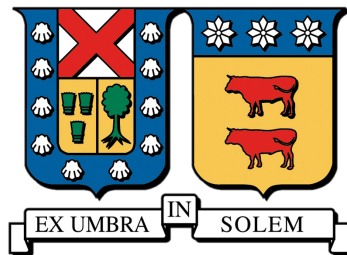


**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA**  
**VALPARAÍSO - CHILE**



**DESARROLLO DE UN MODELO DE CORREA  
TRANSPORTADORA DE GRAN LONGITUD E  
IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA  
DETERMINAR CARGAS TRANSIENTES  
DURANTE UNA SITUACIÓN DE PARADA  
CONTROLADA DE FRENADO IMPREVISTO**

**ABEL VEGA CUTIPA**

**MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL  
MECÁNICO MENCIÓN PRODUCCIÓN**

**PROFESOR GUÍA:**

**FERNANDO ROJAS GONZALEZ**

**PROFESOR CORREFERENTE:**

**GUILLERMO GONZALEZ  
BAQUEDANO**

**ABRIL - 2022**

**Dedicatoria.**

*A todas las personas que me han apoyado y alentado en mis años universitarios, en especial a los que me inspiraron a seguir una carrera de números antes que letras.*

*Todos los méritos a mis padres Abel V. V. y María C. V. que me han entregado todo. De igual forma agradecimientos a Fanny Elena V. C. y a su familia por sus consejos y su apoyo.*

*También mis agradecimientos a todos quienes vieron las versiones previas de este trabajo y colaboraron con su punto de vista.*

## **Resumen.**

Las correas transportadoras de gran aplicación en la industria existen en una gran cantidad de tipos y de configuraciones, en el presente trabajo se presta atención a las correas transportadoras de largas distancias, igual o mayor a 3 [Km] utilizadas en proyectos particulares de minería. Para las correas transportadoras más comunes que abarcan distancias cercanas a 1 [Km] los estándares DIN e ISO son suficientes para diseñar y asegurar un buen desempeño de la correa, sin embargo, para distancias mayores a 1 [Km] es posible que se presenten fenómenos inesperados en la operación de la correa, por ejemplo, puede ocurrir la pérdida de tensión en la correa junto con la caída accidental de material cargado en la correa como resultado de una detención imprevista de la polea motriz. Para una mejor comprensión de la dinámica de la correa transportadora se plantea la construcción de un modelo de elementos finitos unidimensionales que permita estimar los picos y valles de las curvas de tensión sobre la correa, buscando con esto construir una herramienta adicional que permita el diseño de soluciones a los problemas presentados a través del estudio de la dinámica de la correa transportadora. El modelo una vez ya construido es comparado con un programa comercial de simulación de correas transportadoras ya existente buscando con esto obtener el orden de magnitud del error relativo en los resultados entregados.

**KEYWORDS:** correas transportadoras, elementos finitos unidimensionales, modelo de indentación, viscoelasticidad lineal

## **Abstract**

Conveyor belts of wide application in the industry exist in a large number of types and configurations, in the present work attention is given to conveyor belts of long distances, equal or greater than 3 [km] used in particular mining projects. For the most common conveyor belts covering distances close to 1 [km] the DIN and ISO standards are sufficient to design and ensure a good belt performance, however, for distances greater than 1 [km] it is possible that unexpected phenomena may occur in the belt operation, for example, loss of tension in the belt may occur together with the accidental fall of loaded material on the belt as a result of an unforeseen stop of the driving pulley. For a better understanding of the conveyor belt dynamics, the construction of a one-dimensional finite element model is proposed to estimate the peaks and valleys of the tension curves on the belt, thus seeking to build an additional tool that allows the design of solutions to the problems presented through the study of the conveyor belt dynamics. Once the model is built, it is compared with an existing commercial conveyor belt simulation program in order to obtain the order of magnitude of the relative error in the delivered results.

**KEYWORDS:** conveyor belts, one-dimensional finite elements, indentation model, linear viscoelasticity

## Glosario.

$A_m$	área de la sección transversal de la carga sobre la correa
$a$	semilargo de contacto
$a_{i+1}^*$	aceleración aproximada para el paso $i + 1$ usando diferencias finitas hacia atrás
$a_0$	predicador del semilargo de contacto
$\bar{a}(t)$	aceleración relacionada a la curva de velocidad predefinida
$B$	ancho de la correa
$\mathbf{C}$	matriz de amortiguamiento
$C$	factor de la norma DIN22101 asociado al largo entre centros
$c_i$	constante de amortiguamiento del elemento “i”
$D$	diámetro del rodillo
DMA	“Dynamic Analysis Mechanical” (en español, Análisis mecánico diferencial)
$D_R$	diámetro del polín
$d_{\text{deslizamiento}}$	deslizamiento entre la correa y la polea
$d_p$	desplazamiento tangencial de la polea, provocado por la rotación de la polea misma
$\bar{d}(t)$	desplazamiento relacionado a la curva de velocidad predefinida
$E$	módulo de Young
$E(t)$	módulo de relajación del esfuerzo como función del tiempo
$E'$	módulo de almacenamiento
$E''$	módulo de pérdida
$E^*$	módulo de elasticidad por [m] de espesor
$E_b$	módulo de elasticidad representativo de la correa
$E_R$	módulo relajado o valor de la función de relajación después de un largo tiempo de aplicado el esfuerzo
$E_U$	módulo no relajado o valor de la función de relajación obtenido inmediatamente después de aplicado el esfuerzo
$E_1$	módulo de elasticidad en el modelo viscoelástico lineal, equivalente al módulo relajado
$E_2$	módulo de elasticidad en el modelo viscoelástico lineal, equivalente a la diferencia entre módulos $E_U - E_R$
$e$	indentación máxima en la correa, en el modelo de May
${}^t\mathbf{F}$	vector columna de fuerzas nodales con términos no lineales dependientes de $t$
$F_c$	fuerza de resistencia al movimiento calculada según norma DIN 22101
$F_E$	fuerza de resistencia debido a la indentación de la correa
$F_{\text{ext}}^*$	fuerza externa aplicada sobre el nodo, pero obtenida utilizando una velocidad y aceleración aproximada
$F_H$	resistencia principal al movimiento
$F_{H,o}$	fuerza de resistencia primaria para el lado de carga
$F_{H,u}$	fuerza de resistencia primaria para el lado retorno
$F_i$	fuerza de resistencia al movimiento por indentación
$F_{i,y}$	función de distribución de la fuerza de resistencia en el ancho de la zona de contacto entre el polín y la correa
$F_N$	resistencia secundaria al movimiento
$F_R$	fuerza de resistencia al movimiento ejercida por los polines
$F_{RM}$	función que representa a una expresión algebraica mayor
$F_{\text{roce}}$	fuerza de roce aplicada sobre la correa
$F_s$	resistencia de casos especiales

$F_{st}$	resistencia al movimiento debido a la elevación de la carga
$f$	factor de resistencia por indentación
$f_{carga}$	factor de resistencia para el lado carga
$\mathbf{f}_{cuerpo}$	vector columna que contiene a las fuerzas de cuerpo
$\mathbf{f}_{fuerzas\ roce}$	vector columna de fuerzas que contiene a las fuerzas de roces puntuales
$f_i$	factor de resistencia por indentación
$\mathbf{f}_{movimiento\ polea}$	vector columna que contiene a las fuerzas relacionadas a la detención controlada
$\mathbf{f}_{pesoW}$	vector de fuerzas que contiene a la fuerza ejercida por el contrapeso
$f_{retorno}$	factor de resistencia para el lado carga
$G_{B,m}$	carga vertical producto del peso del material transportado
$G_{M,m}$	carga vertical soportada por unidad de largo de la correa
$g$	constante de gravedad
$H$	cambio de altura en la elevación de la correa transportadora inclinada
$h$	grosor de la cubierta inferior de la correa
$I$	segundo momento de área de la sección transversal de la correa
$I_{polin}$	inercia del polín con respecto al eje central
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez
$k_i$	constante de elasticidad del elemento “i”
$L_c$	largo entre centros de la correa transportadora
$L_{carga}$	distancia entre polines, lado carga
$L_{retorno}$	distancia entre polines, lado retorno
$l_e$	largo del elemento finito
$l_p$	distancia entre centros
$\mathbf{M}$	matriz de inercia
$M$	momentum ejercido por la fuerza de resistencia sobre el polín
$M_{e_{carga}}$	matriz elemental de inercia de únicamente la masa de la carga transportada
$M_{e_{correa}}$	matriz elemental de inercia de únicamente la masa de la correa
$M_{e_{lado\ carga}}$	matriz elemental de inercia, lado carga
$M_{e_{lado\ retorno}}$	matriz elemental de inercia, lado retorno
$M_{e_{polea}}$	matriz elemental de inercia de únicamente la masa equivalente a la inercia de las poleas presentes presentes en el modelo de elemento finito
$M_{e_{polines}}$	matriz elemental de inercia de únicamente la masa equivalente a la inercia de los polines presentes en el modelo de elemento finito
$m_c$	masa equivalente polines lado carga
$m'_{carga}, m'_{carga\ material}$	masa del material sobre la correa por unidad de largo de la correa
$m'_{correa}$	masa por unidad de largo de la correa
$m_i$	masa del elemento “i”
$m_{pc}$	masa reducida de un solo polín del lado carga
$m_{polea\ cola}$	masa polea cola
$m_{polea\ motriz}$	masa polea motriz
$m_{polea\ tensora}$	masa polea tensora
$m'_{polin}$	masa equivalente reducida del polín
$m_{pr}$	masa reducida de un solo polín del lado retorno
$m_r$	masa equivalente polines lado retorno
$n_{carga}$	número de estaciones de polines, lado carga
$n_{cola}$	ubicación nodo polea cola
$n_e$	número de elementos totales
$n_{motriz}$	ubicación nodo polea motriz
$n_n$	número de nodos totales
$n_p$	número de estaciones de polines que soportan el peso de la correa
$n_{pc}$	número de polines en una estación

$n_{pr}$	número de polines en una estación
$n_{retorno}$	número de estaciones de polines, lado retorno
$P$	esfuerzo nominal
$Q_n$	capacidad nominal de toneladas por hora
$q_o$	porcentaje de la fuerza de resistencia primaria en el lado de carga
$q_u$	porcentaje de la fuerza de resistencia primaria en el lado retorno
$q_v$	carga vertical sobre el polín por metro de largo en el eje que corresponde al ancho
$R$	radio del polín
${}^t\mathbf{R}$	vector columna de fuerzas externas puntuales dependientes del tiempo $t$
$R_{pln}$	radio externo del polín
$T$	tensión de la correa
$T_a$	intervalo de tiempo en que la velocidad en la polea motriz desciende hasta cero
$T_n$	periodo natural mínima de oscilación, dentro de un modelo de elementos finitos
$\tan \delta$	coeficiente de amortiguamiento o factor de pérdida
${}^tU$	desplazamiento para el tiempo $t$
${}^t\dot{U}$	velocidad para el tiempo $t$
${}^t\ddot{U}$	aceleración para el tiempo $t$
$u_p$	movimiento lateral de una polea no fija
$u_q, u_r$	desplazamiento de un extremo de correa en contacto con la polea
$V$	velocidad de la correa
$V_b$	velocidad de la correa en estado estacionario
$v_{i+1}^*$	velocidad aproximada para el paso $i+1$ usando diferencias finitas hacia atrás
$\bar{v}(t)$	velocidad predefinida de parada controlada
$W_{correa}$	peso total de la correa, sin considerar la carga de material
$W_{h,m}$	trabajo de la histéresis en un ciclo, por unidad de volumen
$W_{h,V}$	trabajo realizado por la histéresis por unidad de volumen, también considerado, pérdida de trabajo mecánico
$W_{material\ a\ granel}$	peso total del material transportado sobre la correa
$y_0$	indentación máxima del cilindro sobre la correa
$\Gamma$	frontera de los elementos finitos
$\Delta t$	paso de tiempo del algoritmo por diferencias centrales
$\Delta t_{crítico}$	paso temporal de tiempo máximo en el método de diferencias centrales
$\beta$	tiempo característico de la relajación elástica
$\gamma$	deformación (elongación o contracción) de la cubierta en el eje vertical
$\dot{\gamma}$	velocidad de deformación
$\delta$	ángulo de desfase de la función sinusoidal de deformación
$\varepsilon$	deformación
$\varepsilon_0$	amplitud de la función sinusoidal de la deformación
$\zeta$	constante adimensional
$\theta$	ángulo de elevación de la correa transportadora inclinada
$\kappa$	constante adimensional
$\mu_p$	ángulo de desplazamiento
$\xi$	factor de amortiguación
$\rho_m$	densidad del mineral transportado en la correa
$\sigma$	esfuerzo
$\sigma_c$	esfuerzo de Cauchy
$\sigma_0$	amplitud de la función sinusoidal del esfuerzo
$\tau$	tiempo característico de relajación
$\phi_s$	ángulo de sobrecarga del material transportado

$\phi_1, \phi_2$

$\omega$

$\omega_m$

funciones no lineales

frecuencia de la deformación periódica, o velocidad de deformación armónica

frecuencia natural mayor, dentro de un modelo de elementos finitos

# Índice

<b>1. Descripción del problema</b>	<b>1</b>
<b>2. La resistencia al movimiento debido al fenómeno de la indentación.</b>	<b>5</b>
2.1. Modelo de May. . . . .	5
2.1.1. La relación entre la geometría y la deformación. . . . .	6
2.1.2. La relación entre el esfuerzo y la deformación . . . . .	9
2.1.3. Límites del modelo. . . . .	14
2.2. Modelo de Jonker. . . . .	15
2.2.1. Aplicación del modelo. . . . .	17
2.2.2. Limitaciones del modelo . . . . .	23
2.2.3. Cálculo de la resistencia al movimiento. . . . .	26
2.3. Propiedades del material. . . . .	26
2.3.1. Interpolación de valores de $E'$ y $\tan \delta$ . . . . .	27
2.3.2. Determinación de valores de $E_1, E_2$ y $\eta$ . . . . .	29
2.4. Factor de resistencia al movimiento por indentación de la correa. . . . .	30
2.5. Comentarios sobre el factor de resistencia. . . . .	31
<b>3. Elementos finitos lagrangianos en una dimensión.</b>	<b>33</b>
3.1. Introducción. . . . .	33
3.2. Nomenclatura. . . . .	34
3.2.1. Movimiento y medida de la deformación. . . . .	35
3.2.2. Medida del esfuerzo. . . . .	36
3.3. Ecuaciones y leyes de conservación. . . . .	36
3.4. Condiciones de frontera. . . . .	37
3.5. Condiciones de continuidad interior. . . . .	38
3.6. Condiciones iniciales. . . . .	38

3.7. Coordenadas del elemento finito. . . . .	39
3.8. Matrices globales y locales. . . . .	40
3.9. Ecuaciones Discretas en una formulación lagrangiana. . . . .	41
3.10. Ecuaciones Semidiscretas. . . . .	42
<b>4. Métodos Numéricos.</b>	<b>44</b>
4.1. Introducción. . . . .	44
4.2. Método de integración directa. . . . .	45
4.2.1. El método de la diferencia central. . . . .	45
4.3. Implementación del algoritmo. . . . .	46
4.4. Aplicación del método a un análisis dinámico no lineal. . . . .	47
<b>5. Correa transportadora como un modelo de elementos finitos.</b>	<b>49</b>
5.1. Construcción del modelo de elementos finitos. . . . .	49
5.2. Discretización espacial de la correa transportadora. . . . .	52
5.3. Poleas. . . . .	53
5.3.1. Polea Motriz. . . . .	54
5.3.2. Polea de Cola. . . . .	55
5.3.3. Polea Tensora. . . . .	55
5.4. Correa. . . . .	56
5.5. Polines. . . . .	56
5.6. Determinación de la fuerzas de resistencia al movimiento. . . . .	57
5.6.1. Resistencia principal. . . . .	57
5.6.2. Resistencia secundaria. . . . .	58
5.6.3. Resistencia debido a la elevación de carga . . . . .	59
<b>6. Modelo de correa horizontal con un procedimiento de parada con velocidad controlada.</b>	<b>60</b>
6.1. Descripción de la correa transportadora. . . . .	61

6.1.1. Descripción de una correa cargada. . . . .	64
6.2. Descripción de polines. . . . .	65
6.3. Descripción de las fuerzas de cuerpo. . . . .	67
6.4. Descripción de las fuerzas de resistencias. . . . .	67
6.5. Descripción de la polea de cola . . . . .	70
6.6. Descripción de la polea tensora. . . . .	71
6.7. Descripción de las poleas presentes en el modelo. . . . .	73
6.8. Sistema de ecuaciones del modelo. . . . .	76
6.9. Resultados Obtenidos. . . . .	81
6.9.1. Velocidad en la polea motriz. . . . .	82
6.9.2. Velocidad en la polea de cola. . . . .	83
6.9.3. Velocidad en la polea tensora. . . . .	84
6.9.4. Tensión en la polea motriz. . . . .	85
6.9.5. Tensión en la polea de cola. . . . .	86
6.9.6. Tensión en la polea tensora. . . . .	87
6.9.7. Comentarios. . . . .	88
<b>7. Modelo de correa inclinada de 3km.</b>	<b>90</b>
7.1. Descripción de la correa transportadora. . . . .	91
7.1.1. Descripción de las inercias presentes en la correa. . . . .	92
7.2. Descripción de polines. . . . .	93
7.3. Descripción de las fuerzas aplicadas. . . . .	94
7.4. Descripción de poleas. . . . .	95
7.5. Sistema de ecuaciones del modelo. . . . .	95
7.6. Resultados Obtenidos. . . . .	97
7.6.1. Velocidad en la polea motriz. . . . .	98
7.6.2. Tensión en la polea motriz. . . . .	99

7.6.3. Velocidad en la polea tensora. . . . .	100
7.6.4. Tensión en la polea tensora. . . . .	101
7.6.5. Comentarios. . . . .	102
7.7. Nuevo planteamiento del problema. . . . .	103
7.8. Nuevos resultados obtenidos. . . . .	104
7.8.1. Nueva velocidad en la polea motriz. . . . .	104
7.8.2. Nueva velocidad en la polea tensora/cola. . . . .	105
7.8.3. Nueva tensión en la polea motriz. . . . .	106
7.8.4. Nueva tensión en la polea tensora/cola. . . . .	107
7.8.5. Comentarios de los nuevos resultados. . . . .	108
<b>8. Conclusiones, recomendaciones y aspectos del diseño.</b>	<b>109</b>
<b>Anexos</b>	<b>122</b>
<b>A. Anexo A: Datos obtenidos desde las curvas de las gráficas en las figuras 2.13 y 2.15</b>	<b>122</b>
A.1. Valores de $E'$ . . . . .	122
A.2. Valores de $\tan \delta$ . . . . .	124
<b>B. Anexo B: Programa MATLAB hecho para graficar las interpolaciones realizadas para <math>E'</math> y <math>\tan \delta</math> para diferentes frecuencias y temperaturas.</b>	<b>127</b>
<b>C. Anexo C: Resultados entregados por el programa de ajuste de curvas.</b>	<b>130</b>
<b>D. Anexo D: Programa MATLAB hecho para realizar el ajuste de curvas por mínimos cuadrados de las curvas <math>E'</math> y <math>\tan \delta</math> a <math>25^\circ \text{C}</math></b>	<b>132</b>
<b>E. Anexo E: Programa MATLAB para calcular y graficar el factor de resistencia usando el modelo de Jonker.</b>	<b>134</b>
<b>F. Anexo F: Informe sobre la correa transportadora de 1km planteada en la sección 6.1 generado por el programa comercial “Belt Analyst”.</b>	<b>137</b>

<b>G. Anexo G: Informe sobre la correa transportadora de 3 [km] planteada en la sección 7 generado por el programa comercial “Belt Analyst”.</b>	<b>159</b>
<b>H. Anexo H: Programa Matlab para modelar una correa de 1[km].</b>	<b>180</b>
<b>I. Anexo I: Programa Matlab para modelar una correa de 3[km] con una curva de harrison de velocidad.</b>	<b>201</b>
<b>J. Anexo J: Programa Matlab para modelar una correa de 3 [km] con una curva de velocidad entregada por el programa “Belt Analyst”</b>	<b>221</b>
<b>K. Anexo K: Datos de la curva de velocidad de la polea motriz entregada por el programa “Belt Analyst”, utilizadas en el anexo J</b>	<b>241</b>

# 1. Descripción del problema

Las correas transportadoras de gran aplicación en la industria y la minería tienen una gran cantidad de tipos y de configuraciones, ciertos proyectos particulares de minería utilizan correas transportadoras que cubren largas distancias sobre el relieve del terreno, recorriendo distancias mayores a 5 [Km]. En el caso de las correas más comunes que recorren distancias cercanas a 1 [Km], las normas DIN e ISO son suficientes para diseñar y asegurar un buen desempeño de la correa, sin embargo, para las correas de largas distancias es posible que se presenten fenómenos inesperados, uno de ellos es la posible ruptura de la correa o algún caso de caída del material transportado producto de una alza o pico de tensión debido a una detención muy corta o una detención imprevista como resultado de una parada de emergencia.

La construcción de un modelo numérico que permita estimar la carga máxima sobre la correa a través del estudio de la dinámica de la correa transportadora, en el caso de aplicarse a una correa ya diseñada e instalada, podría ayudar a una mejor toma de decisiones al momento de estudiar la detención de una correa.

La fidelidad de la representación a través de elementos finitos de la correa transportadora depende de las resistencias que son tomadas en cuenta y como se incorpora la interacción entre la correa y las estructuras de soporte al modelo, al igual que el comportamiento constitutivo de la correa. La representación de una correa transportadora a través de elementos finitos como un sistema de masas, resortes y modelos de roce, es presentado en el trabajo de Nordell(1984) y se puede ver en la Figura 1.1, y dicho modelo también es utilizado por el programa comercial de la compañía “Conveyor Dynamics Inc”, pero no es el único modelo ni el único programa comercial que modela las correas transportadoras. El modelo de correa utilizado por la compañía “Overland Conveyor Company” no es informada en detalle debido a la cautela de la compañía en la protección de su propiedad intelectual, sin embargo, dentro de los manuales de usuario de su programa comercial se informa de modo implícito que el modelo utilizado es parecido o similar al de la Figura 1.2.

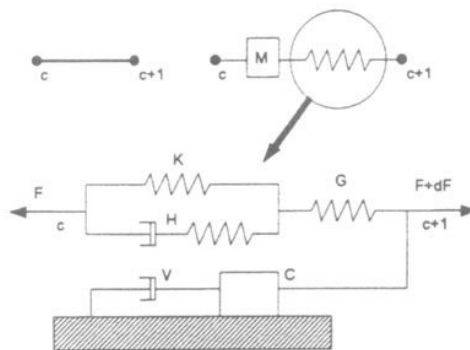


Figura 1.1: Modelo reológico compuesto de cinco elementos, propuesto por Nordell.

En el presente trabajo se intentará replicar los resultados proporcionados por el programa comercial “Belt Analyst” de la compañía “Overland Conveyor Company” buscando demostrar con esto que el

modelo construido es capaz de representar correctamente el comportamiento de la correa si es alimentada con los parámetros correctos.

Es conocido que los modelos de elementos finitos de correas transportadoras varían dependiendo de cada compañía comercial, son diferentes los fenómenos físicos estudiados y la importancia que se le da a cada uno, ya que cada empresa invierte de forma distinta en investigación y desarrollo para caracterizar de mejor manera las propiedades de la correa transportadora y obtener los parámetros que la describan de mejor manera para un amplio rango de temperaturas y frecuencias de deformación.

Dentro de los fenómenos físicos a incorporar dentro del modelo a construir, se hace énfasis en 2 de esos fenómenos debido a la gran presencia de monografías y publicaciones que las estudia:

- El comportamiento de la correa en el eje longitudinal se estudia asumiendo un comportamiento viscoelástico de la correa, siendo importante entonces conocer no solo el modulo de elasticidad de la correa sino también su constante de amortiguación.

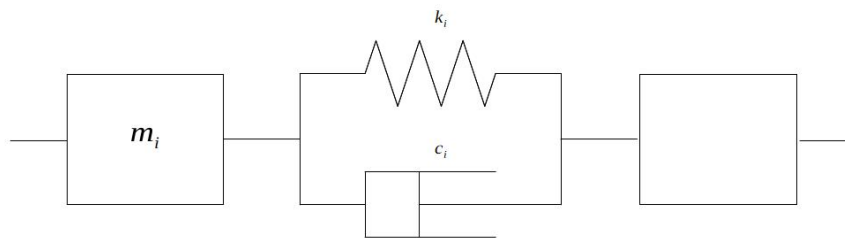


Figura 1.2: Modelo viscoelástico de tres elementos, utilizado también por el modelo construido.

- El comportamiento de la correa en el eje transversal, que en el caso de un modelo de elementos finitos unidimensional de correa transportadora, tiene influencia solo en el cálculo de las resistencias al movimiento que los polines manifiestan en forma de fuerza contraria a la dirección al movimiento.

Representar esos 2 fenómenos físicos dentro de un modelo de correa transportadora de elementos finitos unidimensionales constituye un gran avance para el estudio de la dinámica de una correa transportadora.

Una vez construido un modelo de tales características, una validación ideal del modelo debería realizarse comparando los resultados obtenidos con los datos medidos en una correa transportadora realmente existente, sin embargo, al carecer de la posibilidad de una visita industrial a una correa transportadora en terreno y obtener datos empíricos se propone usar como sustitutos los resultados entregados por el programa comercial “Belt Analyst” al simular una correa transportadora. Estos datos serán utilizados como valores de referencia con los cuales comparar los valores calculados por el modelo de elementos finitos y obtener una medida del orden de magnitud del error relativo del modelo construido.

