_{jh} \quad (27)$$

y el estado de todo el MSS con una función de estructura monótona puede ser obtenido a través de la sumatoria:

$$\phi(X) = \sum_{i=0}^{K-1} Z_i \quad (28)$$

El vector de variables binarias  $Y = (Y_{11}, \dots, Y_{1k_1-1}, Y_{n1}, \dots, Y_{nk_n-1})$  determina completamente el estado del MSS.

Para obtener la confiabilidad del sistema es posible aplicar los métodos de diagrama de bloques y árbol de fallas, donde se considera el MSS como un sistema binario con función de estructura  $Z_w(Y)$  para cualquier nivel de demanda  $w$ . La confiabilidad del MSS para el nivel de demanda  $w$  puede ser obtenido como:

$$R(w) = E(Z_w(Y)) = Pr\{Z_w(Y) = 1\} \quad (29)$$

### 3.2.2.3 Diagrama de bloques para MSS

Recordando la lógica RBD mencionada anteriormente, ésta consta de un conjunto de bloques que representan los elementos pertenecientes a un sistema, los cuales poseen la información necesaria para calcular la confiabilidad de cada uno de ellos, por otro lado, las conexiones entre estos bloques representan las interacciones entre ellos, con lo que finalmente se logra determinar la confiabilidad del sistema.

Un conjunto de  $n$  bloques conectados en serie puede ser representado por un único bloque con su estado a través de  $\prod_{j=1}^n X_j$ . Por otro lado, un conjunto de bloques conectados en paralelo puede ser representado por un único bloque a través de  $1 - \prod_{j=1}^n (1 - X_j)$ . Si los bloques son estadísticamente independientes, la confiabilidad del sistema puede ser calculada al reemplazar cada variable  $X_j$  por la probabilidad  $p_j = Pr\{X_j = 1\}$ .

Luego, para extender esta lógica a un sistema multiestado, se debe construir el diagrama de bloques acorde a la función de estructura  $Z_w(Y)$ , de esta forma se podrá determinar la confiabilidad para un nivel de demanda  $w$ , luego se puede calcular su probabilidad utilizando (24).

Cabe destacar que para calcular la confiabilidad utilizando lo anteriormente descrito, las variables  $Y_{jh}$  deben ser estadísticamente independientes y las variables correspondientes al mismo elemento no pueden aparecer más de una vez.

### 3.2.2.4 Árboles de falla para MSS

Los árboles de falla son una representación de una serie de eventos conectados, en donde se muestran los distintos caminos en los que un sistema puede fallar. Por otro lado, los árboles de éxito son aquellos que representan una serie de eventos conectados, en donde se muestran los distintos caminos en los que un sistema puede tener éxito. Un MSS puede ser abordado desde estas dos perspectivas, sin embargo, los métodos de construcción y análisis son en principio los mismos para ambos casos.

Se analizará el método de árbol de falla, el cual es un enfoque ampliamente usado en evaluación de la confiabilidad para sistemas de estados binarios. Uno de los eventos de este enfoque, es el llamado evento *TOP*, el cual se encuentra en la parte superior del árbol de falla y representa la falla del sistema, a partir de este evento se determinan de manera deductiva los eventos que contribuyen a la causa del evento *TOP*, a través de un camino que los conecta con este último.

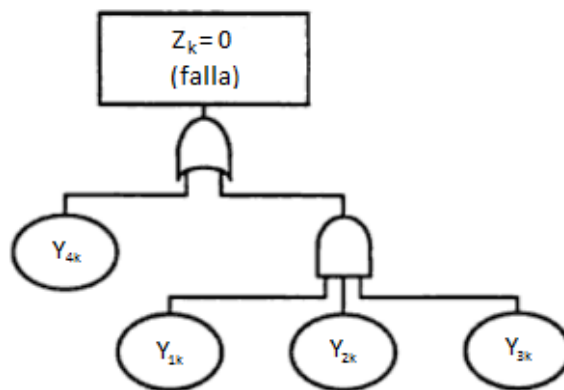


Figura 11: Ejemplo árbol de falla

La construcción de un árbol de falla comienza con un proceso lógico/cualitativo, el cual necesita información tal como el diseño del sistema y su operación, el historial de operaciones, información sobre las fallas, etc., con la intención de determinar los conjuntos

*cut* mínimos, los cuales de manera cuantitativa pueden calcular la probabilidad del evento *TOP* basada en la definición (18) de la confiabilidad del sistema.

Si el sistema de estados binarios se compone de  $c$  conjuntos *cut* mínimos  $C_i$  ( $i = 1, \dots, c$ ). El valor de la función de estructura binaria  $\phi(X)$  puede ser calculada como:

$$\phi(X) = \prod_{i=1}^c [1 - \prod_{j \in C_i} (1 - X_j)] \quad (30)$$

Si los elementos de estados binarios son estadísticamente independientes y cada elemento no aparece en más de un conjunto *cut* mínimo, entonces la confiabilidad es:

$$R(w) = E(\phi(X)) = \prod_{i=1}^c [1 - \prod_{j \in C_i} (1 - p_j)] \quad (31)$$

Luego, para extender esta lógica a un sistema multiestado, se debe construir el árbol de falla acorde a cada nivel de demanda  $w$ , en donde el evento *TOP* es  $Z_w = 0$  y cada evento de falla es  $Y_{jk} = 0$  para el elemento  $j$  de nivel  $k$ .

### 3.2.3 Método de procesos estocásticos

Según Lisnianski, Frenkel & Ding (2010), un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias ordenadas en una secuencia dada. Esta secuencia puede ser escrita como  $X(t)$ , donde  $t$  es el índice del proceso, el cual puede ser el tiempo.

Los valores que asume la variable aleatoria  $X(t)$  son llamados estados, y el conjunto de todos los posibles valores generan el espacio de estados del proceso,  $S$ . Entonces, un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias  $\{X(t) | t \in T\}$ , definida en un espacio de probabilidades dado, indexado por el parámetro  $t$ , donde  $t$  varía dentro del conjunto de índices  $T$ .

Luego, el conjunto de los estados del proceso  $S$  puede ser continuo o discreto, así como también el conjunto de índices  $T$ , por lo que los procesos estocásticos pueden ser

clasificados en cuatro categorías. Si el conjunto de estados,  $S$ , es discreto, entonces los procesos estocásticos correspondientes a estas categorías, independiente de la naturaleza del conjunto de índices  $T$ , son llamados procesos de estados discretos o cadenas.

### 3.2.3.1 Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son procesos estocásticos de estados discretos, donde la probabilidad de la variable aleatoria  $X(t_n)$  en el tiempo  $t_n > t_{n-1}$  depende del valor de la variable aleatoria en  $t_{n-1}$  pero no de la realización del proceso anterior a  $t_{n-1}$ , por lo que este proceso también es llamado “sin memoria”.

Una cadena de Markov de tiempo continuo  $\{X(t) | t \geq 0\}$ , donde  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ , posee una función de masa de probabilidad condicional tal que:

$$\begin{aligned} \Pr\{X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1, X(t_0) = x_0\} \\ = \Pr\{X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \end{aligned} \quad (32)$$

Donde  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \in S = \{1, 2, \dots, k\}$ .

Se definen las probabilidades de transición como:

$$\Pr\{X(t + \Delta t) = s | X(t) = h\} = \pi_{hs}(t, t + \Delta t) \quad (33)$$

La cual es la probabilidad de cambiar desde un estado  $h$  en un tiempo  $t$  a un estado  $s$  en un tiempo  $t + \Delta t$ . Luego, es posible definir a la función de intensidad de transición:

$$a_{hs}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_{hs}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (34)$$

Adicionalmente es posible construir la matriz de intensidad de transiciones,  $\mathbf{a}$ , la cual contiene todas las posibles transiciones de la función de intensidad de transición.

Las transiciones de estado en un sistema son causadas por la falla o reparación de sus componentes, por lo que la función de intensidad de transición correspondería a la tasa de falla  $\lambda(t)$  en caso que  $h > s$  y a la tasa de reparación  $\mu(t)$  en caso que  $h < s$ .

Luego, utilizando el concepto de función de masa de probabilidad del modelo genérico y omitiendo el subíndice para el elemento  $j$ , se tiene que  $p_h(t) = Pr\{G(t) = g_h\}$  es la probabilidad de estado de la tasa de rendimiento del elemento, con  $h = 1, \dots, k$ .

Para encontrar las probabilidades de estado  $p_h(t)$  en un proceso de Markov homogéneo, se puede utilizar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dp_h(t)}{dt} = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq h}}^k p_s(t)a_{sh} - p_h(t) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq h}}^k a_{hs} \quad (35)$$

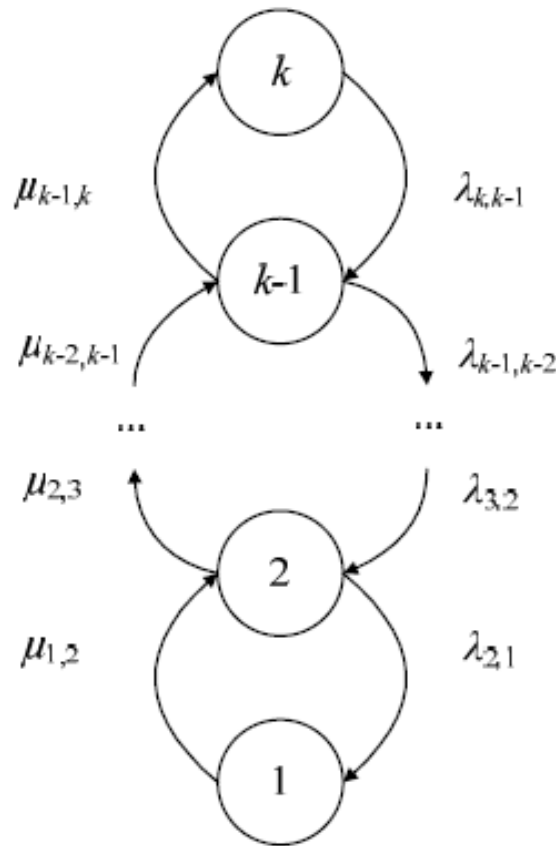


Figura 12: Diagrama estado-espacio para un elemento multiestado reparable.

De donde la función de intensidad de transición corresponde a las tasas de falla y de reparación, por lo que se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1(t)}{dt} &= p_2(t)\lambda_{21} - p_1(t)\mu_{12} \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= p_1(t)\mu_{12} + p_3(t)\lambda_{32} - p_2(t)(\lambda_{21} + \mu_{23}) \\ &\dots \\ \frac{dp_k(t)}{dt} &= p_{k-1}(t)\mu_{k-1,k} - p_k(t)\lambda_{k,k-1}\end{aligned}\tag{36}$$

Considerando el estado inicial en  $k$  con el mejor rendimiento, se impone la condición inicial  $p_k(0) = 1, p_{k-1}(0) = \dots = p_2(0) = p_1(0) = 0$ .

También, se puede conocer las probabilidades del estado final o de estado estacionario, cuando  $p_h = \lim_{t \rightarrow \infty} p_h(t)$ , en donde si el límite existe, el proceso es llamado ergódico y el lado izquierdo de las ecuaciones diferenciales de (36) se vuelven cero, por lo que se reduce a un sistema de  $K$  ecuaciones lineales. Sin embargo, estas ecuaciones no son linealmente independientes, por lo que se requiere utilizar la ecuación independiente (14) en donde la suma de las probabilidades de los estados es igual a 1 en cualquier instante de tiempo. Luego, al considerar esta última ecuación y las ecuaciones lineales, es posible encontrar las probabilidades de estado estacionario de una cadena de Markov de tiempo continuo.

Cabe destacar que las transiciones estudiadas comprenden solamente fallas y reparaciones menores, es decir, que es posible realizar transiciones solo entre estados contiguos. Por otro lado, los tiempos de transición entre estados deben distribuirse de manera exponencial, en caso contrario, se debe aplicar la aproximación a través del modelo de semi-Markov, en donde se deben resolver  $K^2$  número de ecuaciones integrales, donde  $K$  es el número de estados del MSS.

### 3.2.3.2 Algoritmo de evaluación de confiabilidad

Para aplicar el método de procesos estocásticos, utilizando la técnica de Markov para la evaluación de confiabilidad de sistemas multiestado, se deben seguir dos pasos: en

primer lugar, desarrollar el diagrama de estado-espacio de todo el sistema y luego, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales asociada al diagrama.

Se debe considerar que los procesos de Markov para distintos elementos son independientes y puede haber solo una falla o una reparación en el sistema para cualquier instante de tiempo.

El algoritmo que puede ser usado para la generación del modelo de Markov es el siguiente:

### 1. Organización de los conjuntos de tasas de falla y reparación

Para cada elemento  $j$  que pertenece al MSS, las tasas de falla y las tasas de reparación deben tener el siguiente orden:

$$\{\lambda_{k_j, k_j-1}^{(j)}, \lambda_{k_j, k_j-2}^{(j)}, \dots, \lambda_{k_j, 1}^{(j)}, \lambda_{k_j-1, k_j-2}^{(j)}, \lambda_{k_j-1, k_j-3}^{(j)}, \dots, \lambda_{k_j-1, 1}^{(j)}, \dots, \lambda_{3, 2}^{(j)}, \lambda_{3, 1}^{(j)}, \lambda_{2, 1}^{(j)}\}$$

$$\{\mu_{1, 2}^{(j)}, \dots, \mu_{1, k_j-1}^{(j)}, \mu_{1, k_j}^{(j)}, \mu_{2, 3}^{(j)}, \dots, \mu_{2, k_j-1}^{(j)}, \mu_{2, k_j}^{(j)}, \dots, \mu_{k_j-2, k_j-1}^{(j)}, \mu_{k_j-2, k_j}^{(j)}, \mu_{k_j-1, k_j}^{(j)}\}$$

Sin embargo, si las fallas y reparaciones son menores, entonces se tiene:

$$\{\lambda_{k_j, k_j-1}^{(j)}, \lambda_{k_j-1, k_j-2}^{(j)}, \dots, \lambda_{3, 2}^{(j)}, \lambda_{2, 1}^{(j)}\} \text{ y } \{\mu_{1, 2}^{(j)}, \mu_{2, 3}^{(j)}, \dots, \mu_{k_j-2, k_j-1}^{(j)}, \mu_{k_j-1, k_j}^{(j)}\}$$

En general, si para el elemento  $j$  no existe alguna falla o reparación que disminuya o aumente el rendimiento de éste, entonces la tasa correspondiente es igual a cero.

### 2. Generación de los estados del MSS

El sistema puede tener  $K = k_1 k_2 \dots k_n$  combinaciones de estado debido a las combinaciones posibles de tasas de rendimiento para todos los elementos del sistema, se debe asignar un conjunto  $\{g_{1m}, \dots, g_{nl}\}$ ,  $m \in [1, k_1], \dots, l \in [1, k_n]$  para cada estado del sistema.

### 3. Enumeración de los estados del sistema y determinación de la tasa de rendimiento del sistema

Todos los estados del sistema deben ser enumerados. Debe determinarse para cada estado  $i$  la tasa de rendimiento del sistema,  $v_i$ ,  $i \in \{1, \dots, K\}$  a través de la función de estructura del sistema:

$$v_i = \varphi(g_{1m}, \dots, g_{nl}), i = 1, \dots, K$$

### 4. Análisis de estado-transición y generación de la matriz de intensidad de transiciones

Se deben determinar las relaciones entre los estados del sistema,  $i$ , donde estas relaciones son definidas por las fallas y reparaciones de los elementos del sistema.

Considerando el supuesto de que no puede haber transiciones simultáneas para cualquiera de los elementos de un sistema, la transición desde un estado arbitrario del sistema caracterizado por su conjunto de rendimientos  $\{g_{1m}, \dots, g_{jh}, \dots, g_{nf}\}$  es posible solo a uno de los estados en el cual solo uno de los elementos ha cambiado su rendimiento:

$$\{g_{1m}, \dots, g_{jh}, \dots, g_{nf}\} \rightarrow \{g_{1m}, \dots, g_{js}, \dots, g_{nf}\}, \text{ donde } h \neq s, 1 \leq j \leq n$$

Recordando que si  $h > s$  entonces la transición es una falla del elemento  $j$  con transición de intensidad  $\lambda_{hs}^{(j)}$ , y si  $h < s$  entonces la transición es una reparación del elemento  $j$  con transición de intensidad  $\mu_{hs}^{(j)}$ .

Luego, para determinar todas las transiciones del diagrama estado-espacio del MSS, se deben tomar los pares de estados donde éstos difieran únicamente debido al cambio de estado de uno de sus elementos, considerando las tasas de falla y las tasas de rendimiento correspondientes.

Para generar la matriz de intensidad de transiciones,  $\mathbf{a}$ , se seguirán las siguientes reglas:

Si el MSS va desde el estado 1 al estado 2 debido a una falla del elemento  $j$  con una intensidad  $\lambda_{hs}^{(j)}$  ( $h > s$ ), entonces el elemento  $a_{12}$  de la matriz de transiciones  $\mathbf{a}$ , se encontrará en la fila 1 columna 2 y será:  $a_{12} = \lambda_{hs}^{(j)}$ .

Si el MSS va desde el estado 1 al estado 2 debido a una reparación del elemento  $j$  con una intensidad  $\mu_{hs}^{(j)}$  ( $h < s$ ), entonces el elemento  $a_{12}$  de la matriz de transiciones  $\mathbf{a}$ , se encontrará en la fila 1 columna 2 y será:  $a_{12} = \mu_{hs}^{(j)}$ .

Si la transición entre el estado 1 al estado 2 no existe, entonces el elemento  $a_{12}$  de la matriz de transiciones  $\mathbf{a}$ , que se encuentra en la fila 1 columna 2 es cero:  $a_{12} = 0$ .

##### 5. *Determinación de los elementos de la diagonal de la matriz de intensidad de transiciones*

Finalmente, debido a que la suma de los elementos en una fila de la matriz de intensidad de transiciones es cero, los elementos de la diagonal de la matriz son:

$$a_{ii} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^K a_{in}, i = 1, \dots, K \quad (37)$$

Luego, al ser resuelto el sistema de ecuaciones diferenciales y al ser encontradas las probabilidades para todos los estados del sistema  $p_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , se considera el nivel de demanda  $w$  para el cálculo de la disponibilidad instantánea del MSS:

$$A(t) = \sum_{i=1}^K p_i(t) \cdot 1(v_i \geq w) \quad (38)$$

Finalmente para encontrar la confiabilidad  $R_i(t)$  para un nivel de demanda  $w$ , donde  $g_i < w < g_{i+1}$ , los estados que se encuentren bajo el nivel de demanda deben ser agrupados en un estado absorbente 0, es decir, que las transiciones desde este estado no

están permitidas, además la intensidad de transición desde cualquier estado aceptable hacia el estado absorbente 0, será la suma de las intensidades de transición desde el estado aceptable a todos los estados inaceptables. Una vez realizados estos cambios en la matriz de intensidad de transiciones, se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales, encontrando la probabilidad del estado absorbente  $p_0(t)$  y determinando la confiabilidad como:

$$R(t) = 1 - p_0(t) \quad (39)$$

### 3.2.4 Método de la función generadora universal

Continuando con Lisnianski et al. (2010), el método de la función generadora universal (UGF) permite encontrar la distribución de rendimiento de todo el MSS a través de las distribuciones de rendimiento de sus elementos al utilizar procedimientos algebraicos.

El enfoque UGF se basa en procedimientos recursivos simples e intuitivos, y provee un método sistemático para la enumeración de los estados del sistema. Además, se basa en un enfoque que está directamente relacionado con funciones generadoras, las cuales son utilizadas en teoría de probabilidades.

#### 3.2.4.1 Función generadora

Se define a la función generadora de una variable aleatoria  $X$  (Feller 1970) como:

$$\varphi_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad (40)$$

Donde  $p_k = \Pr\{X = k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , cumpliéndose que  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ .

Una propiedad importante de las funciones generadoras es que la distribución resultante de variables aleatorias independientes es el producto de las funciones generadoras de estas variables:

$$\varphi_{\sum_{h=1}^n X_i}(z) = \prod_{h=1}^n \varphi_{X_h}(z) = \sum_{h_1=1}^{k_1} \sum_{h_2=1}^{k_2} \dots \sum_{h_n=1}^{k_n} (p_{1h_1} p_{2h_2} \dots p_{nh_n}) z^{(x_{1h_1} + x_{2h_2} + \dots + x_{nh_n})} \quad (41)$$

Otra propiedad útil es que para encontrar  $\Pr\{X \leq k\}$  solo deben ser sumadas las probabilidades de los respectivos coeficientes de las potencias de  $z$  que sean menores o iguales a  $k$ :

$$\Pr\{X \leq k\} = \left[ \frac{1}{z^k} \varphi_X(z) \right]_{z=1} = \sum_{h=0}^k p_h \quad (42)$$

#### 3.2.4.2 Función generadora universal (UGF)

Sea la función- $u$  que representa las funciones de masa de probabilidad de  $n$  variables aleatorias  $X_j$  como:

$$u_j(z) = u_{X_j}(z) = \sum_{h=1}^{k_j} p_{jh} z^{x_{jh}}, j = 1, 2, \dots, n \quad (43)$$

Donde  $p_{jh} = \Pr\{X_j = x_{jh}\}$ .