Para representar correctamente los fenómenos de la viscoelasticidad y de la indentación es necesario conocer la constante de amortiguación y también el factor de resistencia al movimiento en cada estación de polines, datos no fáciles de obtener, porque como se demostrará en las secciones siguientes, dichos parámetros dependen de conocer las variables físicas  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$  para rangos amplios de tipos de materiales, frecuencias y temperaturas para finalmente determinar la magnitud de las fuerzas de resistencia por indentación de la correa. Para representar el comportamiento viscoelástico longitudinal de la correa es necesario conocer el valor de la constante de amortiguación  $c$  para un rango amplio de tipos de correa y de temperaturas.

En la sección 2 se estudia la fuerza de resistencia al movimiento debido a la indentación de la correa como fenómeno físico, primero a través del Modelo de May [13] el cual nos entrega una primera aproximación al estudio del factor de resistencia de una manera fácil de entender, entregando un marco conceptual para entender otro de los modelos de indentación más complejo, como el modelo de Jonker. La presencia de ambos modelos muestran que el cálculo de las fuerzas de resistencia al movimiento es complejo y requiere de datos experimentales obtenidos a través de ensayos de materiales para varias temperaturas.

Si en la construcción de un modelo de correa transportadora se contase con una base de datos como resultado de una serie de ensayo de materiales “DMA” sobre la correa a modelar, entonces se podría usar el método descrito en la sección 2.3, donde se utiliza dicho método para obtener las constantes  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$  de una correa con una cubierta de correa hecha de caucho estireno-butadieno (SBR). Debido a que un modelo de correa transportadora debe ser útil para una gran variedad de tipos de correa y de una aplicación lo más amplia posible, un modelo que exija conocer los valores de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$  excluye una gran cantidad de posibles correas a modelar y reduce su rango de aplicación y uso a un número muy reducido. Este obstáculo es superado de la siguiente forma, se reemplazan todas las secciones de cálculo que involucran conocer el factor de resistencia a través de un modelo de indentación por una forma más simple de obtener el factor de resistencia utilizando el método de cálculo de las fuerzas de resistencias al movimiento descrito en la norma DIN22101.

Para representar el comportamiento longitudinal de la correa se utiliza el método de elementos finitos unidimensionales que va a ser descrito en detalle en la sección 3 estableciendo un sistema de ecuaciones a resolver utilizando el método numérico descrito en la sección 4. Para incorporar en el método de elementos finitos aspectos propios de las correas transportadoras como el comportamiento de las poleas y las fuerzas de resistencia al movimiento entonces se añaden nuevas ecuaciones al sistema de ecuaciones, explicadas y detalladas en la sección 5.

Para explicar en detalle la forma de aplicar y utilizar del modelo, se utiliza el modelo construido para representar una correa transportadora horizontal de 1[Km] en la sección 6 y explicar con ello, la representación en detalle dentro del modelo de varios elementos de interés dentro de la correa transportadora. En particular, la dificultad de obtener la constante de amortiguación es superada debido a que el programa “Belt Analyst” entrega un factor de amortiguación según el tipo de correa utilizado, de forma automática.

En la sección 7 se utiliza el modelo construido para modelar una correa inclinada de 3[Km] con unas características similares en lo posible a una correa transportadora de uso en la industria y se comparan los resultados calculados con los entregados por el programa comercial “Belt Analyst”.

Finalmente, en la sección 8 a partir de todos los datos aportados en las secciones anteriores se extraen y presentan las conclusiones más importantes con respecto al aporte del modelo construido en el estudio de la dinámica de las correas transportadoras en específico durante una parada controlada de la correa transportadora.

## 2. La resistencia al movimiento debido al fenómeno de la indentación.

Se inicia el estudio de la dinámica de las correas transportadoras con el estudio de uno de los fenómenos físicos que tiene influencia sobre el movimiento de la correa, la indentación de los polines sobre la cubierta inferior de la correa.

Para comprender con exactitud la relación de la indentación con la fuerza de resistencia al movimiento que se ejerce sobre la polea, se expone uno de los primeros modelos de indentación, el modelo de May, como una introducción al estudio de la indentación y como presentación del “factor de resistencia”  $f_i$ , término que permite obtener la magnitud de la fuerza de resistencia al movimiento.

Otra forma de obtener el factor de resistencia  $f_i$  se obtiene al estudiar el modelo de Jonker que requiere conocer previamente menos parámetros del material. Este modelo de indentación es uno de los utilizados en los trabajos previos como en el de Lodewijks [11].

Finalmente, se muestra como se aborda el fenómeno de indentación en la norma DIN 22101 y como se relaciona con los modelos anteriores.

### 2.1. Modelo de May.

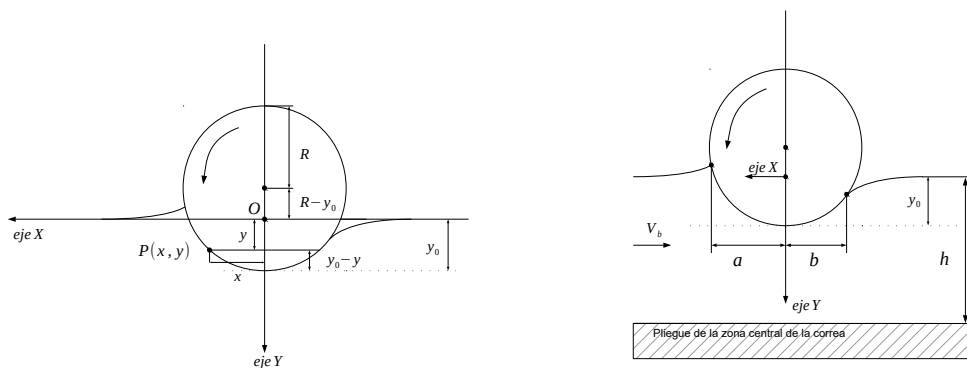


Figura 2.1: Representación del fenómeno de indentación en un polín que soporta la carga vertical de la correa (la vista del corte transversal esta invertida la posición arriba-abajo de una correa sobre un polín) para ubicar en ella unas variables geométricas relevantes en su análisis de una forma más práctica. Izquierda: Valores geométricos relevantes, Derecha: Los semilargo de contacto de  $a'$  y  $b$  entre correa y polín, luego reemplazados por un semilargo promedio  $a$

### 2.1.1. La relación entre la geometría y la deformación.

Siendo  $P(x, y)$  cualquier punto en el área de contacto entre el polín y la correa, como se muestra en la Figura 2.1, la indentación “ $y$ ” puede ser aproximada utilizando la siguiente función:

$$y = y_0 - \frac{x^2}{2R}$$

Para llegar obtener esa relación entre la indentación  $y$  y la coordenada  $x$  es necesaria aplicar una propiedad geométrica de las circunferencias llamada “potencia de un punto” (ver figura 2.2).

**Potencia de un punto**

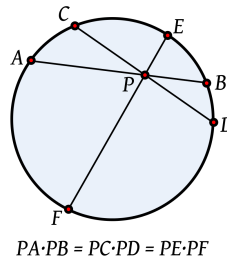


Figura 2.2: Propiedad de la circunferencia: Potencia de un punto

Aplicando esta propiedad sobre la circunferencia de la figura 2.1, siendo  $y_0$  la “indentación” o la profundidad máxima de la huella que un cilindro deja sobre la correa

$$\frac{x}{(y_0 - y)} = \frac{(R + y) + (R - y_0)}{x}$$

$$x^2 = \{(R + y) + (R - y_0)\} \cdot (y_0 - y) \quad (2.1)$$

Se aplica la siguiente suposición en la relación obtenida anteriormente, la ecuación (2.1), si el radio  $R$  es muchísimo mayor a la indentación máxima  $y_0$ ,  $R \gg y_0$ , que a su vez es siempre mayor a la indentación  $y$ , ( $y_0 > y$ ), en consecuencia  $R$  es muchísimo mayor a  $y$ ,  $R \gg y$ . Tenemos entonces:

$$x^2 \approx 2R(y_0 - y)$$

$$\frac{x^2}{2R} = (y_0 - y)$$

$$y = y_0 - \frac{x^2}{2R} \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) es una forma de aproximar la profundidad de indentación “ $y$ ” a lo largo del área de



Desde (2.2)

$$y = y_0 - \frac{x^2}{2R}$$

$$x^2 = 2R(y_0 - y)$$

y usando la ecuación de  $x$  en función de la velocidad  $V_b$ , la ecuación (2.4), tenemos

$$(a - V_b t)^2 = 2R(y_0 - y)$$

$$a^2 - 2a V_b t + V_b^2 t^2 = 2R(y_0 - y)$$

y usando (2.3)

$$-2a V_b t + V_b^2 t^2 = -2Ry$$

obtenemos una expresión de  $y$  (la coordenada vertical de un punto  $P(x, y)$  en el área de contacto correa-cilindro) en función de la velocidad y el tiempo.

$$y = \frac{V_b}{2R}(2at - V_b t^2) \quad (2.5)$$

Al considerar la capa o cubierta inferior de la correa, como una capa compuesta por una serie de resortes en paralelo, cuya elongación o contracción corresponde a su deformación, como se muestra en la Figura 2.4, estamos modelando la capa inferior de la correa como un modelo de resortes independientes también conocido como Modelo Winkler. El uso de este modelo permite plantear una ecuación para la deformación:

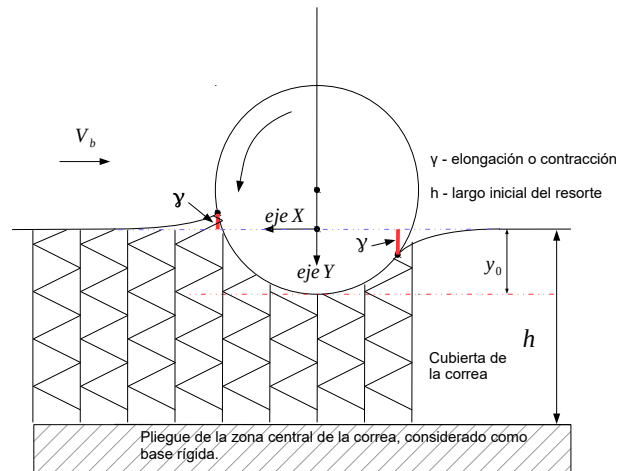


Figura 2.4: Modelo de resortes independientes para la cubierta.

$$\gamma = \frac{y}{h}$$

desde (2.5)

$$\gamma = \frac{1}{h} \frac{V_b}{2R}(2at - V_b t^2)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{h} \frac{V_b}{2R} (2a - 2V_b t)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{V_b}{hR} (a - V_b t) \quad (2.6)$$

### 2.1.2. La relación entre el esfuerzo y la deformación

La relación entre el esfuerzo y la deformación en materiales viscoelásticos, como el caucho y otros polímeros, se obtiene a través de lo que se llama un “test de relajación”. A temperatura constante una maquina aplica a una muestra de material una deformación conocida en el tiempo

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t).$$

Aquí  $\varepsilon_0$  es la amplitud y  $\omega$  es la frecuencia. La deformación es cíclica y se repite a lo largo del tiempo con un periodo  $\frac{2\pi}{\omega}$ . La variable  $\omega$  es la frecuencia de la deformación, también llamada en la bibliografía revisada como “velocidad de deformación armónica”, definida como

$$\omega = \frac{\pi V}{(a' + b)} \quad (2.7)$$

siendo  $V$  la velocidad de la correa y  $(a' + b)$  el largo de contacto. El largo de contacto puede ser aproximado como “ $2 \cdot a$ ”, dos veces el semilargo de contacto.

Para un material sólido viscoelástico lineal, el esfuerzo es una función que depende del tiempo y que se obtiene de la solución de la ecuación constitutiva del esfuerzo en un modelo viscoelástico lineal.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-u) \frac{d\varepsilon}{du} du \quad (2.8)$$

donde  $E(t)$  es el modulo de relajación del esfuerzo, en función del tiempo. La forma de la curva de relajación para un material viscoelástico lineal es:

$$E(t) = E_R + (E_U - E_R) \exp\left(\frac{-t}{\beta}\right) \quad (2.9)$$

como se puede ver en la Figura 2.5.

- $E_R$  es el módulo relajado, obtenido después de un largo tiempo de la aplicación del esfuerzo.
- $E_U$  es el módulo no relajado, obtenido inmediatamente después de la aplicación del esfuerzo
- $\beta$  es el tiempo característico para la relajación elástica. Para un mismo material, el mismo tiempo característico.
- $t$  la variable tiempo.

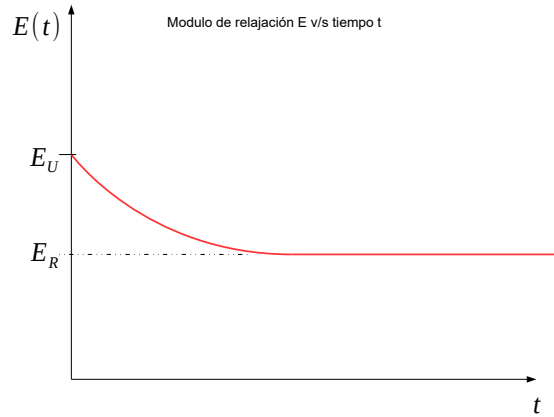


Figura 2.5: Función típica del módulo de relajación con respecto al tiempo.

Durante los primeros ciclos de la deformación  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , la función del esfuerzo  $\sigma$  tiene una forma más compleja al estar el material viscoelástico en la zona de no-relajación elástica. Luego, el esfuerzo se vuelve cada vez más cíclico y si se mide el esfuerzo en la zona de relajación del material donde  $E = E_R$ , este alcanza la misma frecuencia que la deformación  $\varepsilon$ , pero con un cambio de fase. Este esfuerzo cíclico puede ser escrito como

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta)$$

siendo  $\delta$  un ángulo de desfase que puede estar entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$ .

El esfuerzo puede ser obtenido a través de la ecuación (2.8). Para resolver dicha integral es necesario conocer la función de la deformación  $\varepsilon(u)$  (donde  $u$  representa el tiempo) y la función  $E(u)$  del módulo de relajación, donde el límite inferior indefinido de la integral se resuelve al considerar que en  $t = -\infty$ , el esfuerzo y la deformación son cero. Cualitativamente, la integral establece una sumatoria de la superposición de todos los esfuerzos entre el intervalo de tiempo que va desde  $t = -\infty$  y el tiempo  $t$  de interés.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-u) \frac{d\varepsilon}{du} du \quad (2.10)$$

En esta ecuación,  $t$  es el tiempo en el que el esfuerzo es medido y  $u$  la variable a integrar. El límite inferior de la integral es  $-\infty$ , porque la función completa de la deformación, que existía antes del tiempo  $t$  también contribuye al esfuerzo observado. El límite superior de la integral es  $t$ , porque la deformación aplicada después de  $t$  no debería tener efecto sobre el esfuerzo medido en  $t$ .

El módulo de relajación para un modelo viscoelástico lineal, como el de la Figura 2.6, es:

$$E(t) = E_1 + E_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.11)$$

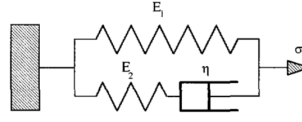


Figura 2.6: Modelo viscoelástico lineal de tres parámetros.

con  $\tau = \frac{\eta}{E_2}$ . La ecuación de velocidad de deformación  $\frac{d\varepsilon}{du}$  se obtiene de (2.6) al reemplazar la ecuación anterior en (2.10) tenemos:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{du} = \frac{V_b}{hR}(a - V_b t)$$

Entonces, tenemos finalmente una integral de la forma.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \left[ E_1 + E_2 \exp\left(\frac{-(t-u)}{\tau}\right) \right] \left\{ \frac{V_b}{Rh}(a - V_b u) \right\} du \quad (2.12)$$

luego se obtiene que

$$\sigma(t) = \frac{E_1 V_b}{Rh} \left( at - \frac{V_b t^2}{2} \right) + \frac{E_2 V_b \tau}{Rh} \left( \left[ (a + V_b \tau) (1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)) \right] - V_b t \right) \quad (2.13)$$

usando una variable nueva adimensional  $k = \frac{V_b \tau}{a}$ , queda:

$$\sigma(t) = \frac{a^2 E_1}{2Rh} \frac{t V_b}{a} \frac{2a - V_b t}{a} + \frac{a^2 k E_2}{Rh} \left[ (1 + k) (1 - \exp\left(\frac{-t V_b}{ka}\right)) - \frac{V_b t}{a} \right] \quad (2.14)$$

sustituyendo usando  $t = \frac{a-x}{V_b}$  desde la definición de velocidad, tenemos

$$\sigma(x) = \frac{a^2 E_1}{2Rh} \frac{(a-x)}{a} \frac{(a+x)}{a} + \frac{a^2 k E_2}{Rh} \left[ (1 + k) \left( 1 - \exp\left(\frac{x-a}{ka}\right) \right) - \frac{a-x}{a} \right] \quad (2.15)$$

y con esta relación ya podemos obtener el esfuerzo vertical en cada punto  $P(x, y)$  del área de contacto, dependiendo solo de la coordenada x.

Existe una condición particular, el esfuerzo vertical en la correa es cero en el punto que la correa deja el polín en  $x = -b$ , como se muestra en la Figura 2.7, dicha condición nos permite obtener una expresión no lineal para el esfuerzo en ese punto.

$$\sigma(x = -b) = 0 \quad (2.16)$$

$$\sigma(x = -b) = \frac{a^2 E_1}{2Rh} \frac{(a-b)}{a} \frac{(a+b)}{a} + \frac{a^2 k E_2}{Rh} \left[ (1 + k) \left( 1 - \exp\left(\frac{b-a}{ka}\right) \right) - \frac{a-b}{a} \right] = 0$$

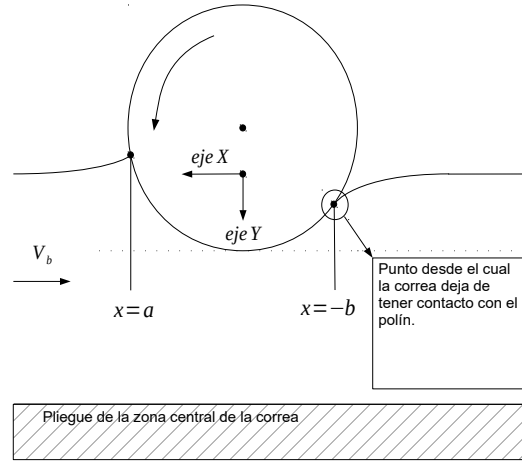


Figura 2.7: Punto donde la correa deja de tener contacto con el polin.

que al añadir nuevamente otra constante adimensional, que relaciona las distancias  $a$  y  $b$ ,  $\zeta = \frac{b}{a}$

$$\sigma(x = -b) = \frac{a^2 E_1}{2Rh} (1 + \zeta)(1 - \zeta) + \frac{a^2 k E_2}{Rh} \left[ (1 + k) \left( 1 - \exp\left(\frac{-\zeta - 1}{k}\right) \right) - (1 + \zeta) \right] = 0 \quad (2.17)$$

queda una ecuación no lineal.

Asumiendo la velocidad constante y que  $F_v$ , la carga vertical es constante para una correa en movimiento, tenemos como resultado que la carga  $F_v$  y la fuerza resultante de la integral de la distribución del esfuerzo deben estar en equilibrio.

$$F_v = \int_{-b}^a \sigma(x) dx \quad (2.18)$$

Incorporando a (2.18) la ecuación (2.15) y resolviendo tenemos

$$F_v = \frac{E_1 (a + b)^2 (2a - b)}{6Rh} + \frac{a^2 E_2 k}{Rh} (1 + k) \left( a + b - ka + ka \exp\left(\frac{-b - a}{ka}\right) \right) - \frac{ak E_2 (a + b)^2}{Rh \cdot 2}$$

$$F_v = \frac{a^3 E_1 (1 + \zeta)^2 (2 - \zeta)}{6 Rh} + \frac{a^3 E_2 k}{Rh} (1 + k) \left( 1 + \zeta - k + k \exp\left(\frac{-1 - \zeta}{k}\right) \right) - \frac{a^3 E_2 k (1 + \zeta)^2}{2 Rh} \quad (2.19)$$

Entonces siendo  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$  datos del material, y  $F_v$ ,  $R$ ,  $h$ ,  $V_b$  datos del sistema de correa transportadora, para calcular la fuerza de resistencia por indentación, primero debemos conocer los valores de  $a$

y  $b$ , que se pueden obtener a partir del sistema de ecuaciones no lineales formado por (2.17) y (2.19).

$$\begin{aligned}\phi_1(\zeta, a) &= 0 \\ \phi_2(\zeta, a) &= F_v\end{aligned}$$

siendo la fuerza vertical de carga  $F_v$ , un valor ya conocido. La solución del sistema de ecuaciones no lineales es posible a través del método de newton, por lo tanto es posible conocer los valores  $a$  y  $b$ .

Para calcular la resistencia por indentación, primero buscamos obtener el momento con respecto al centro del rodillo del polín ejercida por la distribución de esfuerzos no simétrica.

$$M = \int_{-b}^a \sigma(x) \cdot x \, dx \quad (2.20)$$

La fuerza de resistencia total por unidad de ancho puede ser obtenida a partir del momento obtenido en (2.20), al plantear el momento resultante, como un momento causado por una fuerza de resistencia horizontal ubicada a una distancia  $R$  del centro del polín:

$$\begin{aligned}M &= F_i \cdot R \\ F_i &= \frac{M}{R} \\ F_i &= \frac{E_1 a^4}{8R^2 h} \left[ 1 - 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4 \right] + \dots \\ &\dots + \frac{E_2 a^4 k}{R^2 h} \left[ k^3 - \frac{k}{2} \left( 1 + \left(\frac{b^2}{a}\right) \right) + \frac{1}{3} \left( 1 + \left(\frac{b^3}{a}\right) \right) - k(1+k) \left( k + \frac{b}{a} \right) \exp\left(\frac{-1}{k} \left(\frac{a+b}{a}\right)\right) \right] \quad (2.21)\end{aligned}$$

Finalmente es posible obtener un factor de resistencia por indentación definida como aparece en el trabajo de Lodewijks y en DIN22101, igual a:

$$f_i = \frac{F_i}{F_v} = \frac{F_v^{\frac{1}{3}} \cdot h^{\frac{1}{3}}}{D^{\frac{2}{3}}} \cdot F_{RM}\left(k, \frac{a}{b}, E_1, E_2\right) \quad (2.22)$$

$$\text{con } F_{RM}\left(k, \frac{a}{b}, E_1, E_2\right) = \frac{D^{2/3} \cdot h^{1/3}}{F_v^{1/3}} \cdot \frac{F_i}{F_v}$$

donde el cociente entre la fuerza de resistencia horizontal por indentación,  $F_i$  de la ecuación (2.19), y la fuerza vertical,  $F_v$  de la ecuación (2.21), nos entrega el factor de resistencia por indentación  $f_i$  de acuerdo a las definiciones que aparecen en el trabajo de Lodewijks [11] y la norma DIN 22101.

En la obtención del factor de resistencia obtenido en (2.22) se presentan limitaciones de su modelo al asumir que la profundidad máxima de indentación  $y_0$  es independiente de la velocidad de la correa. Al aumentar la velocidad de la correa, si la fuerza vertical fuera constante, la profundidad máxima de indentación disminuirá, cuestión que se ignora al considerar la indentación máxima  $y_0$  como independiente de la velocidad.

Es importante, tener en cuenta estas consideraciones porque permiten conocer las limitaciones del modelo y que dejan espacio para mejorar el planteo de las ecuaciones y representar de mejor manera el fenómeno físico de la indentación.

### 2.1.3. Límites del modelo.

Para modelar materiales viscoelásticos de forma fiel al comportamiento real, los tres parámetros del modelo Maxwell  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$  no son capaces de representar el comportamiento viscoelástico en un rango más amplio de temperaturas y frecuencias de carga. La bibliografía revisada explica que el modelo de tres parámetros es sólo un caso particular de un modelo más general, dicho modelo general esta presente en un trabajo previo [16] y es llamado “Modelo de Zener” con  $(2n + 1)$  parámetros como se muestra en la Figura 2.8.

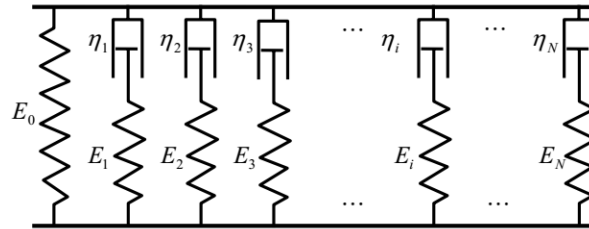


Figura 2.8: Los elementos mecánicos de un modelo de viscoelástico de  $(2n + 1)$  parámetros.

En dicho modelo, el módulo de almacenamiento  $E'(\omega)$  y el de pérdida  $E''(\omega)$  están relacionados a los elementos mecánicos del modelo mostrados en la Figura (2.8) a través de las siguientes ecuaciones:

$$E'(\omega) = E_0 + \sum_{i=1}^N E_i \frac{\omega^2 \tau_i^2}{1 + \omega^2 \tau_i^2}$$

y

$$E''(\omega) = \sum_{i=1}^N E_i \frac{\omega \tau_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2}$$

En la Figura 2.9 se evidencian las limitaciones al modelar el material viscoelástico en un modelo de 3 parámetros. En las curvas de azul y verde se grafican los módulos  $E'$  y  $E''$  obtenidos desde un ensayo de materiales para un amplio rango de frecuencias de carga, extraído desde el trabajo de O'Shea [16]. Las curvas que se grafican en color negro, son las curvas que mejor se ajustan y representan a los datos experimentales de  $E'$  y  $E''$  usando solo 3 parámetros  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$ . Como se ve en la Figura 2.9, la utilidad del modelo queda reducida a un rango muy limitado y estrecho de frecuencias donde el modelo representa fielmente el comportamiento del material viscoelástico.