Luego, para obtener la función- $u$  que representa la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria que es función de otras variables aleatorias independientes  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , con  $q_i = \prod_{h=1}^{k_j} p_{jh}$  y  $y_i = f(x_{1h_1}, x_{2h_2}, \dots, x_{nh_n})$ , donde  $i = 1, 2, \dots, K$ , se define el operador generador universal (UGO) como:

$$U(z) = \otimes_f (u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z)) \\ = \sum_{h_1=1}^{k_1} \sum_{h_2=1}^{k_2} \dots \sum_{h_n=1}^{k_n} \left( \prod_{j=1}^n p_{jh_j} \right) z^{f(x_{1h_1} + x_{2h_2} + \dots + x_{nh_n})} \quad (44)$$

La interpretación para un MSS, considerando el modelo genérico, es que cada elemento  $j$ , donde  $j = 1, 2, \dots, n$ , puede ser representado por su función  $u_j(z)$  que

determina las tasas de rendimiento  $x_{jh}$  junto a sus correspondientes probabilidades  $p_{jh}$ , donde  $h = 1, 2, \dots, k_j$ . Por otro lado, la función de estructura del MSS  $\phi(G_1, G_2, \dots, G_n)$  queda representada por el operador generador universal  $U(z)$  el cual determina las tasas de rendimiento  $y_i$  del sistema junto a sus correspondientes probabilidades  $q_i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, K$ , con  $K = \prod_{j=1}^n k_j$ .

Las funciones- $u$  son llamadas funciones generadoras universales, si y solo si un operador generador universal está definido para éstas.

Una UGF  $U(z, t)$  asociada a la distribución de rendimiento de un MSS en cualquier instante de tiempo puede ser escrita como:

$$U(z, t) = \sum_{i=1}^K q_i(t) z^{v_i}, t \geq 0 \quad (45)$$

De donde es posible obtener la disponibilidad instantánea del sistema para una demanda constante  $w$  según:

$$A(t, w) = \sum_{i=1}^K p_i(t) 1(F(v_i, w) \geq 0) \quad (46)$$

Donde  $F(v_i, w)$  es la función de aceptabilidad, la cual se define como:

$$1(F(v_i, w) \geq 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } F(v_i, w) \geq 0 \\ 0, & \text{si } F(v_i, w) < 0 \end{cases} \quad (47)$$

Si existen las probabilidades estado-estable  $p_{i\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)$  de los  $K$  estados del sistema, entonces se puede determinar la disponibilidad de estado-estable  $A_\infty$  del MSS. Por lo que para un nivel de demanda constante  $w$ , la disponibilidad del sistema será igual a la suma de probabilidades asociadas a los exponentes de  $z$  que sean mayores al nivel de demanda.

### 3.2.4.3 Técnicas de optimización para UGF

El cálculo de las funciones de masa de distribución de la función  $f(X_1, \dots, X_n)$  al utilizar (43) se basa en un enfoque enumerativo, en donde pueden existir funciones complejas que posean una gran cantidad de variables aleatorias, generando una gran cantidad de términos difíciles de calcular de manera explícita. Sin embargo, existen dos formas de optimización, agrupación de términos similares y procedimiento recursivo, los cuales al ser utilizados en conjunto pueden disminuir el número de términos a trabajar.

La primera técnica de optimización se basa en que las funciones- $u$  poseen la propiedad de los polinomios de agrupar términos similares. Una función- $u$  que representa una función de masa de probabilidad de una variable aleatoria  $X$  que posee los términos  $p_h z^{x_h}$  y  $p_m z^{x_m}$  en donde  $x_h = x_m$ , los términos pueden ser reemplazados por un único término  $(p_h + p_m)z^{x_m}$ , ya que  $\Pr\{X = x_h\} = \Pr\{X = x_m\} = p_h + p_m$ .

La segunda técnica de optimización es el procedimiento recursivo de determinación de la función- $u$ , la cual se basa en la propiedad asociativa que poseen varias funciones de estructura que son usadas en confiabilidad. La técnica recursiva indica que se puede determinar la función- $u$  de un subsistema que contiene varios elementos básicos y luego, se puede considerar el subsistema como un elemento para obtener la función- $u$  de un subsistema mayor.

Finalmente, al incorporar estas dos técnicas se reduce el número de términos al agruparlos y además, se consideran únicamente las combinaciones de términos que serán utilizadas al crear funciones- $u$  intermedias, de esta forma se puede llegar a simplificar en gran medida el número de términos que deben ser considerados.

### 3.2.4.4 UGF para MSS serie-paralelo

Las funciones de estructura de un conjunto de subsistemas que poseen elementos en serie y/o paralelo pueden representar a la función de estructura de un sistema más complejo debido a la propiedad asociativa de estas funciones. Por lo tanto, a través de la técnica

recursiva, se pueden asociar los operadores generadores universales sobre los subsistemas en serie-paralelo para obtener la función- $u$  del sistema.

En un sistema en serie de  $n$  elementos independientes, la capacidad total será igual a la capacidad del elemento que posea el peor rendimiento, por lo tanto, la función de estructura del sistema será:

$$\phi_{serie}(G_1, \dots, G_n) = \min\{G_1, \dots, G_n\} \quad (48)$$

Para efecto de ejemplificar la técnica recursiva sobre elementos en serie de un sistema, se considerarán cuatro elementos de los cuales se determinará la función de estructura del sistema utilizando operadores generadores universales:

$$\begin{aligned} & \otimes \left( \otimes \left( \otimes (u_1(z), u_2(z)), u_3(z) \right), u_4(z) \right) \\ \phi_{serie} & \left( \phi_{serie} \left( \phi_{serie} (u_1(z), u_2(z)), u_3(z) \right), u_4(z) \right) \\ & = \otimes \left( \otimes (u_1(z), u_2(z)), \otimes (u_3(z), u_4(z)) \right) \\ \phi_{serie} & \left( \phi_{serie} (u_1(z), u_2(z)), \phi_{serie} (u_3(z), u_4(z)) \right) \end{aligned}$$

Además, puede ser considerada cualquier permutación de las funciones- $u$  de los elementos del sistema.

En un sistema en paralelo de  $n$  elementos independientes, la capacidad total será igual a la suma de las capacidades de los elementos del sistema, por lo tanto, la función de estructura del sistema será:

$$\phi_{paralelo}(G_1, \dots, G_n) = \sum_{j=1}^n G_j \quad (49)$$

En el caso que solo pueda ser utilizado un canal de los  $n$  posibles canales para la transmisión de flujo, se debe elegir el canal con la mejor capacidad de transmisión:

$$\phi_{paralelo}(G_1, \dots, G_n) = \max\{G_1, \dots, G_n\} \quad (50)$$

Finalmente, para determinar los índices de confiabilidad de todo el sistema, se puede recurrir al siguiente algoritmo:

1. Encuentre los subsistemas series y paralelos puros del MSS.
2. Obtenga las funciones- $u$  de estos subsistemas utilizando los correspondientes operadores generadores universales:  $\phi_{serie}^{\otimes}$  y  $\phi_{paralelo}^{\otimes}$ .
3. Reemplace el subsistema por un único elemento, obteniendo la función- $u$  para dicho subsistema.
4. Si el MSS resultante posee más de un elemento, vuelva al paso 1.

La función- $u$  obtenida de este algoritmo corresponde al rendimiento de todo el sistema.

### 3.2.5 Método de simulación Monte Carlo

El método de simulación Monte Carlo se utiliza para analizar escenarios inciertos y provee análisis probabilísticos de diferentes situaciones. Varios softwares han acelerado la adopción del método para distintos campos como las matemáticas, ingeniería, finanzas, etc.

El método se basa en realizar múltiples muestreos aleatorios y en el análisis estadístico para el cálculo de resultados. Se identifican distribuciones estadísticas asociadas a datos, de donde se toman muestras aleatorias para cada una de estas distribuciones, las cuales representarán los valores de entrada o parámetros, y para cada conjunto de estos valores se obtiene un conjunto de valores de salida. Luego, a través de análisis estadísticos de los valores de salida, se toman decisiones (Raychaudhuri, 2008).

Generalmente este método sigue las siguientes etapas:

1. Generación del modelo estático, el cual es un modelo determinístico similar al escenario real, en donde se toman los valores de entrada y a través de relaciones matemáticas se obtienen los valores de salida.

2. Identificación de la distribución de datos, la distribución de los datos será lo que le agregue el factor de riesgo al modelo, para su identificación se usará información histórica y procedimientos estadísticos estándar.
3. Generación de variables aleatorias, se generará un conjunto de números aleatorios desde estas distribuciones, los cuales corresponderán a un valor de entrada para el modelo determinístico el cual entregará valores de salida. Este proceso es repetitivo y es la esencia de la simulación Monte Carlo.
4. Análisis y toma de decisiones, se procede a un análisis estadístico de los valores de salida para la toma de decisiones.

#### 3.2.5.1 Algoritmo Monte Carlo

La generación del modelo estático puede estar basada en la resolución de ecuaciones deterministas, donde se recomienda utilizar ecuaciones diferenciales parciales cuando la dimensión del estado-espacio es pequeña. Por otro lado, cuando la complejidad numérica es alta se hace necesario utilizar métodos estocásticos (Graham & Talay, 2013).

Un enfoque probabilístico permite desarrollar métodos numéricos los cuales su complejidad solo aumente de manera lineal. La integral  $I$  permite la siguiente representación probabilística:

$$I = \int_{[0,1]^d} f(U_1, \dots, U_d) dU_1 \dots dU_d = \mathbb{E}f(U_1, \dots, U_d) \quad (51)$$

Donde  $U_i$  son variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en el intervalo  $[0,1]$ . La Ley Fuerte de los Grandes Números, la cual describe el resultado de realizar el mismo experimento una gran cantidad de veces, donde el promedio de los resultados obtenidos se vuelve más cercano al valor esperado mientras más experimentos se realicen, declara que  $I$  puede ser aproximada de la siguiente manera:

$$\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N f(U_1^{(l)}, \dots, U_d^{(l)}) \quad (52)$$

La técnica que consiste en aproximar una cantidad determinista por un promedio de valores aleatorios es llamada método Monte Carlo, el cual simula variables aleatorias independientes  $U_i^{(l)}$  distribuidas uniformemente en el intervalo  $[0,1]$  para  $1 \leq i \leq d$  y  $1 \leq l \leq N$ , con  $N$  “suficientemente grande” para obtener una buena precisión, y hacer que  $d$  aumente de manera lineal.

### 3.2.5.2 Identificación de distribuciones

Continuando con Raychaudhuri, para la identificación de las distribuciones de los parámetros se utilizan métodos numéricos, posteriormente se corrobora a través de la bondad de ajuste del modelo estadístico (tests de chi cuadrado, Kolmogórov-Smirnov).

El método de máxima verosimilitud realiza inferencias de los parámetros que componen la distribución de probabilidad de un conjunto de datos los cuales son idénticos e igualmente distribuidos (iid).

Sea  $f_\psi$  la función de densidad/masa de probabilidad según el tipo de distribución (continua o discreta), luego la función de verosimilitud de obtener una muestra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de una distribución viene dada por:

$$L(\psi) = f_\psi(x_1, x_2, \dots, x_n | \psi) \quad (53)$$

La cual es la función de densidad/masa de probabilidad conjunta de los parámetros, por otro lado, dada la independencia de los datos, la función puede ser expresada como:

$$L(\psi) = \prod_{i=1}^n f_\psi(x_i | \psi) \quad (54)$$

El método de máxima verosimilitud busca el valor de  $\psi$  para maximizar  $L(\psi)$  a través del siguiente problema de optimización no lineal sin restricciones:

$$\max LL(\psi) = \sum_{i=1}^n \ln f_\psi(x_i | \psi), \psi \in \Psi \quad (55)$$

Donde  $\Psi$  representa el dominio de cada parámetro de la distribución.

Existen otros métodos para la identificación de la distribución como el método de los momentos, el cual estima parámetros de población como la media, la varianza, la mediana, y otros parámetros que no correspondan a momentos, a través de ecuaciones entre momentos obtenidos de muestras y momentos de población no observable (ecuaciones teóricas). Otro método es la optimización no lineal, la cual estima parámetros desconocidos de la distribución como las variables de decisión. Este método utiliza distintas funciones objetivo como la minimización de la bondad de ajuste, minimización de la diferencia de la suma de los cuadrados de los momentos de la muestra, o la minimización de la diferencia de la suma de los cuadrados de los percentiles (cuartiles o deciles) de la muestra, también se pueden agregar restricciones para facilitar la formulación del modelo de optimización.

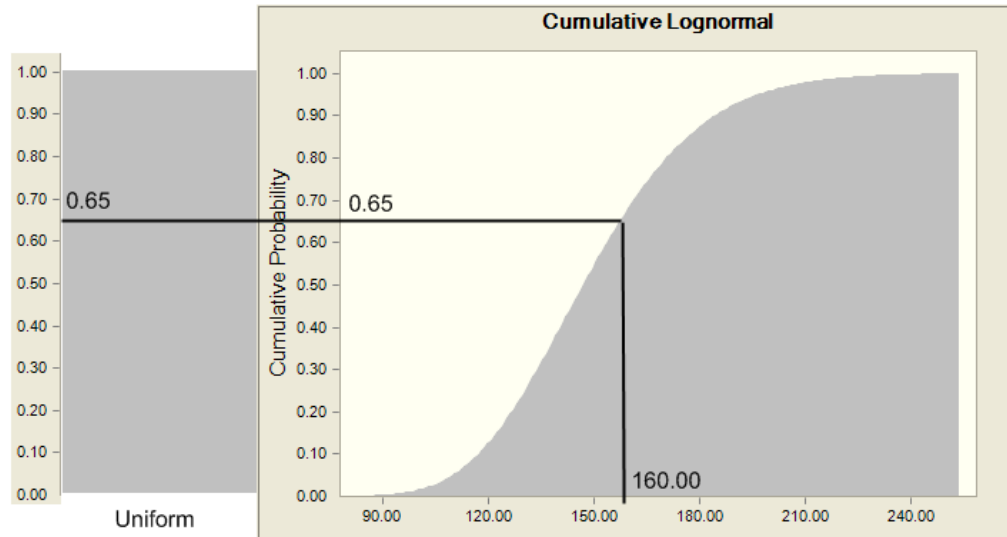
### 3.2.5.3 Generación de variables aleatorias

En esta etapa, se buscarán generar números aleatorios entre 0 y 1 para una distribución uniforme, los cuales serán utilizados para la generación de variables aleatorias.

La generación de números aleatorios  $R$  uniformemente distribuidos en  $[0,1)$  es actualmente un importante problema que se investiga de manera activa. Sin embargo, se utilizan distintos tipos de algoritmos de generación de números pseudo-aleatorios, el primero de ellos fue propuesto por von Neumann, el cual genera un número pseudo-aleatorio a partir de un número precedente al utilizar una función apropiada:  $R_{k+1} = g(R_k)$ . Otros algoritmos de generación de números pseudo-aleatorios son los de Niederreiter, Sobol y Mersenne Twister (Zio, 2013).

Luego, al contar con un flujo continuo de números aleatorios distribuidos uniformemente, se podrán obtener números aleatorios desde una distribución a través diferentes métodos.

El método de la transformación inversa utiliza la inversa de la función acumulada de probabilidad  $F^{-1}$ , y convierte un número aleatorio entre 0 y 1 a un valor aleatorio para la distribución de entrada, es decir, entrega la variable aleatoria  $X = F^{-1}(U)$ , donde  $U \sim U(0,1)$ . Es exactamente este procedimiento el cual debe repetirse múltiples veces para poder encontrar de manera las variables acordes a la distribución necesaria.



**Figura 13: Ejemplo de generación de variables aleatorias**

El ejemplo de la figura 13, muestra que para un número generado de manera aleatoria (en este caso 0,65) que sigue una distribución uniforme, corresponde al valor de 160 en la curva de la función acumulada de probabilidad lognormal.

También existen otros métodos de generación de variables aleatorias, como el método de composición, método de convolución y método de rechazo.

Cuando no es posible obtener una distribución, debido a una forma complicada de la distribución, falta de datos, etc. es posible utilizar otra forma de generación de variables aleatorias, conocida como *Bootstrapped Monte Carlo*, la cual es una técnica de remuestreo para estimar la precisión de las muestras tomando estas de forma aleatoria de un conjunto de datos, donde realmente no se está generando variables aleatorias, sino que, se elige uno de los datos del conjunto obtenido.

#### 3.2.5.4 Análisis y toma de decisiones

El modelo que resulta de la simulación Monte Carlo tras la realización de múltiples pruebas (números aleatorios) para cada variable aleatoria, puede ser analizado estadísticamente. El análisis de la simulación explica que: Los promedios de las pruebas son el valor esperado para cada variable, por otro lado, al agrupar las pruebas por tamaño y

mostrar los valores como un histograma de frecuencias se entrega la forma aproximada de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria. Las pruebas pueden ser utilizadas como una distribución empírica y por lo tanto, calcular los percentiles y otras estadísticas. Los valores obtenidos se los puede relacionar con una distribución, a la cual se le pueden calcular sus momentos utilizando estadística teórica, de donde se pueden obtener intervalos de confianza. Finalmente, la precisión de los valores esperados de las variables y la aproximación a la forma de la distribución se pueden mejorar conforme se realice un mayor número de pruebas.

Para el caso de la aplicación en confiabilidad, se pueden evaluar las distribuciones de falla y reparación de los elementos de un sistema, donde los números aleatorios son generados para estas distribuciones y el resultado es analizado de manera estadística para proporcionar la confiabilidad del sistema.

### 3.3 BATERÍAS DE LI-ION

Las baterías de Li-ion también llamadas baterías de ión de litio, poseen el mejor potencial electroquímico de entre las baterías (como las alcalinas o de zinc-carbono), por lo que pueden alcanzar altas densidades de energía y potencia en aplicaciones como la automotriz y energía de respaldo las cuales necesitan altos requerimientos.

Algunas ventajas de las baterías de Li-ion por sobre las demás es que poseen un alto voltaje, 3.6 Volts, por lo que se necesitan una menor cantidad, así se generan menos conexiones y menos elementos electrónicos asociados (una batería de Li-ion puede reemplazar tres baterías NiCad o NiMH que solo alcanzan los 1.2 Volts). También poseen una alta densidad de energía, bajo peso, se cargan rápidamente, mantienen un voltaje constante sobre el 80% de su curva de descarga, baja tasa de auto-descarga, largo ciclo de vida. Por otro lado, algunas de sus desventajas son sus altos costos y su estabilidad química, ésta última debido a que el litio es altamente reactivo, por lo que se deben tomar las medidas de seguridad necesarias haciendo uso de sistemas de gestión de baterías (BMS) para mantener a las baterías dentro de una ventana segura de operaciones y para asegurar largo ciclos de vida.

#### 3.3.1 Estado de carga (SOC)

El estado de carga o *state of charge* (SOC) es un indicador, que mide en porcentaje, la carga de la batería en el corto plazo, es decir, es la cantidad de energía restante en comparación a la cantidad de energía cuando la batería estaba completamente cargada.

Es importante destacar que la capacidad de la batería disminuye gradualmente conforme transcurre el tiempo de su ciclo de vida, es decir, que aunque la batería se cargue completamente después de haber tenido varios ciclos de carga y descarga, ya no alcanzará el 100% de su capacidad (Electropaedia, 2015).

Existen distintos métodos para el cálculo del SOC, uno de ellos es el método de Conteo de Coulomb, el cual calcula la carga restante acumulando la carga transferida hacia

o desde la batería, por lo que el SOC es el porcentaje de la carga que se puede entregar  $Q_{entregable}$  en el corto plazo sobre la carga nominal  $Q_{nom}$ :

$$SOC = \frac{Q_{entregable}}{Q_{nom}} 100\% \quad (56)$$

Adicionalmente, es posible calcular el indicador que relaciona la carga entregada  $Q_{entregada}$  con la carga nominal, llamado profundidad de descarga o *depth of discharge* (DOD), el cual correspondería al complemento del SOC (Soon, Moo, Chen, & Hsieh, 2009).

$$DOD = \frac{Q_{entregada}}{Q_{nom}} 100\% \quad (57)$$

Y por lo tanto, se puede realizar la aproximación:  $SOC(t) = 100\% - DOD(t)$ .

### 3.3.2 Estado de salud (SOH)

El estado de salud o *state of health* (SOH) es un indicador, que mide en porcentaje, la capacidad efectiva de la batería en el largo plazo respecto de su capacidad nominal, esto debido a que a medida que transcurre el tiempo, la capacidad efectiva de la batería disminuye.