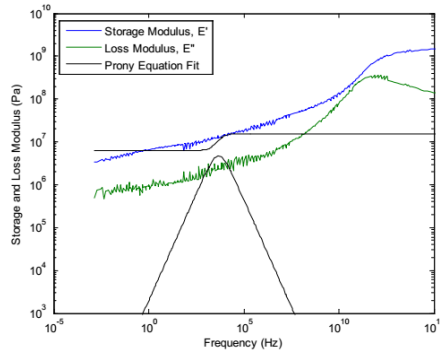


Figure 3-10 Master Curve of compound B obtained from testing performed with a low strain amplitude, in the linear region.  $n=1$  for the Prony Equation fit to the data

Figura 2.9: Curvas obtenidas experimentalmente de  $E'$  y  $E''$  vs. frecuencia de deformación de un material viscoelástico desconocido, comparadas con las curvas modeladas con sólo tres parámetros y que mejor se ajustan a esa serie de datos. Extraído desde el trabajo de O'Shea [16]

Desde la ecuación del factor de resistencia por indentación (2.22) obtenida a través del desarrollo del modelo de May de la indentación, se ve claramente que para calcular la fuerza de resistencia al movimiento  $F_i$  se necesita conocer los parámetros  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$  del material junto con “ $a$ ” y “ $b$ ” valores geométricos de la indentación. Esto hace necesario conocer las curvas de los módulos  $E'$  y  $E''$ , curvas características para cada material y que luego de un post-procesamiento de datos, un ajuste de curvas, nos permiten obtener los valores de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$  y además poder avanzar en la solución del sistema de ecuaciones formado por (2.17) y (2.19) para obtener los valores “ $a$ ” y “ $b$ ”.

El modelo de May requiere entonces conocer unos valores geométricos “ $a$ ” y “ $b$ ” que otros modelos de indentación prescinden de su uso, en especial los modelos presentados en las secciones siguientes y que los hacen más atractivos de usar, sin embargo, el modelo de May sirve para ilustrar un elemento común presente en todos los modelo y que se puede observar en la ecuación (2.22), donde se muestra que todo factor de resistencia  $f_i$  puede ser separado en 2 partes o sub-factores, uno de los factores incluye solo los parámetros de diseño y fuerza vertical sobre el polín, mientras un segundo factor de una manera diferente y propia de cada modelo agrupa todos los parámetros de “amortiguamiento” de la correa propios del comportamiento viscoelástico. Utilizando esto como base se plantea un esquema para caracterizar a cada factor de resistencia  $f_i$  como un elemento compuesto de los siguientes elementos:

$$\text{Resistencia al movimiento } f_i = [\text{Parámetros de diseño}] \cdot [\text{Factores de amortiguamiento}] \quad (2.23)$$

## 2.2. Modelo de Jonker.

En este modelo, Jonker considera que los polines indentan la correa y debido a las propiedades viscosas de la correa, aparece una fuerza neta que forma la resistencia al movimiento. Los polines son generalmente hechos de un material relativamente duro, por lo tanto, las fuerzas de compresión entre la

correa y el polín causa una indentación de los polines en el material mucho más suave de la correa. La sección comprimida de la correa luego de pasar por el polín, recobrara su forma original. Sin embargo, debido a las propiedades viscoelásticas de la correa la recuperación a su forma original tomará cierto tiempo, que resulta en una deformación asimétrica de la correa. La distribución asimétrica de la presión entre la correa y el polín resultan en una fuerza que actúa en la correa, que tiene un componente horizontal en la dirección opuesta a la de la dirección del movimiento.

En el siguiente modelo matemático se analizan las propiedades del material de la correa y las relaciones mecánicas en la indentación. En la correa misma se considera que la cubierta inferior o capa inferior de la correa está compuesta de un material viscoelástico que está sometido a una carga dinámica. Para modelar el material se utiliza un modelo de Maxwell de tres parámetros. Estas consideraciones resultan en que las deformaciones del material, debido a una carga que varía armónicamente, también resultarán con un comportamiento armónico.

El esfuerzo dependiente del tiempo es descrito como:

$$\sigma(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \quad (2.24)$$

donde “ $A$ ” es la amplitud de la variación del esfuerzo, “ $\omega$ ” la frecuencia circular de deformación, o a veces también llamada velocidad de deformación armónica, y “ $B$ ” el esfuerzo “promedio”.

La respuesta viscoelástica quedaría descrita como

$$\varepsilon(t) = C \cdot \sin(\omega t + F) + G \quad (2.25)$$

donde  $C$  es la amplitud de la variación de deformación,  $F$  es el ángulo de desfase o ángulo de pérdida y “ $G$ ” es el promedio de la deformación.

Pensando en un caso genérico de esfuerzo y deformación

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t) \quad (2.26)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta) \quad (2.27)$$

ahora escritas en notación de numero complejo:

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 e^{j\omega t} \quad (2.28)$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{j(\omega t - \delta)} \quad (2.29)$$

El modulo complejo de elasticidad queda escrito de la siguiente forma,

$$\bar{E} = E' + jE'' \quad (2.30)$$

y la relación entre el esfuerzo y la deformación puede ser escrito como:

$$\bar{\sigma} = \bar{E}\bar{\varepsilon} \quad (2.31)$$

Desde esas ecuaciones el modulo de almacenamiento, el módulo de perdida y el coeficiente de amortiguamiento interno, o también llamado factor de pérdida pueden quedar expresados a partir de los parámetros presentados anteriormente, quedando también en evidencia su significado físico.

$$E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\delta) \quad (2.32)$$

$$E'' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin(\delta) \quad (2.33)$$

$$\tan(\delta) = \frac{E''}{E'} \quad (2.34)$$

Los valores del modulo de almacenamiento  $E'$ , el modulo de perdida  $E''$  y el factor de pérdida  $\tan(\delta)$  pueden ser obtenidos a través de ensayos de materiales y sus valores para diferentes materiales pueden ser encontrados en varios trabajos científicos. Los valores de  $E'$ ,  $E''$  y  $\tan\delta$  pueden ser considerados constantes para una frecuencia  $\omega$  determinada y una temperatura determinada. Calculando el trabajo de la histéresis en un ciclo, por unidad de volumen, como:

$$W_{h,m} = \int \sigma d\varepsilon \quad (2.35)$$

$$W_{h,m} = \pi\sigma_0\varepsilon_0 \sin(\delta) \quad (2.36)$$

### 2.2.1. Aplicación del modelo.

El modelo trabaja con las siguientes suposiciones, que la velocidad de la correa es constante por lo tanto la distancia  $x$  es proporcional al tiempo  $t$  y la suposición de una carga dinámica armónica sobre el material viscoelástico debido a que la sección de la correa que esta siendo indentada por el polín sufre una deformación que puede ser considerada de forma aproximada como un semiciclo de un movimiento armónico, por lo tanto, se supone que tanto esfuerzo como deformación son sinusoidales. Por lo tanto viendo la figura 2,10 , el arco  $ABC'$  puede ser bien aproximado por un semiciclo de la curva sinusoidal de esfuerzo. En la cima de la curva de indentación (el punto “B”), el radio promedio de curvatura  $R$  puede ser aproximado, según el trabajo de Lodder y Jonker [10], como:

$$R = \frac{2\sqrt{EIT}}{l_p (G_{M,m} + G_{B,m})} + D_R \quad (2.37)$$

Con  $T$  siendo la tensión en la correa, “ $l_p$ ” siendo la distancia entre centros,  $D_R$  es el diámetro del polín y  $G_{M,m} + G_{B,m}$  la carga por unidad de largo de la correa y el material a granel transportado.

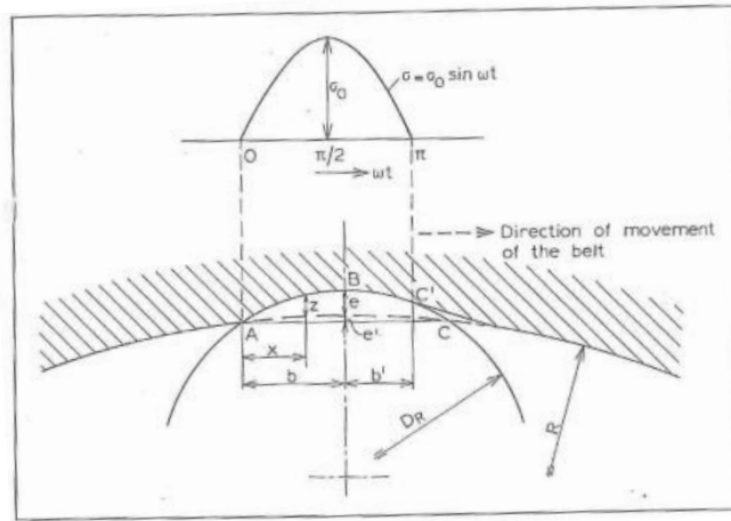


Figura 2.10: Representación de la indentación usada por Jonker, donde la distribución del esfuerzo en el área de contacto es un semiciclo de una curva sinusoidal. Extraído desde [10].

Asumiendo que las ecuaciones de esfuerzo y deformación como curvas sinusoidales con un desfase entre ellas.

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t) \quad (2.38)$$

$$\varepsilon(t) = C \cdot \sin(\omega t + F) + G \quad (2.39)$$

Frente a un esfuerzo sinusoidal como el descrito en (2.38), la función de deformación (2.39) debe cumplir con las siguientes condiciones para representar correctamente la curva de indentación, condiciones que se obtienen mirando la figura 2.10:

- La profundidad de indentación es igual a cero en A, por lo tanto, la deformación  $\varepsilon(t)$  en  $\omega t = 0$  debe ser cero en el punto A.

Si  $\varepsilon(t = 0) = 0$  en el punto A tenemos que

$$G = -C \cdot \sin(F)$$

- El máximo de la deformación ( $\varepsilon_0 + G$ ) debe estar en el punto B es decir en  $\omega t = \frac{\pi}{2} + \delta$ .

De acuerdo a las condiciones que debe cumplir la curva de deformación, entonces las constantes que caracterizan a la curva sinusoidal de la deformación son las siguientes:

$$C = \varepsilon_0$$

$$F = -\delta$$

$$G = \varepsilon_0 \cdot \sin(\delta)$$

por lo tanto, la ecuación que mejor representa la deformación es :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta) + \varepsilon_0 \sin(\delta) \quad (2.40)$$

y en el punto  $B$  (en  $\omega t = \frac{\pi}{2} + \delta$ ) la curva de indentación tiene su máxima deformación:

$$\varepsilon(\omega t = \frac{\pi}{2} + \delta) = \varepsilon_0(1 + \sin(\delta)) \quad (2.41)$$

La indentación en la correa causa una deformación “ $\varepsilon$ ” en la dirección perpendicular a la superficie de la correa en la capa de material que corresponde a la cubierta inferior de la correa, con un espesor de  $Z$  donde cada deformación local se considera independiente de la deformación que ocurre en sus regiones vecinas siguiendo el modelo de Winkler (ver la figura 2.4). Además queda entendido que el modelo también supone que las deformaciones en la correa por indentación están ubicados solamente en la capa inferior de la correa, es decir, en la cubierta inferior.

Se sabe por definición que la deformación es igual a

$$\varepsilon = \frac{z}{Z}$$

siendo  $z$  es la profundidad de la indentación, y  $Z$  es el espesor de la capa inferior de la correa, queda por tanto,  $z$  descrita como:

$$z = Z\varepsilon \quad (2.42)$$

entonces la máxima deformación que está ubicada en el punto  $B$ , obtenida desde (2.41), nos permite obtener la máxima indentación de la correa ahora representada como “ $e$ ”:

$$\begin{aligned} e = z_{\text{máx}} &= Z \cdot \varepsilon_{\text{máx}} \\ e &= Z \cdot \varepsilon_0(1 + \sin(\delta)) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Siendo  $e$ , la indentación máxima y  $e'$  la distancia de la Figura 2.10, teniendo en cuenta la propiedad de “potencia de un punto” planteamos las siguientes ecuaciones buscando obtener expresiones para las indentaciones  $e$  y  $e'$ , utilizando las suposiciones de que  $e \ll D_R < 2R$ :

$$e + e' = \frac{b^2}{D_R} \quad (2.44)$$

$$e' = \frac{b^2}{2R} \quad (2.45)$$

En la Figura 2.10, esta definido el semilargo de contacto  $b$  que puede ser calculado usando las ecuaciones (2.44) y (2.45). En la ecuación (2.44) insertamos la relación de (2.45)

$$e + \frac{b^2}{2R} = \frac{b^2}{D_R}$$

y reordenando los términos, tenemos:

$$e = \frac{b^2}{D} \quad (2.46)$$

donde se introduce una constante nueva, un diámetro  $D$  que simplifica el álgebra de la ecuación, definida como:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_R} - \frac{1}{2R} \quad (2.47)$$

despejamos  $b$  de la ecuación (2.46):

$$b = (eD)^{\frac{1}{2}} \quad (2.48)$$

e incorporando la ecuación (2.43)

$$b = (Z\varepsilon_0(1 + \sin \delta) \cdot D)^{\frac{1}{2}} \quad (2.49)$$

Anteriormente se había establecido una relación proporcional entre  $x$  y  $t$ , debido a la velocidad constante de la correa, por lo tanto, se presupone la siguiente relación entre estas magnitudes:

$$\frac{x}{b} = \frac{\omega t}{\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)}$$

reemplazamos  $b$  desde (2.49) y despejamos  $x$

$$x = \frac{2\omega t}{\pi + 2\delta} (DZ\varepsilon_0(1 + \sin \delta))^{\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

La carga vertical  $q_v$  sobre el polín ahora puede ser calculada con una integral de la presión sobre una distancia  $x$ , a lo largo del arco  $ABC'$ :

$$q_v = \int^{ABC'} \sigma dx \quad (2.51)$$

siendo  $dx$  obtenida desde (2.50)

$$dx = \frac{2\omega}{\pi + 2\delta} [(DZ\varepsilon_0(1 + \sin \delta))^{\frac{1}{2}}] dt$$

desarrollamos la integral (2.51) siendo conocida la función “ $\sigma(t)$ ” y el diferencial  $dx$

$$q_v = \int_{\omega t=0}^{\omega t=\pi} \sigma_0 \sin(\omega t) \cdot \frac{2\omega}{\pi + 2\delta} [(DZ\varepsilon_0(1 + \sin \delta))^{\frac{1}{2}}] dt \quad (2.52)$$

al resolver la integral también aparece el término  $E'$ , ya definido anteriormente en (2.32)

$$q_v = \frac{4E'\varepsilon_0^{\frac{3}{2}}}{(\pi + 2\delta) \cos \delta} [DZ(1 + \sin(\delta))]^{\frac{1}{2}} \quad (2.53)$$

al reescribir esta fórmula para obtener la amplitud de la deformación  $\varepsilon_0$ , tenemos:

$$\varepsilon_0 = \left( \frac{(\pi + 2\delta)q_v \cos \delta}{4E'} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot (DZ(1 + \sin \delta))^{-\frac{1}{3}} \quad (2.54)$$

Esta fórmula puede ser usada en el cálculo del trabajo realizado por la histéresis por unidad de volumen, también considerado como pérdida de energía mecánica, usando la ecuación (2.35), pero aplicada al diagrama de esfuerzo-deformación mostrado en la figura 2.11 que representa a las ecuaciones (2.38) y (2.40).

La cantidad de trabajo realizada para liberarse de la compresión es menor al trabajo necesario para deformar por indentación a la cubierta del material. La diferencia entre esas dos cantidades de trabajo es llamado, trabajo realizado por la histéresis,  $W_{h,v}$ .

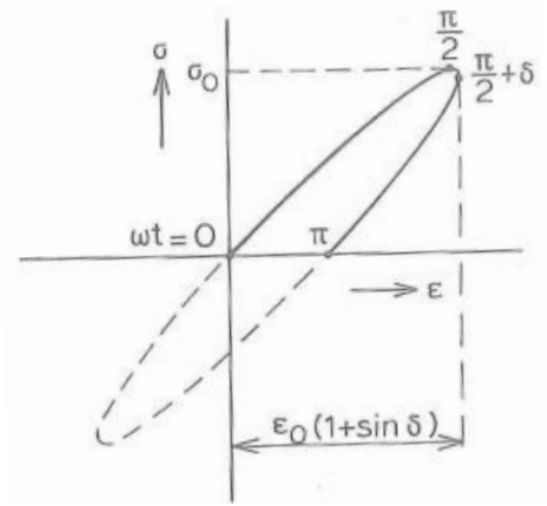


Figura 2.11: Diagrama esfuerzo-deformación.

$$W_{h,v} = \int \sigma d\varepsilon$$

$$W_{h,v} = \int_{\omega t=0}^{\omega t=\frac{\pi}{2}+\delta} \sigma d\varepsilon - \int_{\omega t=\pi}^{\omega t=\frac{\pi}{2}+\delta} \sigma d\varepsilon \quad (2.55)$$

desde (2.40) obtenemos la relación del diferencial “ $d\varepsilon$ ” en función de  $dt$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_0 \cos(\omega t - \delta) \cdot \omega \quad (2.56)$$

podemos desarrollar entonces la integral (2.55) y obtener el trabajo de la histéresis

$$W_{h,v} = \frac{\pi}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \delta \quad (2.57)$$

que puede ser expresada en función solo de la amplitud de la deformación  $\varepsilon_0$ , magnitud conocida desde la ecuación 2.54

$$W_{h,m} = \frac{\pi}{2} E' \varepsilon_0^2 \tan \delta \quad (2.58)$$

Ahora, si una sección infinitesimal de correa de largo  $dx$  y un ancho  $dy$  se mueve sobre el polín, el trabajo de la histéresis o la pérdida de energía de la correa transportadora para esa sección será  $W_{h,v} \cdot Z \cdot dx \cdot dy$  y el trabajo realizado por la fuerza de resistencia por indentación como consecuencia del movimiento de una sección longitudinal de la correa es  $F_i \cdot dx$ . Se asume que el trabajo hecho por la fuerza de resistencia es únicamente una consecuencia de las indentaciones del polín sobre la correa donde las curvas de esfuerzo y de deformación experimentan histéresis, y por lo tanto, el trabajo de la fuerza de resistencia es igual al trabajo de la histéresis, entonces:

$$W_{h,v} \cdot Z \cdot dy \cdot dx = F_i \cdot dx \quad (2.59)$$

$$F_i = W_{h,v} \cdot Z \cdot dy \quad (2.60)$$

$$F_{i,y} = \frac{dF_i}{dy} = W_{h,v} \cdot Z \quad (2.61)$$

e incorporando 2.57 en la ecuación, tenemos:

$$F_{i,y} = \frac{\pi}{2} E' \varepsilon_0^2 \tan \delta \cdot Z$$

donde reemplazando  $\varepsilon_0$  por la expresión conocida (2.54), finalmente obtenemos una expresión para la distribución de la fuerza de resistencia a lo ancho del contacto.

$$F_{i,y} = f(\delta) \cdot \left( \frac{Z}{E' D^2} \right)^{\frac{1}{3}} q_v^{\frac{4}{3}} \quad (2.62)$$

con

$$f(\delta) = \frac{1}{2} \pi \tan \delta \left( \frac{(\pi + 2\delta) \cos \delta}{4\sqrt{1 + \sin \delta}} \right)^{\frac{4}{3}}$$

La fuerza total de resistencia al movimiento por indentación,  $F_i$ , se puede calcular entonces al integrar la distribución de la fuerza por metro de ancho,  $F_{i,y}$ , en todo el ancho de contacto de la correa sobre la estación de polines, el ancho de correa  $B$ . La carga vertical  $q_v$ , que es la fuerza vertical ejercida sobre el polín por metro de ancho en el eje  $y$ , se considera constante y uniforme a en todo el ancho de contacto entre la correa y los 3 polines que forman una estación de polines.

Obtener una expresión de  $q_v$  es mucho más simple porque al considerar que la carga por metro  $q_v$  es constante e uniforme a lo largo de los polines, su cálculo es simplemente

$$q_v = \frac{F_v}{B} \quad (2.63)$$

donde la fuerza vertical ejercida sobre cada estación de polines,  $F_v$ , se divide simplemente por el ancho de la correa  $B$ .

La fuerza vertical  $F_v$  se puede obtener a su vez de la siguiente ecuación propuesta, donde se asume que cada estación de polines

$$F_v = \frac{(W_{\text{correa}} + W_{\text{material a granel}})}{n_p} \quad (2.64)$$

donde  $W_{\text{correa}}$ , es el peso total de solamente la correa,  $W_{\text{material a granel}}$ , es el peso total del material transportado sobre la correa y  $n_p$  es el número de estaciones de polines que soportan aquel peso.

Entonces la fuerza de resistencia al movimiento debido a la indentación  $F_i$ , ejercida por una estación de polines sobre una correa es:

$$F_i = \int_0^B F_{i,y} dy$$

$$F_i = f(\delta) \cdot \left( \frac{Z}{E'D^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left( \frac{F_v}{B} \right)^{\frac{4}{3}} \cdot B$$

donde reagrupando los términos, tenemos finalmente

$$F_i = f(\delta) \cdot \left( \frac{Z}{E'D^2 B} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot F_v^{\frac{4}{3}} \quad (2.65)$$

Es posible entonces con la fuerza de resistencia conocida, obtener un factor de resistencia por indentación del modelo de Jonker que se define como:

$$f_{iJ} = \frac{F_i}{F_v} = f(\delta) \cdot \left[ \frac{Z}{E'D^2 B} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot F_v^{\frac{1}{3}} \quad (2.66)$$

$$f_{iJ} = \frac{F_i}{F_v} = \frac{F_v^{\frac{1}{3}} Z^{\frac{1}{3}}}{D^{\frac{2}{3}}} \cdot \left[ \frac{1}{E' \cdot B} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot f(\delta) \quad (2.67)$$

$$f_{iJ} = \frac{\left( \frac{F_v}{B} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot Z^{\frac{1}{3}}}{D^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{f(\delta)}{(E')^{\frac{1}{3}}} \quad (2.68)$$

con

$$f(\delta) = \frac{1}{2} \pi \tan \delta \left( \frac{(\pi + 2\delta) \cos \delta}{4\sqrt{1 + \sin \delta}} \right)^{\frac{4}{3}}$$

comparar este factor del modelo Jonker  $f_{iJ}$  de la ecuación (2.68) con el factor de resistencia de May  $f_i$ , la ecuación (2.22). Ambos factores son de la forma esquematizada en la ecuación (2.23).

### 2.2.2. Limitaciones del modelo

Para poder hacer un cálculo aproximado de la resistencia por indentación de una forma más detallada, se simplifica la distribución de la carga vertical  $q_v$  en la estación de polines bajo la correa. La forma más simple de distribución es asumir que la fuerza se distribuye uniformemente, y que la carga vertical

$q_v$  en los polines laterales aumentará linealmente desde cero hasta el valor más alto, ver Figura 2.12. Sin embargo, se prescinde del modelo de presión anterior para trabajar con una simplificación de la distribución de fuerza: la carga vertical  $q_v$  se distribuye por igual a lo ancho de la zona de contacto entre la correa y la estación de polines y se supondrá que la suma de las fuerzas sobre los polines será igual el peso de la correa y el material a granel (ver Figura 2.12).

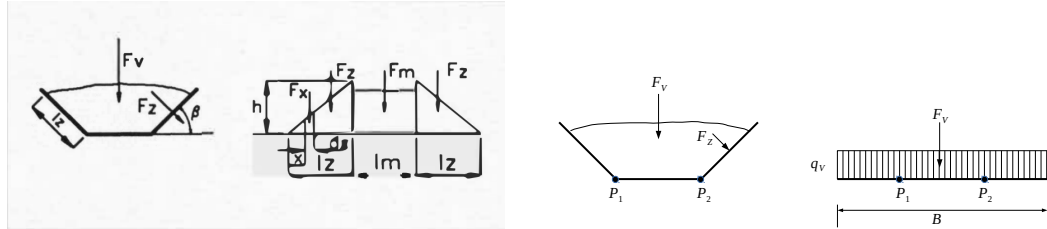


Figura 2.12: Modelos de distribución de la carga vertical  $q_v$ . Izquierda: Distribución de la carga vertical sobre los polines con una variación lineal en los extremos. Extraído desde [20]. Derecha: Distribución de la carga vertical, donde la variación en los extremos se desprecia y se considera la carga vertical distribuida de forma uniforme en los tres polines.

El cálculo de la fuerza de resistencia  $F_i$  en la ecuación (2.65) depende del modulo de almacenamiento  $E'$ . Dicha constante depende de la velocidad angular de deformación  $\omega$  que a su vez depende del largo de contacto.

$$\omega = \frac{\pi V}{(a+b)} \quad (2.69)$$

donde el largo de contacto  $(a+b)$  vendría a ser  $(b+b')$  en la Figura 2.10, que depende a su vez del modulo de almacenamiento  $E'$  que mejor representa el comportamiento elástico de la cubierta de la correa. El modulo de almacenamiento  $E'$  a su vez depende de velocidad de deformación armónica  $\omega$  que como ya se sabe depende de  $(a+b)$  en (2.69), formándose así un sistema de ecuaciones que no puede ser resuelto fácilmente.

Por lo tanto, para poder avanzar en el calculo de la fuerza de resistencia, se propone un predictor del semilargo de contacto " $a_0$ " inicial cuya magnitud se obtiene en base a la ecuación de la mecánica de contacto entre una esfera y un semiespacio elástico.

De acuerdo a Johnson[7], la fuerza vertical está relacionada a la profundidad máxima de la indentación  $z_0$

$$q_v = \frac{4}{3} \cdot E^* \cdot a \cdot z_0$$

la indentación  $z_0$ , a su vez está relacionada con el semilargo de contacto  $a$  por la ecuación (2.3)

$$a^2 = 2Rz_0$$

entonces tenemos

$$q_v = \frac{4}{3} E^* \cdot a \cdot \frac{a^2}{D}$$

$$\text{con } E^* = \frac{E_1}{h}$$

$$q_v = \frac{4E_1 a^3}{3hD}$$

despejando  $a$ , podemos plantear el predictor del semilargo de contacto

$$a^3 = \frac{3F_z D h}{4E_1} \quad (2.70)$$

Una vez obtenido un predictor del semilargo " $a_0$ " podemos obtener un  $\omega_0$  con

$$\omega = \frac{\pi V}{2a_0} \quad (2.71)$$

y con ese valor calcular un  $E'_0$  y  $(\tan \delta)_0$  desde los gráficos de las curvas del módulo  $E'$  y factor  $\tan(\delta)$  (como el de las figuras 2.13 y 2.15).