El SOH refleja la condición general de la batería y su habilidad para entregar energía con un cierto nivel de rendimiento en comparación a una batería nueva (Electropaedia, 2015).

Una batería completamente cargada posee la máxima cantidad de carga entregable posible  $Q_{max}$ , por otro lado, posee su carga nominal  $Q_{nom}$ . El cálculo del SOH se obtiene al dividir estas cargas (Soon et al, 2009):

$$SOH = \frac{Q_{max}}{Q_{nom}} 100\% \quad (58)$$

Donde  $Q_{max} = Q_{nom} - Q_{des}$ , y  $Q_{des}$  es la carga desvanecida producto de la temperatura, número de ciclos y de la tasa de descarga.

Se propone un modelo de pérdida de carga el cual considera la temperatura y el número de ciclos en que la batería fue cargada/descargada:

$$Q_{perdida}(T, N) = SOC_{perdida} \cdot Q_{nom} \quad (59a)$$

$$\frac{dSOC_{perdida}}{dN} = k_1 N + k_2 \quad (59b)$$

Donde  $Q_{perdida}$  representa la carga perdida debido a la temperatura  $T$  y número de ciclos  $N$ . El parámetro  $k_1$  explica la carga perdida que se incrementa rápidamente durante ciertas condiciones como realizar ciclos a altas temperaturas, y  $k_2$  explica la carga perdida bajo condiciones normales de realizar ciclos. Sin embargo, este cálculo puede ser utilizado para una baja tasa de descarga  $d$  por lo que debe ser actualizado considerando lo siguiente:

$$Q_{perdida}(d) = k_3 d \quad (60)$$

Finalmente, considerando las ecuaciones (58) y (59), es posible calcular el SOH como (Liu, Tan, & Leng, 2015):

$$SOH = 1 - \left( \frac{1}{2} k_1 N^2 + k_2 N \right) - \frac{k_3}{Q_{nom}} d \quad (61)$$

De esta forma, es posible obtener los distintos niveles de rendimiento para las baterías de Li-ion en función a los parámetros  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , el número de ciclos, la carga nominal y la tasa de descarga, a modo de porcentajes.

La tasa de descarga  $d$ , se expresa en  $C$  para poder realizar una normalización con la capacidad de la batería.  $C$  es una medida de la tasa en la cual la batería se descarga respecto de su capacidad máxima.  $1[C]$  significa que la corriente de descarga, descargará la batería en 1 hora.

El número de baterías que utiliza un EV es mayor a 100, por lo que se puede considerar que el SOH del sistema de baterías presenta una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$  en

cualquier instante de tiempo, debido al teorema del límite central, el cual explica que dado ciertas condiciones, la media aritmética de un número suficientemente grande de iteraciones de variables aleatorias independientes, cada una con una esperanza y varianza bien definidas, tendrán una distribución aproximadamente normal. De esta forma el SOH calculado en (60) corresponde a la media  $\mu$ . Luego, debido a que el SOH no puede ser mayor a 1, la desviación estándar  $\sigma$  será cero al inicio y posteriormente se irá incrementando a medida que el SOH disminuya según la siguiente relación:

$$\sigma = \frac{1 - \mu}{6} = \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{1}{2} k_1 N^2 + k_2 N \right) - \frac{k_3}{Q_{nom}} d \right] \quad (62)$$

A partir de la media y la desviación estándar, es posible calcular la función de densidad de probabilidad para una distribución normal de una batería, que pertenece a un sistema de baterías con más de 100 de éstas.

### 3.3.3 Confiabilidad en baterías de Li-ion

Existen dos factores intrínsecos de las baterías de Li-ion que generan una disminución en su rendimiento, por un lado el desgaste provocado por la utilización de éstas al ocurrir ciclos de carga-descarga, y por otro lado, el deterioro producto del tiempo y la temperatura lo que genera cambios químicos y físicos irreversibles, independientes de su uso. Por lo tanto, las baterías de Li-ion disminuyen su capacidad máxima de carga, no alcanzando su capacidad nominal, aun cuando estén cargadas “completamente”, su rendimiento ya habrá disminuido. Por lo que es fácil de entender que las baterías presenten distintas tasas de rendimiento que luego pueden ser agrupadas en estados.

Por otro lado, ya que la tecnología de litio de alta potencia es relativamente nueva, no se cuenta con información concreta y confiable acerca del deterioro del contenido químico que poseen las baterías, el cual genera el desgaste de éstas, por lo que los fabricantes realizan extrapolaciones acerca del rendimiento de las baterías.

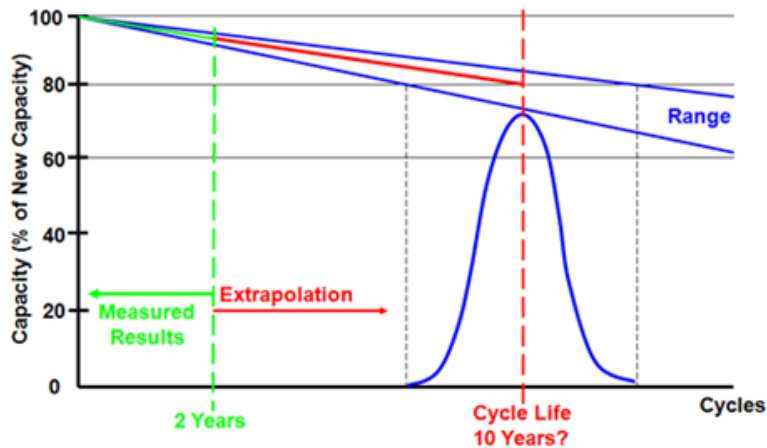


Figura 14: Extrapolación del ciclo de vida de una batería

Un concepto comúnmente aceptado acerca de la vida útil de la batería es el ciclo de vida de la batería, el cual se define como el número de ciclos que una batería puede realizar antes que su capacidad disminuya bajo el 80% de su capacidad inicial, es decir, un SOH del 80%. Esto no quiere decir que la batería deje de funcionar de manera repentina, ya que probablemente su capacidad puede seguir disminuyendo de manera lineal hasta agotarse (Electropaedia, 2015).

Sin embargo, en la industria de los vehículos eléctricos, es necesario considerar una serie de factores que afectarán el rendimiento de las baterías, además de sus factores intrínsecos, algunos de estos son el ambiente (altas y bajas temperaturas, alta presión, alta humedad), estrés mecánico o vibraciones que puedan causar corto circuitos o falla en sellos de seguridad, modo de uso/manejo (duración y cambios de velocidades).

Además es importante considerar la ventana de operación de las baterías de Li-ion para evitar que ocurran fallas, la cual comprende entre los 2 y los 4,2 Volts y temperaturas alrededor de -10 y 80 °C. Si el voltaje es menor a 2 Volts puede generar corto circuitos y pérdida de capacidad de carga debido al deterioro de los materiales del electrodo, por otro lado, si el voltaje es mayor a 4,2 Volts puede generar pérdidas de capacidad de carga de manera irreversible debido a una falla llamada *lithium plating*, donde el litio metálico se acumula y queda depositado en la superficie del ánodo. Luego, si las baterías son expuestas a temperaturas menores a los -10 °C, puede ocurrir la misma falla que a un alto voltaje, *lithium plating*, y si son expuestas a temperaturas mayores a los 80 °C se puede llegar a

romper la *SEI layer*, la cual es esencial para la estabilidad de la batería ya que modera la tasa de descarga y restringe corriente.

También se debe tomar en cuenta la ventana de operaciones para el SOC, es decir, el nivel de carga de la batería en el corto plazo, la cual comprende entre el 20% y el 90% de la carga de la batería. Donde al poseer una carga bajo del 20%, puede generar alto estrés de descarga y baja eficiencia de descarga, por otro lado, al estar por sobre el 90%, se generan alto estrés de carga, alto riesgo de sobrecarga, baja potencia de carga y baja eficiencia de descarga, por lo que estos factores reducen la vida útil de la batería.

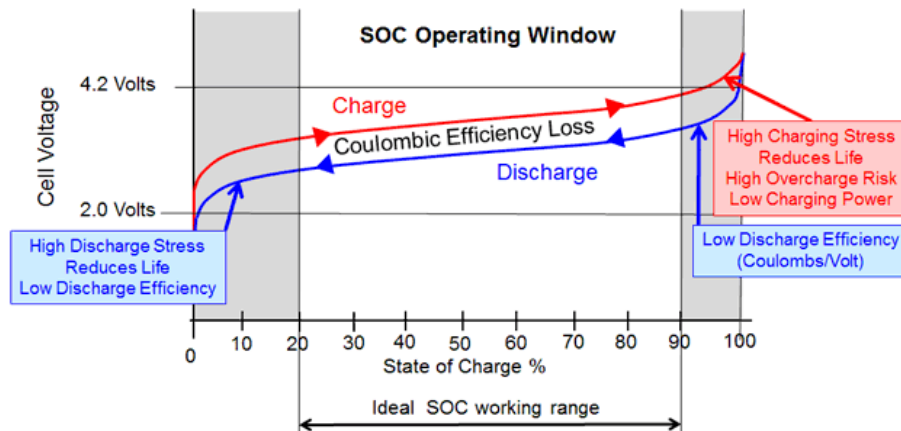


Figura 15: Ventana ideal de operación del SOC

Por lo que se hace necesario considerar altos estándares de confiabilidad para contrarrestar los factores de riesgo antes mencionados, algunas de estas medidas son la utilización de las baterías de Li-ion únicamente con altos SOH, poseer un sistema de monitoreo de baterías y la incorporación de baterías redundantes.

Para la industria automotriz, el BMS (*Battery Management System*) es esencial debido a que no solo se reduce al acto de monitorear y proteger a la batería, sino que también incluye desde el control de carga de la batería hasta el mantenimiento programado, realizando mediciones de voltaje, temperatura y balanceo de baterías, además el BMS debe ser de rápida acción, interactuando con otros sistemas como la gestión del motor, sistemas del control climático, sistemas de comunicación y sistemas de seguridad. De esta manera se

protege a la batería de daños, se prolonga su vida útil y se la mantiene en un estado óptimo para cumplir con los requerimientos especificados.

Finalmente, una forma efectiva de aumentar la confiabilidad del conjunto de baterías de Li-ion es a través de la incorporación de baterías redundantes, es decir, un sistema posee una mayor cantidad de baterías que las estrictamente necesarias, con la intención de asegurar el normal funcionamiento del sistema, por lo que se estará prolongando la vida útil del sistema, sin embargo esto genera que el sistema sea de mayor tamaño, más complejo y de mayor costo, por lo que se hace necesario evaluar el número de baterías de respaldo.

### 3.3.4 Baterías redundantes

De acuerdo a Liu et al. (2015), se define un sistema de baterías como un conjunto de  $m \times n$  baterías, el cual es capaz de satisfacer los requerimientos de un EV dado, considerando la cantidad de energía y número de ciclos de carga/descarga. Por otro lado, se define un sistema de baterías con baterías activas redundantes como un conjunto de  $(m + \Delta m) \times (n + \Delta n)$  baterías. Al primer sistema de baterías se lo llamará sistema I y al sistema con baterías redundantes se lo llamará sistema II.

Debido a este aumento en el número de baterías del sistema I, es necesario calcular los nuevos parámetros para el modelo del SOH obtenido en (60). En primer lugar, ya que el EV requiere el mismo nivel de potencia independiente del sistema I o II, las tasas de descarga para las baterías de ambos sistemas se relacionan de la siguiente manera:

Si se agregan  $\Delta m$  filas al sistema II, la nueva tasa de descarga de cada batería corresponderá a:

$$d_{nueva} = \frac{m}{m + \Delta m} \times d \quad (63)$$

Donde  $d$  es la corriente de descarga individual en el sistema I. Si se agregan  $\Delta n$  columnas al sistema II, la nueva tasa de descarga corresponderá a:

$$d_{nueva} = \frac{n}{n + \Delta n} \times d \quad (64)$$

Luego, si se agregan  $\Delta m$  filas y  $\Delta n$  columnas al sistema II, se tiene que:

$$d_{nueva} = \frac{mn}{(m + \Delta m)(n + \Delta n)} \times d \quad (65)$$

Estas relaciones son independientes de la configuración de las baterías en cualquiera de los sistemas.

En segundo lugar, y de manera similar a las relaciones de las tasas de descarga, se debe analizar el nuevo número máximo de ciclos de carga/descarga que los sistemas de baterías suministrarán al EV para un mismo nivel de potencia, la relación es la siguiente:

$$N_{nuevo} = \frac{mn}{(m + \Delta m)(n + \Delta n)} \times N \quad (66)$$

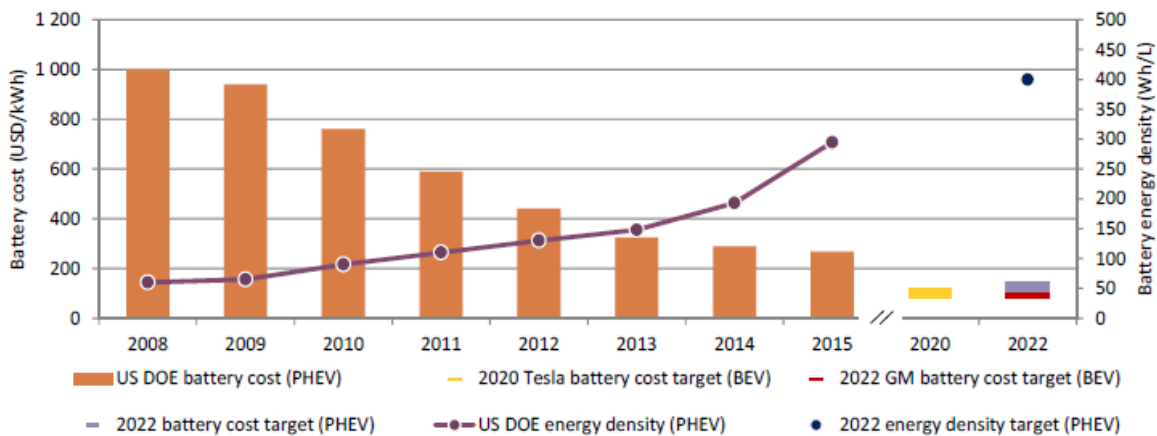
Donde  $N$  corresponde a número de ciclos de carga/descarga del sistema I.

De esta manera disminuyen la tasa de descarga y el número de ciclos de carga/descarga, generando un aumento en el SOH de todo el sistema de baterías, y por consiguiente, un aumento en la confiabilidad de éste.

Cabe destacar que dependiendo de las relaciones de conexión entre baterías, es decir, de su configuración, éstas podrán aumentar su voltaje o corriente. Un sistema de baterías conectadas en serie posee un voltaje equivalente a la suma de los voltajes de cada batería, mientras que su corriente es igual a la corriente de una única batería. Por otro lado, un sistema de baterías conectadas en paralelo posee una corriente equivalente a la suma de las corrientes de cada batería, mientras que su voltaje es igual al voltaje de una única batería. Los sistemas de baterías pueden poseer una combinación de estas configuraciones, con el fin de asegurar niveles de corriente y voltaje necesarios para el correcto funcionamiento del EV.

### 3.3.5 Costos en las baterías de Li-ion

Según el Departamento de Energía de Estados Unidos, las baterías de Li-ion han disminuido sus costos, de 1.000 USD/kWh en 2008 a 268 USD/kWh en 2015, y se espera que para el 2022 llegue a los 125 USD/kWh para que de esta forma, los EV puedan ser competitivos, según costos, con los vehículos convencionales. También, en el periodo 2008-2015, la baterías de Li-ion han aumentado su densidad energética de 60 Wh/L a 295 Wh/L (IEA, 2016).



La empresa *General Motors (GM)*, la cual posee el vehículo eléctrico *Chevrolet Bolt*, espera tener un costo de 100 USD/kWh para sus baterías de Li-ion en el año 2022, mientras que la empresa *Tesla Motors*, la cual es conocida por sus vehículos eléctricos *Model S*, ha establecido romper la marca de 100 USD/kWh para el año 2020.

Por otro lado, un EV cuenta con miles de baterías de Li-ion, por ejemplo, el *Model S P85D* de *Tesla Motors* cuenta con un total de 7.104 baterías Panasonic modelo 18650 (Warner, 2015) de 3.400 [mAh] y 3,6 [V] cada una, las cuales se encuentran agrupadas en 16 módulos, donde cada uno posee 6 baterías en serie y 74 baterías en paralelo (Pastor-

Fernández, Bruen, Widanage, Gama-Valdez, & Marco, 2016), generándose una energía de 86,95 kWh. Por lo que el costo de una de estas baterías de Li-ion, considerando un costo de 268 USD/kWh, sería de 3,28 USD aproximadamente.

Luego, para hacer una relación sobre qué porcentaje del costo de un vehículo eléctrico son las baterías, se procederá a realizar un cálculo simple:

$$7.104 * 3,28 = 23.300 \text{ USD}$$

Donde el precio del *Tesla Model S P85D* es de alrededor de 105.400 USD, por lo que el porcentaje que corresponde a las baterías es del 22% del precio del EV, considerando que la empresa obtiene un margen por la venta, el costo de las baterías corresponde a un porcentaje menor, lo cual es coherente con los comentarios hechos por JB Straubel, Director Tecnológico de Tesla Motors (Bullis, 2013).

## 4. ANÁLISIS Y APLICACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS

Se procederá al análisis de los cuatro métodos de sistemas multiestado descritos anteriormente con el fin de poder compararlos y tomar decisiones al momento de ser aplicados. También, se realizará la aplicación de los modelos MSS a un sistema de baterías de Li-ion.

### 4.1 ANÁLISIS DE MODELOS MSS

Según Lisnianski et al. (2010), la principal dificultad del análisis de confiabilidad para sistemas multiestado es la “Maldición de la Dimensión” (*Dimension Damnation*) debido a que cada elemento que compone un sistema puede tener varios estados diferentes.

Comenzando con el primer modelo estudiado, extensión de métodos binarios, éste presenta una forma extensiva de abordar un MSS, por lo que implica enumerar de manera explícita un gran número de estados, lo cual consume tiempo, sin embargo es un método de fácil comprensión y el rendimiento del sistema puede ser determinado de manera precisa. En cuanto al método de vectores *path* y *cut*, éste es limitado a los casos cuando los vectores son de fácil obtención y los estados del sistema son exclusivos, además no existe una metodología universal para la determinación de los vectores *path* y *cut*, sin embargo existen algoritmos para ciertos tipos de MSS, por lo tanto éste método es útil para sistemas que no sean complejos. Por otro lado, la función de estructura es capaz de representar todas las posibles combinaciones de los estados de los elementos, sin embargo, su principal desventaja es la imposibilidad de investigar comportamientos dinámicos del MSS. La función *multi-valued structure*, la cual representa al MSS en sistemas binarios equivalentes, genera variables binarias mutuamente dependientes en el caso de utilizar diagramas de bloques donde al menos dos de sus elementos sean idénticos, por lo que es necesario utilizar descomposición pivotal, lo cual genera una extensa sucesión de cálculos. De manera similar, para el método de árboles de falla, al utilizar la función *multi-valued structure*, si los elementos aparecen en varios conjuntos *cut* entonces se deben usar probabilidades condicionales.

Continuando el análisis para el método de procesos estocásticos, éste es útil para varios casos prácticos donde el número de fallas en intervalos de tiempo arbitrarios poseen una distribución de Poisson, y los tiempos de transición entre estados se distribuyen de manera exponencial, de no ser así, se debe aplicar la aproximación a través del modelo de semi-Markov. Para encontrar las probabilidades de estado, el proceso de Markov requiere que se resuelva un sistema de ecuaciones diferenciales, por otro lado, el proceso de semi-Markov requiere que se resuelvan  $K^2$  número de ecuaciones integrales, donde  $K$  es el número de estados del MSS, necesitando una gran cantidad de recursos computacionales. El método de procesos estocásticos posibilita el análisis de comportamientos dinámicos de sistema multiestado, como por ejemplo, el tiempo medio de falla, el número medio de fallas en un intervalo de tiempo y el tiempo medio de espera. Por otro lado, puede ser aplicado a sistemas multiestado relativamente pequeños, debido a que el número de estados del sistema aumenta considerablemente a medida que aumenta el número de elementos del sistema. Finalmente, para la obtención de los sistemas de ecuaciones, necesita de todas las posibles transiciones (tasas de falla/reparación) entre estados, ya sean transiciones menores (entre estados contiguos) o transiciones mayores (entre estados no contiguos), por lo que requiere de una gran base de datos, sin embargo logra determinar las probabilidades de estado de los elementos, que para otros modelos son dadas.