Para obtener el valor de  $E_1$ , desde la ecuación (2.32), se sabe que

$$E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\delta)$$

por lo tanto, se plantea una aproximación de  $E_1$

$$E' = E_1 \cos(\delta)$$

$$E_1 = \frac{E'}{\cos(\delta)} \quad (2.72)$$

y entonces es posible conocer  $E_1$  para una velocidad conocida  $\omega$ .

Luego de seguir un número sucesivos de pasos donde se vuelve a recalcular el valor de la frecuencia  $\omega$  con las ecuaciones (2.71), (2.70), (2.72) de forma cíclica hasta observar una convergencia en los resultados, se obtiene definitivamente el  $\omega$  y  $E'$  correctos y con ellos finalmente obtener en definitiva un factor de resistencia final.

Para trabajar con un valor de  $E_1$  más preciso se puede realizar un ajuste de curvas por mínimos cuadrados teniendo como datos unas curvas conocidas de  $E'$  y  $\tan(\delta)$  versus frecuencias. Donde las curvas a ajustar a los datos tienen una forma conocida y es la siguiente:

$$E' = \frac{E_1 E_2^2 + \omega^2 \eta^2 (E_1 + E_2)}{E_2^2 + \omega^2 \eta^2}$$

$$\tan(\delta) = \frac{E'}{E''} = \frac{\omega \eta E_2^2}{E_1 E_2^2 + \omega^2 \eta^2 (E_1 + E_2)}$$

El método de mínimos cuadrados nos entrega un valor aproximado de  $E_1$ , que mejor se ajusta a

los datos conocidos. Sin embargo, las curvas necesarias para tal cálculo son difíciles de obtener para cualquier material de interés. En el trabajo de Lodewijks[11] se muestran curvas de  $E'$  y  $\tan(\delta)$  pero en función de la temperatura, y algunas curvas de nivel separadas por frecuencias específicas, esta ausencia de datos experimentales de primera mano dificultan este método.

### 2.2.3. Cálculo de la resistencia al movimiento.

En síntesis, el procedimiento a seguir para calcular el factor de resistencia, usando el Modelo Jonker  $f_{iJ}$ :

- Desde un ajuste de curvas por mínimos cuadrados obtenemos un valor de  $E_1$ , que sería nuestro valor inicial.
- Calculamos un valor de semilargo de contacto inicial “ $a_0$ ” desde (2.70).
- Con la velocidad de la correa  $V$  sobre el polín y el largo de contacto “ $2 \cdot a_0$ ” obtenemos  $\omega_0$  desde (2.7).
- Con la frecuencia  $\omega_0$  y la temperatura de la capa de cubierta inferior de la correa podemos entrar a las curvas de  $E'$  y  $\tan(\delta)$  a través de una interpolación.
- Con  $E'$ ,  $\tan(\delta)$  y  $\delta$ , desde (2.72) podemos obtener  $E_1^{(1)}$  y con ella podemos obtener un nuevo valor de “ $a$ ”,  $a^{(1)}$ .
- Con un valor de  $a^{(1)}$  calculamos un nuevo valor de  $\omega^{(1)}$  utilizando la ecuación (2.7).
- Repetimos los pasos anteriores desde el cuarto paso de manera cíclica hasta lograr una convergencia en el valor de “ $\omega$ ”.
- Con un valor de  $\omega$  estable, procedemos a calcular  $E'$  y  $\tan(\delta)$ .
- Con  $E'$  y  $\tan(\delta)$  obtenemos el factor  $f_{iJ}$  desde (2.68).

### 2.3. Propiedades del material.

La resistencia al movimiento por indentación, dependen de las propiedades del material del que está hecho la cubierta inferior de la correa, esa capa de la correa que está en contacto con las estaciones de polines, por lo tanto, es imposible calcular la resistencia al movimiento sin fabricar la correa y sin poner a dicha correa y en específico a su cubierta inferior en un ensayo de materiales, llamado “DMA” en sus siglas en inglés, y en español “análisis mecánico dinámico”. En particular, el trabajo de Lodewijks nos entrega los valores de  $E'$  y  $\tan(\delta)$  para el material de cubierta inferior, **SBR**, “Caucho estireno-butadieno” uno de los polímeros usados por la industria para fabricar cubiertas de correas transportadoras. Los valores de  $E'$ ,  $E''$  y  $\tan \delta$  varían con la frecuencia de la carga y con la temperatura como se puede observar en

las figuras 2.13 , 2.14, y 2.15. Para diferentes temperaturas o frecuencias diferentes a las presentes en las curvas, será necesario interpolar para obtener valores intermedios debido a que el modelo de Jonker usa directamente los valores de  $E'$  y  $\tan(\delta)$  para una determinada velocidad  $\omega$  a veces también llamada “velocidad de deformación armónica”.

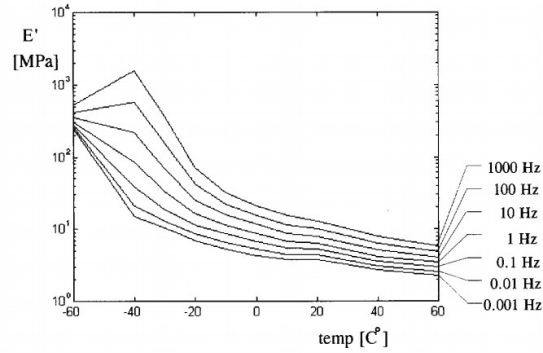


Figura 2.13: El módulo de almacenamiento  $E'$  en función de la temperatura y la velocidad de deformación  $\omega$ . Extraído del trabajo de Lodewijks[11].

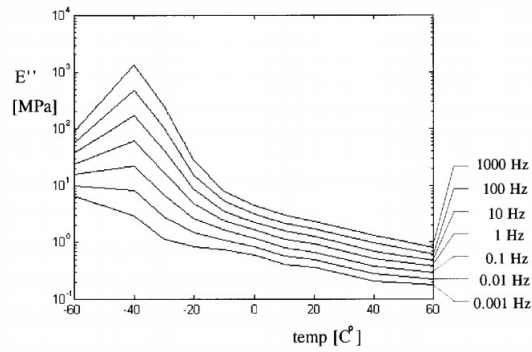


Figura 2.14: El módulo de pérdida  $E''$  en función de la temperatura y la velocidad de deformación  $\omega$ . Extraído del trabajo de Lodewijks[11].

### 2.3.1. Interpolación de valores de $E'$ y $\tan \delta$ .

Usando el programa informático comercial **GetData Graph Digitizer** se procesan los gráficos de las figuras 2.13 y 2.15 obtenidas del trabajo de Lodewijks[11], obteniendo de ellas una serie de datos que se pueden utilizar en un programa encargado de interpolar y obtener los valores de  $E'$  y  $\tan(\delta)$  para cualquier temperatura y velocidad de deformación requerida. La serie de datos obtenidos se pueden inspeccionar en el anexo A.

La interpolación se realiza con el programa comercial **MATLAB** a través del código mostrado en el anexo B, la calidad de los resultados pueden demostrarse visualmente al intentar replicar las curvas de

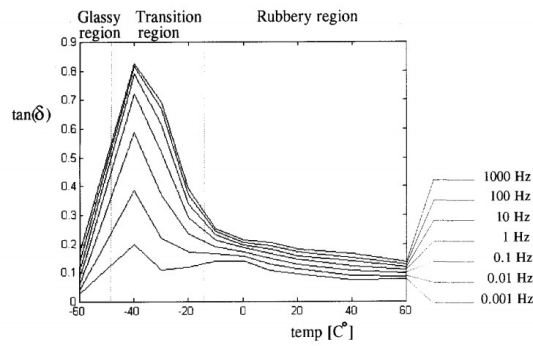


Figura 2.15: El factor de pérdida  $\tan(\delta)$  en función de la temperatura y la velocidad de deformación  $\omega$ .  
 Extraído del trabajo de Lodewijks[11].

las figuras 2.13 y 2.15. Es por esto que se muestran a continuación, las figuras 2.16 y 2.17 que buscan replicar las curvas de las figuras 2.13 y 2.15 respectivamente.

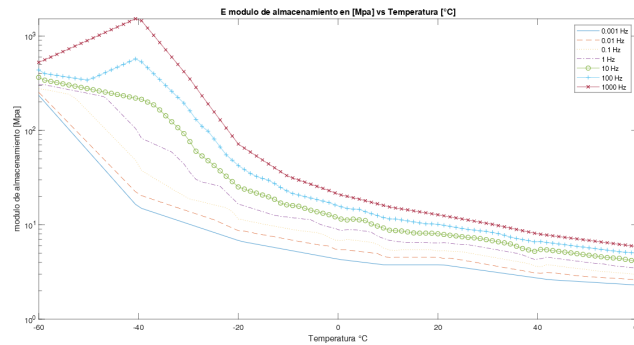


Figura 2.16: Las curvas del modulo de almacenamiento  $E'$  en función de la temperatura para diferentes velocidades de deformación armónica  $\omega$ .

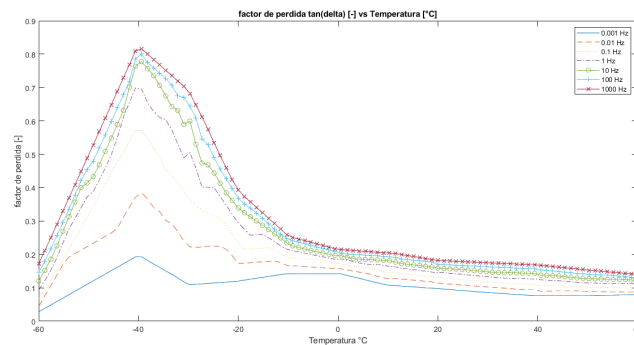


Figura 2.17: Las curvas del factor de pérdida  $\tan(\delta)$  en función de la temperatura para diferentes velocidades de deformación armónica  $\omega$ .

Se considera que los datos obtenidos y las interpolaciones relacionadas representan las curvas de  $E'$

y  $\tan \delta$ , por lo tanto, pueden ser usadas para realizar el siguiente paso.

### 2.3.2. Determinación de valores de $E_1, E_2$ y $\eta$

Desde los anteriores datos, para una temperatura de 25°C las curvas nos entregan siete puntos conocidos de  $E'$  y  $\tan \delta$  para las frecuencias 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100 y 1000 [Hz] a partir de los cuales se aplicara el ajuste de curvas.

Desde la teoría se conoce que para un modelo de maxwell de tres parámetros, el modulo  $E'$  de almacenamiento es:

$$E'(\omega) = \frac{E_1 E_2^2 + \omega^2 \eta^2 (E_1 + E_2)}{E_2^2 + \omega^2 \eta^2} \quad (2.73)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia circular de deformación.

El factor de pérdida  $\tan(\delta)$  es en este caso definida como:

$$\tan(\delta) = \frac{\omega \eta E_2^2}{E_1 E_2^2 + \omega^2 \eta^2 (E_1 + E_2)} \quad (2.74)$$

Por lo tanto las formas de las curvas a ajustar son conocidas, son las ecuaciones (2.73) y (2.74) cuyas constantes  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$  se busca encontrar a través del método de mínimos cuadrados. Desde los datos conocidos de  $E'$  y  $\tan(\delta)$ , para una temperatura de 25°C y las frecuencias 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100 y 1000 [Hz] se realiza un ajuste de curvas. El ajuste se realiza a través de un programa escrito para **MATLAB** y está en el anexo D, los resultados entregados se exponen en el anexo C. Este programa nos entrega que el valor de los parámetros que mejor se ajustan a los datos y a las formas de las curvas entregados, es de  $E_1$  de 5.26 [MPa],  $E_2$  de 6.17 [MPa] y un  $\eta$  de 0.084 [MPa·s]. Las curvas obtenidas para estos parámetros se pueden observar en las figuras 2.18 y 2.19.

Tabla 2.1: Valores de los parámetros obtenidos desde el ajuste de curvas.

Parámetro	Valor
Material	Caucho estireno-butadieno(SBR)
$E_1$	5.26 [MPa]
$E_2$	6.17 [MPa]
$\eta$	0.084 [MPa · s]

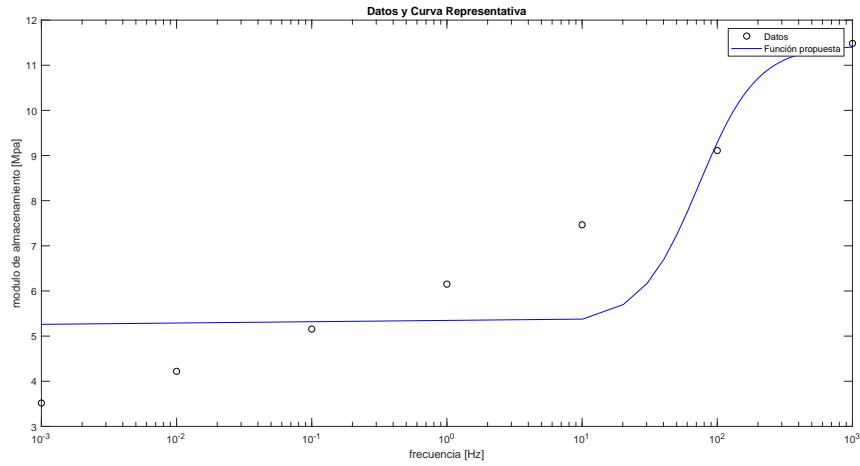


Figura 2.18: Gráfico de los datos de  $E'$  para  $25^{\circ}\text{C}$  y la curva ajustada obtenida con las constantes  $E_1, E_2$  y  $\eta$ .

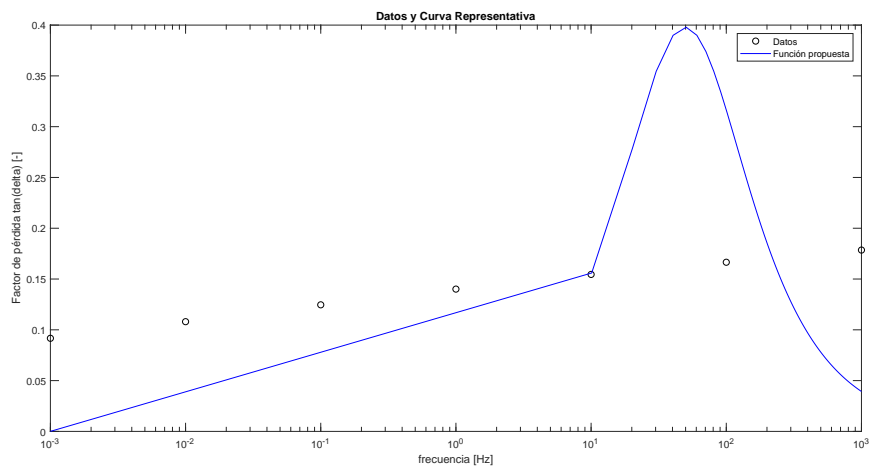
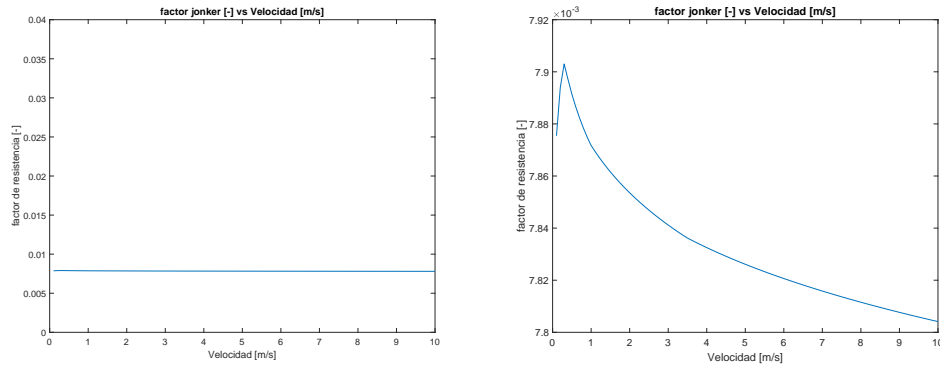


Figura 2.19: Gráfico de los datos de  $\tan(\delta)$  para  $25^{\circ}\text{C}$  y la curva ajustada obtenida con las constantes  $E_1, E_2$  y  $\eta$ .

## 2.4. Factor de resistencia al movimiento por indentación de la correa.

Siguiendo los pasos descritos en la sección 2.2.3 y con los parámetros obtenidos en la Tabla 2.1 se calcula el factor de resistencia para una correa con una cubierta de caucho estireno-butadieno (SBR) para diferentes velocidades de operación de la correa, utilizando el programa MATLAB descrito en el anexo E obteniendo los resultados presentes en la Figura 2.20



(a) El factor de resistencia  $f$  para velocidades menores a 10 [m/s]. (b) Ampliación y vista en detalle de la variación de la curva del factor  $f$  en torno a 0.0078 y 0.0079.

Figura 2.20: Gráfico del factor de resistencia vs velocidad, obtenido con los pocos datos experimentales entregados en el trabajo de Lodewijks[11] para el material SBR.

## 2.5. Comentarios sobre el factor de resistencia.

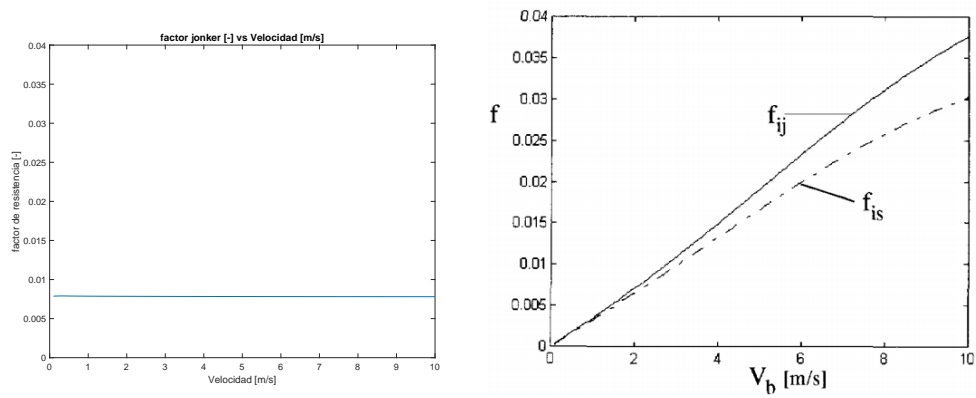
La construcción de un modelo de indentación que pueda ser incorporado a la construcción de un modelo de correa transportadora global, exige el conocimiento previo de los valores de los parámetros  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$  que son desconocidos excepto para unos cuantos materiales específicos.

En el trabajo de Lodewijks[11] se aportan datos experimentales de ensayos de materiales para el material caucho estireno-butadieno (SBR), sin embargo, para la correa que en el futuro será de interés, el material de la cubierta inferior de la correa depende de cada fabricante y las propiedades anti-abrasivas o de protección química que se le soliciten en cada instalación de una correa transportadora. Por lo tanto, dependiendo del material de correa que sea de interés puede que los datos necesarios para modelar la indentación sean desconocidos y el modelo sea temporalmente inviable.

Con los datos presentes en trabajos previos[11], se obtienen unos valores de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$  correspondientes solo a un material en específico, caucho estireno-butadieno (SBR). Es importante destacar que las curvas obtenidas son diferentes a las expuestas en el trabajo de Lodewijks[11] como se ve en la Figura 2.21b donde la causa de las diferencias de seguro se debe a la cantidad de datos experimentales disponibles en la elaboración de uno y otro gráfico.

A partir de esas diferencias en las curvas del factor de resistencia en función de la velocidad de la correa, se propone un nuevo modelo de indentación, esta vez con la guía de la norma DIN 22101, que sugiere establecer un factor de resistencia al movimiento  $f = 0,02$  sin importar la variación de la velocidad de la correa. Se sabe que a velocidades muy bajas el fenómeno físico de indentación pasa a ser casi un fenómeno de roce estático y eso también tiene influencia en el factor de resistencia  $f_i$ , se propone entonces lo siguiente:

- Para velocidades mayores a  $0,1[m/s]$  se considera al factor de resistencia igual a  $f = 0,02$  valor



(a) Curva obtenida para el factor de resistencia  $f_{iJ}$ . (b) Curva del factor de resistencia  $f_{iJ}$  señalada como  $f_{ij}$  en la figura.

Figura 2.21: Gráficos del factor de resistencia vs. velocidad de la correa para el material caucho estireno-butadieno (SBR). Izquierda: El gráfico obtenido por calculo propio. Derecha: La curva de  $f_{ij}$  presente en el trabajo de Lodewijks[11].

sugerido por la norma DIN 22101 y que dentro de ella contiene fenómenos no solo de indentación sino tambien de roce de rodamientos o de resistencia a la flexión de la correa.

- Para velocidades menores a  $0,1[m/s]$  se considera que la fuerza de resistencia deja de deberse a la indentación y corresponde más a un roce dinámico y estático. Para su descripción entonces se debe proponer un modelo de roce, y para el cálculo de la fuerza de resistencia al movimiento se utiliza un procedimiento como el propuesto en la sección 6.4.

### 3. Elementos finitos lagrangianos en una dimensión.

#### 3.1. Introducción.

En este capítulo se describe un modelo unidimensional de un medio continuo no-lineal y se desarrollan las correspondientes ecuaciones de elementos finitos. Exponemos las propiedades y ecuaciones más destacadas de la formulación lagrangiana de elementos finitos.

En este capítulo se examinarán algunos de los conceptos de discretización de elementos finitos y los algoritmos para resolver los sistemas de ecuaciones. Entre los conceptos a utilizar se habla de, *operaciones de ensamblaje de matrices* y la imposición de condiciones de frontera esenciales y de condiciones iniciales. Se habla también de los requisitos de continuidad de las soluciones y las aproximaciones de elementos finitos.

En el desarrollo de los elementos finitos unidimensionales se suelen adoptar dos enfoques:

1. Formulaciones en términos de las medidas lagrangianas de esfuerzo y deformación en que las derivadas y las integrales están escritas con respecto a las coordenadas materiales (lagrangianas) “ $X$ ”.
2. Formulaciones en términos de las medidas eulerianas de esfuerzo y deformación en que las derivadas y las integrales están escritas con respecto a las coordenadas espaciales (eulerianas) “ $x$ ”.

En estas dos formulaciones se suelen utilizar diferentes medidas de tensión y deformación. Por ejemplo, la formulación lagrangiana utiliza una medida total de la deformación, mientras que las formulaciones eulerianas utiliza a menudo una medida de la deformación conocida como “*tasa de deformación*”.

Las mallas eulerianas no se utilizan generalmente en la mecánica de sólidos y es más útil en problemas con grandes deformaciones, su ventaja en estos problemas es una consecuencia del hecho de que los elementos eulerianos no se deforman junto con el material.

A continuación se obtienen las ecuaciones discretas propias del método de elementos finitos. Para los problemas donde las aceleraciones son importantes, por ejemplo en problemas dinámicos, las ecuaciones discretas de elementos finitos resultantes son ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). El proceso de discretización en el espacio se denomina semidiscretización, ya que el procedimiento de elementos finitos sólo convierte los operadores diferenciales espaciales en forma discreta; las derivadas en el tiempo no se discretizan.

### 3.2. Nomenclatura.

Considerar una barra unidimensional, como la mostrada en la figura 3.1. La *configuración inicial*, también llamada la *configuración no deformada*, que es mostrada en la barra ubicada en la zona inferior de la figura. La *configuración de referencia* es una configuración importante en la formulación de las ecuaciones, porque las ecuaciones van a estar escritas con respecto a esta configuración. La *configuración de referencia* puede ser la *configuración inicial* (no-deformada) o cualquier otra configuración que describa un estado del sólido de estudio durante su movimiento. La *configuración actual* ó *configuración deformada* es ilustrada en la parte superior en la figura 3.1. Las coordenadas espaciales (eulerianas) están representadas por  $x$  y las coordenadas materiales (lagrangianas) por  $X$ . El área transversal en el tiempo “ $t$ ”, o área transversal instantánea es denotada por  $A(X, t)$  y la densidad instantánea por  $\rho(X, t)$ . El área transversal inicial de la barra está designado como  $A_0(X)$  y la densidad inicial por  $\rho_0(X)$ ; estas variables pertenecientes a la configuración inicial (no-deformada), su *configuración de referencia*, será siempre identificado por un subíndice o superíndice cero. Con esta nomenclatura, podemos designar las coordenadas materiales como  $x_0$ , por la coincidencia en el tiempo  $t = 0$  de las coordenadas materiales y espaciales, pero por convención, siempre se usará “ $X$ ” para representar las coordenadas materiales.

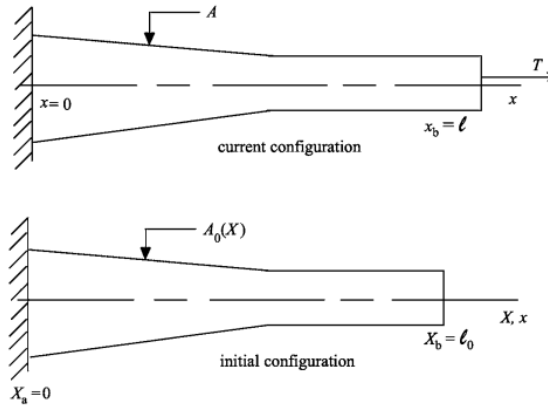


Figura 3.1: barra unidimensional sometida a una tensión axial, donde se ilustra el significado físico de  $A$ ,  $A_0(X)$ ,  $T$ ,  $X$  y  $x$ . En la figura superior la barra está en estado transiente mientras que la barra inferior está en el estado inicial.