El método de la función generadora universal usa procedimientos recursivos simples e intuitivos, y provee un modo sistemático para la enumeración de estados del sistema, por lo que es un método de fácil comprensión. Puede evaluar una gran cantidad de soluciones posibles en un corto periodo de tiempo, debido a la utilización de rápidos procedimientos algebraicos, obteniendo el rendimiento del sistema de manera precisa. El método de la función generadora universal reduce la complejidad del cálculo al disminuir términos, gracias a las técnicas de agrupación de términos similares y procedimiento recursivo, optimizando el cálculo, siendo un método práctico y por lo tanto no requiere de grandes recursos computacionales. Además, posee una buena representación visual, debido a que se separan la probabilidad del nivel de rendimiento en forma de potencias. Finalmente, el método UGF es lo suficientemente universal, esto quiere decir que un analista puede utilizar los mismos procedimientos para sistemas con rendimientos de

diferente naturaleza y diferentes tipos de interacción entre elementos, por lo que es un método bastante flexible.

El último modelo a analizar es el método de simulación Monte Carlo, el cual se basa en realizar múltiples muestreos aleatorios y en el análisis estadístico para el cálculo de resultados. Este método es de carácter empírico, ya que realiza múltiples iteraciones con el fin de obtener un resultado para un intervalo de confianza dado, en donde la precisión de los resultados se puede mejorar conforme se realice un mayor número de pruebas. Sin embargo, dependiendo de la complejidad del modelo, se debe considerar el tiempo y los costos involucrados en el desarrollo y la ejecución de éste. Por otro lado, es un método práctico y flexible debido a que puede incorporar múltiples distribuciones, las cuales son obtenidas a partir de datos históricos, y debido a la creación varios software los cuales se basan en la simulación Monte Carlo, se ha acelerado la adopción del método en distintas áreas del saber. Finalmente, se pueden tomar decisiones a partir de análisis estadísticos de los valores obtenidos.

El análisis de los métodos MSS puede ser resumido en el siguiente cuadro comparativo:

Extensión de métodos binarios	Método de procesos estocásticos
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enumeración explícita</li> <li>• Fácil comprensión</li> <li>• Solución precisa</li> <li>• No posee metodología universal</li> <li>• Útil solo para sistemas simples</li> <li>• Imposibilidad de obtener comportamientos dinámicos</li> <li>• Descomposición pivotal para elementos idénticos</li> <li>• Probabilidades condicionales para la repetición de un mismo elemento en más de un conjunto</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Útil para casos prácticos con distribución Poisson</li> <li>• Solucion precisa</li> <li>• Determina las probabilidades de estado de los elementos y sistema a partir de las tasas de falla/reparación.</li> <li>• Útil solo para sistemas simples</li> <li>• Capaz de analizar comportamientos dinámicos</li> <li>• Utiliza sistemas de ecuaciones diferenciales/integrales</li> <li>• Requiere de grandes recursos computacionales</li> </ul>
Método de la función generadora universal	Método de simulación Monte Carlo
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza procedimientos simples e intuitivos</li> <li>• Sistemático</li> <li>• Solución precisa</li> <li>• Metodología universal</li> <li>• Útil para todo tipo de sistemas</li> <li>• Reduce la complejidad</li> <li>• Optimiza el cálculo</li> <li>• Buena representación visual</li> <li>• Práctico y flexible</li> <li>• No requiere de grandes recursos computacionales</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza múltiples muestreos aleatorios</li> <li>• Análisis estadístico para la toma de decisiones</li> <li>• Solución perteneciente a un intervalo de confianza</li> <li>• Tiempo y costos en desarrollo y ejecución</li> <li>• Incorpora múltiples distribuciones</li> <li>• Práctico y flexible</li> <li>• Gran utilización por softwares</li> </ul>

Figura 16: Cuadro comparativo modelos MSS

## 4.2 APLICACIÓN DE MODELOS MSS A BATERÍAS DE LI-ION

Para el modelamiento de la confiabilidad de un conjunto de baterías de Li-ion, se utilizará el modelo genérico de sistemas multiestado y se analizarán las cuatro formas principales de abordar los MSS. De esta manera se observará cómo el SOH corresponderá a las distintas tasas de rendimiento de cada elemento-batería considerando el número de ciclos, la tasa de descarga y la temperatura de la batería, para finalmente conocer el rendimiento de todo el sistema de baterías del vehículo eléctrico.

### 4.2.1 Aplicación del modelo genérico a un sistema de baterías

Se sabe que el SOH, el cual es la condición general de la batería, es un indicador que mide en porcentaje la capacidad efectiva de la batería en el largo plazo respecto de su capacidad nominal, por lo que las tasas de rendimiento de una batería corresponderían a los porcentajes comprendidos del 0 al 100, en donde éstos podrían ser agrupados en estados,  $h$ . Luego, la tasa de rendimiento de la batería  $j$  en el estado  $h$  puede ser expresada como  $g_{jh}$ , con  $h \in \{0, 1, \dots, k_j\}, \forall j$ ; y el conjunto de tasas de rendimiento de la batería  $j$  como  $g_j = \{g_{j0}, g_{j1}, \dots, g_{jk_j}\}, \forall j$ ; para finalmente servir como parámetros a la variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento  $G_j$  de la batería  $j$ .

Además, se sabe que los principales factores que modelan al SOH son el número de ciclos de carga/descarga  $N$ , la tasa de descarga  $d$  y la temperatura  $T$  de la batería, de donde a partir de éstos, es posible conocer la función de masa de probabilidad del rendimiento  $p_{jh}(N, d, T)$  de la batería  $j$  en el estado  $h$ , la cual se define como  $p_{jh}(N, d, T) = \Pr\{G_j(N, d, T) = g_{jh}\}$ , y por lo tanto, el conjunto de funciones de masa de probabilidades de rendimientos de la batería  $j$  como  $p_j = \{p_{j0}, p_{j1}, \dots, p_{jk_j}\}, \forall j$ .

Un EV requiere una gran cantidad de baterías conectadas entre sí, llegando a las miles, conformando un sistema de baterías. Luego, debido a las múltiples combinaciones de SOH entre las baterías, el sistema posee una tasa de rendimiento  $v_i$  en el estado  $i$ , que

representa el estado global del conjunto de baterías en su totalidad, donde  $i \in \{0, 1, \dots, K\}$  y puede poseer la misma estructura que  $h$ , pero haciendo la distinción entre el sistema de baterías y una batería  $j$ . De manera análoga al conjunto de tasas de rendimientos para una batería  $j$ , el sistema posee un conjunto de tasas de rendimiento  $M = \{v_0, v_1, \dots, v_K\}$ , el cual sirve de parámetro para la variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento del sistema  $V(N, d, T)$  en el número de ciclo  $N$ , a una tasa de descarga  $d$  y temperatura  $T$ . Análogo a una batería  $j$ , se define la función de masa de probabilidad del rendimiento del sistema como  $q_i(N, d, T) = \Pr\{V(N, d, T) = v_i\}$ .

Cada batería dentro del sistema posee su propio SOH, por lo que se define el conjunto de combinaciones posibles de tasas de rendimiento para todas las baterías del sistema como  $L^n = \{g_{11}, \dots, g_{1k_1}\} \times \{g_{21}, \dots, g_{2k_2}\} \times \dots \times \{g_{n1}, \dots, g_{nk_n}\}$ , donde  $n$  es el número de baterías que pertenecen al sistema, sin embargo se desea conocer el SOH de todo el sistema, por lo que se recurrirá a la función de estructura del sistema  $\phi(G_1(N, d, T), \dots, G_n(N, d, T)): L^n \rightarrow M$ , la cual es capaz de transformar el conjunto de posibles tasas de rendimiento para todas las baterías del sistema al conjunto de tasas de rendimiento del sistema.

Por lo que el modelo genérico MSS para el sistema de baterías se compone de la probabilidad de distribución de rendimientos para todas las baterías del sistema considerando el número de ciclos, tasa de descarga y temperatura; y la función de estructura del sistema, la cual entrega el rendimiento de todo el MSS:

$$g_j, p_j(N, d, T), 1 \leq j \leq n$$

$$V(N, d, T) = \phi(G_1(N, d, T), \dots, G_n(N, d, T))$$

Es importante recordar que el número de baterías que utiliza un EV es mayor a 100 ( $n > 100$ ), por lo que se puede considerar que el SOH del sistema de baterías presenta una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$  en cualquier instante de tiempo, debido al teorema del límite central.

#### 4.2.2 Aplicación de la extensión de métodos binarios

Anteriormente se realizó la descripción de la extensión de métodos binarios para MSS el cual posee tres métodos principales: método de *path and cut vectors*, método de diagrama de bloques y método de árboles de falla.

El método de *path and cut vectors* requiere que se escriban todas las tasas de rendimiento  $g_{jh}$  para todas las baterías  $j$  en el estado  $h$ , formando una gran matriz de todas las combinaciones posibles de tasas de rendimiento las cuales corresponden a los distintos niveles de SOH de las baterías. Luego a través de la función de estructura del sistema  $\phi$  se debe realizar la transformación de cada combinación de tasas de rendimiento para las baterías  $j$  a una única tasa de rendimiento del sistema  $\phi(G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t))$  dependiendo de la configuración de las baterías, con esto se obtienen todas las posibles tasas de rendimiento del sistema acorde a una combinación específica de tasas de rendimiento de las baterías.

Posteriormente se deben encontrar los vectores *path* para los distintos niveles de demanda  $w$ , estos vectores *path* corresponden a las combinaciones de tasas de rendimiento de las baterías que alcanzan a satisfacer el nivel de demanda, el cual como se indicó anteriormente es del 80%, sin embargo es posible seleccionar múltiples niveles de demanda con el fin de conocer la función de masa de probabilidad del sistema de baterías.

La confiabilidad puede ser calculada como  $R(w) = \Pr\{\phi(G_1(t), \dots, G_n(t)) \geq w\}$  donde las funciones de masa de probabilidad  $p_{jh}$  del rendimiento de las baterías que corresponden a un vector *path* deben ser multiplicadas y se deben sumar todos los resultados de los vectores *path* que cumplan con el nivel de demanda establecido, esto es posible si los vectores *path* son mutuamente excluyentes y de fácil obtención.

Finalmente para obtener la función de masa de probabilidad del sistema de baterías se puede recurrir a la ecuación  $p_w = R(w) - R(w + 1)$ , donde el nivel de demanda debe estar asociado a un estado del sistema  $i$  discreto.

Sin embargo, para sistemas multiestado complejos, los vectores *path* y *cut* son de difícil obtención y se debe recurrir a técnicas especiales y algoritmos. Este es el caso de un sistema con miles de baterías, donde la matriz de todas las tasas de rendimiento se volvería bastante extensa y sería difícil identificar a los vectores *path* y *cut*, por lo que se recurrirá a la función *multi-valued structure* la cual representa al MSS en sistemas binarios equivalentes, esta función es utilizada por el método de diagramas de bloques y el método de árboles de falla.

El método de diagrama de bloques utiliza las variables binarias  $Y_{jh}$  y  $Z_i$  las cuales representan los estados de los elementos y de todo el MSS respectivamente, generándose una matriz binaria de todas las combinaciones posibles de estados de las baterías, sin embargo debido a que las baterías del sistema son idénticas, las variables binarias  $Y_{jh}$  se vuelven mutuamente dependientes y se hace necesario aplicar descomposición pivotal, lo cual genera una extensa sucesión de cálculos, por lo que el método de diagrama de bloques no es práctico para el análisis de un sistema de baterías idénticas.

El método de árboles de falla al igual que el método de diagrama de bloques, utiliza las variables  $Y_{jh}$  y  $Z_i$  pero las agrupa según conjuntos *cut*, sin embargo, si algunas baterías aparecen en varios conjuntos *cut* entonces deben usarse probabilidades condicionales por lo que el cálculo se vuelve engorroso. Adicionalmente para sistemas complejos de multiestado, las desventajas de este método lo hacen poco práctico, es por esto, que los programas computacionales no se basan en el método de árboles de falla, sino que en un método llamado *multi-valued logic trees* (MVTs), el cual aplica operadores arbitrarios a un conjunto de variables *multi-valued* las cuales corresponden a los estados de los elementos del MSS y de esta forma, generar un segundo conjunto de variables *multi-valued* las que definen el estado de todo el MSS. Luego, el método de árboles de falla no es práctico para el análisis de un sistema de baterías idénticas.

### 4.2.3 Aplicación del método de procesos estocásticos

Para realizar el análisis del método de Procesos Estocásticos aplicado a baterías de Li-ion, se recurrirá a la técnica de Markov para la evaluación de confiabilidad de sistemas multiestado descrito anteriormente, donde se deben seguir dos pasos: en primer lugar, desarrollar el diagrama de estado-espacio de todo el sistema y luego, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales asociada al diagrama.

Se debe considerar que los procesos de Markov para distintos elementos son independientes y puede haber solo una falla o una reparación en el sistema para cualquier número de ciclo de carga/descarga  $N$ , tasa de descarga  $d$  y temperatura  $T$  considerando *ceteris paribus*, donde las baterías únicamente pueden disminuir su SOH desde un estado inicial del 100% hasta llegar a un estado del 0%, por lo que solamente poseen tasas de falla  $\lambda_{hs}(N, d, T)$  donde  $h > s$ .

El algoritmo que puede ser usado para la generación del modelo de Markov aplicado a baterías de Li-ion es el siguiente:

#### 1. Organización de los conjuntos de tasas de falla

Para cada batería  $j$  que pertenece al MSS, considerando que las tasas de falla son menores deben tener el siguiente orden:

$$\{\lambda_{k_j, k_j-1}^{(j)}, \lambda_{k_j-1, k_j-2}^{(j)}, \dots, \lambda_{3,2}^{(j)}, \lambda_{2,1}^{(j)}\}$$

En general, si para la batería  $j$  no existe alguna falla que disminuya el SOH, entonces la tasa correspondiente es igual a cero.

#### 2. Generación de los estados del MSS

El sistema de baterías puede tener  $K = k_1 k_2 \dots k_n$  combinaciones de estado debido a las combinaciones posibles de tasas de rendimiento para todas las baterías del sistema, se debe asignar un conjunto  $\{g_{1m}, \dots, g_{nl}\}$ ,  $m \in [1, k_1], \dots, l \in [1, k_n]$  para cada estado del sistema.

3. *Enumeración de los estados del sistema y determinación de la tasa de rendimiento del sistema*

Todos los estados del sistema deben ser enumerados. Debe determinarse para cada estado  $i$  el SOH del sistema,  $v_i$ ,  $i \in \{1, \dots, K\}$  a través de la función de estructura del sistema:

$$v_i = \varphi(g_{1m}, \dots, g_{nl}), i = 1, \dots, K$$

4. *Análisis de estado-transición y generación de la matriz de intensidad de transiciones*

Se deben determinar las relaciones entre los estados del sistema,  $i$ , donde estas relaciones son definidas por las fallas de las baterías del sistema.

Considerando el supuesto de que no puede haber transiciones simultáneas para cualquiera de las baterías del sistema, la transición desde un estado arbitrario del sistema caracterizado por su conjunto de rendimientos  $\{g_{1m}, \dots, g_{jh}, \dots, g_{nf}\}$  es posible solo a uno de los estados en el cual solo una de las baterías ha cambiado su rendimiento:

$$\{g_{1m}, \dots, g_{jh}, \dots, g_{nf}\} \rightarrow \{g_{1m}, \dots, g_{js}, \dots, g_{nf}\}, \text{ donde } h > s, 1 \leq j \leq n$$

Luego, para determinar todas las transiciones del diagrama estado-espacio del MSS, se deben tomar los pares de estados donde éstos difieran únicamente debido al cambio de estado de una de las baterías, considerando las tasas de falla correspondientes.

Para generar la matriz de intensidad de transiciones,  $\mathbf{a}$ , se seguirán las siguientes reglas:

Si el MSS va desde el estado 1 al estado 2 debido a una falla del elemento  $j$  con una intensidad  $\lambda_{hs}^{(j)}$  con  $h > s$ , entonces el elemento  $a_{12}$  de la matriz de transiciones  $\mathbf{a}$ , se encontrará en la columna 1 fila 2 y será:  $a_{12} = \lambda_{hs}^{(j)}(N, C, T)$ .

Si la transición entre el estado 1 al estado 2 no existe, entonces el elemento  $a_{12}$  de la matriz de transiciones  $\mathbf{a}$ , que se encuentra en la columna 1 fila 2 es cero:  $a_{12} = 0$ .

5. *Determinación de los elementos de la diagonal de la matriz de intensidad de transiciones*

Finalmente, debido a que la suma de los elementos en una fila de la matriz de intensidad de transiciones es cero, los elementos de la diagonal de la matriz son:

$$a_{ii} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^K a_{in}, i = 1, \dots, K$$

Luego, al ser resuelto el sistema de ecuaciones diferenciales y al ser encontradas las probabilidades para todos los estados del sistema  $p_i(N, C, T)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , se considera el nivel de demanda  $w$  para el cálculo de la disponibilidad instantánea del MSS:

$$A(N, d, T) = \sum_{i=1}^K p_i(N, d, T) \cdot 1(v_i \geq w)$$

Además, considerando el estado absorbente 0 y resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales con la nueva matriz de intensidad de transiciones, se obtiene la confiabilidad  $R(N, d, T) = 1 - p_0(N, d, T)$  para un nivel de demanda  $w$  establecido.

Cabe destacar que no siempre es posible o práctico realizar el diagrama de estado de todo el sistema, sin embargo, éste no es necesario y sirve únicamente como una ayuda para determinar las ecuaciones diferenciales del sistema, las cuales se describen como:

$$\frac{dp_k(N, d, T)}{dt} = -\lambda_{k,k-1}p_k(N, d, T),$$

$$\frac{dp_i(N, d, T)}{dt} = \lambda_{i+1,i}p_{i+1}(N, d, T) - \lambda_{i,i-1}p_i(N, d, T), i = 2, 3, \dots, k - 1,$$

$$\frac{dp_1(N, d, T)}{dt} = \lambda_{2,1}p_2(N, d, T).$$

#### 4.2.4 Aplicación del método de la función generadora universal

La aplicación de este método a las baterías de Li-ion se basa en la utilización de la función- $u$  que representa las funciones de masa de probabilidad de  $n$  variables aleatorias  $X_j$ , la cual, como se observó anteriormente, se describe de la siguiente forma:

$$u_j(z) = u_{X_j}(z) = \sum_{h=1}^{k_j} p_{jh}(N, d, T) z^{x_{jh}}, j = 1, 2, \dots, n$$

Donde  $p_{jh}(N, d, T) = \Pr\{X_j = x_{jh}\}$  es la probabilidad del SOH de la batería  $j$  de encontrarse en el estado  $h$  y depende del número de ciclos de carga/descarga  $N$ , tasa de descarga  $d$  y temperatura  $T$ .

De esta forma se obtiene la función de masa de probabilidad de la batería  $j$ , luego para obtener la función de masa de probabilidad del sistema de baterías se necesita aplicar el operador generador universal:

$$\begin{aligned} U(z) &= \otimes_{\phi} (u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z)) \\ &= \sum_{h_1=1}^{k_1} \sum_{h_2=1}^{k_2} \dots \sum_{h_n=1}^{k_n} \left( \prod_{j=1}^n p_{jh_j} \right) z^{\phi(x_1h_1 + x_2h_2 + \dots + x_nh_n)} \end{aligned}$$

Recordando que para baterías en serie se debe utilizar la función de estructura  $\phi_{serie}(G_1, \dots, G_n) = \min\{G_1, \dots, G_n\}$ , y para baterías en paralelo se debe utilizar la función de estructura  $\phi_{paralelo}(G_1, \dots, G_n) = \max\{G_1, \dots, G_n\}$ .

También, dependiendo de la configuración del sistema de baterías, se puede recurrir al siguiente algoritmo:

1. Encuentre los subsistemas series y paralelos puros del MSS.
2. Obtenga las funciones- $u$  de estos subsistemas utilizando los correspondientes operadores generadores universales:  $\otimes_{\phi_{serie}}$  y  $\otimes_{\phi_{paralelo}}$ .

3. Reemplace el subsistema por un único elemento, obteniendo la función- $u$  para dicho subsistema.
4. Si el MSS resultante posee más de un elemento, vuelva al paso 1.

La función- $u$  obtenida de este algoritmo corresponde al rendimiento de todo el sistema.

Adicionalmente, es conveniente utilizar las técnicas de agrupación de términos similares y procedimiento recursivo para optimizar el cálculo dentro del algoritmo.

Luego, es posible obtener la disponibilidad instantánea del sistema de baterías para una demanda constante  $w$  según:

$$A(t, w) = \sum_{i=1}^K p_i(t) 1(F(v_i, w) \geq 0)$$

#### 4.2.5 Aplicación del método de simulación Monte Carlo

Es importante recordar que el método de simulación Monte Carlo se basa en realizar múltiples muestreos aleatorios y en el análisis estadístico para el cálculo de resultados. Se identifican distribuciones estadísticas asociadas a datos, de donde se toman muestras aleatorias para cada una de estas distribuciones, las cuales representarán los valores de entrada o parámetros, y para cada conjunto de estos valores se obtiene un conjunto de valores de salida. Luego, a través de análisis estadísticos de los valores de salida, se toman decisiones (Raychaudhuri, 2008).