El área transversal durante la deformación es designada como  $A(X, t)$ ; y como se indica es una función del espacio y el tiempo. La dependencia espacial de esta variable y otras es expresada en términos de las coordenadas materiales. La densidad es denotada por  $\rho(X, t)$  y el desplazamiento  $u(X, t)$ . Los puntos de frontera en la *configuración de referencia* son  $X_a$  y  $X_b$ .

### 3.2.1. Movimiento y medida de la deformación.

El movimiento del cuerpo es descrito por una función de las coordenadas lagrangianas y el tiempo,

$$x = \phi(X, t) \quad X \in [X_a, X_b] \quad (3.1)$$

donde  $\phi(X, t)$  puede ser descrito como una transformación entre los dominios iniciales y los dominios instantáneos. Las coordenadas materiales son las posiciones iniciales, por lo tanto

$$X = \phi(X, 0) \quad (3.2)$$

El desplazamiento  $u(X, t)$  es definida por la diferencia entre la posición instantánea y la posición inicial de un punto material:

$$u(X, t) = \phi(X, t) - X \quad \text{ó} \quad u = x - X \quad (3.3)$$

El gradiente de deformación es definido como:

$$F = \frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (3.4)$$

La última definición en (3.4) puede ser ambigua, porque aparece en ella la derivada parcial aplicada a una variable independiente  $x$  con respecto a otra variable independiente  $X$ , que puede parecer sin sentido. Sin embargo, debe ser entendido que donde sea que aparezca  $x$  en un contexto donde se implica que es una función, en realidad, se está hablando de  $x = \phi(X, t)$ .

Siendo  $\mathbf{J}$  el jacobiano entre las configuraciones instantáneas e iniciales. El jacobiano es usualmente definido como  $\mathbf{J}(x(X)) = \partial x / \partial X$  para casos unidimensionales, sin embargo, para mantener una consistencia con las formulaciones multidimensionales, definiremos el jacobiano como la razón de un volumen infinitesimal de un cuerpo deformado,  $A \Delta x$ , y el volumen del correspondiente segmento del cuerpo no deformado  $A_0 \Delta X$ .

$$J = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{A}{A_0} = \frac{F A}{A_0} \quad (3.5)$$

El gradiente de deformación  $F$  es una medida inusual de deformación debido a que su valor es uno cuando el cuerpo no está deformado. Por lo tanto se puede definir una medida de la deformación como:

$$\varepsilon(X, t) = F(X, t) - 1 \equiv \frac{\partial x}{\partial X} - 1 = \frac{\partial u}{\partial X} \quad (3.6)$$

donde la expresión se va a cero cuando el cuerpo no está deformado. La expresión anterior es equivalente a la deformación ingenieril, existen otras formas de medir la deformación pero esta es la más conveniente para nuestro caso.

### 3.2.2. Medida del esfuerzo.

La medida de esfuerzo que es usada en las formulaciones lagrangianas no corresponde a el bien conocido esfuerzo físico real. Definiendo primeramente el esfuerzo físico o instantáneo, que es también conocido como el esfuerzo de Cauchy. Definamos  $T$  como la fuerza total aplicada en una sección dada y asumamos que el esfuerzo es constante en el área transversal. El esfuerzo de Cauchy queda definido como:

$$\sigma = \frac{T}{A} \quad (3.7)$$

y la medida del esfuerzo esta definida con respecto a un área instantánea  $A$ .

En las formulaciones lagrangianas se utiliza el esfuerzo nominal. El esfuerzo nominal es designado como  $P$  y es definido como:

$$P = \frac{T}{A_0} \quad (3.8)$$

esta definición deja en claro las diferencias con el esfuerzo físico instantáneo, porque en el esfuerzo nominal la fuerza aplicada es dividida por el área inicial antes de la deformación,  $A_0$ .

Comparando (3.7) con (3.8) puede extraerse la relación entre el esfuerzo físico y el esfuerzo nominal

$$\sigma = \frac{A_0}{A} P \quad P = \frac{A}{A_0} \sigma \quad (3.9)$$

por lo tanto, si uno de los esfuerzos es conocido, el otro puede ser calculado si las áreas transversales iniciales e instantáneas son conocidas.

### 3.3. Ecuaciones y leyes de conservación.

La barra unidimensional es gobernada por las siguientes ecuaciones:

- Conservación de la masa.
- Conservación del momentum lineal.
- Conservación de la energía.
- La definición de la deformación, también llamada ecuación deformación-desplazamiento
- La ecuación constitutiva, que describe el comportamiento del material y relaciona el esfuerzo a una deformación, ya definida.

Otro requerimiento más, es la condición de que la deformación sea continua. En las siguientes secciones se trata de aplicar las leyes de conservación para el caso unidimensional y dejarlas expresadas en una configuración lagrangiana. En el planteo de nuestro modelo se supone que no existen transferencias de energía o calor, por lo tanto, la ecuación de conservación de la energía no es necesaria.

Las ecuaciones principales para el medio continuo aplicadas sobre una barra unidimensional son planteadas asumiendo que el área transversal de la barra, es constante. La ecuación constitutiva está escrita en función de la velocidad de deformación. Las condiciones de borde estarán impuestas en puntos fijos en el espacio en las fronteras de la barra.

1. Conservación de la masa (ecuación de continuidad).

$$\rho J = \rho_0 J_0 \quad \text{ó} \quad \rho(X, t) J(X, t) = \rho_0(X) J_0(X) \quad (3.10)$$

2. Conservación del momentum lineal.

La ecuación de conservación del momentum lineal esta expresada en función del esfuerzo nominal  $P$  y las coordenadas lagrangianas  $X$  nos da:

$$(A_0 P)_{,X} + \rho_0 A_0 b = \rho_0 A_0 \ddot{u} \quad (3.11)$$

3. Definición de la deformación .

Este tema ha sido abordado en la sección 3.2.1.

$$\varepsilon(X, t) = \frac{\partial u}{\partial X} \quad (3.12)$$

4. Ecuación constitutiva en la forma de velocidad.

Para un material elástico lineal.

$$P(X, t) = E \varepsilon(X, t) \quad (3.13)$$

siendo  $E$  el módulo de elasticidad o de Young.

5. Ecuación de conservación de la energía.

No existe en nuestro modelo transferencias de energía o calor, por lo tanto, la ecuación de conservación no nos aporta información de interés.

### 3.4. Condiciones de frontera.

Para completar la descripción del problema, deben ser entregadas las condiciones de borde o frontera y las condiciones iniciales. Las fronteras en una barra unidimensional consisten de dos puntos en los finales del dominio, que en la figura 3.1 son los puntos  $X_a$  y  $X_b$ . Esta frontera (puntos) quedan designados como  $\Gamma$ .

Una frontera es llamada “*frontera de desplazamiento*” y designada como  $\Gamma_u$  si en esa frontera el desplazamiento esta definido; y es llamada “*frontera de tracción*” y designada como  $\Gamma_t$  si en esa frontera el esfuerzo de tracción está definido. Los valores prescritos están marcados con una barra sobre el término

algebraico. Las condiciones de frontera son:

$$u = \bar{u} \quad \text{en} \quad \Gamma_u \quad (3.14)$$

$$n^\circ P = \bar{t}_x^\circ \quad \text{en} \quad \Gamma_t \quad (3.15)$$

donde  $\bar{u}$  y  $\bar{t}_x^\circ$  son el desplazamiento y la tracción conocidas, respectivamente, y “ $n^\circ$ ” es el vector normal al dominio, pero en el caso unidimensional,  $n^\circ = 1$  en  $X_b$  y  $n^\circ = -1$  en  $X_a$ . El subíndice “ $x$ ” es siempre explícitamente escrito en  $\bar{t}_x^\circ$  para distinguirla del tiempo “ $t$ ”.

Como la ecuación de momentum lineal es de segundo orden, se sabe que se deben definir las condiciones de frontera para  $u$  o  $u_{,X}$ . En este caso, en vez de hablar de  $u_{,X}$  se define el esfuerzo de tracción  $n^\circ P = \bar{t}_X^\circ$ . Como el esfuerzo y la deformación están relacionados y esta a su vez con el gradiente de desplazamiento, por lo tanto, definir  $\bar{t}_X^\circ$  equivale a definir  $u_{,X}$ . La relación entre las fronteras de velocidad y las fronteras de tracción queda definida de la siguiente manera: la tracción y la velocidad no pueden ser definidos ambas en el mismo punto, pero una de ellas siempre debe ser definida en cada punto de frontera; esto puede ser expresado como:

$$\Gamma_v \cap \Gamma_t = 0 \quad \Gamma_v \cup \Gamma_t = \Gamma \quad (3.16)$$

### 3.5. Condiciones de continuidad interior.

La conservación del momentum lineal requiere que

$$[[A_0 P]] = 0 \quad (3.17)$$

donde  $[[f]]$  representa a un salto en una función  $f(x)$ , esto es

$$[[f(x)]] = f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

La condición (3.17) es llamada la condición de continuidad interior, que en definitiva significa que las fuerzas dentro del elemento finito debe ser continua dentro del elemento unidimensional, y por ende toda fuerza debe estar ubicada en los nodos.

### 3.6. Condiciones iniciales.

Debido a que las ecuaciones de conservación son de segundo orden con respecto al tiempo, se necesitan las condiciones iniciales en función del desplazamiento y la velocidad.

$$u(X, 0) = u_0(X) \quad \text{para} \quad X \in [X_a, X_b] \quad (3.19)$$

$$\dot{u}(X, 0) = \dot{u}_0(X) \quad \text{para } X \in [X_a, X_b] \quad (3.20)$$

Si el elemento está inicialmente no deformado y en reposo, las condiciones iniciales son:

$$u(X, 0) = 0 \quad \dot{u}(X, 0) = 0 \quad (3.21)$$

### 3.7. Coordenadas del elemento finito.

Los cálculos de elementos finitos generalmente expresados en función de las coordenadas locales  $\xi$ , también llamadas coordenadas del elemento.

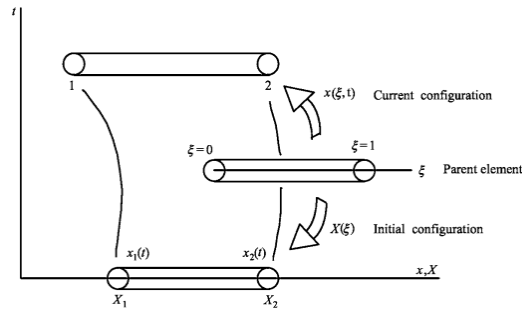


Figura 3.2: El rol de las coordenadas locales  $\xi$ , mostrando como pueden transformarse esas coordenadas tanto en coordenadas espaciales como en materiales.

En la figura 3.2 se muestra un elemento de dos nodos en su configuración inicial y la configuración instantánea. El dominio de las coordenadas locales es el intervalo  $0 \leq \xi \leq 1$ . El dominio del elemento puede representar tanto las coordenadas espaciales como las materiales. En nuestro caso el elemento de dos nodos expresará las coordenadas espaciales  $x$  en función de las coordenadas del elemento  $\xi$ .

$$x(\xi, t) = x_1(t)(1 - \xi) + x_2(t)\xi \quad (3.22)$$

Para un solo elemento unidimensional, la relación entre coordenadas expresada en términos de las *funciones de forma* queda

$$x(\xi, t) = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{x}^e(t) \quad (3.23)$$

donde  $\mathbf{N}(\xi)$  es

$$N_e(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

aplicando la ecuación anterior para un tiempo  $t = 0$  obtenemos la ecuación de transformación desde la

configuración inicial y las coordenadas locales.

$$X(\xi) = \sum_{I=1}^m N_I(\xi) X_I^e = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{X}_e \quad (3.25)$$

donde para un elemento de dos nodos es

$$X(\xi) = X_1(1 - \xi) + X_2\xi \quad (3.26)$$

Desde (3.23) y (3.25) se obtiene que los desplazamientos pueden ser interpolados por las mismas funciones de forma

$$u(\xi, t) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{u}^e(t) \quad (3.27)$$

### 3.8. Matrices globales y locales.

Las fuerzas nodales de un sólo elemento finito están incorporadas junto con las demás fuerzas nodales de los otros elementos en una matriz global como producto de una operación llamada “Ensamblaje de vectores”.

Los vectores columna globales  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{f}$  de desplazamiento y fuerza de tamaño igual al número total de nodos en el sistema, se forman desde los vectores locales de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{L}_e^T \mathbf{u}_e \quad (3.28)$$

$$\mathbf{f} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{L}_e^T \mathbf{f}_e \quad (3.29)$$

Siendo  $L_e$  una matriz llamada “matriz de conexión” compuesta de unos y ceros y con un número de filas igual al número de nodos por elemento  $n_e$  y el número de columnas igual al número total de nodos en el sistema  $n_n$ , sirve para informar que nodos forman parte del elemento y cual es su posición en el modelo global. Por ejemplo, para la Figura 3.3 las matrices de conectividad para cada elemento serían:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Los valores de desplazamiento y fuerza locales pueden ser extraídos desde los vectores globales a través de una operación de “des-ensamblaje”. Siendo  $\mathbf{u}_e$  y  $\mathbf{f}_e$  vectores columna de tamaño igual al numero

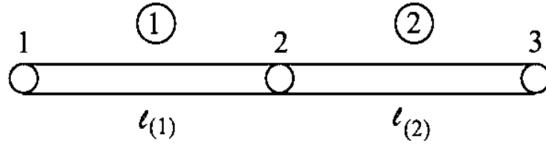


Figura 3.3: Una malla de dos elementos.

de nodos por elemento, sus valores pueden ser extraídos usando las matrices de conexión de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{u}$$

y

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{f}$$

La matriz de masa y otras matrices cuadradas están igualmente combinadas desde el nivel de elemento a un nivel global por una operación llamada “Ensamblaje de matrices”, donde igualmente se utilizan las matrices de conexión, junto con las matrices de inercia  $\mathbf{M}_e$  y rigidez a nivel local  $\mathbf{K}_e$ .

$$[\mathbf{M}] = \sum_{e=1}^{n_n} \mathbf{L}_e^T \mathbf{M}_e \mathbf{L}_e \quad (3.32)$$

$$[\mathbf{K}] = \sum_{e=1}^{n_n} \mathbf{L}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{L}_e \quad (3.33)$$

### 3.9. Ecuaciones Discretas en una formulación lagrangiana.

La formación de los vectores globales y matrices globales del sistema de ecuaciones está fundamentada en la teoría tradicional de elementos finitos ya descrita en libros de teoría como el de Belytschko[2].

Desde la ecuación discreta del desplazamiento de los nodos

$$u(X, t) = \mathbf{N}(X) \mathbf{u}_e(t) \quad (3.34)$$

y asumiendo que el comportamiento del material es el de un material elástico lineal, la deformación longitudinal  $\varepsilon$  de cada elemento de la ecuación (3.12) puede ser calculo de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \mathbf{B}_0 \mathbf{u}^e \quad (3.35)$$

siendo  $\mathbf{B}_0 = \frac{1}{l_0} [-1 \ 1]$ .

Utilizando el principio de trabajo virtual y las ecuaciones de conservación, es posible expresar la ecuación de trabajo virtual de forma discretizada, donde las fuerzas elásticas y de inercia presentes en

cada nodo quedan representadas como:

$$\mathbf{f}^{int} = [\mathbf{K}] \mathbf{u} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{f}^{kin} = [\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.37)$$

Como resultado la ecuación de trabajo virtual termina expresada en forma discreta como una equivalencia de fuerzas:

$$\mathbf{f}^{kin} + \mathbf{f}^{int} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}_{cuerpo} = \mathbf{f}^{fuerzas} \quad (3.38)$$

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}_{cuerpo} \quad (3.39)$$

siendo  $\mathbf{f}^{ext}$  el vector columna de fuerzas externas puntuales sobre cada nodo y  $\mathbf{f}_{cuerpo}$  el vector columna de las fuerzas de cuerpo distribuidas en cada nodo, y la suma de ambos reflejado en un vector de columna de fuerzas externas  $\mathbf{f}^{fuerzas}$ .

Ahora considerando dentro del sistema de ecuaciones las fuerzas amortiguadoras en función del vector global de velocidad, el sistema de ecuaciones queda de la forma:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}_{cuerpo} \quad (3.40)$$

### 3.10. Ecuaciones Semidiscretas.

Desarrollando las ecuaciones de elementos finitos para el caso particular de aplicación, se consideran en este apartado los efectos de las “fronteras de desplazamiento” o los nodos donde el movimiento es ya conocido o está predefinido como en el caso de una correa donde se conoce el movimiento de la polea motriz. En el caso que la velocidad de un nodo ya sea conocida, en consecuencia, la aceleración y el desplazamiento también lo están. El desarrollo de este tipo de frontera supone que los desplazamientos del nodo 1 y  $n$  sean conocidos:

$$u_1(t) = \bar{u}_1(t) \quad (3.41)$$

$$u_n(t) = \bar{u}_n(t) \quad (3.42)$$

y en consecuencia, al dejar de ser  $u_1$  y  $u_n$  variables independientes, se modifican los términos del sistema de ecuaciones. Desde (3.38), reordenamos los términos

$$f_I^{kin} + f_I^{int} - f_I^{ext} = 0, \quad I = 1 \text{ a } n_N \quad (3.43)$$

que expresada en función del desplazamiento usando (3.39) obtenemos:

$$\sum_{J=1}^{n_N} M_{IJ} \frac{d^2 u_J}{dt^2} + \sum_{J=1}^{n_N} K_{IJ} u_J - f_I^{fuerzas} = 0, \quad I = 1 \text{ a } n_N \quad (3.44)$$

La aceleración y el desplazamiento de los nodos 1 y  $n$  no son incógnitas en este modelo, porque ambas variables pueden ser obtenidas desde la velocidad conocida de esos nodos.

Si la matriz masa y la matriz de rigidez no son matrices diagonales, entonces las aceleraciones y desplazamientos ya conocidos van a contribuir con la aparición de nuevos términos en (3.44). Las ecuaciones de elemento finito deben entonces ser reescritas para los demás nodos, desde el nodo 2 hasta el nodo  $(n_N - 1)$ .

$$\sum_{J=1}^{n_N} M_{IJ} \frac{d^2 u_J}{dt^2} + \sum_{J=1}^{n_N} K_{IJ} u_J - f_I^{\text{ext}} = -M_{I1} \frac{d^2 \bar{u}_1}{dt^2} - K_{I1} \bar{u}_1 - M_{In} \frac{d^2 \bar{u}_n}{dt^2} - K_{In} \bar{u}_n, \quad I = 2 \text{ a } n_N - 1 \quad (3.45)$$

siendo  $M_{I1}$  la columna 1 de la matriz masa y  $K_{I1}$  la columna 1 de la matriz de rigidez. De igual forma  $M_{In}$  y  $K_{In}$ . De esta forma, una aceleración y desplazamiento conocidos en un nodo, planteadas como funciones dependientes del tiempo  $\bar{u}_1(t)$  y  $\frac{d^2 \bar{u}_n(t)}{dt^2}$  termina desarrollando un nuevo sistema de ecuaciones (3.45) generando nuevos términos a la derecha de la ecuación que pueden ser interpretados como fuerzas puntuales situadas en los nodos vecinos a los nodos 1 y  $n$ .

## 4. Métodos Numéricos.

### 4.1. Introducción.

En la sección anterior hemos deducido las ecuaciones de equilibrio que rigen la respuesta dinámica de un sistema de elementos finitos.

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (4.1)$$

donde  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{C}]$  y  $[\mathbf{K}]$  son las matrices de masa, amortiguación y rigidez;  $\{\mathbf{R}\}$  es el vector de carga externa; y  $\ddot{\mathbf{U}}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración del conjunto de elementos finitos. Recordar que (4.1) se derivó de un equilibrio de fuerzas en el tiempo  $t$ ; es decir (4.1) puede escribirse también como

$$\mathbf{F}_I(t) + \mathbf{F}_D(t) + \mathbf{F}_E(t) = \mathbf{R}(t) \quad (4.2)$$

con  $\mathbf{F}_I(t) = [\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{U}}\}$ ,  $\mathbf{F}_D(t) = [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{U}}\}$ ,  $\mathbf{F}_E(t) = [\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\}$  donde  $\mathbf{F}_I(t)$  son las fuerzas de inercia,  $\mathbf{F}_D(t)$  son las fuerzas de amortiguación y  $\mathbf{F}_E(t)$  son las fuerzas elásticas, todas ellas dependientes del tiempo. Por lo tanto, en el análisis dinámico, en principio, se considera el equilibrio estático en el tiempo  $t$ , que incluye el efecto de las fuerzas de inercia dependientes de la aceleración y las fuerzas de amortiguación dependientes de la velocidad.

Matemáticamente, (4.1) representa un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y, si fuesen los coeficientes constantes, la solución de las ecuaciones puede obtenerse mediante procedimientos estándar para la solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Por consiguiente, en el análisis práctico de elementos finitos nos interesan principalmente unos pocos métodos eficaces y en los próximos apartados nos concentraremos en la presentación de esos métodos.

Para nuestro caso, el sistema de ecuaciones (4.1) no tiene coeficientes constantes porque las fuerzas de resistencias al movimiento varían con la velocidad y aceleración, puesto que se oponen al movimiento la resistencia por indentación, así como la inercia de los polines a algún cambio de velocidad de movimiento, así como la relación no lineal entre el módulo de elasticidad y la tensión en una sección de correa. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es no-lineal y para poder obtener una solución se necesita de un método numérico, que en este caso será el método de integración directa por su fácil implementación al momento de resolver un sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales.

A continuación consideramos primero la solución de un sistema de ecuaciones lineales de equilibrio similar a (4.1) con coeficientes constantes y luego discutimos la solución de las ecuaciones no lineales del sistema de elementos finitos que representa a la correa transportadora.

## 4.2. Método de integración directa.

En la integración directa las ecuaciones en (4.1) se integran mediante un procedimiento numérico paso a paso, el término “directo” significa que antes de la integración numérica no se realiza ninguna transformación de las ecuaciones de forma previa. En esencia, la integración numérica directa se basa en dos ideas. En primer lugar, en lugar de intentar satisfacer la ecuación (4.1) en cualquier momento  $t$ , se pretende satisfacer sólo en intervalos de tiempo discretos  $\Delta t$  aparte. Esto significa que, básicamente, el equilibrio de fuerzas se busca en puntos específicos de tiempo discretos dentro del intervalo de solución. La idea sobre la cual se basa una integración directa es que se prefiere una variación de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones dentro de cada intervalo de tiempo  $\Delta t$ . La forma de determinar la variación de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones dentro de cada intervalo de tiempo es lo que determina la precisión, estabilidad y costo del procedimiento de integración directa.

A continuación, supongamos que los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración en el tiempo  $t = 0$ , iniciales, representados por  ${}^0U$ ,  ${}^0\dot{U}$  y  ${}^0\ddot{U}$ , respectivamente, son conocidos, y calculamos la solución a (4.1) se requiera desde el tiempo 0 hasta el tiempo  $T$ . En la solución, el intervalo de tiempo considerado,  $T$ , se subdivide en  $n$  intervalos de tiempo iguales  $\Delta t$  (es decir,  $\Delta t = \frac{T}{n}$ ), y el algoritmo de integración empleado establece una solución aproximada en tiempos  $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots$ , y  $T$ . Dado que el algoritmo calcula la solución para el siguiente instante  $t$  requerido a partir de las soluciones en el paso de tiempo anterior, para utilizar el algoritmo y obtener la solución en el momento  $t + \Delta t$ , las soluciones en los momentos  $t$  deben ser conocidas

En las secciones siguientes se presenta el método de integración directa más fácil de implementar, el método de diferencia central.

### 4.2.1. El método de la diferencia central.

Si la ecuación de equilibrio en (4.1) se considera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes, se deduce que pueden utilizarse todas las expresiones de diferencias finitas convenientes para aproximar las aceleraciones y velocidades en términos de desplazamientos. Un procedimiento que puede ser muy eficaz para la solución de algunos problemas es el método de la diferencia central, en el que se establece una aproximación al cálculo del valor de la aceleración en función de los desplazamientos.

$${}^t\ddot{U} = \frac{1}{\Delta t^2} [{}^{t-\Delta t}U - 2{}^tU + {}^{t+\Delta t}U] \quad (4.3)$$

El error en la expansión (4.3) es de orden  $(\Delta t^2)$ , y para tener el mismo orden de error en la fórmula de expansión de la velocidad, podemos usar

$${}^t\dot{U} = \frac{1}{2\Delta t} [{}^{t-\Delta t}U + {}^{t+\Delta t}U] \quad (4.4)$$

La solución de desplazamiento para el tiempo  $t + \Delta t$  se obtiene considerando (4.1) en el tiempo “ $t$ ”, es decir,

$$[\mathbf{M}]^t \ddot{U} + [\mathbf{C}]^t \dot{U} + [\mathbf{K}]^t U = {}^t \mathbf{R} \quad (4.5)$$

Sustituyendo las relaciones para  ${}^t \dot{U}$  y  ${}^t \ddot{U}$  en (4.4) y (4.3), respectivamente, en (4.5), obtenemos

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t+\Delta t} U = {}^t \mathbf{R} - \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) {}^t U - \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t-\Delta t} U \quad (4.6)$$

a partir de la aquí se puede resolver para  ${}^{t+\Delta t} U$ . Cabe señalar que la solución de  ${}^{t+\Delta t} U$  se obtiene de la ecuación de equilibrio de fuerzas para el tiempo  $t$ ; es decir,  ${}^{t+\Delta t} U$  es calculado usando (4.5) por esta razón, el procedimiento de integración se denomina método de integración explícito.