A continuación, se siguen las etapas del método para la aplicación en baterías de Li-ion:

1. Generación del modelo estático, donde la batería  $j$  posee distintos SOH, los cuales pueden estar agrupados en estados  $h$ , junto con sus probabilidades asociadas

$p_{jh}(N, d, T)$ , las cuales dependen del número de ciclos de carga/descarga  $N$ , tasa de descarga  $d$ , y temperatura  $T$ . Siendo estos los valores de entrada.

2. Identificación de la distribución de datos, ésta sigue la distribución asignada por las probabilidades  $p_{jh}(N, d, T)$ , sin embargo, un Vehículo Eléctrico utiliza un gran número de baterías, mayor a 100, por lo que se puede considerar que el SOH del sistema de baterías presenta una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , debido al teorema del límite central.
3. Generación de variables aleatorias, se generará un conjunto de números aleatorios desde estas distribuciones, los cuales corresponderán a un valor de entrada para el modelo determinístico el cual entregará valores de salida. Este proceso es repetitivo y es la esencia de la simulación Monte Carlo.
4. Análisis y toma de decisiones, se procede a un análisis estadístico de los valores de salida para la toma de decisiones.

De esta forma es posible obtener el rendimiento de todo el sistema de baterías.

## 5. METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE SISTEMAS MULTIESTADO

En el presente capítulo se desarrollará una metodología considerando los métodos principales de sistemas multiestado descritos anteriormente, con el objetivo de realizar un análisis de confiabilidad.

Esta metodología presenta una serie de pasos o actividades comenzando en un primer nivel general, que luego se irá desglosando en tres niveles más, los cuales poseen distintos grados de detalle, desplegando nuevos pasos.

Cabe destacar que los pasos no son estrictamente secuenciales y no todos son necesarios, por lo que se han realizado diagramas de flujo de estos, como una guía para el desarrollo de la metodología. A continuación se describen los pasos correspondientes al nivel más general, al cual se lo identificará como nivel 0.

1. Identificación de un MSS: El primer paso fundamental es identificar si el sistema posee distintos niveles de rendimiento, es decir, estados intermedios entre la falla y el perfecto funcionamiento; así como también se debe identificar los distintos niveles de rendimiento de los elementos, ya que a partir de éstos se determinará el rendimiento de todo el sistema.
2. Selección de elementos: El segundo paso es la selección de los elementos del sistema, los cuales se considerarán indivisibles y fundamentales para el funcionamiento del sistema. Si bien cada elemento podría poseer subcomponentes, al seleccionar un mayor número de elementos se obtiene información con una mayor precisión pero se complejiza el sistema, por lo que es conveniente elegir los elementos a través de una jerarquización de criticidad para el sistema.
3. Generación de la función de masa de probabilidad de los elementos: A través de un análisis de los datos históricos o de modelos de funcionamiento de cada elemento, se deben conocer las probabilidades de que un elemento se encuentre

en uno de sus estados, de esta forma se generará la distribución de probabilidades para cada elemento del sistema.

4. Determinación de la configuración del sistema: Corresponde a las relaciones de conexión que poseen todos los elementos del sistema entre sí, y que explicarán el funcionamiento de éste. Algunas configuraciones son serie, paralelo, *stand-by*, etc.
5. Selección de los niveles de demanda: Estos corresponderán al nivel mínimo deseado de rendimiento del sistema, el cual puede ser representado a través de tasas de rendimiento o estados. La selección de los niveles de demanda puede depender de las características intrínsecas de funcionamiento del sistema o pueden ser seleccionados de manera arbitraria con el fin que se estime conveniente.
6. Determinación de la función de masa de probabilidad del sistema: A través de las funciones de masa de probabilidad de los elementos, su configuración y considerando los niveles de demanda, es posible determinar la función de masa de probabilidad del sistema, con la cual se puede conocer la confiabilidad de éste para distintos niveles de demanda.
7. Análisis de resultados: Considerando los distintos niveles de rendimiento que posee el sistema para distintos niveles de demanda, es posible analizar su comportamiento y a partir de éste, tomar decisiones.

A continuación se presenta el diagrama que incorpora los pasos anteriormente descritos, y que son la base para el análisis de confiabilidad de sistemas multiestado.

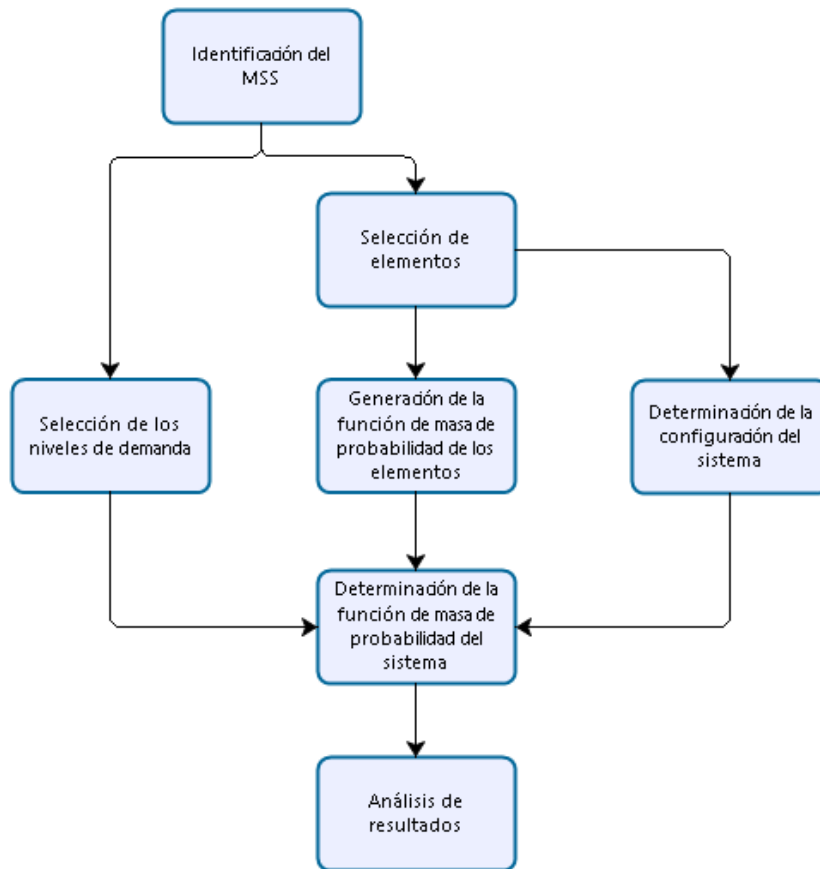


Figura 17: Diagrama de la metodología nivel 0

Comenzando con el desglose de pasos del nivel 0, se observarán los pasos necesarios para la generación de la función de masa de probabilidad de los elementos:

8. Recopilación de datos históricos: Se debe obtener la información correspondiente al funcionamiento de cada elemento del sistema.
9. Utilización de modelos de funcionamiento: Cada elemento puede poseer un modelo de funcionamiento previamente establecido. Esta es una alternativa a la recopilación de datos históricos.
10. Determinación de estados: A través de un análisis de los datos históricos o de los modelos de funcionamiento de cada elemento, se debe realizar el establecimiento de los distintos estados del sistema y sus elementos. Estos estados pueden corresponder a agrupaciones de tasas de rendimiento.

Por otro lado, la determinación de la configuración del sistema da lugar al siguiente paso:

11. Determinación de la función de estructura del sistema: A partir de la configuración del sistema, se deberá crear la función matemática que mejor represente la configuración, con el fin de determinar el rendimiento de todo el sistema.

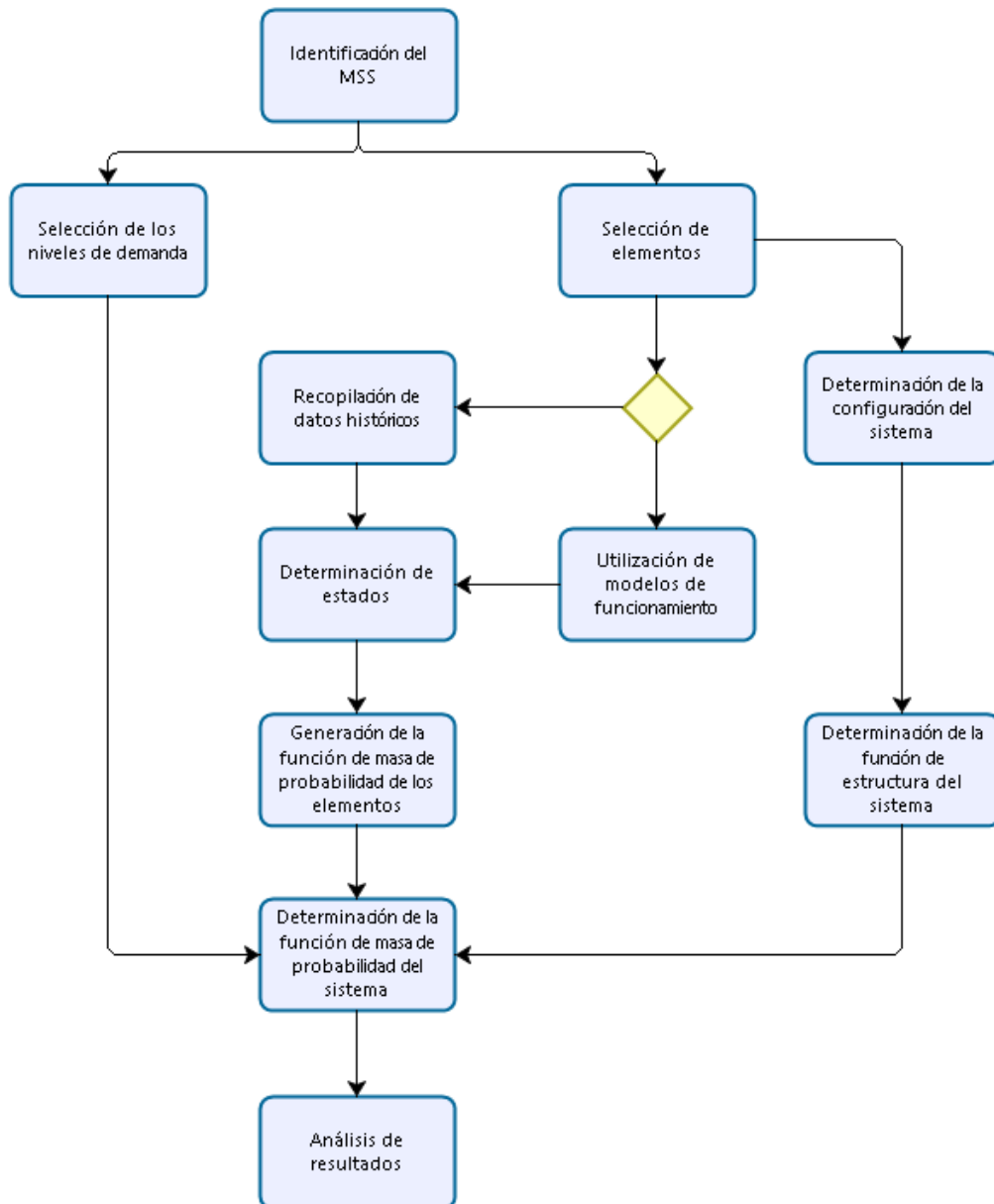


Figura 18: Diagrama de la metodología nivel 1

Luego, se realizará una descripción de una manera alternativa de obtener la función de masa de probabilidad de los elementos y se desglosará el paso de la determinación de la función de estructura del sistema.

12. Identificación de tasas de falla/reparación: Una manera alternativa de conocer la función de masa de probabilidad de los elementos, es en primer lugar, conocer las tasas de falla y de reparación a través de un análisis de datos históricos o de los modelos de funcionamiento de los elementos, para luego utilizar el algoritmo de Markov y solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales.
13. Algoritmo de Markov: Primero se debe realizar una organización de los conjuntos de tasas de falla/reparación, identificando si estas son mayores o menores, y si no existe alguna falla o reparación que disminuya o aumente el rendimiento del elemento, entonces la tasa correspondiente es igual a cero. Luego se procede a la generación de los estados del sistema, donde se deben asignar los conjuntos de tasas de rendimiento de los elementos para cada uno de los estados del sistema, posteriormente se los debe enumerar y se debe determinar la tasa de rendimiento del sistema, además se debe identificar las relaciones entre los estados del sistema. Luego se debe generar la matriz de intensidad de transiciones, posicionando cada tasa de falla y de reparación según corresponda.
14. Visualización diagrama de estado: Esta herramienta sirve como una ayuda visual para la determinación de las ecuaciones diferenciales de los elementos del sistema o del propio sistema, sin embargo no es necesaria para la determinación de las ecuaciones.
15. Visualización diagrama de bloques: Es una herramienta que sirve como ayuda visual para entender las relaciones de los elementos dentro del sistema, sirviendo de apoyo tanto a la determinación de la configuración del sistema como a su función de estructura.

16. Determinación de los operadores generadores universales: Considerando la configuración del sistema y su función de estructura, es posible determinar los operadores generadores universales correspondientes al método UGF, incorporando la función- $u$  de cada elemento, la cual posee los estados del elemento y las probabilidades asociados a éstos. Además los operadores pueden ser asociados recursivamente.

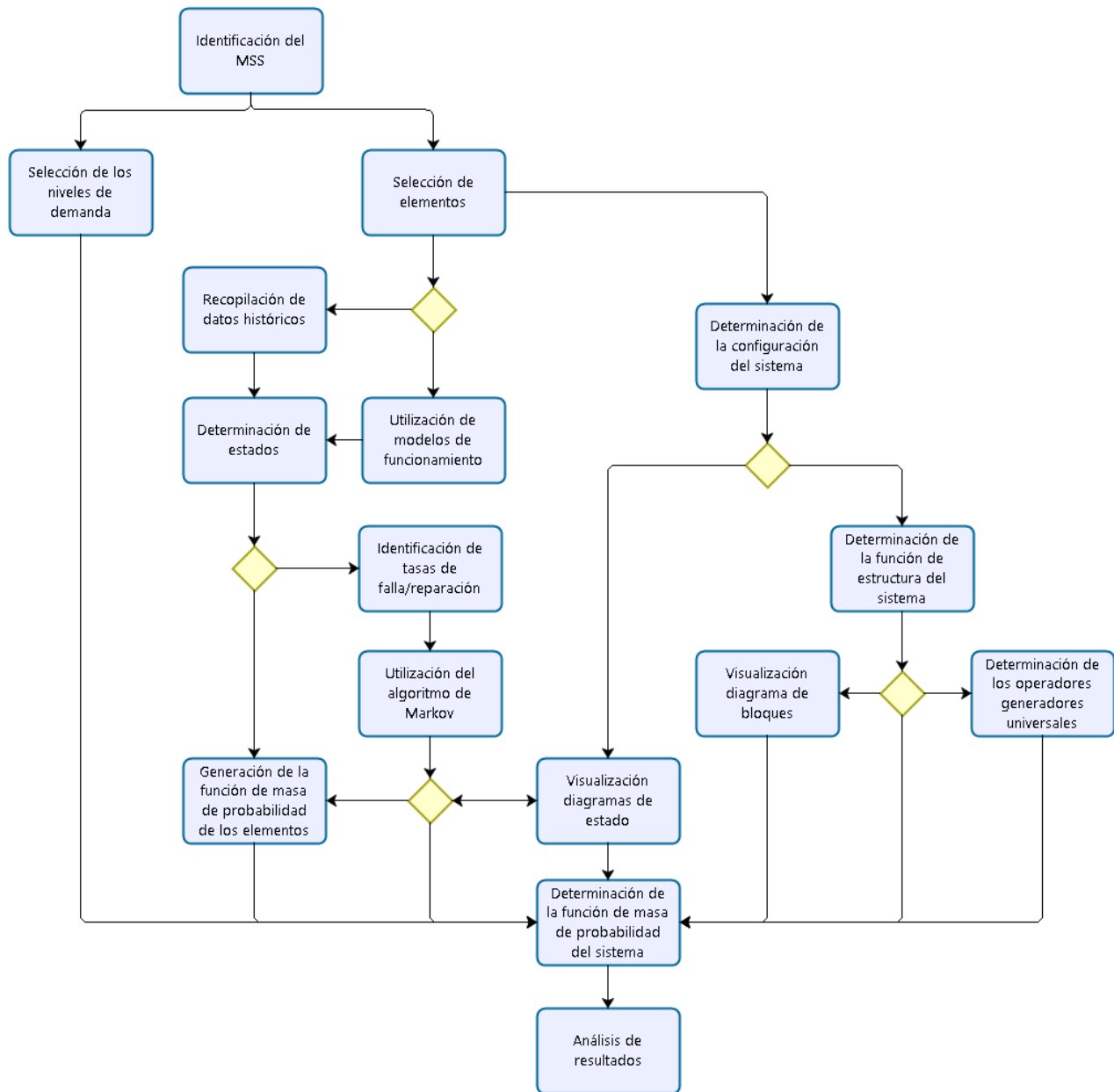


Figura 19: Diagrama de la metodología nivel 2

Finalmente, llegando al último nivel de detalle, se desglosará el paso de la determinación de la función de masa de probabilidad del sistema, considerando los cuatro métodos principales de sistemas multiestado.

17. Identificación de vectores *path/cut*: Este paso corresponde a la extensión de métodos binarios, donde según los niveles de demanda seleccionados, se observará que combinación de tasas de rendimiento de los elementos son las necesarias para cumplir con los niveles establecidos, encontrándose los vectores *path/cut*, los cuales serán considerados para los cálculos de confiabilidad del sistema.
18. Determinación del sistema de ecuaciones diferenciales: Este paso corresponde al método de procesos estocásticos. Se puede utilizar la visualización diagrama de estado de los elementos o del sistema para la determinación de las ecuaciones, sin embargo, se puede utilizar directamente la matriz de intensidad de transiciones, proveniente del algoritmo de Markov, para encontrar las ecuaciones. Luego, el resultado de las ecuaciones diferenciales corresponde a las probabilidades de un elemento o del sistema de encontrarse en uno de sus estados.
19. Agrupación de términos similares: Este paso corresponde al método de la función generadora universal, donde al utilizar los operadores generadores universales, se considerarán los términos que pertenecen a un mismo estado para los cálculos de confiabilidad del sistema.
20. Generación iterativa de variables aleatorias: Este paso corresponde al método de simulación Monte Carlo, donde al conocer la función de masa de probabilidad de los elementos y su función de estructura, se podrán generar múltiples pruebas aleatorias con la finalidad de determinar la confiabilidad del sistema. Cabe destacar que este paso está bien desarrollado por varios softwares los cuales facilitan el cálculo.