Una segunda observación es que usando el método de la diferencia central, el cálculo de  ${}^{t+\Delta t} U$  implica conocer  ${}^t U$  y  ${}^{t-\Delta t} U$ . Por lo tanto, para calcular la solución en el tiempo  $\Delta t$ , debe utilizarse un procedimiento de inicio especial. Como se conocen  ${}^0 U$ ,  ${}^0 \dot{U}$  y  ${}^0 \ddot{U}$  (observese que con  ${}^0 U$  y  ${}^0 \dot{U}$  conocidos, se puede calcular  ${}^0 \ddot{U}$  utilizando (4.1) en el tiempo 0), las relaciones en (4.4) y (4.3) pueden utilizarse para obtener  ${}^{-\Delta t} U$ ; es decir, tenemos

$${}^{-\Delta t} U_i = {}^0 U_i - \Delta t {}^0 \dot{U}_i + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0 \ddot{U}_i \quad (4.7)$$

donde el superíndice  $i$  indica el  $i$ -ésimo elemento del vector considerado.

Una tercera consideración muy importante en el uso del esquema de diferencia central es que el método de integración requiere que el paso temporal  $\Delta t$  sea más pequeño que un valor crítico,  $\Delta t_{\text{crítico}}$ , que puede calcularse a partir de las propiedades de masa y rigidez del conjunto de elementos completos. Para obtener una solución válida,

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crítico}} = \frac{T_n}{\pi} \quad (4.8)$$

donde  $T_n$  es el más pequeño periodo, dentro del modelo de elementos finitos con  $n$ -grados de libertad. Por lo tanto  $T_n$  puede determinarse calculando las frecuencia naturales y seleccionando la frecuencia mayor  $\omega_m$ , que nos permite obtener el periodo más pequeño,  $T_n = \frac{2\pi}{\omega_m}$ .

### 4.3. Implementación del algoritmo.

En resumen, el método de diferencia central utilizado en este trabajo puede ser descrito en la siguiente serie de pasos.

#### 1. Cálculos iniciales

- a) Obtener las matrices de rigidez  $[\mathbf{K}]$ , la matriz de inercia  $[\mathbf{M}]$  y la matriz de amortiguación  $[\mathbf{C}]$ .
- b) Iniciamos con  ${}^0 U$ ,  ${}^0 \dot{U}$ , y  ${}^0 \ddot{U}$

- c) Seleccionamos un paso de tiempo  $\Delta t$ , tal que  $\Delta t < \Delta t_{cr}$ , y calculamos las siguientes constantes de integración:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}; a_1 = \frac{1}{2\Delta t}; a_2 = 2a_0; a_3 = \frac{1}{a_2}$$

- d) Calcular un  ${}^{-\Delta t}\mathbf{U} = {}^0\mathbf{U} - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^0\ddot{\mathbf{U}}$   
 e) Calcular la matriz de masa efectiva  $\hat{\mathbf{M}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$

2. Para cada paso de tiempo:

- a) Calcular las fuerzas efectivas en el tiempo  $t$ .

$${}^t\hat{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{R} - (\mathbf{K} - a_2\mathbf{M}) {}^t\mathbf{U} - (a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}) {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}$$

- b) Resolver el sistema de ecuaciones para el desplazamiento en  $t + \Delta t$

$$\hat{\mathbf{M}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\hat{\mathbf{R}}$$

- c) Si es necesario, calcular la velocidad y aceleración en el tiempo “ $t$ ”:

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = a_0({}^{t-\Delta t}\mathbf{U} - 2{}^t\mathbf{U} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{U})$$

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = a_1(-{}^{t-\Delta t}\mathbf{U} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{U})$$

#### 4.4. Aplicación del método a un análisis dinámico no lineal.

Algunas fuerzas externas aplicadas sobre una correa transportadora como la fuerza motriz dependen del tiempo y de la curva de detención programada en la polea motriz, también las fuerzas de resistencia al movimiento varían dependiendo de la velocidad, según el modelo de roce dinámico y estático que se utilice. Por lo tanto tenemos fuerzas que varían no solo en el tiempo sino que dependen de la velocidad, estas fuerzas aportan unas relaciones no lineales en el sistema de ecuaciones.

La solución de un sistema de ecuaciones no lineal de un sistema de elementos finitos se obtiene, en esencia, utilizando el procedimiento ya discutido: el algoritmo de integración directa con el método de diferencia central, y así, como ya se ha presentado los principales pasos, simplemente se utilizan.

La integración explícita utilizada en las ecuaciones no lineales, es el método de diferencias centrales y de igual forma como en las ecuaciones lineales, el equilibrio del sistema de elementos finitos se considera en el tiempo “ $t$ ” para calcular los desplazamientos en el tiempo “ $t + \Delta t$ ”. Proponiendo un sistema de ecuaciones no lineal genérico con solo la matriz de inercia, la forma del sistema de ecuaciones es igual

un equilibrio de fuerzas en el tiempo “ $t$ ” en la sección derecha de la ecuación:

$$\mathbf{M}^t \ddot{\mathbf{U}} = {}^t \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} \quad (4.9)$$

donde  ${}^t \mathbf{F}$  es el vector de fuerzas nodales no lineales para el tiempo  $t$ . En su aplicación dentro de la construcción del modelo de correa transportadora, son estas fuerzas las que deben ser evaluadas en cada paso de tiempo “ $t + \Delta t$ ” según como estén definidas. Entonces la no linealidad en el caso de fuerzas no lineales solo agrega una nueva variable pero el algoritmo sigue siendo igual al descrito en la sección 4.3.

Para el sistema de ecuaciones no lineales se mantienen las restricciones en el tamaño del paso del tiempo  $\Delta t$  siempre y cuando  $[\mathbf{K}]$  y  $[\mathbf{M}]$  no dependan del tiempo, de lo contrario se tendría que recalcular el paso de tiempo crítico en cada paso de tiempo del algoritmo, que ya está definido y cumple la restricción de  $\Delta t < \frac{T_n}{\pi}$ . En el caso en que solo las fuerzas externas sean no lineales y las matrices  $[\mathbf{K}]$  y  $[\mathbf{M}]$  sean constantes, el tiempo crítico no cambia y se mantiene el paso de tiempo ya definido  $\Delta t$ .

## 5. Correa transportadora como un modelo de elementos finitos.

### 5.1. Construcción del modelo de elementos finitos.

Para ilustrar el procedimiento de construcción de un modelo de elementos finitos de una correa transportadora, consideremos una configuración general de correa transportadora como la mostrada en la figura 5.1, una correa donde se omite la existencia de curvas horizontales o verticales, así como la existencia de posibles poleas motrices secundarias o carros “trippers” distribuidores de carga. El sistema de correa transportadora mostrado consta de una correa, una polea motriz, una polea de cola, una polea tensora con un peso vertical, un número de polines y un soporte de placas (acesorio opcional que en el desarrollo siguiente no se considera).

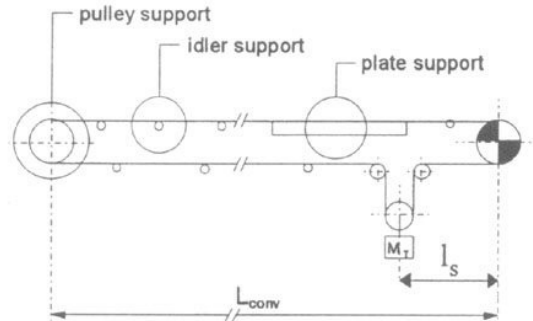


Figura 5.1: Geometría típica de una correa transportadora. Extraída desde [11].

Para una correa transportadora que cubre largas distancias, la longitud de la correa entre la polea motriz y la polea tensora  $L_s$ , es una cantidad pequeña en comparación a la longitud de la correa total  $2L_{con}$ . De acuerdo al trabajo de Lodewijks[11] es posible simplificar el sistema combinando la polea motriz y la polea tensora en la misma posición. Esas poleas pueden combinarse matemáticamente en una sola siempre y cuando se tenga en cuenta la inercia de ambas poleas en la polea combinada. Ver la Figura 5.2.

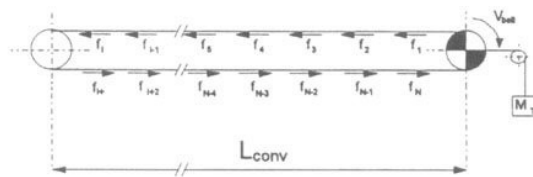


Figura 5.2: Combinación de la polea de tracción y de la polea tensora. Se muestra la distribución de fuerzas de resistencia al movimiento. Extraído desde [11].

Si el interés principal es la respuesta elástica longitudinal de la correa, entonces las fuerzas de resistencia al movimiento pueden representar el efecto de los elementos de soporte de la correa sobre la correa misma. Estas fuerzas deben incorporar a las fuerzas de resistencia al movimiento que actúan sobre

la correa, como la resistencia al movimiento por efecto de la indentación de los polines y otros fenómenos físicos. Estas fuerzas varían de un lugar a otro en función de las condiciones locales exactas y la geometría de la trayectoria de la cinta transportadora y, por tanto, se distribuyen a lo largo de la longitud de la correa (Figura 5.2).

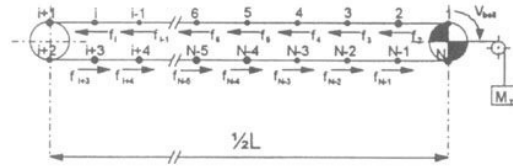


Figura 5.3: Correa dividida en elementos finitos. Figura extraída desde [11].

Para determinar con precisión la influencia de estas fuerzas distribuidas en el movimiento de la correa, ésta se divide en una serie de elementos finitos y las fuerzas que actúan sobre una sección específica del cinturón se asignan al elemento correspondiente sobre el que están aplicadas, como en la Figura 5.3, donde las poleas son reemplazadas por nodos y fuerzas puntuales en los nodos que representan a la polea.

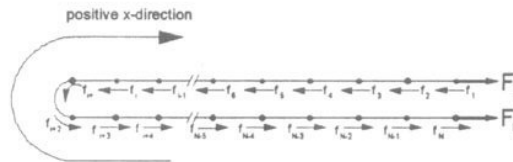


Figura 5.4: Sustitución de la interacción de la correa y sus soportes por fuerzas puntuales. Extraído desde [11].

Debido a que solo es de interés la respuesta elástica longitudinal de la correa, la correa no se discretiza en aquellos lugares donde la correa se apoya en una polea que determina su movimiento (donde la posibilidad de deslizamiento debe ser nula), por ejemplo, la polea motriz. La correa solo está discretizada en aquellos lugares donde está soportada por polines que no añaden energía al movimiento y aquellos sectores donde la correa está apoyada sobre poleas que pueden o no determinar su movimiento, esas secciones son modeladas dependiendo del tipo de polea y si existe en ella posibilidad de deslizamiento, por ejemplo, en el trabajo de Lodewijks[11] se supone deslizamiento en la polea de cola y por ello aparecen fuerzas puntuales en su lugar. Este tipo de discretización se muestra en la Figura 5.4. Las fuerzas asignadas a los puntos nodales alrededor de una polea de cola donde existe deslizamiento representan a las resistencias al movimiento propiamente tal y la inercia, siendo  $f_{i+1}$  y  $f_{i+2}$  en la Figura 5.4, respectivamente.

En la figura 5.4, entonces el último paso en la construcción del modelo es sustituir el sistema motriz y de tensión de la correa por dos fuerzas,  $F_1$  y  $F_N$ , que representan las características del sistema motriz y las fuerzas de tensión. Esas fuerzas de igual manera están sujetas a la relación de acople que tienen los nodos 1 y  $N$ . En la Figura 5.4 se indica la orientación de los elementos, lo que da lugar a la configuración de la Figura 5.5 cuando la correa se dispone a lo largo del eje  $x$ .

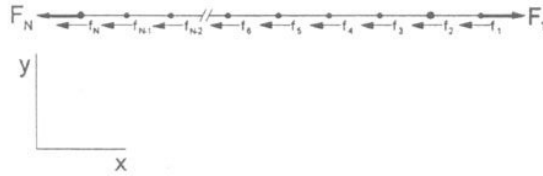


Figura 5.5: Correa unidimensional dispuesta en la dirección del eje x. Figura extraída desde [11].

La velocidad máxima de la correa es de unos 10 [m/s], mientras que la velocidad de propagación de las ondas de tensión longitudinales varían desde unos 1000 [m/s] para las correas de tela a unos 2500 [m/s] para las correas de caucho con cables de acero. Por lo tanto la influencia de la velocidad de la correa en la respuesta elástica axial de la correa es insignificante, esto justifica el uso de la perspectiva lagrangiana en los elementos finitos aún cuando la correa este en movimiento. Esto implica que todos los elementos y fuerzas que dan cuenta de la interacción de la correa y su estructura de soporte permanecen en su posición relativa a la estructura de soporte.

Es decir, la malla se asume en un sentido físico como fija, y los valores de desplazamientos de los nodos se asumen como parámetros y no representan el movimiento de la malla, esta diferencia entre mallas lagrangianas móviles y eulerianas fijas se puede ver mejor en la Figura 5.6. El valor de las fuerzas de resistencia al movimiento ubicadas en los nodos ubicados sobre los polines varían dependiendo de la velocidad local temporal de la correa sobre el polín, por lo tanto, el poder asumir la malla como fija en el espacio ayuda a simplificar el recálculo de estas fuerzas en cada instante  $t$ .

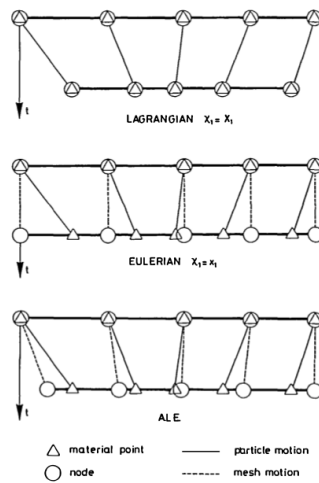


Figura 5.6: Arriba: Representación del sentido físico de una malla lagrangiana con sus nodos siguiendo el movimiento.  
Medio y Abajo: Representación de una malla euleriana que posee nodos fijos y una malla ALE que es mixta entre lagrangiana y euleriana.

Para explicar de mejor manera este punto clave en la simplificación del análisis de la correa en movimiento con elementos finitos, vemos en la Figura 5.6 diferentes mallas y sus sentidos físicos con respecto

a un cuerpo en movimiento. El sistema de ecuaciones se escribe siguiendo la perspectiva lagrangiana de nodos que siguen el movimiento del cuerpo, representada en la figura superior. Las figuras centrales e inferior representan una malla euleriana (de nodos fijos) y una malla ALE (que es mixta entre euleriana y lagrangiana, que no es usada en este trabajo). Las fuerzas puntuales que ejercen los polines sobre la correa se aplican viendo la malla como una malla fija esta forma simplificada de abordar una correa en movimiento es posible debido a la gran velocidad con la que viajan las ondas de tensión minimizando y considerando despreciables cualquier efecto de la velocidad de la correa sobre la distribución de tensiones.

## 5.2. Discretización espacial de la correa transportadora.

El modelo utilizado por Lodewijks[11] es el presentado en la Figura 5.2 el que es diferente con respecto al utilizado en este trabajo, el modelo aquí explicado es construido asumiendo que el deslizamiento no es deseable ni está presente en la polea motriz ni en la polea de cola, por lo tanto,(y como en secciones posteriores se mostrará) esas poleas pueden ser representadas por un único punto nodal en vez de discretizar la sección de correa que se apoya en esa polea. Un caso diferente es la polea tensora, que en este trabajo es una polea tensora de contrapeso, donde el deslizamiento de la correa sobre la polea también esta relacionada al movimiento vertical del contrapeso y a la tensión sobre la correa. Es la dificultad de representar estas variables acopladas en la polea tensora el principal motivo por el que en el modelo finito unidimensional de correa transportadora, la sección de correa apoyada en la polea transportadora no es discretizada de forma normal, y es reemplazada por dos fuerzas iguales aplicadas en los nodos que representan los extremos de la correa en contacto con la polea tensora. En nuestro modelo a construir, la polea motriz y la polea tensora no están combinadas y las fuerzas que representan a la polea tensora en variables.

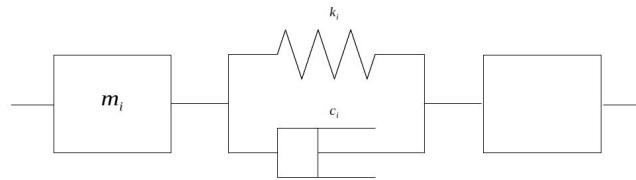


Figura 5.7: Componentes de cada elemento finito que representa a una sección de correa transportadora.

Cada segmento de la correa es modelado considerando el material de la correa como un material viscoelástico, modelado como un resorte y un amortiguador conectados en paralelo y una masa en serie, cada segmento entonces estará representado por una masa  $m_i$  que representa a la inercia, una constante de elasticidad  $k_i$  que representa el comportamiento elástico y una constante de amortiguación  $c_i$  que representa la disipación de energía. Ver Figura 5.7.

Las poleas presentes en la correa transportadora pueden ser modeladas de forma separada o combinada, dependiendo de que tan preciso o sencillo se quiera construir el modelo, sin embargo, las bases de como incorporar las poleas y su movimiento en el modelo se explican en la siguiente sección.

### 5.3. Poleas.

Las poleas son modeladas con elementos finitos tipo barras unidimensionales como se muestra en la Figura 5.8. El elemento que representa a la polea tiene tres puntos nodales  $p$ ,  $q$  y  $r$ , los puntos  $q$  y  $r$  son compartidos con dos elementos barras y el punto “ $p$ ” puede ser compartido con algún elemento de torsión.

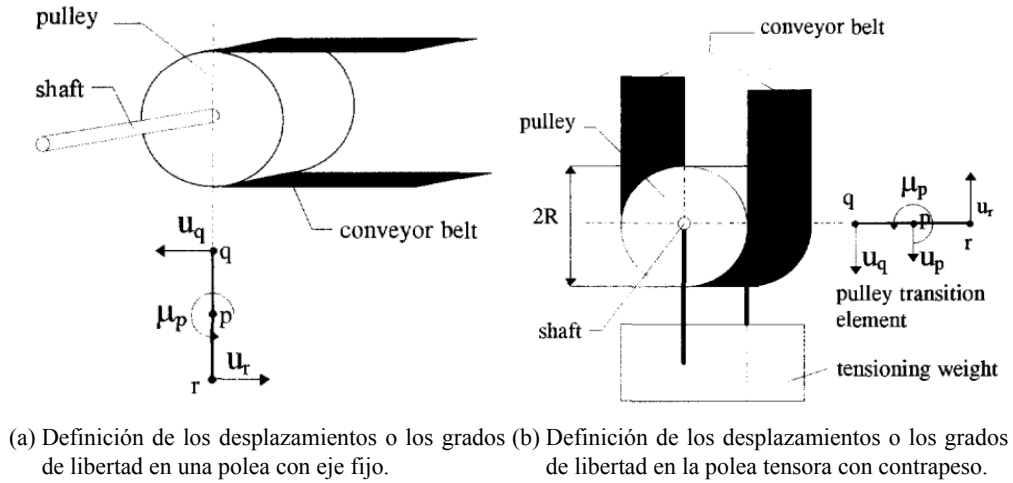


Figura 5.8: El modelo de poleas con elementos finitos.

**Poleas Fijas.** Si el eje de la polea está fijo a una estructura de soporte (como en la Figura 5.8a) entonces el elemento finito que la representa solo puede tener tres parámetros de desplazamientos,  $\mu_p$ ,  $u_q$  y  $u_r$ , estas variables representan la rotación de la polea y el desplazamiento de los extremos de la correa cercanos a la polea, respectivamente. La polea solo tener movimiento de rotación, lo que queda expresado en las dos ecuaciones siguientes.

La primera ecuación describe la rotación relativa entre el eje de la polea y la superficie de la polea como

$$\mu_{\text{rotación relativa}} = \mu_p - \frac{u_q + u_r}{2R}$$

siendo  $R$  el radio de la polea. En este modelo, se asume que eje y polea, ambas están unidas rígidamente, por lo tanto su movimiento es sincronizado e igual, de esto se extrae que la rotación relativa del eje de la polea con respecto a la superficie de la polea se considera cero,  $\mu_{\text{rotación relativa}} = 0$  y en consecuencia:

$$\mu_p - \frac{u_q + u_r}{2R} = 0 \quad (5.1)$$

reordenando esta ecuación queda

$$d_p = \frac{u_q + u_r}{2} \quad (5.2)$$

donde  $d_p = \mu_p \cdot R$  es el desplazamiento tangencial, una variable que expresa la longitud desplazada,

mucho más práctica de manejar que la variable  $\mu_p$  expresada en radianes y mide un ángulo de desplazamiento.

La segunda ecuación describe el movimiento relativo (deslizamiento) entre los extremos superior e inferior de la correa

$$d_{\text{deslizamiento}} = \frac{u_q - u_r}{2}$$

Como el movimiento de la correa a través de la polea está gobernado por la rotación de la polea, al asumir un deslizamiento inexistente o despreciable, con  $d_{\text{deslizamiento}} = 0$ , la ecuación entonces queda:

$$\frac{u_q - u_r}{2} = 0 \quad (5.3)$$

que representa una polea ideal donde no existe deslizamiento entre la correa y la superficie de la polea.

**Polea No Fija.** Si el eje de la polea puede moverse lateralmente, entonces el elemento finito que representa a la polea tiene cuatro parámetros de desplazamiento  $\mu_p$ ,  $u_q$ ,  $u_r$  y  $u_p$  (ver Figura 5.8b). Como la polea puede tener dos movimientos: rotación y traslación, el movimiento de la polea puede ser descrito con las dos siguientes ecuaciones.

El desplazamiento por rotación de la polea es descrita con la ecuación (5.2) anterior:

$$d_p = \frac{u_q + u_r}{2}$$

La otra ecuación describe la relación entre el movimiento lateral  $u_p$  del centro de la polea y los desplazamientos de los extremos de la correa en contacto con la polea:

$$u_p = \frac{u_q - u_r}{2} \quad (5.4)$$

donde queda expresado que todo deslizamiento de los extremos de la correa determina el movimiento lateral de la correa.

Una vez ya definidas las diferentes formas de modelar las poleas ya sean fijas o móviles, se detalla a continuación el como se modelan las diferentes poleas presentes en una correa transportadora, utilizando las ecuaciones ya descritas previamente.

### 5.3.1. Polea Motriz.

La polea motriz se modela como una polea fija, donde no existe deslizamiento, por lo tanto, desde (5.3) obtenemos  $u_q = u_r$  y se sabe que la polea puede modelarse como un único nodo, que conecta los dos extremos de la correa.

El apartado electromecánico acoplado a la polea motriz, se aborda de forma simplificada. A pesar de que las características del motor y los sistemas de control instalados tienen influencia en las curvas de velocidad y torque aplicados por la polea motriz sobre la correa, se asume que el sistema motriz posee el suministro de energía, los dispositivos de control y el tipo de equipo suficiente como para controlar a voluntad la velocidad y torque presentes en la polea de cabeza. Por lo tanto, sobre el nodo que representa la polea motriz, la potencia entregada por el motor viene a estar representada por una fuerza motriz  $F_d$  cuya magnitud se relaciona con el torque entregado por el motor. En los casos en donde la potencia aplicada a la correa debe seguir una curva predefinida de velocidad, para representar una condición de detención controlada y el nodo que representa a la polea motriz se mueve siguiendo la curva de velocidad predefinida, se modifica el sistema de ecuaciones discretas transformándolo en un sistema de ecuaciones semidiscretas, como ya se vio en la sección 3.10.

### 5.3.2. Polea de Cola.

La polea de cola está instalada en una posición fija, por lo tanto debe ser analizada como una polea fija, también se añade la suposición de que en esta polea el deslizamiento es cero o despreciable, porque el deslizamiento en las poleas es algo indeseable que puede provocar daños en la correa si el deslizamiento es muy grande. Por lo tanto, desde la ecuación (5.3) se entiende que el desplazamiento de los extremos de la correa (como los de la Figura 5.8a) es el mismo  $u_q = u_r$ , por lo tanto, la polea puede ser representada por un único nodo que represente el desplazamiento de los extremos de la correa.

### 5.3.3. Polea Tensora.

La polea tensora es una polea que no está fija a ningún eje fijo porque está unida a la masa de contrapeso que sirve para tensar la correa, como se puede ver en la Figura 5.8b, por lo tanto debe ser analizada como una polea móvil.

Al ser una polea móvil, puede desplazarse verticalmente siguiendo la ecuación 5.4 donde se puede ver que el desplazamiento vertical aparece cuando  $u_q \neq u_r$  por lo tanto el deslizamiento de la correa está relacionado al desplazamiento de la polea y es esta particularidad la que hace difícil discretizar la sección de la correa que se apoya en la polea tensora. Es este desacople entre los desplazamientos  $u_q$  y  $u_r$  el que hace que en esos puntos terminen transformados en la frontera o borde del elemento finito, al momento de desplegar la correa en el eje x en la Figura 5.5. Al ser el desplazamiento de esos nodos desconocido, pero no así las fuerzas aplicadas en los extremos de la correa cercanos a la polea tensora, la condición de borde del sistema es una condición  $\Gamma_t$  según lo visto en la sección 3.4.

## 5.4. Correa.

La naturaleza del material de la correa en el eje longitudinal es complejo de abordar, la fidelidad de la representación del comportamiento de la correa depende del modelo utilizado, en este trabajo se modela la correa como un material visco-elástico lineal, siguiendo el trabajo de Nordell[15].

En este trabajo, se asume que el material de la correa tiene un comportamiento visco-elástico lineal aún cuando se desconocen datos experimentales concretos sobre el comportamiento de cada tipo de correa que nos permita plantear un modelo con sus respectivos coeficientes de forma exacta. Según el trabajo de Pascual[17] las fuerzas de amortiguación reducen en 4% los picos máximos de tensión en la correa, pero desde los trabajos de Nordell[15] se sabe que las constantes de amortiguación influyen en predecir correctamente en instante de tiempo y magnitud los picos o valles de tensión.

La elasticidad de la correa no es uniforme tiene diferentes capas que le entregan diferentes propiedades, la capa central de caucho reforzado con cables de acero es la principal capa y la que tiene mayor influencia en el componente elástico de la correa, sin embargo, obtener el modulo de Young  $E$  representativo de la correa en su totalidad de capas requiere de obtener su valor desde la hoja técnica entregada por el fabricante o por ensayos en laboratorio. Dentro de los datos de elasticidad entregados por los fabricantes el más importante es el modulo de elasticidad  $E^*$  en unidades  $[N/mm]$ , dicho modulo de elasticidad modificado  $E^*$  y a veces llamado Modulo de Elasticidad efectiva, es equivalente al modulo de Young  $E_b$  multiplicado por una longitud representativa del espesor de la correa.

## 5.5. Polines.

Las fuerzas de resistencia al movimiento por indentación son la principal fuerza que se opone al movimiento de las correas transportadoras. El cómo calcular la magnitud de dichas fuerza es algo que se ha discutido en la sección 2.5, sin embargo, las fuerzas de resistencias por indentación son fuerzas de roce dinámico, es decir, son válidas mientras la correa esté en movimiento con una velocidad  $V$  mayor a cero, pero la naturaleza de las fuerzas de roce cambia cuando la velocidad de la correa se acerca a cero lo que requiere un modelo de roce que aborde las transiciones desde el roce dinámico al estático.

En el presente trabajo las fuerzas de roce se modelan de un modo simple, como ya se explico en la sección 2.5 se establece un factor de resistencia constante, por lo tanto la magnitud de la fuerza es conocida y su sentido igual porqué siempre será contrario al sentido del movimiento. El problema de modelar las fuerzas de roce aparece para velocidades cercanas a cero porque las fuerzas de roce aumentan a medida que disminuye la velocidad, sin embargo, agregar una fuerza de resistencia demasiado grande en el nodo que representa al polín a velocidades muy bajas puede provocar que la fuerza aplicada termine acelerando la correa en vez de frenarla y siendo incoherente con el sentido físico de la fuerza de roce de disipación de energía. Debido a que carecemos de un modelo perfecto de roce que represente la relación de la correa y el polín a bajas velocidades se establece de modo arbitrario que cuando la velocidad de la correa sea menor a 0,1 [m/s] sobre el polín, entonces la naturaleza del roce es la del roce estático.

La correa se discretiza espacialmente de tal manera que se colocan los nodos siempre en las zonas donde la correa está en contacto con los polines para poder representar de mejor manera la distribución de fuerzas ubicando las fuerzas de resistencia al movimiento en los nodos ubicados sobre los polines, y de igual manera dichas fuerzas de resistencia van a variar dependiendo de la velocidad en aquel mismo nodo que representa la zona donde la correa está en contacto con los polín. Así se obtiene una mejor representación de la distribución de las fuerzas y se puede aproximar de mejor manera las zonas donde ocurren los picos de sobretensión o de tensión peligrosamente baja.

## 5.6. Determinación de la fuerzas de resistencia al movimiento.

Las fuerzas de resistencia en cada estación de polines se calculan de acuerdo a la norma DIN 22101, adaptándola debido a que dentro del sistema de ecuaciones que representa al modelo, es el término  $\mathbf{f}^{ext}$  en la ecuación 3.40 el que contiene a las fuerzas externas puntuales aplicadas sobre los nodos ubicados sobre cada estación de polines, por lo tanto, los componentes de la fuerza de resistencia que corresponden por su naturaleza a fuerzas de cuerpo, van en el término  $\mathbf{f}_{cuerpo}$ .

En la norma DIN22101 la fuerza de resistencia al movimiento  $F_C$  es descompuesta en 4 categorías y la suma de esos 4 tipos de resistencia es igual al total de fuerza externa aplicada por el polín sobre la correa.

$$F_C = F_H + F_N + F_{st} + F_s \quad (5.5)$$

- $F_H$  es la resistencia principal
- $F_N$  es la resistencia secundaria
- $F_{st}$  es la resistencia debido a la elevación de carga
- $F_s$  es la resistencia de casos especiales (que se omite en este trabajo)

### 5.6.1. Resistencia principal.

La resistencia principal se obtiene luego de conocer la fricción asociada principalmente con la resistencia debido a la indentación de la correa y la resistencia a la flexión de la correa (deformación debido a la deflexión). Las resistencias principales son determinadas de forma separada para cada sección de correa y cada estación de polines en las secciones del lado carga y del lado retorno de la correa. La fuerza de resistencia principal  $F_H$  a su vez se descompone en  $F_{H,o}$  la fuerza de resistencia primaria para el lado de carga y  $F_{H,u}$ , la fuerza de resistencia primaria para el lado retorno.

Para valores normales de resistencia a la flexión, la suma de la fuerza resistencia al movimiento de las estaciones de polines y la fuerza de resistencia al movimiento por indentación de la correa en el lado

carga genera entre un 50 % y 85 % ( con un promedio de 70 % ) de la resistencia primaria  $F_{H,o}$  del lado carga para una relación de carga de la correa  $\varphi$  que está dentro del rango de 0,7 y 1,1 (70 % o 110 % de la capacidad). La suma de esas fuerzas de resistencia forman parte de un 90 % de la fuerza de resistencia primaria en el lado retorno  $F_{H,u}$ . Por esto mismo, las fuerzas de resistencia  $F_{H,o}$  y  $F_{H,u}$  se obtienen a través de las siguientes relaciones:

$$F_{H,o} = \frac{1}{q_o} \cdot (F_{R,o} + F_{E,o}) \quad (5.6)$$

$$F_{H,u} = \frac{1}{q_u} \cdot (F_{R,u} + F_{E,u}) \quad (5.7)$$

donde  $F_R$  es la fuerza de resistencia al movimiento de los polines y  $F_E$  es la fuerza de resistencia debido a la indentación de la correa, ambas fuerzas se pueden determinar a partir de la siguiente ecuación (5.8). Los subíndices  $o$  y  $u$  solo señalan la posición de esas fuerzas en el lado carga o lado retorno, respectivamente.

$$F_{R+E} = F_R + F_E = f \cdot F_z \quad (5.8)$$

donde  $F_{R+E}$  es la fuerza de resistencia debido a la resistencia propia de los polines y también la debida a la indentación de la correa y  $F_z$  es la fuerza vertical soportada por una estación de polines y  $f$  es un factor de fricción.

La fuerza vertical  $F_z$  para una sección de correa de largo  $l_e$  con una inclinación en un ángulo  $\theta$  entonces es

$$F_z = (m'_{\text{correa}} + m'_{\text{carga material}}) \cdot l_e \cdot g \cdot \cos(\theta) \quad (5.9)$$

donde  $m'_{\text{correa}}$  y  $m'_{\text{carga material}}$  es la masa por unidad de largo, de la correa y del material cargado, respectivamente. Siendo la ecuación 5.9 aplicada según las condiciones de cada sección de correa, por ejemplo,  $m'_{\text{cargamaterial}}$  se considera solo en el cálculo de  $F_z$  en el lado carga, porque en el lado retorno la correa viaja sin carga.

Un punto importante a aclarar es el siguiente, en la ecuación (5.8), el factor de resistencia  $f$  estudiada en las sección 2, tiene un valor que se conoce desde la sección 2.5, y es el recomendado por la norma DIN22101,  $f = 0,02$  para ambos lados, el de carga y retorno, pero, este factor de resistencia incluye no solo los efectos de la indentación de la correa sino además el de la resistencia al movimiento propia de los polines.

### 5.6.2. Resistencia secundaria.

Las resistencias secundarias incluyen las fricciones e inercias que solo existen en ciertas porciones de la correa transportadora. Estas resistencias son calculadas desde diferentes elementos e incluyen pérdidas por fricción debido a la resistencia al movimiento de los bordes de la correa (al cerrar y abrir la artesa de la sección transversal según el movimiento) la resistencia de la carga a dicho movimiento de los bordes, la aceleración inercial del material, la resistencia ejercida de limpiadores.

La norma DIN22101 especifica como calcular las resistencias secundarias, entregando unas guías generales para estimar las resistencias secundarias totales en una correa transportadora típica.

Si el porcentaje de las resistencias secundarias en la resistencia total es pequeña, por ejemplo, si el largo entre centros de una correa es mayor a 80 [m] ( $L_c > 80$  [m]) y la correa tiene solo un punto de alimentación, una aproximación de las fuerzas de resistencia secundarias  $F_R$  desde las resistencias primarias  $F_H$  y se obtienen usando un coeficiente  $C$  de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$F_N = (C - 1) \cdot F_H \quad (5.10)$$

el valor de  $C$  se obtiene desde una tabla, ver tabla 5.1, entregada por la norma DIN22101 y donde está relacionada al largo entre centros  $L_c$ .

Tabla 5.1: Valores de  $C$  según el largo entre centros  $L_c$ .

$L_c$ en [m]	80	100	150	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1500	2000
$C$	1,92	1,78	1,58	1,45	1,31	1,25	1,20	1,17	1,14	1,12	1,10	1,09	1,06	1,05

### 5.6.3. Resistencia debido a la elevación de carga

La resistencia  $F_{st}$  es simplemente la fuerza que se opone al movimiento asociada con la gravedad y con cualquier elevación de carga (o cambio de altura) a lo largo de la correa. Esta resistencia debido a la elevación puede ser calculada, según la norma DIN22101 para cada segmento de correa como:

$$F_{st} = (m'_{\text{correa}} + m'_{\text{carga material}}) \cdot g \cdot H \quad (5.11)$$

siendo  $H$  la elevación o cambio de altura en la correa, para un segmento de correa de largo  $l_e$ ,  $H = l_e \cdot \sin(\theta)$ .

Debido a la naturaleza de esta fuerza, como fuerza de cuerpo, en el sistema de ecuaciones 3.40 se incorpora dentro del término  $f_{\text{cuerpo}}$ .

## 6. Modelo de correa horizontal con un procedimiento de parada con velocidad controlada.

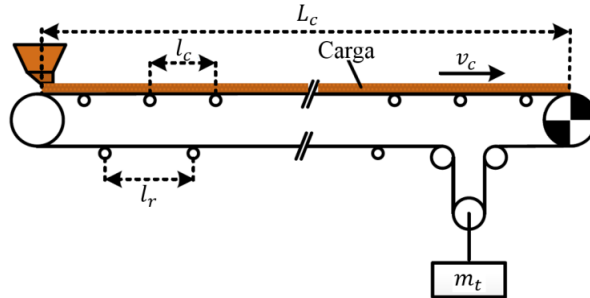


Figura 6.1: Correa transportadora horizontal.

En la presente sección se utiliza el modelo ya descrito anteriormente para analizar una correa transportadora horizontal bastante simple, omitiendo la existencia de curvas horizontales o verticales, así como la existencia de posibles poleas motrices secundarias o carros “trippers” distribuidores de carga. Nuestro objetivo será explicar a través del estudio de una correa simple el como están modeladas diferentes partes de la correas.

Se plantea entonces simular una correa horizontal en movimiento estacionario, con velocidad uniforme y que inicia un proceso de detención controlada, siguiendo una curva suave (no-abrupta) de detención evitando alcanzar picos de aceleración muy altos, buscando detener la correa en la polea motriz en 30 segundos, desde la velocidad de operación hasta cero. Los resultados entregados por el modelo nos mostrarán la variación de tensión en la correa, recordando que el objetivo de proponer una detención controlada es mantener la tensión a lo largo de la correa dentro de unos márgenes de seguridad, evitando dos fenómenos perjudiciales: que la tensión sea cero o menor a cero, porque esto significaría que la correa deja caer todo el material cargado y abandona su posición alineada sobre los polines comprometiendo la seguridad operacional. El otro fenómeno a evitar es la sobretensión en alguna sección de la correa que la desgare y la rompa en 2 secciones.

El significado preciso de “un procedimiento de parada con velocidad controlada” es algo ya descrito en el trabajo de Harrison[6] y se refiere a que la polea motriz sigue una curva de velocidad predefinida y diseñada para no tener picos de aceleración( ver la Figura 6.2). La curva de velocidad recomendada es:

$$V(t) = \frac{V_b}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi t}{T_a} \right) \right) \quad (6.1)$$

donde  $V_b$  es la velocidad de la correa en estado estacionario, y que se reduce a cero en un intervalo de tiempo  $T_a$ . La curva de velocidad es entonces conocida y desde ella se puede obtener la aceleración, y el

desplazamiento del nodo que representa la polea motriz.

$$\bar{a}(t) = \frac{V_b}{2} \left( -\frac{\pi}{T_a} \sin \left( \frac{\pi t}{T_a} \right) \right) \quad (6.2)$$

$$\bar{d}(t) = \frac{V_b}{2} \left( t + \frac{T_a}{\pi} \sin \left( \frac{\pi t}{T_a} \right) \right) + d_{\text{cero}} \quad (6.3)$$

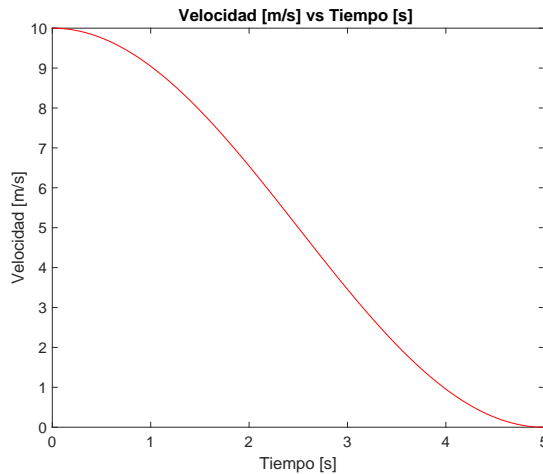


Figura 6.2: Curva de detención controlada recomendada en el trabajo de Harrison con un valor de  $V_b$  de 10 [m/s] y un  $T_a$  de 5 [s].

Por lo tanto, es fácil notar que la situación de correa transportadora con una parada controlada es equivalente a incorporar en el sistema de ecuaciones que representa el modelo de elementos finitos una condición de frontera donde el movimiento de un nodo es conocido. El desarrollo de las ecuaciones para ese tipo de frontera ya fue descrita en la sección 3.10 y solo basta aplicarla al caso presente.

## 6.1. Descripción de la correa transportadora.

Las principales características de la correa a modelar son extraídas desde el trabajo de Cerda[3], donde de igual manera se busca modelar una correa transportadora pequeña, una distancia entre centros de un kilómetro y diseñada usando la norma DIN22101. Los parámetros de diseño y operación son presentados en la Tabla 6.1 y son utilizados para plantear las matrices elementales de inercia y de rigidez del sistema de elementos finitos. Los parámetros operacionales más importantes: el largo entre centros  $L_c$ , la capacidad nominal de transporte de la correa  $Q_n$ , y las características del material a transportar, (especificados en la Tabla 6.3) sirven para ingresar a la Norma DIN 22101 y obtener los demás parámetros de operación como la velocidad de correa  $V_c$ , así como la distancia entre los polines del lado carga  $L_{\text{carga}}$  y retorno  $L_{\text{retorno}}$ , entre otros.

Para representar el comportamiento de la correa es necesario definir sus matrices elementales de inercia, rigidez y amortiguamiento. En ambos lados de la correa, superior e inferior, la masa de la correa

Tabla 6.1: Tabla descriptiva de todos los parámetros que describen a la correa transportadora. Correa planteada como modelo de prueba. Valor del factor de amortiguación  $\xi$  obtenido desde el programa “BeltAnalyst” v.20

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidades
Distancia entre centros	$L_c$	1.000	[m]
Capacidad Nominal	$Q_n$	1.996	[t/h]
Velocidad nominal de la correa	$V_c$	5,2	[m/s]
Tipo de correa		Norma ISO	[-]
Descripción Correa		3/EP750	[-]
Masa por unidad de largo de la correa, sin considerar la carga	$m'_{correa}$	25,7	[Kg/m]
Modulo de elasticidad representativo de la correa.	$E_b$	–	[MPa]
Modulo de elasticidad multiplicada por [m] de espesor.	$E^*$	8,663	[MPa · m]
Modulo $E^*$ entregado por el programa Belt Analyst, Anexo F	$E^*$	8.663,0	[N/mm]
1 [N/mm] = $10^3$ [N/m] = $10^3$ [Pa · m]		$8663 \cdot 10^3$	[Pa · m]
Ancho de la correa.	$B$	1,2	[m]
Peso soportado sobre cada polín de soporte, lado carga.	$F_{z_{carga}}$	1978	[N]
Peso soportado sobre cada polín de soporte, lado retorno.	$F_{z_{retorno}}$	769	[N]
Factor de amortiguación.	$\xi$	0,841	[-]

por unidad de largo es la misma,  $m'_{correa}$ , lo que nos permite expresar la matriz elemental de inercia como:

$$M_{e_{correa}} = \frac{m'_{correa} \cdot l_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

donde  $l_e$  es el largo del elemento y  $m'_{correa}$  es la masa por unidad de largo de la correa. El largo  $l_e$  varía dependiendo si el elemento finito está ubicado en el lado carga o en el lado retorno. De acuerdo a lo ya descrito en la sección 5.5, para poder representar correctamente la influencia de las fuerzas de resistencia al movimiento aplicadas por los polines, la correa se discretiza de tal manera que los nodos de los elementos finitos siempre estén ubicados sobre las estaciones de polines, por lo tanto, el largo de cada elemento está determinada por la distancia entre polines que varían según estén en el lado carga o en el lado retorno. El valor de  $l_e$  es  $L_{carga}$  o  $L_{retorno}$  según sea el caso.

La correa transportadora entonces es discretizada tal como muestran las figuras 6.3 y 6.4, siguiendo los valores de la tabla 6.2, donde se puede la posición de las poleas.

La tabla 6.2 nos muestra la distancia entre polines según el lado de la correa, y el valor de las variables que quedan determinadas por esos valores. Queda determinado entonces el número de elementos finitos a utilizar para modelar la correa transportadora, así como el número de nodos, o grados de libertad del sistema. Estamos hablando entonces de resolver sistemas de ecuaciones con matrices globales del tamaño de  $n_n$  filas por  $n_n$  columnas, para poder simplificar el cálculo en cada iteración del algoritmo, la matriz de inercia elemental se simplifica y la masa de un elemento finito se agrupa solo en la diagonal de la matriz, es decir en los nodos del elemento.

En la ecuación (6.4) se puede ver que la masa del elemento se concentra cada mitad en los nodos, buscando que la matriz global de inercia sea diagonal para simplificar el cálculo de la solución en cada

Tabla 6.2: Datos sobre la discretización espacial de la correa.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidad
Distancia entre centros	$L_c$	1000	[m]
Distancia entre polines, lado carga	$L_{carga}$	1,52	[m]
número de estaciones de polines, lado carga	$n_{carga}$	656	[-]
Distancia entre polines, lado retorno	$L_{retorno}$	3,05	[m]
número de estaciones de polines, lado retorno	$n_{retorno}$	326	[-]
número de elementos totales	$n_e$	986	[-]
número de nodos totales	$n_n$	987	[-]
ubicación nodo polea motriz	$n_{motriz}$	985	[-]
ubicación nodo polea cola	$n_{cola}$	328	[-]
ubicación nodos polea tensora		1 y $n_n$	[-]
número elemento previo a la polea motriz		984	[-]
número elemento posterior polea de cola		328	[-]
número elemento previo a la polea tensora		$n_e$	[-]

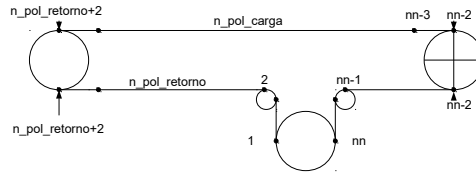


Figura 6.3: Discretización de la correa transportadora de la Figura 6.7, donde se muestra la numeración de los nodos ubicados sobre las poleas de interés.

iteración del método explícito de diferencia central descrito en la sección 4.2.1.

Para representar el comportamiento elástico de la correa, la matriz elemental de rigidez tiene la forma:

$$K_e = \frac{E^* \cdot B}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

siendo  $E^*$  el modulo de elasticidad por  $[m]$  de espesor ( $E^*$  en unidades  $[Pa \cdot m]$ ) también llamado en la bibliografía revisada, modulo de elasticidad efectivo. El ancho de la correa  $B$  en  $[m]$  y  $l_e$  el largo del elemento, en  $[m]$ . Así, los elementos de la matriz de rigidez  $K_e$  quedan en unidades  $[Pa \cdot m]$  o su equivalente  $[\frac{N}{m}]$ .

En el trabajo de Pascual[17] también se considera razonable usar un factor de amortiguamiento de 0,4, sin embargo, el valor de  $\xi$  se define en este trabajo dependiendo del material y tipo de la correa, por

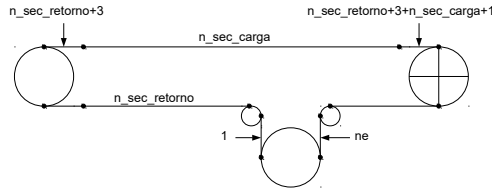


Figura 6.4: Discretización de la correa transportadora de la Figura 6.7, donde se muestra la numeración de los elementos y la numeración de algunas secciones de interés.

lo tanto, si  $\xi = \frac{c}{c_{\text{critico}}}$  es conocido y  $c_{\text{critico}}$  es equivalente a:

$$c_{\text{critico}} = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$$

para cada elemento finito el parámetro de amortiguamiento  $c_{\text{elemento}}$  es

$$c_{\text{elemento}} = \xi \cdot c_{\text{critico}} = \xi \cdot 2 \cdot \sqrt{k_{\text{elemento}} \cdot m_{\text{elemento}}}$$

y la matriz elemental de amortiguamiento  $C_e$  para un material considerado como lineal viscoelástico puede ser escrito como:

$$C_e = c_{\text{elemento}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

que será calculado y ensamblado para cada elemento finito y así formar la matriz global de amortiguación.

Los programas comerciales de simulación de correas transportadoras definen el valor de  $\xi$  de forma automática dependiendo del tipo de correa y parámetros operacionales.

### 6.1.1. Descripción de una correa cargada.

La matriz elemental de inercia de cada elemento finito no sólo debe incorporar la inercia de la correa,  $M_{e_{\text{correa}}}$ , sino también la inercia del material cargado sobre la correa, además de la inercia de las poleas y polines cuya acumulación de energía cinética es relevante cuando la correa está en movimiento. Una descripción general de como está compuesta una matriz elemental de inercia de una sección de correa ubicada en el lado carga:

$$M_{e_{\text{lado carga}}} = M_{e_{\text{correa}}} + M_{e_{\text{carga}}} + M_{e_{\text{polines}}} + M_{e_{\text{polea}}} \quad (6.7)$$

siendo  $M_{e_{correa}}$  la matriz de inercia de la correa ya descrita en la ecuación (6.4),  $M_{e_{carga}}$  la inercia del material transportado además del aporte a la matriz de inercia de las poleas y polines se verán de forma más detallada en la sección 6.2.

La matriz elemental de inercia de un elemento finito ubicado en el lado retorno de la correa estará compuesto por

$$M_{e_{lado\ retorno}} = M_{e_{correa}} + M_{e_{polines}} + M_{e_{polea}} \quad (6.8)$$

donde debido a que la correa en el lado retorno circula ya habiendo descargado el material, el componente  $M_{e_{carga}}$  no existe.

Entonces para describir correctamente a una correa cargada es necesario conocer el material transportado por la correa, que en el caso presentado en esta sección es carbón, y sus características como material sólido a granel están descritas en la Tabla 6.3. Dichos parámetros nos sirven para obtener la masa por unidad de largo del material transportado,  $m'_{carga}$ , esta variable es necesaria para representar a la masa sobre la correa dentro del modelo de elementos finitos unidimensionales. Esta cantidad se debe incorporar a las matrices elementales de inercia de todos los elementos finitos que representan el lado superior (de carga) de la correa transportadora si es que queremos representar a una correa cargada.

Tabla 6.3: Características del material transportado.

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidades
Densidad del mineral de carbón	$\rho_m$	850	[Kg/m <sup>3</sup> ]
Ángulo de sobrecarga	$\phi_s$	20°	ángulo sexagesimal
Área de la sección transversal de la carga sobre la correa	$A_m$	0,125	[m <sup>2</sup> ]
Masa por unidad de largo	$m'_{carga}$	106,25	[Kg/m]

La matriz elemental de inercia que representa a la inercia del material cargado es:

$$M_{e_{carga}} = \frac{m'_{carga} \cdot l_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

donde  $m'_{carga}$  es la masa por unidad de largo del material sobre la correa. Este componente de la matriz de inercia sólo está presente en las secciones de la correa ubicados en el lado de carga de la correa.

## 6.2. Descripción de polines.

Para incorporar la inercia de un polín que gira, la masa que está en rotación es reducida a una masa equivalente ubicada a un radio “ $r$ ” del eje y ubicada en la correa. La masa reducida de un polín debe ser calculada e incorporada como un parámetro de entrada en el programa de simulación.

$$m'_{polín} = \frac{I_{polín}}{R_{pln}^2} \quad (6.10)$$

siendo  $m'_{polin}$  la masa reducida del polín, " $R_{plin}^2$ " el radio externo del polín y " $I_{polin}$ " la inercia del polín con respecto a su eje central. La ecuación (6.10) es usada indistintamente para obtener la masa equivalente reducida tanto en el lado carga como en lado retorno.