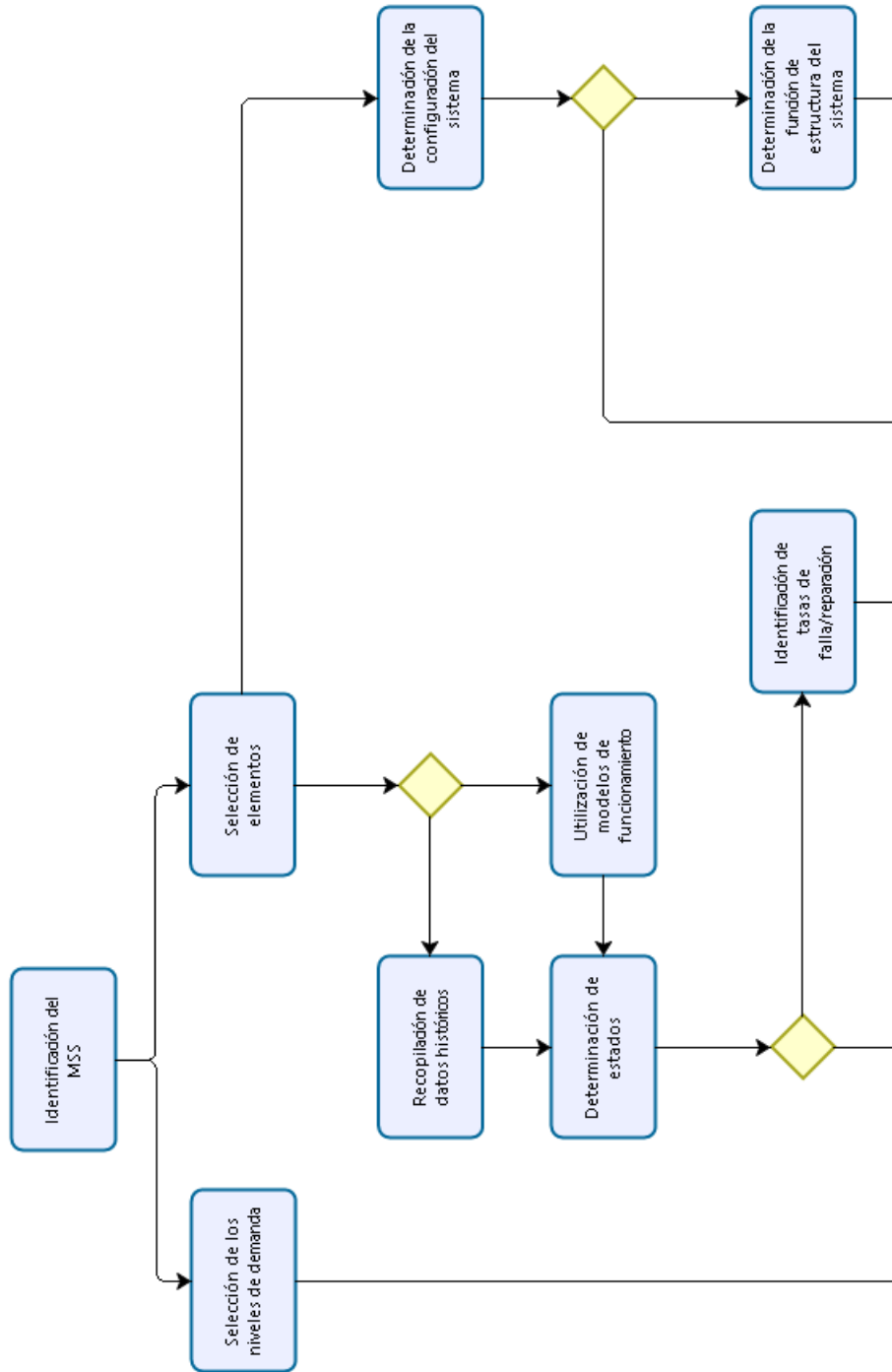


Figura 20: Diagrama de la metodología nivel 3 parte 1

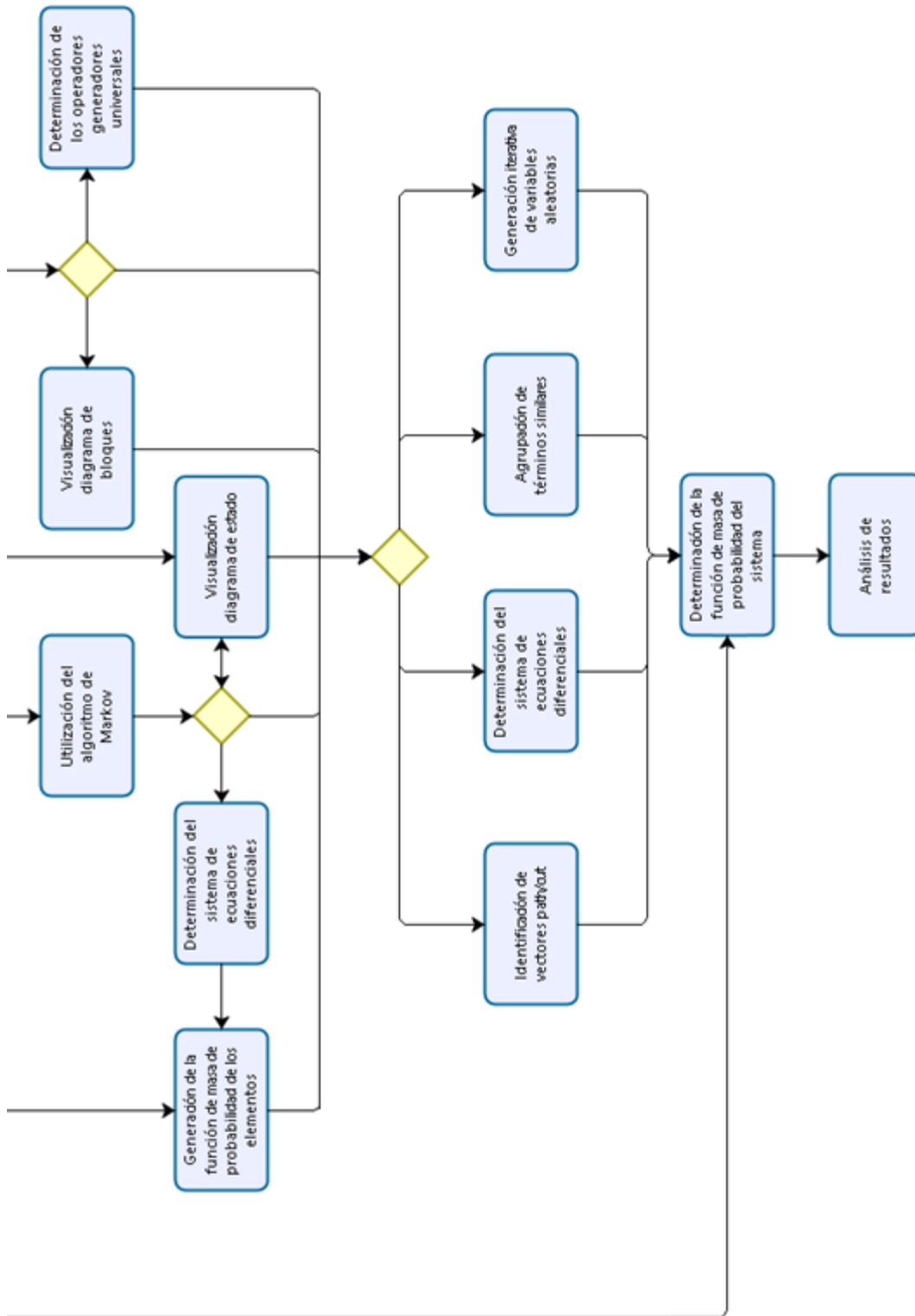


Figura 21: Diagrama de la metodología nivel 3 parte 2

## 6. CASO DE ESTUDIO

Se aplicará la metodología para el análisis de confiabilidad de sistemas multiestado a un sistema de baterías de Li-ion que son parte de un EV.

El sistema de baterías estará conformado inicialmente por 10 baterías con una configuración  $2 \times 5$  serie-paralelo (5 baterías en paralelo, conectadas en serie con otras 5 baterías en paralelo). Posteriormente se irán agregando baterías redundantes para aumentar la confiabilidad del sistema.

Se considerará que el sistema de baterías se carga/descarga de manera balanceada, es decir, que no pueden existir baterías que se carguen/descarguen de manera distinta al resto, además, cada una de éstas aporta siempre el máximo de energía que le permita el SOH del sistema. Se realizan estos supuestos en base a que un EV posee un BMS.

Se considerarán altos valores para el número de ciclos de carga/descarga del sistema de baterías, así como también de su temperatura, con el fin de observar el aumento significativo de la confiabilidad al agregar baterías redundantes.

Los métodos MSS que se aplicarán en el caso de estudio serán la simulación Monte Carlo y UGF. El primero dará una buena aproximación del comportamiento del sistema, el cual será respaldado por el segundo, donde se determinará de manera exacta este comportamiento.

Para el desarrollo de los pasos que son comunes entre los métodos MSS, se recurrirá al modelo general de sistemas multiestado.

### 6.1 IDENTIFICACIÓN DE UN MSS

Se sabe que la autonomía de un vehículo eléctrico va disminuyendo debido al desgaste provocado por la utilización de las baterías de Li-ion al ocurrir ciclos de carga-descarga, y por otro lado, el deterioro producto del tiempo y la temperatura lo que genera

cambios químicos y físicos irreversibles en éstas, independientes de su uso, por lo que el EV presenta distintos niveles de rendimiento producto del uso de sus baterías.

El rendimiento del sistema de baterías de Li-ion se verá reflejado en el estado de salud (SOH) de éstas, el cual es la condición general de la batería, un indicador que mide en porcentaje la capacidad efectiva de ésta en el largo plazo respecto de su capacidad nominal, por lo que las tasas de rendimiento de una batería corresponderían a los porcentajes comprendidos del 0 al 100.

Finalmente, el sistema de baterías de un EV es un sistema multiestado, debido a que presenta niveles de rendimiento intermedios entre la falla y el perfecto funcionamiento.

## 6.2 SELECCIÓN DE ELEMENTOS

Los elementos indivisibles y fundamentales serán las baterías de Li-ion, las cuales en un EV pueden llegar a ser miles, éstas serán consideradas idénticas, por lo que poseerán el mismo comportamiento. En este caso de estudio se utilizarán baterías de Li-ion Panasonic 18650, las cuales tienen una capacidad de 3400 [mAh] y un voltaje de 3,6 [V].

Por otro lado, las baterías poseen subcomponentes que podrían afectar su funcionamiento, sin embargo no se considerará este nivel de detalle, y se utilizarán modelos de funcionamiento de baterías.

## 6.3 DETERMINACIÓN DE MODELOS DE FUNCIONAMIENTO

La cantidad de baterías que utiliza un EV puede llegar a las miles, por lo que se puede considerar que el SOH del sistema de baterías presenta una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$  en cualquier instante de tiempo, debido al teorema del límite central.

Donde la media  $\mu$  corresponde al SOH y es posible obtener los distintos niveles de rendimiento para las baterías de Li-ion en función a los parámetros  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , el número de ciclos, la carga nominal y la tasa de descarga, a modo de porcentajes:

$$\mu = SOH = 1 - \left( \frac{1}{2} k_1 N^2 + k_2 N \right) - \frac{k_3}{Q_{nom}} d$$

Luego, debido a que el SOH no puede ser mayor a 1, la desviación estándar  $\sigma$  será cero al inicio y posteriormente se irá incrementando a medida que el SOH disminuya según la siguiente relación:

$$\sigma = \frac{1 - \mu}{6} = \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{1}{2} k_1 N^2 + k_2 N \right) - \frac{k_3}{Q_{nom}} d \right]$$

A partir de la media y la desviación estándar, es posible calcular la función de densidad de probabilidad para una distribución normal de una batería, que pertenece a un sistema de baterías.

Cabe destacar que los valores de los parámetros  $k_1, k_2$  y  $k_3$ , a diferentes temperaturas y números de ciclos de carga/descarga son:

Temperatura [°C]	$k_1$ [ciclo <sup>-1</sup> ]	$k_2$ [ciclo <sup>-1</sup> ]	$k_3$ [A <sup>-1</sup> ]
25	$8,5 \times 10^{-8}$	$2,5 \times 10^{-4}$	$2,68 \times 10^{-2}$ ( $\leq 300$ )
			$7,26 \times 10^{-2}$ ( $\leq 800$ )
50	$1,6 \times 10^{-6}$	$2,9 \times 10^{-4}$	$5,20 \times 10^{-2}$ ( $\leq 300$ )
			$6,82 \times 10^{-2}$ ( $\leq 500$ )

Tabla 1: Valores de los parámetros k a diferentes temperaturas

Donde el valor entre paréntesis corresponde al número de ciclos de carga/descarga.

#### 6.4 DETERMINACIÓN DE ESTADOS

El rendimiento de las baterías viene reflejado por el SOH, el cual comprende los porcentajes del 0 al 100. Para trabajar estas tasas de rendimiento se agruparan en estados, eligiéndose 5 de éstos, donde se considerarán las tasas del 0 al 60% como el estado 0, del 60 al 70% como el estado 1, del 70 al 80% como el estado 2, del 80 al 90% como el estado 3 y finalmente del 90 al 100% como el estado 4. Luego, la tasa de rendimiento de la batería  $j$  en el estado  $h$  puede ser expresada como  $g_{jh}$ , con  $h \in \{0,1,2,3,4\}, \forall j$ ; y el conjunto de

tasas de rendimiento de la batería  $j$  como  $g_j = \{g_{j0}, g_{j1}, g_{j2}, g_{j3}, g_{j4}\}, \forall j$ ; para finalmente servir como parámetros a la variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento  $G_j$  de la batería  $j$ .

## 6.5 GENERACIÓN DE LA FUNCIÓN DE MASA DE PROBABILIDAD DE LOS ELEMENTOS

A partir del modelo de funcionamiento de las baterías de Li-ion en un EV y los estados seleccionados, se calculará la función de masa de probabilidad  $p_{jh}(N, d, T)$  de la batería  $j$  en el estado  $h$ , la cual se define como  $p_{jh}(N, d, T) = \Pr\{G_j(N, d, T) = g_{jh}\}$ , y por lo tanto, el conjunto de funciones de masa de probabilidades de rendimientos de la batería  $j$  como  $p_j = \{p_{j0}, p_{j1}, p_{j2}, p_{j3}, p_{j4}\}, \forall j$ . Tomando en cuenta las consideraciones al principio del capítulo sobre el número de ciclos de carga/descarga y la temperatura, se utilizarán los parámetros  $k_1 = 1,6 \times 10^{-6}[\text{ciclo}^{-1}]$ ,  $k_2 = 2,9 \times 10^{-4}[\text{ciclo}^{-1}]$  y  $k_3 = 6,82 \times 10^{-2}[\text{ciclo}^{-1}]$  correspondientes a  $N \leq 500[\text{ciclos}]$  y  $T = 50[^\circ\text{C}]$ , además se considerará una tasa de descarga igual a 1 C. Luego, debido al teorema del límite central, se tiene que  $SOH \sim Normal(\mu, \sigma)$ , donde la media y la desviación estándar son:

$$\begin{aligned} \mu = SOH(500, 1,50) &= 1 - \left( \frac{1}{2} \times 1,6 \times 10^{-6} \times 500^2 + 2,9 \times 10^{-4} \times 500 \right) \\ &\quad - \frac{6,82 \times 10^{-2}}{3,4} \times 3,4 \\ &= 0,5868 \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{1 - \mu}{6} = \frac{1 - 0,5868}{6} = 0,0689$$

Considerando distribución normal y los parámetros obtenidos, se tiene que la función de masa de probabilidad de las baterías para los 5 estados son:

Estado $k$	Probabilidad $p$
$k = 4 (\geq 90\%)$	0
$k = 3 (80 - 90\%)$	0,0010
$k = 2 (70 - 80\%)$	0,0491
$k = 1 (60 - 70\%)$	0,3739
$k = 0 (\leq 60\%)$	0,5760

Tabla 2: Función de masa de probabilidad de las baterías según estado

Entonces, el conjunto de funciones de masa de probabilidades de rendimientos de la batería  $j$  se describe como  $p_j(500,1,50) = \{0; 0,0010; 0,0491; 0,3739; 0,5760\}$ .

## 6.6 DETERMINACIÓN DE LA CONFIGURACIÓN DEL SISTEMA

Como se indicó al principio del capítulo se utilizará una configuración  $2 \times 5$  serie-paralelo (5 baterías en paralelo, conectadas en serie con otras 5 baterías en paralelo). Llegando a un total inicial de 10 baterías de Li-ion.

## 6.7 VISUALIZACIÓN DIAGRAMA DE BLOQUES

Una vez ha sido determinada la configuración del sistema, es posible generar el diagrama de bloques correspondiente a esta configuración, el cual es:

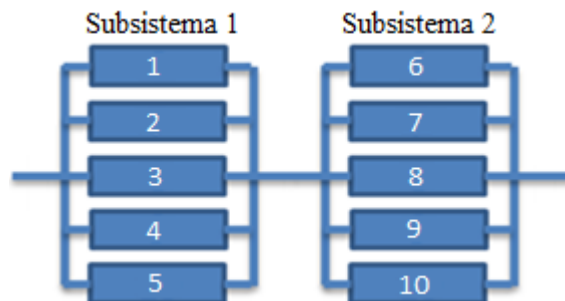


Figura 22: Diagrama de bloque para el sistema de baterías

De donde es posible enumerar a las baterías del 1 al 10, y considerar los subsistemas 1 y 2 como el conjunto de las baterías del 1 al 5 y del 6 al 10 respectivamente. También es posible observar la relación en paralelo entre las baterías de los subsistemas y la relación en serie entre éstos.

## 6.8 DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA DEL SISTEMA

Debido a la configuración del sistema, la función de estructura corresponde a:

$$\begin{aligned} \phi(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}) \\ = \min\{\max\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}, \max\{G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}\}\} \end{aligned}$$

Donde la variable aleatoria  $G_j$  depende del número de ciclos de carga/descarga  $N$ , temperatura  $T$  y tasa de descarga  $d$ .

## 6.9 DETERMINACIÓN DE LOS OPERADORES GENERADORES UNIVERSALES

En primer lugar, se debe conocer la función- $u$  de la batería  $j$ , la cual se determina a partir de la función de masa de probabilidad:

$$u_j = 0z^4 + 0,0010z^3 + 0,0491z^2 + 0,3739z^1 + 0,5760z^0, \text{ para } j = 1,2, \dots, 10.$$

Luego, se desarrollan los operadores generadores universales según la función de estructura del sistema de la siguiente forma:

$$\phi_{serie} \left( \phi_{par} \left( u_1(z), u_2(z), u_3(z), u_4(z), u_5(z) \right), \phi_{par} \left( u_6(z), u_7(z), u_8(z), u_9(z), u_{10}(z) \right) \right)$$

Sin embargo, debido a que los operadores pueden ser asociados recursivamente, se tiene la ventaja de crear los siguientes subsistemas:

$$u_{sub1}(z) = \phi_{par} \left( \phi_{par} \left( \phi_{par} \left( \phi_{par} \left( u_1(z), u_2(z) \right), u_3(z) \right), u_4(z) \right), u_5(z) \right)$$

$$u_{sub2}(z) = \otimes \left( \otimes \left( \otimes \left( \otimes (u_6(z), u_7(z)), u_8(z) \right), u_9(z) \right), u_{10}(z) \right)$$

Para luego, utilizar el operador generador universal en serie:

$$\otimes \phi_{serie}(u_{sub1}(z), u_{sub2}(z))$$

## 6.10 AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS SIMILARES

Este paso corresponde al método UGF, donde se procederá a la aplicación de los operadores generadores universales sobre las funciones-  $u$  de las baterías. Se irán desarrollando los operadores desde el interior hacia el exterior, agrupando los términos similares según estado:

Primero se desarrollarán las baterías 1 y 2 del subsistema 1:

$$\begin{aligned} \otimes \phi_{par}(u_1(z), u_2(z)) &= \sum_{h_1=0}^4 \sum_{h_2=0}^4 \left( \prod_{j=1}^2 p_j h_j \right) z^{\max(G_1, G_2)} \\ &= 0z^4 + 0,0020z^3 + 0,0958z^2 + 0,05705z^1 + 0,3318z^0 \end{aligned}$$

Luego, se añadirá la batería 3 a lo anterior:

$$\begin{aligned} \otimes \left( \otimes \left( \otimes (u_1(z), u_2(z)), u_3(z) \right) \right) \\ = 0z^4 + 0,0029z^3 + 0,1400z^2 + 0,6660z^1 + 0,1911z^0 \end{aligned}$$

Se agrega la batería 4:

$$\begin{aligned} \otimes \left( \otimes \left( \otimes \left( \otimes (u_1(z), u_2(z)), u_3(z) \right), u_4(z) \right) \right) \\ = 0z^4 + 0,0039z^3 + 0,1820z^2 + 0,7040z^1 + 0,1101z^0 \end{aligned}$$

Se agrega la batería 5:

$$\begin{aligned}
 u_{sub1}(z) &= \otimes_{\phi par} \left( \otimes_{\phi par} \left( \otimes_{\phi par} \left( \otimes_{\phi par} (u_1(z), u_2(z)), u_3(z) \right), u_4(z) \right), u_5(z) \right) \\
 &= 0z^4 + 0,0049z^3 + 0,2018z^2 + 0,7099z^1 + 0,0634z^0
 \end{aligned}$$

Debido a que las baterías del sistema son idénticas, la función- $u$  del subsistema 2 es igual a la del subsistema 1. Luego, se calcula el operador generador universal en serie, determinándose la función de masa de probabilidad de todo el sistema de baterías:

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \otimes_{\phi serie} (u_{sub1}(z), u_{sub2}(z)) \\
 &= \sum_{h(sub1)=0}^4 \sum_{h(sub2)=0}^4 \left( \prod_{j=1}^2 p_{subj,h(subj)} \right) z^{\min(G(sub1), G(sub2))} \\
 &= 0z^4 + 0z^3 + 0,0514z^2 + 0,8258z^1 + 0,1228z^0
 \end{aligned}$$

## 6.11 GENERACIÓN ITERATIVA DE VARIABLES ALEATORIAS

Este paso corresponde al método de simulación Monte Carlo, donde al conocer la función de masa de probabilidad de los elementos y su función de estructura, se generarán múltiples pruebas aleatorias. Se recurrirá al software Oracle Crystal Ball, el cual es un complemento de Microsoft Excel, para el cálculo iterativo de variables aleatorias. Donde, tras la realización de 100.000 pruebas, se obtuvieron los siguientes resultados:

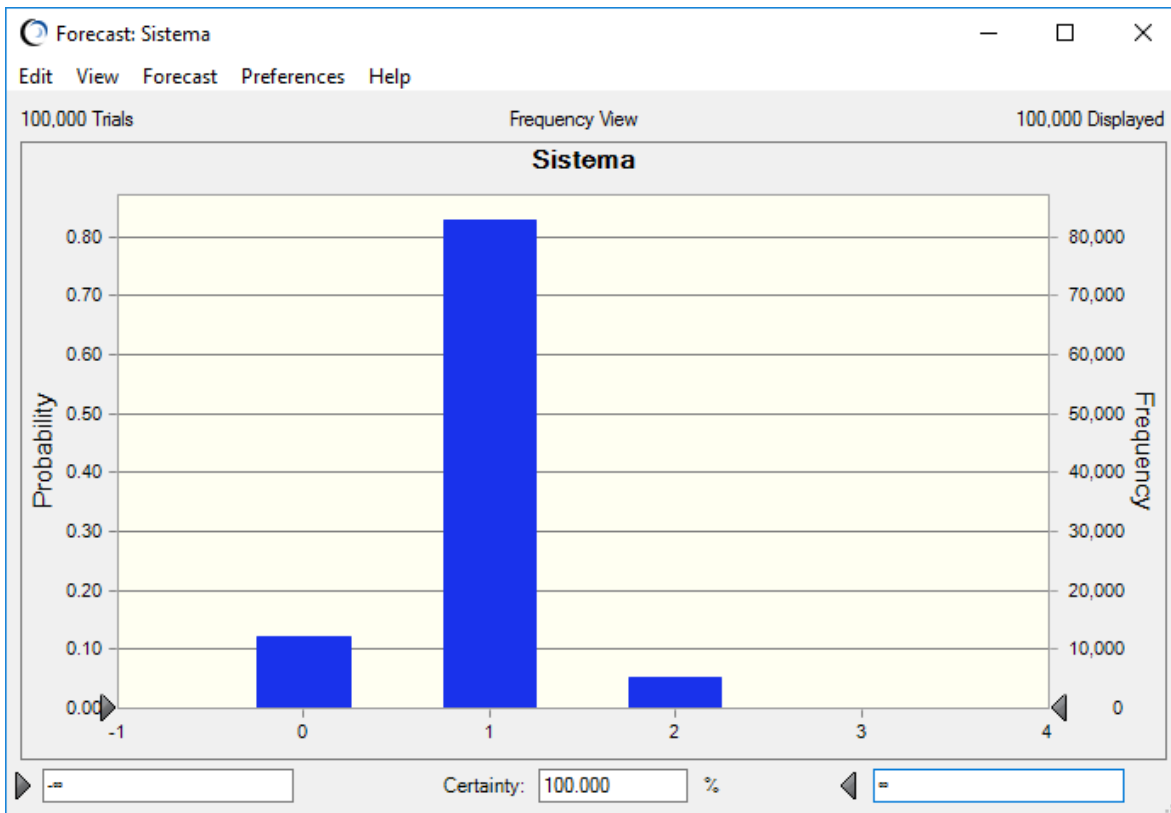


Figura 23: simulación Monte Carlo para el sistema de baterías

Los cuales pueden ser resumidos en la siguiente tabla:

Estado $k$	Probabilidad $p$
$k = 4 (\geq 90\%)$	0
$k = 3 (80 - 90\%)$	0
$k = 2 (70 - 80\%)$	0,0507
$k = 1 (60 - 70\%)$	0,8268
$k = 0 (\leq 60\%)$	0,1225

Tabla 3: Función de masa de probabilidad del sistema por simulación Monte Carlo

### **6.12 DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN DE MASA DE PROBABILIDAD DEL SISTEMA**

Considerando las funciones de masa de probabilidad de las baterías y la función de estructura del sistema, se ha determinado la función de masa de probabilidad del sistema a través de los métodos de simulación Monte Carlo y UGF, donde el primero obtuvo el siguiente resultado:

$$p = \{0; 0; 0,0507; 0,8268; 0,1225\}$$

El cual es muy cercano al método UGF, el cual obtuvo lo siguiente:

$$U(z) = 0z^4 + 0z^3 + 0,0514z^2 + 0,8258z^1 + 0,1228z^0$$

### **6.13 SELECCIÓN DE LOS NIVELES DE DEMANDA**

Utilizando el concepto comúnmente aceptado del ciclo de vida de la batería, el cual se define como el número de ciclos que una batería puede realizar antes que su capacidad disminuya bajo el 80% de su capacidad inicial, se considerará un nivel de demanda de un SOH del 80%, es decir, las probabilidades de los estados mayores a 3.

Por lo que la confiabilidad viene dada como  $R = \Pr(k \geq 3)$ , donde para ambos métodos ésta es igual a 0.

### **6.14 ANÁLISIS DE RESULTADOS**

Es posible obtener la función de masa de probabilidad del sistema de baterías para los dos métodos MSS aplicados en este caso de estudio, donde el método de simulación Monte Carlo dio una buena aproximación, respaldado por el método UGF, el cual da un resultado exacto.

Considerando el nivel de demanda de un 80% ( $k = 3$ ) para el SOH, se observa que la confiabilidad del sistema de baterías es de 0, por lo que se necesitará aumentar ésta.

Algunas formas para aumentar la confiabilidad son la utilización de baterías de Li-ion únicamente con altos SOH, poseer un sistema de monitoreo de baterías y la incorporación de baterías redundantes.

Por otro lado, para tener una visión global del comportamiento de baterías, se seguirá la metodología para encontrar la función de masa de probabilidad del sistema de baterías para distintos números de ciclos de carga/descarga, temperaturas y tasas de descarga, las cuales se muestran a continuación:

Funciones de masa de probabilidad para $T = 50[^\circ\text{C}]$ y $d = 1[\text{C}]$					
N (ciclos)	$k = 4$ ( $\geq 90\%$ )	$k = 3$ (80-90%)	$k = 2$ (70-80%)	$k = 1$ (60-70%)	$k = 0$ ( $\leq 60\%$ )
100	0,9987	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
200	0,0309	0,9690	0,0000	0,0000	0,0000
300	0,0000	0,8213	0,1785	0,0000	0,0000
400	0,0000	0,0056	0,8534	0,1409	0,0000
500	0,0000	0,0000	0,0513	0,8258	0,1227

Tabla 4: Funciones de masa de probabilidad para  $T=50[^\circ\text{C}]$  y  $d=1[\text{C}]$

Funciones de masa de probabilidad para $T = 50[^\circ\text{C}]$ y $d = 0,5[\text{C}]$					
N (ciclos)	$k = 4$ ( $\geq 90\%$ )	$k = 3$ (80-90%)	$k = 2$ (70-80%)	$k = 1$ (60-70%)	$k = 0$ ( $\leq 60\%$ )
100	0,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
200	0,4628	0,5371	0,0000	0,0000	0,0000
300	0,0002	0,9937	0,0060	0,0000	0,0000
400	0,0000	0,0440	0,9494	0,0065	0,0000
500	0,0000	0,0001	0,1819	0,8040	0,0138

Tabla 5: Funciones de masa de probabilidad para  $T=50[^\circ\text{C}]$  y  $d=0,5[\text{C}]$

A partir de las tablas 4 y 5, es posible obtener los niveles de confiabilidad para un nivel de demanda del 80%, los cuales se muestran en el siguiente gráfico:

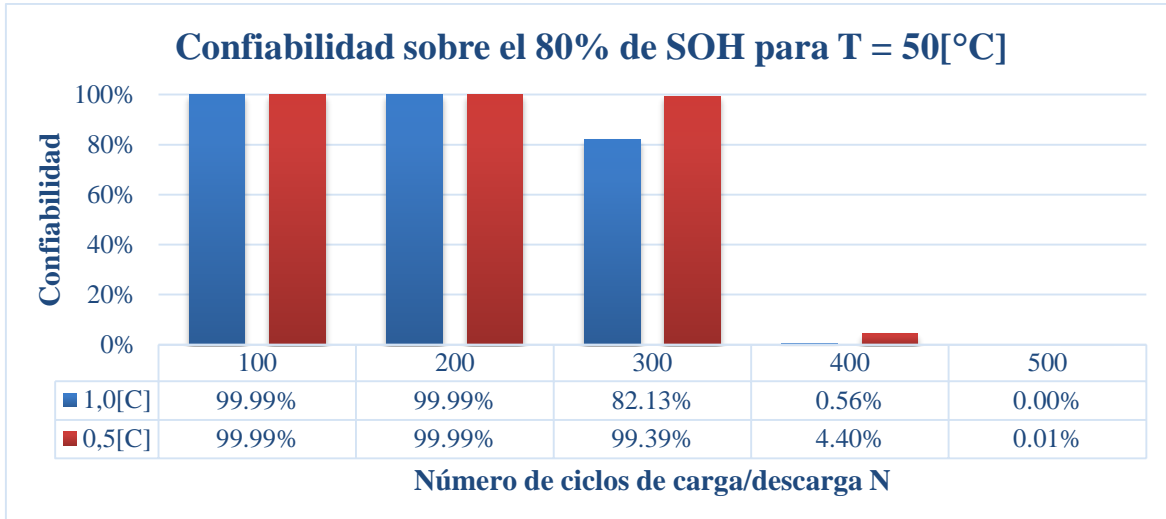


Figura 24: Confiabilidad sobre el 80% de SOH para T = 50[°C]

A partir de las tablas y el gráfico es posible observar que para los números de ciclos de carga/descarga más altos, la confiabilidad disminuye. Por otro lado, para la tasa de descarga de 0,5[C], la confiabilidad sobre el 80% es mayor respecto de la tasa de descarga de 1[C], conforme aumenta el número de ciclos.

También se analizarán las funciones de masa de probabilidad del sistema para una temperatura menor ( $T = 25[°C]$ ), debido a que es posible llegar a una mayor cantidad de ciclos y de esta forma, se puede lograr una mejor visualización de la confiabilidad.

Funciones de masa de probabilidad para T = 25[°C] y d = 1[C]					
N (ciclos)	k = 4 (≥ 90%)	k = 3 (80-90%)	k = 2 (70-80%)	k = 1 (60-70%)	k = 0 (≤ 60%)
100	0,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
200	0,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
300	0,8178	0,1821	0,0000	0,0000	0,0000
400	0,0003	0,9978	0,0017	0,0000	0,0000
500	0,0000	0,8579	0,1420	0,0000	0,0000
600	0,0000	0,3661	0,6338	0,0000	0,0000
700	0,0000	0,0772	0,9211	0,0015	0,0000
800	0,0000	0,0119	0,9274	0,0605	0,0000

Tabla 6: Funciones de masa de probabilidad para T=25[°C] y d=1[C]

Funciones de masa de probabilidad para $T = 25[^\circ\text{C}]$ y $d = 0,5[\text{C}]$					
N (ciclos)	$k = 4$ ( $\geq 90\%$ )	$k = 3$ (80-90%)	$k = 2$ (70-80%)	$k = 1$ (60-70%)	$k = 0$ ( $\leq 60\%$ )
100	0,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
200	0,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
300	0,9945	0,0054	0,0000	0,0000	0,0000
400	0,0271	0,9728	0,0000	0,0000	0,0000
500	0,0008	0,9988	0,0002	0,0000	0,0000
600	0,0000	0,9260	0,0738	0,0000	0,0000
700	0,0000	0,4606	0,5392	0,0000	0,0000
800	0,0000	0,1020	0,8972	0,0006	0,0000

Tabla 7: Funciones de masa de probabilidad para  $T=25[^\circ\text{C}]$  y  $d=0,5[\text{C}]$

A partir de las tablas 6 y 7, es posible obtener los niveles de confiabilidad para un nivel de demanda del 80%, para la temperatura de  $25[^\circ\text{C}]$  y las tasas de descarga de  $1[\text{C}]$  y  $0,5[\text{C}]$ , los cuales se muestran en el siguiente gráfico:

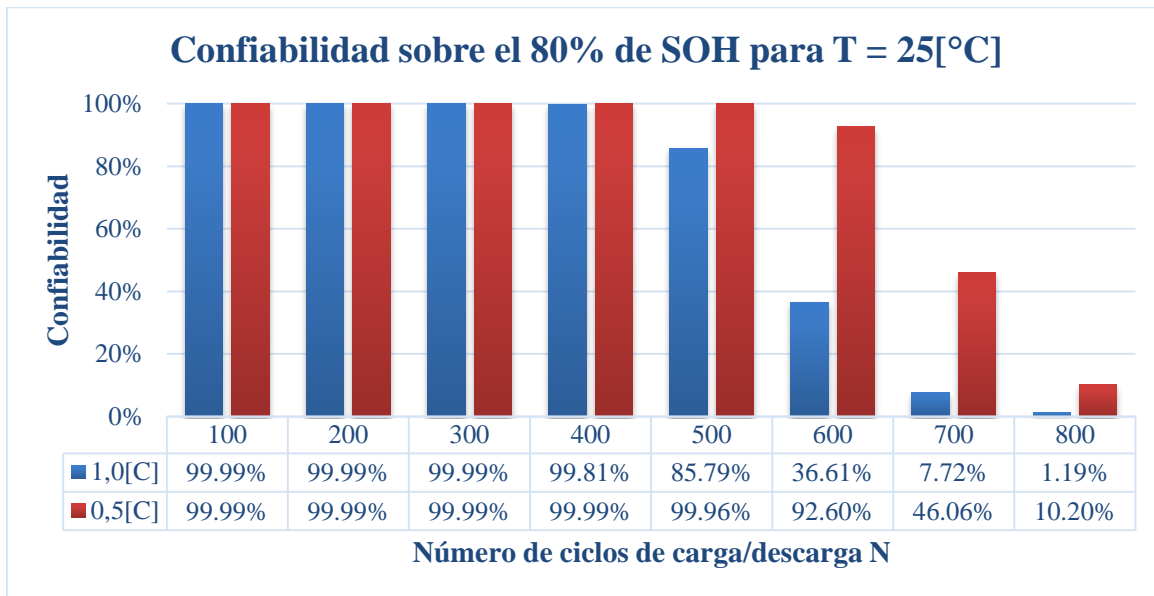


Figura 25: Confiabilidad sobre el 80% de SOH para  $T = 25[^\circ\text{C}]$

Se puede observar que a medida que el número de ciclos de carga/descarga  $N$  aumenta, la confiabilidad sobre el 80% disminuye independiente de la temperatura o tasa de descarga, por lo que disminuye la capacidad máxima de carga de las baterías, debido únicamente a la utilización de éstas.

Luego, al utilizar las baterías a una temperatura más baja, éstas alcanzan mayores números de ciclos de carga/descarga, logrando mayores niveles de confiabilidad sobre el 80% de SOH.

Cabe destacar que los valores han sido truncados, con la intención de mostrar que no es posible alcanzar efectivamente el 100% de confiabilidad.

### 6.14.1 Aumento de la confiabilidad

Una de las formas de aumentar la confiabilidad del sistema de baterías, es agregando baterías redundantes. Para realizar esto, se deberá volver al paso 6.3 de la metodología, correspondiente a la determinación de modelos de funcionamiento, donde utilizando las relaciones para baterías redundantes, se tiene que:

En el caso de agregar  $\Delta m$  filas y  $\Delta n$  columnas al sistema de  $m \times n$  baterías, la tasa de descarga es:

$$d_{nueva} = \frac{mn}{(m + \Delta m)(n + \Delta n)} \times d$$

De manera similar para el número de ciclos de carga/descarga:

$$N_{nuevo} = \frac{mn}{(m + \Delta m)(n + \Delta n)} \times N$$

De esta forma se obtiene el nuevo modelo de funcionamiento del sistema con baterías redundantes, donde el SOH del sistema de baterías presenta una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , con media y desviación estándar según:

$$\mu = SOH = 1 - \left( \frac{1}{2} k_1 \left( \frac{mn}{(m + \Delta m)(n + \Delta n)} \times N \right)^2 + k_2 \left( \frac{mn}{(m + \Delta m)(n + \Delta n)} \times N \right) \right) - \frac{k_3}{Q_{nom}} \times \frac{mn}{(m + \Delta m)(n + \Delta n)} \times d$$

$$\sigma = \frac{1 - \mu}{6}$$

Se procede al cálculo del SOH promedio, para 500 ciclos de carga/descarga, una temperatura de 50[°C] y una tasa de descarga de 1[C]. A modo de ejemplo se realizará el cálculo con  $\Delta m = 1$  y  $\Delta n = 1$  para el sistema de baterías 2 × 5 serie-paralelo:

$$\begin{aligned} \mu = SOH &= 1 - \left( \frac{1}{2} \times 1,6 \times 10^{-6} \times \left( \frac{5 \times 2}{(5 + 1)(2 + 1)} \times 500 \right)^2 + 2,9 \times 10^{-4} \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{5 \times 2}{(5 + 1)(2 + 1)} \times 500 \right) \right) - \frac{6,82 \times 10^{-2}}{3,4} \times \frac{5 \times 2}{(5 + 1)(2 + 1)} \times 3,4 \\ &= 0,8198 \end{aligned}$$

De esta forma al incorporar una fila de baterías en serie y una columna de baterías en paralelo, se estarían agregando un total de 8 baterías redundantes al sistema y éste pasaría a ser un 3 × 6 serie-paralelo.

A continuación se muestra una tabla con los valores del SOH para distintas cantidades de baterías redundantes:

SOH(500,1,50)	$\Delta n = 0$	$\Delta n = 1$	$\Delta n = 2$
$\Delta m = 0$	58,68% 0	76,90% 5	84,34% 10
$\Delta m = 1$	68,34% 2	81,98% 8	87,64% 14
$\Delta m = 2$	74,57% 4	85,31% 11	89,83% 18
$\Delta m = 3$	78,86% 6	87,64% 14	91,38% 22
$\Delta m = 4$	81,98% 8	89,36% 17	92,53% 26
$\Delta m = 5$	84,34% 10	90,67% 20	93,42% 30

Tabla 8: SOH para distintas cantidades de baterías redundantes

Donde el número de baterías redundantes se muestra debajo del valor del SOH.

Es posible observar que para mismas cantidades de baterías redundantes, el SOH es el mismo. Por ejemplo, se obtiene un SOH del 81,98% al agregar 8 baterías ya sea por la incorporación de una fila y una columna o por la incorporación de cuatro filas, por lo que el SOH depende únicamente del número de baterías redundantes independiente de la forma en la que se agreguen, no así la confiabilidad del sistema de baterías, ya que ésta depende de la configuración.

De lo anterior se desprende la siguiente relación  $\frac{mn}{mn+x}$ , donde  $x$  corresponde al número de baterías redundantes agregadas. De esta manera, se obtiene una visualización más completa del comportamiento del SOH conforme aumenta el número de baterías redundantes, el cual se muestra en el siguiente gráfico:

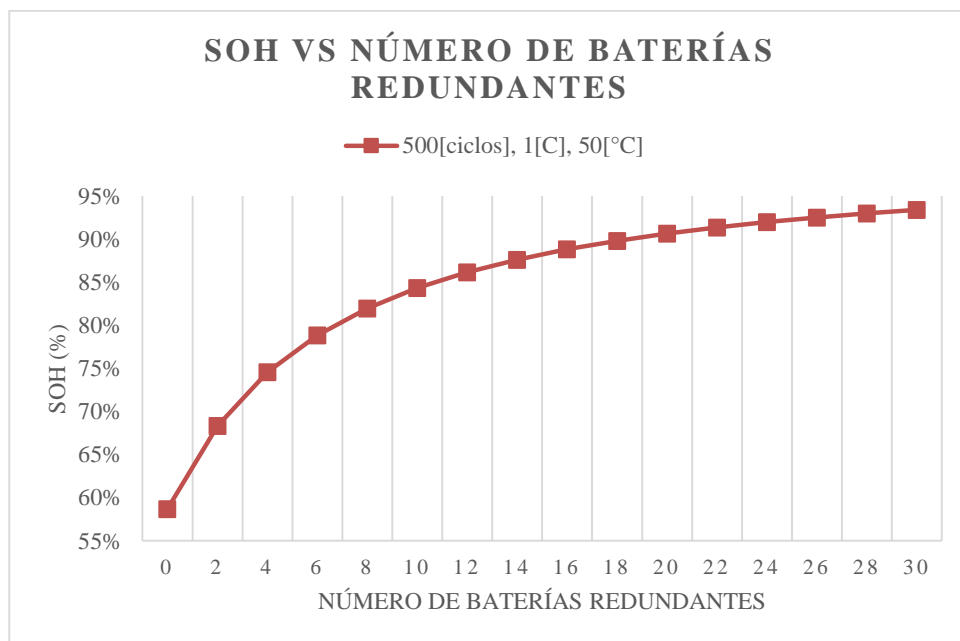


Figura 26: SOH vs número de baterías redundantes

Se puede observar que la incorporación de baterías redundantes aumenta el SOH de las baterías, luego, el SOH aumenta inicialmente de manera rápida con la incorporación de baterías y posteriormente, aumenta de manera más lenta conforme sigue la incorporación de éstas.

Debido a que la confiabilidad depende de la configuración, se analizarán estas dependencias según distintas formas de incorporación de baterías redundantes, las cuales se agregarán al sistema inicial de 10 baterías:

1. Primera forma: Se agregará una batería redundante a la vez, en paralelo a los subsistemas de 5 baterías de manera alternada.

En el ejemplo se muestra el sistema inicial conformado por 10 baterías, agrupadas en dos subsistemas de 5 baterías cada uno, luego se muestra como se han agregado 5 baterías redundantes según la primera forma de incorporación de baterías.

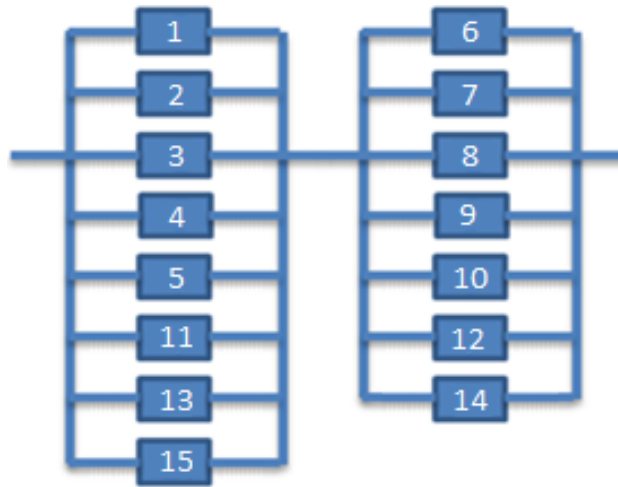


Figura 27: Ejemplo de la primera forma de incorporación de baterías redundantes

2. Segunda forma: Se agregará una batería redundante a la vez, en serie a las baterías de los subsistemas iniciales de manera alternada.

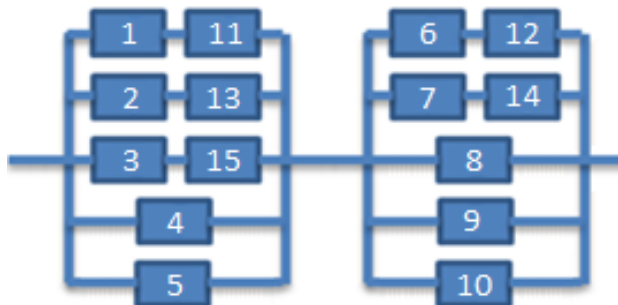


Figura 28: Ejemplo de la segunda forma de incorporación de baterías redundantes

3. Tercera forma: Se agregará una batería redundante a la vez, agregando una batería en paralelo y luego una batería en serie, repitiendo este proceso de manera alternada en los subsistemas iniciales de 5 baterías.

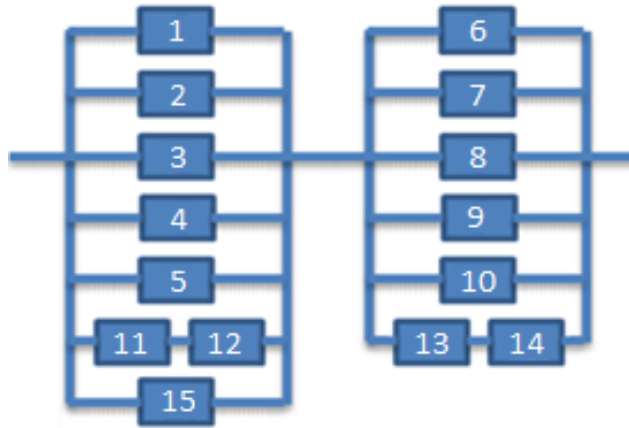


Figura 29: Ejemplo de la tercera forma de incorporación de baterías redundantes

A partir de los valores del SOH para distintas cantidades de baterías redundantes, siguiendo la metodología para el análisis de confiabilidad y agregando las baterías redundantes según las distintas formas de incorporación de éstas, se grafican los niveles de confiabilidad para un nivel de demanda de SOH del 80% según la cantidad de baterías redundantes agregadas:

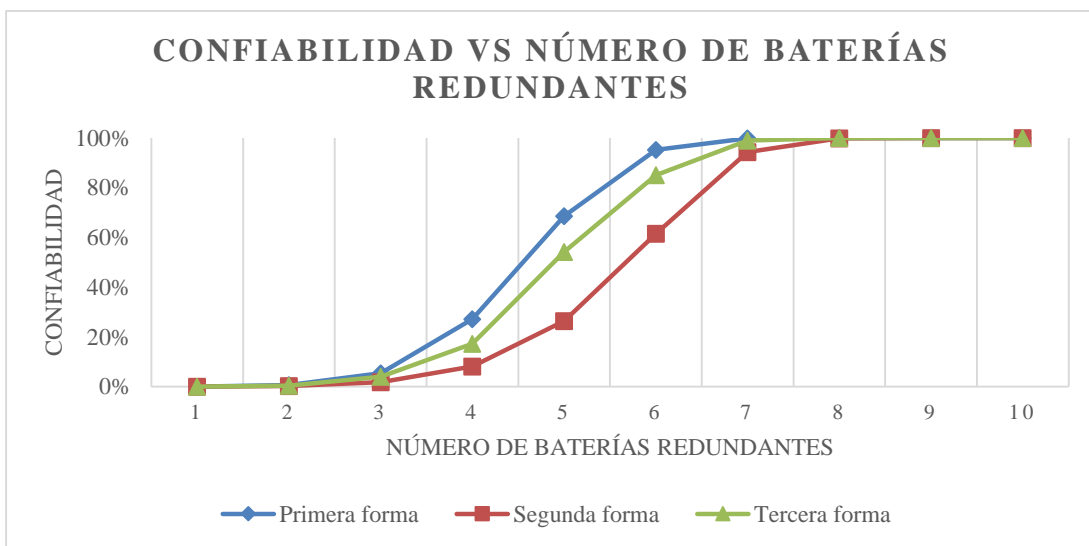


Figura 30: Confiabilidad vs número de baterías redundantes

Del gráfico se puede apreciar que a medida que se agregan baterías redundantes, la confiabilidad aumenta en general, sin embargo dependiendo de la forma de incorporación de baterías redundantes este aumento presenta diferencias.

Cada forma de incorporación de baterías redundantes implica un cambio diferente en la configuración del sistema, provocando distintos niveles de confiabilidad por sobre el nivel de demanda.

De la primera forma se puede observar que al agregar tres baterías redundantes la confiabilidad no aumenta significativamente, pero a partir de la cuarta batería, hasta la sexta batería se genera un aumento en la confiabilidad de alrededor de un 90%, sin embargo al agregar 7 o más baterías, el sistema aumenta paulatinamente, por lo que sigue un comportamiento de función logística o curva en forma de “S”. Luego, se alcanza el 99,99% de confiabilidad tras la incorporación de la octava batería.

En la segunda forma de incorporación se observa un comportamiento de la confiabilidad con perfil de “S”, donde inicialmente con las primeras tres batería redundantes no es posible observar un gran aumento de la confiabilidad, sin embargo a partir de la cuarta batería, la confiabilidad aumenta significativamente y lo sigue haciendo hasta la séptima batería, alcanzando el 94,33% de confiabilidad por sobre el nivel de demanda del 80% de SOH, luego aumenta de manera paulatina hasta alcanzar el 99,99% de confiabilidad con la novena batería redundante.

La tercera forma, al ser una mezcla de las primeras dos, la confiabilidad presenta un comportamiento con características similares a estas formas, donde se observa el perfil de “S”, sin embargo éste presenta menores niveles de confiabilidad que la primera forma, pero mayores niveles que la segunda forma. Luego, alcanza el 99,99% de confiabilidad con la novena batería redundante.

### 6.14.2 Análisis de costos

El análisis de costos se realizará considerando baterías de Li-ion Panasonic 18650 de 3.400[mAh] y 3,6[V], las cuales poseen un costo aproximado de 3,28 USD cada una.

Donde su costo marginal tendrá como concepto el costo de aumentar en un 1% la confiabilidad. De esta manera, se puede obtener el siguiente gráfico:

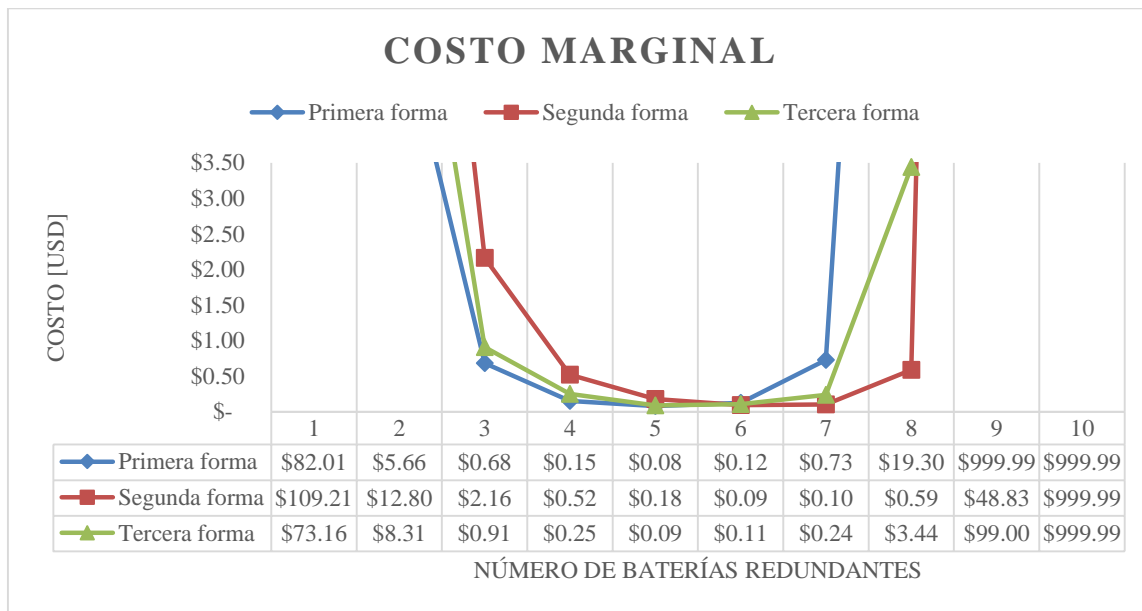


Figura 31: Costos marginales

Donde es posible observar que para la primera y tercera forma de incorporación de baterías redundantes, el agregar dos o menos baterías posee altos costos marginales, por sobre el costo de una batería, esto también ocurre a partir de la octava batería, luego, para la segunda forma, los costos marginales se encuentran bajo el valor de 3,28 USD para el intervalo de baterías redundantes tres a ocho.

Luego, el costo marginal más bajo para la primera forma de incorporación de baterías es de 0,08 USD, y para la segunda y tercera forma 0,09 USD, donde el número de baterías redundantes correspondientes a estos costos son 5, 6 y 5 respectivamente, sin embargo, debido a que precisamente es en estas cantidades de baterías redundantes donde existe la mayor conveniencia para el aumento de la confiabilidad en términos monetarios, el aumentar en un 1% la confiabilidad implica la incorporación de una batería redundante

adicional, terminando con 6 baterías redundantes para la primera y tercera forma, y 7 baterías para la segunda forma de incorporación de baterías redundantes.

Es importante recordar que el análisis sobre el costo marginal, fue realizado con la intención de observar el aumento de la confiabilidad respecto del precio, ya que se considera que el costo de agregar una batería redundante es siempre de 3,28 USD.

## **6.15 CONCLUSIONES DEL CASO DE ESTUDIO**

En primer lugar se debe destacar la importancia de la identificación del sistema de baterías de Li-ion como un sistema multiestado junto a la clara definición de sus elementos, en este caso, las baterías, ya que esto es la base para el desarrollo y posterior análisis del caso de estudio.

En cuanto a la utilización de los métodos MSS, la simulación Monte Carlo logra un resultado muy cercano del obtenido por el método UGF, con el cual es posible obtener la función de masa de probabilidad del sistema de manera exacta. Por lo que la utilización del método de simulación Monte Carlo es práctica, considerando la gama de softwares especialmente desarrollados para este método, los cuales facilitan su implementación.

La forma de incorporación de baterías redundantes es relevante para el aumento de la confiabilidad, ya que la configuración produce un impacto en ésta, donde un mayor número de baterías redundantes asegura un mayor nivel de la confiabilidad. En particular, la primera forma de incorporación de baterías redundantes es la que presenta los mayores niveles de confiabilidad para todas las cantidades de baterías redundantes, además es la forma que necesita de la menor cantidad de baterías redundantes para lograr estar por sobre el 99,99% de confiabilidad, con un total de 8. Por otro lado, la tercer forma al poseer un método de incorporación mixto, llega rápidamente a altos niveles de confiabilidad, sin embargo no alcanza a encontrarse por sobre el 99,99% si no hasta la incorporación de la novena batería. Finalmente, la primera forma de incorporación de baterías redundantes, necesita, al igual que la tercer forma, de 9 baterías adicionales para encontrarse por sobre el 99,99% de confiabilidad, sin embargo es la forma que posee los menores niveles de

confiabilidad para todos los números de baterías redundantes. Por lo que queda en claro que el agregar baterías redundantes en paralelo provee de un mayor nivel de confiabilidad que el agregar baterías redundantes en serie. Esto mismo se aplica al sistema inicial, donde dependiendo de su configuración, el nivel de confiabilidad cambiará.

Por otro lado, debe ser evaluado el costo de agregar estas baterías, donde a través del análisis de costos marginales, se logró identificar los intervalos de número de baterías redundantes donde es conveniente invertir para aumentar el nivel de confiabilidad, además, considerando los costos marginales más bajos para las distintas formas de incorporación de baterías redundantes, se identificaron los números de baterías óptimos a incorporar, en particular 6 baterías adicionales para la primera y tercera forma, y 7 baterías adicionales para la segunda forma.

## 7. CONCLUSIONES

Los sistemas multiestado son capaces de representar de una manera más realista a los equipos o procesos, en comparación a los sistemas binarios clásicos, debido a la mayor complejidad en la definición de los estados tanto para el sistema como para sus componentes. Donde en un primer lugar es vital la identificación de estos estados, las relaciones entre ellos y la probabilidad de su ocurrencia, ya que a partir de esto, es posible utilizar distintos métodos para conocer el comportamiento del sistema, y de esta forma poder tomar decisiones, como la creación de nuevos planes de mantención para componentes críticos o la optimización del sistema para ofrecer mayores niveles de confiabilidad.

Los cuatro métodos principales para abordar un MSS, poseen distintas características, donde dependiendo del sistema a tratar, algunos métodos pueden ser más convenientes de utilizar que otros. Particularmente, la extensión de métodos binarios al presentar una forma extensiva, la cual implica enumerar de manera explícita todas las combinaciones de estados de los elementos de un sistema, puede llegar a consumir recursos de manera considerable si se aplica a sistemas complejos, sin embargo es de fácil comprensión y es capaz de determinar de manera precisa el comportamiento del sistema. Luego, el método de procesos estocásticos, es útil cuando se cuenta con las tasas de falla y reparación de los elementos para el cálculo de las probabilidades de estado, además posibilita el análisis de comportamientos dinámicos, sin embargo, requiere de ciertas condiciones para ser utilizado y es conveniente su aplicación a sistemas simples. En cuanto al método de la función generadora universal, debido a que utiliza procedimientos simples, intuitivos y sistemáticos, es posible aplicarlo a todo tipo de sistemas, siendo un método práctico y flexible. Estas dos últimas características también son parte del método de simulación Monte Carlo, ya que existe una gran cantidad de softwares que han desarrollado este método, facilitando su utilización, siendo el único de los cuatro en no entregar un resultado preciso, sin embargo, al generar múltiples pruebas aleatorias, puede alcanzar un valor aproximado dentro de un intervalo de confianza.

Considerando que los métodos responden a una misma problemática, se desarrolló una metodología, que a través de una serie de pasos expresados en diagramas de flujos, logra guiar el cálculo de la confiabilidad de un sistema multiestado para su análisis y toma de decisiones. Según esta metodología se determinó que, en general, los métodos poseen en común la identificación del MSS, la selección de elementos, la generación de la función de masa de probabilidad de éstos, y junto a la determinación de la configuración del sistema y la selección de los niveles de demanda, lograr la determinación de la función de masa de probabilidad del sistema para el posterior análisis de resultados. Luego, se consiguió aplicar esta metodología de manera exitosa sobre un sistema de baterías de Li-ion pertenecientes a un vehículo eléctrico, realizándose un análisis de confiabilidad para los métodos seleccionados, UGF y simulación Monte Carlo, donde se verificó que el segundo método entrega un resultado cercano al primero, además, se confirmó la practicidad de ambos.

Respecto del análisis de confiabilidad sobre el sistema de baterías de Li-ion, se determinó que la forma de incorporación de baterías redundantes es relevante para el aumento de la confiabilidad, ya que la configuración produce un impacto en ésta, donde un mayor número de baterías redundantes asegura un mayor nivel de la confiabilidad. Quedando en claro que el agregar baterías redundantes en paralelo provee de un mayor nivel de confiabilidad que el agregar baterías redundantes en serie, esto se ve reflejado en la configuración que adoptan algunos vehículos eléctricos. Por otro lado, en la evaluación del costo de agregar baterías adicionales, se logró identificar los intervalos de números de baterías redundantes donde es conveniente invertir para aumentar el nivel de confiabilidad, además, considerando los costos marginales más bajos para las distintas formas de incorporación de baterías redundantes, se identificaron los números de baterías óptimos a incorporar. Finalmente, pensando en un vehículo eléctrico, deben ser considerados los costos globales tras la incorporación de baterías redundantes, y las implicaciones técnicas que puedan existir, como el aumento en el peso del EV.

De esta forma se han alcanzado los objetivos específicos y el objetivo general correspondientes a esta tesis.

## 8. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- Global EV Outlook 2016 Beyond one million electric cars. (2016). *International Energy Agency (IEA)*.
- Fiori, C., Ahn, K., & Rakha, H. A. (2016). Power-based electric vehicle energy consumption model: Model development and validation. *APPLIED ENERGY*, 168, 257–268. <http://doi.org/10.1016/j.apenergy.2016.01.097>
- Departamento de Energía de Estados Unidos, <<http://www.energy.gov/articles/top-10-things-you-didn-t-know-about-electric-vehicles>>, 2012.
- Arata, A. (2009). *Ingeniería y Gestión de la Confiabilidad Operacional en Plantas Industriales*. Santiago, Chile: RIL Editores.
- Kristjanpoller, F., Arata, A., González, V., & Crespo., A. (2010). Caso de estudio sobre el análisis de la fiabilidad en una planta de triturado de mineral en Chile. *Revista Ingeniería Y Gestión de Mantenimiento.*, Abril/Mayo/Junio. España.
- Salazar Moreno et. al, R. (2011). Aplicaciones de la Distribución Weibull en Ingeniería de Confiabilidad. In E. Meza Ramos et. al, *Memoria del XXI Coloquio Mexicano de Economía Matemática y Econometría* (pp. 148-161). Nayarit, México: Eumed.
- Lisnianski, A., & Levitin, G. (2003). *Multi-state System Reliability: Assessment, Optimization and Applications*. Haifa, Israel: World Scientific.
- Lisnianski, A., Frenkel, I., & Ding, Y. (2010). *Multi-state System Reliability Analysis and Optimization for Engineers and Industrial Managers*. Springer London Dordrecht Heidelberg New York.
- Raychaudhuri, S. (2008). Introduction to Monte Carlo Simulation. *Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference*, 91–100.
- Graham, C., & Talay, D. (2013). *Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods*. Springer London Dordrecht Heidelberg New York.

- Zio, E. (2013), *The Monte Carlo Simulation Method for System Reliability and Risk Analysis*, Springer Series in Reliability Engineering, DOI: 10.1007/978-1-4471-4588-2\_3, Springer-Verlag London 2013
- Electropaedia, *Battery and Energy Technologies*, <<http://www.mpoweruk.com/index.htm>>, 2015.
- Soon, K., Moo, C., Chen, Y., & Hsieh, Y. (2009). Enhanced coulomb counting method for estimating state-of-charge and state-of-health of lithium-ion batteries. *Applied Energy*, 86(9), 1506–1511. <http://doi.org/10.1016/j.apenergy.2008.11.021>
- Liu, Z., Tan, C., & Leng, F. (2015). A reliability-based design concept for lithium-ion battery pack in electric vehicles. *Reliability Engineering and System Safety*, 134, 169–177. <http://doi.org/10.1016/j.res.2014.10.010>
- Warner, J. (2015). *Lithium-Ion Battery Applications. The Handbook of Lithium-Ion Battery Pack Design*. <http://doi.org/10.1016/B978-0-12-801456-1.00015-4>
- Pastor-Fernández, C., Bruen, T., Widanage, W. ., Gama-Valdez, M. ., & Marco, J. (2016). A Study of Cell-to-Cell Interactions and Degradation in Parallel Strings: Implications for the Battery Management System, submitted for publication. *Journal of Power Sources*, 329, 574–585. <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2016.07.121>
- Bullis, K., *How Tesla is driving electric car innovation*. MIT Technology Review (7 August 2013); <http://www.technologyreview.com/news/516961/how-tesla-is-driving-electric-car-innovation>