La inercia de la estación de polines en el lado carga de la correa es muy diferente a la del lado retorno, en el lado carga no solo la correa está cargada con el material a transportar sino que también está soportado por estaciones de polines compuesta por 3 polines; dos polines laterales ubicados uno en cada lado en un ángulo de 45° y un polín inferior en horizontal para formar la geometría de la artesa. Sin embargo, el lado de retorno de la correa, no lleva carga y solo está soportado por estaciones de polines formada por 2 polines formando un canal en V. Por lo tanto, la inercia que aportan los polines será distinta según que lado de la correa se modela. Los datos que representan a estas estaciones de polines se presentan a continuación:

Tabla 6.4: Datos de los polines de carga. Los datos entregados por el programa comercial "Belt Analyst" desde su base de datos de polines.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidad
número de polines por estación	$n_{pc}$	3	[-]
Masa reducida de un único polín	$m_{pc}$		[Kg]
Masa equivalente polines lado carga	$m_c$	45,9	[Kg]

Tabla 6.5: Datos de los polines de retorno. Los datos entregados por el programa comercial "Belt Analyst" desde su base de datos de polines.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidad
número de polines por estación	$n_{pr}$	2	[-]
Masa reducida de un único polín	$m_{pr}$		[Kg]
Masa equivalente polines lado retorno	$m_r$	40,8	[Kg]

Entonces, el aporte a la matriz elemental de inercia de cada elemento finito de parte de la inercia de los polines, se distribuye a nivel de matrices globales concentrando la masa equivalente de la estación completa en cada nodo ubicado sobre ella, a nivel de elementos finito la mitad de la masa equivalente de la estación de polines se distribuye en cada elemento en contacto con el nodo en contacto con la estación. El valor de la masa equivalente a distribuir depende de si la estación de polines está ubicado en el lado carga o el lado retorno, la masa equivalente en el lado carga es  $m_c$ , cuyo valor se muestra en la tabla 6.4. Si está ubicado en el lado retorno, la de masa equivalente es  $m_r$ , cuyo valor igualmente está en la tabla 6.5.

Para un elemento finito que en cada uno de sus extremos está en contacto con una estación de polines diferente, la matriz elemental de masa  $M_{e_{polin}}$  tendrá la forma:

$$M_{e_{polin}} = \begin{bmatrix} \frac{m_{\{c,r\}}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m_{\{c,r\}}}{2} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

donde  $m_{\{c,r\}}$  puede ser  $m_c$  o  $m_r$  según la posición del elemento finito ya sea en el lado carga o en el lado retorno respectivamente.

### 6.3. Descripción de las fuerzas de cuerpo.

Debido a que la correa a modelar tiene una orientación horizontal a lo largo de todo su recorrido como se ve en la Figura 6.1, la fuerza de gravedad, única fuerza de cuerpo a considerar en la correa no tiene ninguna influencia en su comportamiento debido a que a lo largo de la correa no existe ninguna pendiente que permita a esta fuerza influir en el movimiento horizontal de la polea, dejando sentir sus efectos solo en el plano vertical. Entonces la fuerza de gravedad esta compuesta por el peso de la correa y el peso del material transportado por la correa, siendo ese peso soportado por las estaciones de polines, y cuya influencia sobre las fuerzas de resistencia ya esta incorporada en el sistema de ecuaciones. Por lo anteriormente dicho, en la ecuación (3.40) se considera:

$$\mathbf{f}_{\text{cuerpo}} = 0 \quad (6.12)$$

y las fuerzas verticales sobre la correa  $F_z$ , para los lados de carga y retorno ya están definidas en la Tabla 6.1. La ecuación (6.12) es válida para los casos de correa horizontal, sin embargo, en correas inclinadas el término deja de ser nulo como se verá en la sección 7.3.

### 6.4. Descripción de las fuerzas de resistencias.

En la sección 5.5 se describe como la discretización espacial de la correa tiene como objetivo secundario el facilitar el cálculo del término no lineal  $f_I^{\text{fuerzas}}$  de la ecuación 3.40 de una manera práctica. El procedimiento utilizado en este trabajo para calcular las fuerzas de resistencia al movimiento aplicadas en cada nodo que represente una zona de contacto de la correa con una estación de polines es el siguiente:

1. Se usa el método de la diferencia central para calcular el desplazamiento  $u_{i+1}$  conociendo el desplazamiento  $u_i$  como ya se detalló en la sección 4.2.1.
2. Al intentar calcular la velocidad en el tiempo  $t_{i+1}$  ( $v_{i+1}$ ), usando el método de diferencia centrales (4.4) se hace necesario conocer el desplazamiento en  $u_{i+2}$  y  $u_i$  siendo la primera de ellas desconocida en el paso  $i + 1$ . Por lo tanto, va a ser necesario estimar la velocidad en los nodos teniendo solo las variables conocidas  $u_i$  y  $u_{i+1}$  con la variable desconocida  $u_{i+2}$ .
3. Para estimar la velocidad en el tiempo  $i + 1$  se utilizan las diferencias finitas hacia atrás para obtener aproximaciones de velocidad y aceleración con errores del orden de  $\Delta t^2$ . Las formulas típicas de diferencia finita para obtener la velocidad y aceleración para el paso  $i + 1$  son:

$$v_{i+1}^* = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot u_{i-1} + (-2) \cdot u_i + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot u_{i+1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (6.13)$$

$$a_{i+1}^* = \frac{(-1) \cdot u_{i-2} + (4) \cdot u_{i-1} + (-5)u_i + (2)u_{i+1}}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (6.14)$$

desde donde obtenemos las aproximaciones de velocidad y aceleración para  $i + 1$ ,  $v_{i+1}^*$  y  $a_{i+1}^*$  respectivamente, y aunque dichas aproximaciones por diferencias finitas hacia atrás no son tan exactas como las de diferencias centrales en este trabajo se utilizarán estas aproximaciones al tener un bajo orden de error.

4. Una vez aproximado el valor de la velocidad  $v_{i+1}^*$  y aceleración  $a_{i+1}^*$ , se usan estos valores para calcular la magnitud y el sentido de la fuerza de resistencia al movimiento, utilizando el modelo de roce ya esbozado conceptualmente en las secciones 5.5 y 2.5.

Se conoce que la fuerza vertical aplicada por la correa sobre la estación de polines es  $F_z$  [N], y que la fuerza de roce o de resistencia al movimiento va a depender de si el roce es estático o dinámico. Para velocidades mayores a 0,1 [m/s] se considera que el tipo de fricción presente es el roce dinámico, y como ya se explicaba en la sección 2.5, la fuerza de resistencia al movimiento para toda velocidad mayor o igual a  $0,1[\frac{m}{s}]$  se calcula siguiendo la norma DIN22101, mientras que para toda velocidad menor a 0,1, se considera el fenómeno de roce como estático y por lo tanto, el cálculo de roce será más complicado.

En definitiva, el cálculo de la fuerza de resistencia al movimiento o roce estático según sea el caso, se realiza entonces de la siguiente manera:

- a) Si el valor absoluto de la velocidad  $v_{i+1}^*$  es mayor a  $0,1[m/s]$  en el nodo sobre la estación de polines entonces el valor de la fuerza de resistencia al movimiento aplicada sobre la correa es:

Si  $\text{abs}(v_{i+1}^*) \geq 0,1$  entonces

$$F_{\text{roce}} = -F_c \cdot \text{sgn}(v_{i+1}^*) \quad (6.15)$$

donde se ve que la fuerza de resistencia  $F_c$  aplicada sobre un nodo, tiene siempre una dirección contraria a la velocidad.

El termino  $F_c$ , se obtiene de calcular la fuerza de resistencia en cada estación de polines de acuerdo a la norma DIN22101, como se explica en la sección 5.6. Las ecuaciones (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) muestran como se calcula la fuerza de resistencia primaria  $F_H$  y secundaria  $F_N$  dependiendo de si la fuerza está ubicada en el lado carga o en el lado retorno, utilizando para ello la ecuación (6.16) o (6.17) para cada caso respectivamente.

Para las estaciones de polines en el lado carga,

$$\begin{aligned} F_c &= F_{H,o} + F_{N,o} \\ F_c &= F_{H,o} + (C - 1) \cdot F_{H,o} = C \cdot F_{H,o} \\ F_c &= C \cdot \frac{1}{q_o} \cdot (f \cdot F_{z_{\text{carga}}}) \end{aligned} \quad (6.16)$$

y para el lado retorno,

$$F_c = C \cdot \frac{1}{q_u} \cdot (f \cdot F_{z_{\text{retorno}}}) \quad (6.17)$$

donde las constantes utilizadas son las siguientes:

Tabla 6.6: Valores de los parámetros obtenidos desde el programa “Belt Analyst” para un  $L_c = 1000[m]$ .

Parámetro	Valor
$f_{\text{carga}}$	0,02
$f_{\text{retorno}}$	0,02
$q_o$	0,7
$q_u$	0,9
$C$	1,07

- b) Si el valor absoluto de la velocidad  $v_{i+1}^*$  en el nodo sobre el polín es menor a  $0,1[m/s]$  ( $\text{abs}(v_{i+1}^*) < 0,1$ ) entonces el roce es estático y la fuerza de roce depende de la fuerza externa total  $F_{\text{ext}}^*$  aplicada sobre el nodo.

Entonces

$$F_{\text{roce}} = \begin{cases} -F_{\text{ext}}^* & \text{si } F_{\text{ext}}^* \leq F_s \\ -F_s \cdot \text{sgn}(F_{\text{ext}}^*) & \text{si } F_{\text{ext}}^* > F_s \end{cases} \quad (6.18)$$

siendo  $F_s$  la fuerza máxima de roce estático que el polín podría aplicar sobre la correa, y si los demás elementos de la correa aplican sobre ese nodo una fuerza que supera dicha fuerza de roce  $F_s$  entonces ese nodo rompería su inercia y empezaría a avanzar, la fuerza máxima de roce depende del coeficiente de roce estático máximo, según la norma DIN22101 el valor de roce estático máximo es de 0,35 para el roce entre poleas y correas, y en este trabajo se considera que dicho límite es igual de pertinente para el roce entre polines y correa. Por lo tanto  $F_s$  se obtiene desde la siguiente ecuación:

$$F_s = \mu_{\text{roce estático}} \cdot F_z \cdot B = 0,35 \cdot F_z \quad (6.19)$$

y siendo  $F_{\text{ext}}^*$ , la fuerza externa aplicada sobre el nodo pero obtenida de forma aproximada obtenida utilizando la siguiente ecuación:

$$[\mathbf{M}] \{a_{i+1}^*\} + [\mathbf{C}] \{v_{i+1}^*\} + [\mathbf{K}] \{u_{i+1}\} = F_{\text{ext}}^* \quad (6.20)$$

donde se utilizan una velocidad y aceleración también aproximadas para  $i + 1$  y solo el desplazamiento  $u_{i+1}$  es una variable conocida para el paso  $i + 1$ .

5. En conclusión, obtenemos la fuerza externa debido al roce  $F_{\text{roce}}$  para cada nodo ubicado sobre una estación de polines, tomando en cuenta la velocidad y la fuerza externa en el nodo. Es a partir de esos valores es que se construye el vector columna  $\mathbf{f}_I^{\text{ext}}$  de fuerzas externas del sistema de ecuaciones del modelo de elementos finitos, vector que cambia para cada paso  $i + 1$  y por lo tanto el vector columna de fuerzas necesita ser recalculado igualmente en cada paso.

Con este procedimiento obtenemos el vector columna  $\mathbf{f}_I^{\text{ext}}$  necesario para calcular la solución al sistema de ecuaciones del modelo de elementos finitos que representa a la correa transportadora.

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{f}^{\text{ext}} + \mathbf{f}_{\text{cuerpo}}$$

## 6.5. Descripción de la polea de cola

En la sección 5.3.2 se explicó como la polea de cola puede ser representada por un único nodo. En nuestro caso, la polea de cola es representada por el nodo número  $n_{cola}$ , cuyo valor ya está definido en la tabla 6.2.

La inercia de la polea de cola, de una forma semejante a lo visto en la sección 6.2, se incorpora a las matrices elementales de inercia como una masa equivalente, aproximada en este caso con un valor igual a la masa de la polea misma. Dicha masa se incorpora como una masa concentrada en el nodo en contacto con la polea. A nivel de matrices elementales explicamos esto a través del caso de la polea de cola, en la Figura 6.5 se presenta una polea de cola, que al ser una polea fija y sin deslizamiento se puede representar como un único nodo, conectado a las secciones de correa adyacentes, A y B. Entonces la inercia de la polea de cola queda representada en las matrices elementales de los elementos finitos en contacto con la polea, de la siguiente manera:

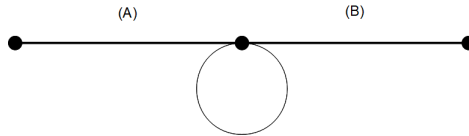


Figura 6.5: Polea representada por un único nodo, conectado a su vez con otros dos elementos finitos.

Para el elemento A, el término  $M_{e_{polea\ cola}}$  queda expresado como:

$$M_{e_{polea\ cola}} = \frac{m_{polea\ cola}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

y para el elemento B:

$$M_{e_{polea\ cola}} = \frac{m_{polea\ cola}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

donde se ve que la masa de la polea se distribuye en partes iguales entre los dos elementos finitos que están en contacto con el nodo que representa a la polea. El valor de la masa de la polea de cola  $m_{polea\ cola}$  está escrita en la Tabla 6.7.

Tabla 6.7: Datos sobre las poleas ubicadas en la correa transportadora. Datos obtenidos desde el programa “BeltAnalyst” v.20.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidad
masa polea motriz	$m_{polea\ motriz}$	11530	[Kg]
masa polea cola	$m_{polea\ cola}$	824	[Kg]
masa polea tensora	$m_{polea\ tensora}$	655	[Kg]

## 6.6. Descripción de la polea tensora.

Anteriormente, en la sección 5.3.3 se describe la relación entre la tensión de la correa y la aceleración de la polea tensora y el contrapeso, y es en esta sección donde expresaremos esa relación en el sistema de ecuaciones, utilizando un diagrama de cuerpo libre para una polea tensora representada, como se muestra en la Figura 6.6.

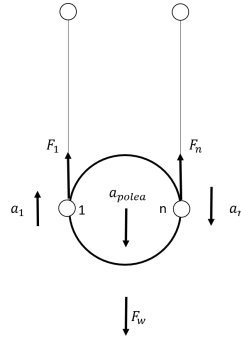


Figura 6.6: Modelo de la polea tensora con elementos finitos.

En condiciones de equilibrio estático, el primer y último nodo que representa a los extremos de la correa en contacto con la polea tensora, no están en aceleración por lo tanto, en cada nodo la fuerza que está siendo aplicada se puede calcular fácilmente.

$$F_1 = F_n = \frac{1}{2} \cdot m_{pt} \cdot g = \frac{1}{2} W_{pt}$$

siendo  $m_{pt}$  la masa de la polea tensora y la masa del contrapeso juntas,  $F_1$  la fuerza externa aplicada en el nodo 1 y  $F_n$  en el nodo  $n$ , presentes en la Figura 6.6.

Bajo condiciones dinámicas la fuerza aplicada en el primero y último de los nodos debido al peso del contrapeso se calcula usando la ecuación (6.23). La aceleración del contrapeso cambia debido a la aceleración de los nodos 1 y  $n$ . Despreciando las fuerzas de roce y considerando a la masa de la polea que sostiene el contrapeso y al contrapeso mismo, una sola masa combinada  $m_{pt}$  que nace de la suma de ambas, tenemos el siguiente equilibrio de fuerzas:

$$m_{pt} \cdot a_{lateral\ polea} = W_{pt} - F_1 - F_n \quad (6.23)$$

siendo  $F_1$  la fuerza aplicada en el nodo 1 y  $F_n$  la fuerza aplicada en el nodo  $n$  en la Figura 6.6.

Sin embargo, si se asume que ambas fuerzas son iguales, es decir  $F_1 = F_n = F$ , condición que se cumple tanto en el caso estacionario como en el dinámico debido a que la tensión de la correa en ambos lados debe ser la misma, nos queda una nueva ecuación:

$$m_{pt} \cdot a_{lateral\ polea} = W_{pt} - 2 \cdot F \quad (6.24)$$

donde la aceleración del movimiento lateral de la polea está relacionada con la aceleración de los nodos. La ecuación de la aceleración lateral se deduce desde la ecuación (5.4) donde se aplica dos veces la derivada con respecto al tiempo para obtener la siguiente expresión:

$$a_{\text{lateral polea}} = \frac{a_n - a_1}{2}$$

que reordenando los términos, aparece un vector columna de aceleraciones nodales

$$a_{\text{lateral polea}} = \left( -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Reemplazando (6.25) en (6.24) y reordenando algunos términos, tenemos una nueva expresión en forma de producto de una matriz fila de masas y un vector columna de aceleraciones.

$$\frac{m_{pt}}{2} \left( -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix} = \frac{W_{pt}}{2} - F \quad (6.26)$$

Ahora para incorporar la ecuación (6.26) dentro del sistema de ecuaciones descrito en (3.39) se realiza el siguiente desarrollo:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}_{\text{cuerpo}}$$

desde el sistema de ecuaciones (3.39), extraemos las filas 1 y  $n$  del sistema de ecuaciones (las ecuaciones (6.27) y (6.28)) y se plantean junto a la ecuación anterior de la aceleración de la polea (6.26).

$$m_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix} + [C_{1,j}]\{\mathbf{v}\} + [K_{1,j}]\{\mathbf{u}\} = -F \quad (6.27)$$

$$m_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix} + [C_{n,j}]\{\mathbf{v}\} + [K_{n,j}]\{\mathbf{u}\} = F \quad (6.28)$$

$$\frac{m_{pt}}{2} \left( -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix} = \frac{W_{pt}}{2} - F \quad (6.29)$$

se utiliza la ecuación (6.29) para eliminar el término  $F$  de valor desconocido de las ecuaciones (6.27) y (6.28). Obtenemos entonces las siguiente nuevas ecuaciones para las filas 1 y  $n$  del sistema de ecuaciones:

$$\left( m_1 + \frac{1}{4}m_{pt} \quad -\frac{1}{4}m_{pt} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix} + [C]\{\mathbf{v}\} + [K]\{\mathbf{u}\} = -\frac{W_{pt}}{2} \quad (6.30)$$

$$\left( -\frac{1}{4}m_{pt} \quad m_n + \frac{1}{4}m_{pt} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix} + [C]\{\mathbf{v}\} + [K]\{\mathbf{u}\} = \frac{W_{pt}}{2} \quad (6.31)$$

por lo tanto, la relación de acople entre la aceleración de la polea y la tensión de la correa es equivalente a plantear que las aceleraciones 1 y  $n$  están relacionadas por una matriz de inercia elemental (local)

equivalente:

$$\mathbf{M}_e = \frac{m_{pt}}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

que para ser ensamblada en la matriz global de inercia, debe usarse la siguiente matriz de conexión

$$\mathbf{L}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

En conclusión, para incorporar de forma simple la relación entre el movimiento del centro de la polea tensora y su aceleración con la tensión de la correa dentro del sistema de ecuaciones, se incorpora la matriz elemental de masa (6.32) a la matriz de inercia dentro del modelo, ya sea para un estado estacionario, como transiente. Y en las fronteras del modelo de elemento finito se colocan las fuerzas tensoras iguales a  $\frac{W_{pt}}{2}$  como se ve en el lado derecho de las ecuaciones (6.30) y (6.31).

## 6.7. Descripción de las poleas presentes en el modelo.

En el modelo, la ubicación de las poleas es la que se muestra en la figura 6.1. La polea motriz y la polea de cola están representadas por un nodo cada una y la sección de correa apoyada sobre la polea tensora no se discretiza, definiendo a los nodos que representan a los extremos de la correa en contacto con la polea tensora como la frontera del modelo de elemento finito y donde una fuerza  $F$  es aplicada sobre esos nodos. A continuación se explicará en detalle como se incorpora cada polea dentro del modelo.

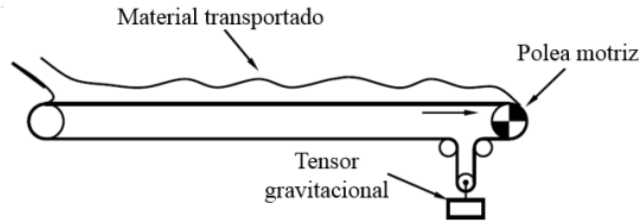


Figura 6.7: El sistema de correa transportadora a modelar, con una polea motriz, una polea de cola y una polea tensora.

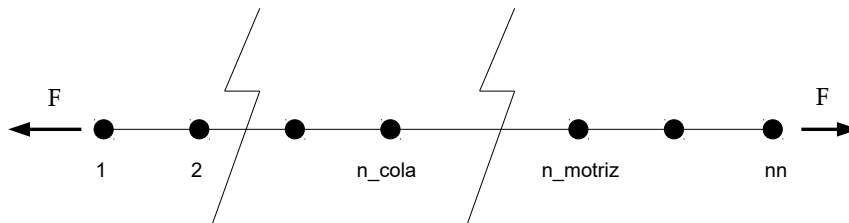


Figura 6.8: El modelo de elementos finitos unidimensional extendido sobre el eje  $x$ , donde además se muestra como la influencia de la polea tensora se reemplaza por 2 fuerzas  $F$  ubicados en la frontera.

**Descripción de la polea motriz.** Para representar de mejor manera la acción de una polea motriz que sigue una curva de velocidad controlada, se modela la polea motriz como una polea fija donde no existe deslizamiento, en consecuencia un solo nodo representa a los 2 extremos de correa en contacto con la polea y el movimiento de dicho nodo es conocido debido a que su velocidad sigue la curva de harrison mostrada en la Tabla 6.9.

La ecuación que representa el movimiento tangencial de la polea y los bordes de la correa apoyados en ella es la ecuación (5.2), con un  $d_p = \bar{d}(t)$  conocido desde (6.3)

$$d_p = \frac{u_q + u_r}{2} = \bar{d}(t) \quad (6.34)$$

Desde la ecuación (5.3) que representa el movimiento de la correa en una polea fija sin deslizamiento tenemos

$$\begin{aligned} \frac{u_q - u_r}{2} &= 0 \\ u_q &= u_r \end{aligned} \quad (6.35)$$

que en combinación con la ecuación (6.34), tenemos

$$u_q = u_r = u_{\text{polea motriz}} = \bar{d}(t) \quad (6.36)$$

desde donde podemos decir que el desplazamiento de los extremos de la correa en contacto con la polea motriz es el mismo en ambos extremos, y por lo tanto, la polea puede ser representado por un único nodo en el modelo, el nodo  $n_{\text{polea motriz}}$ .

En el nodo “ $n_{\text{polea motriz}}$ ” no solo se debe incorporar la masa de la polea motriz  $m_{\text{polea motriz}}$  sino que además debe incorporarse la inercia de los motores y las cajas reductoras a través del cálculo de una masa equivalente a la inercia usando un radio equivalente igual al radio de la polea motriz. En la tabla 6.8 se muestra el valor de la masa equivalente  $m_{\text{sist.motriz}}$  ubicada en el nodo que representa a la polea motriz.

Tabla 6.8: Datos de masa equivalente del sistema tensor+polea motriz,  $m_{\text{sist.motriz}}$  y del sistema tensor  $m_{pt}$  representativos del sistema de correa transportadora a modelar. Datos obtenidos desde el informe generado por “BAnalyst” presente en el Anexo F.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidad
Masa equivalente de solo la polea motriz	$m_{\text{polea motriz}}$	1019,78	[Kg]
Masa equivalente del sistema motriz total (polea+sist.motriz)	$m_{\text{sist.motriz}}$	11530	[Kg]
Masa equivalente de solo la polea de cola	$m_{\text{polea cola}}$	824	[Kg]
Masa equivalente del sistema tensor total (polea+contrapeso)	$m_{pt}$	142767	[Kg]

**Descripción de la polea de cola.** En el movimiento de la correa sobre la polea de cola también se presupone la ausencia de deslizamiento y a través del desarrollo mostrado en las ecuaciones (6.35) y (6.36) se obtiene que la polea de la cola puede ser representada por un único nodo “ $n_{polea\ cola}$ ”, y por lo tanto, es en ese nodo donde se concentra la masa equivalente de la polea de cola  $m_{polea\ cola}$ .

**Descripción de la polea tensora.** El comportamiento de los nodos en contacto con la polea tensora ya ha sido descrito anteriormente. Desde la sección anterior 6.6 que modela el comportamiento de una polea tensora, se sabe que el desplazamiento de los nodos “1” y “ $n_n$ ” (las fronteras del modelo y nodos sobre la polea tensora) están relacionados, como se vio en la ecuación (6.32), y por lo tanto, es necesario incorporar a la matriz global de inercia, una matriz elemental de inercia (que representa a la polea tensora) como la siguiente

$$(\mathbf{M}_e)_{polea\ tensora} = \frac{m_{pt}}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

que para ser ensamblada en la matriz global de inercia como se muestra en la ecuación (3.32), debe usar la siguiente matriz de conexión.

$$\mathbf{L}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

## 6.8. Sistema de ecuaciones del modelo.

Para incorporar el movimiento de la correa a través de la polea motriz en el sistema de ecuaciones que representa a la correa se debe tomar en cuenta la ecuación que representa el movimiento del nodo en la polea motriz, ya que sigue la curva de harrison y su movimiento es descrito por las ecuaciones (6.3), (6.1) y (6.2) siendo  $\bar{d}_{p.motriz}$ ,  $\bar{v}_{p.motriz}$  y  $\bar{a}_{p.motriz}$ , las variables conocidas que describen el movimiento de parada controlada con unos valores ya definidos en la Tabla 6.9.

Tabla 6.9: Parámetros principales de la curva de harrison seguida por la velocidad de la polea motriz.

Parámetro	Valor	Unidad
Velocidad inicial $V_b$	5,2	[m/s]
Tiempo de frenado $T_a$	30	[s]

El sistema de ecuaciones inicial que representa el modelo finito de una correa, es el descrito en la ecuación (3.40)

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}_{cuerpo}$$

cuyos términos pueden ser reescritos de la siguiente manera:

$$[\mathbf{M}] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{a}_{n_{motriz}} \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} + [\mathbf{C}] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{v}_{n_{motriz}} \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} + [\mathbf{K}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{d}_{n_{motriz}} \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}_{cuerpo} \quad (6.39)$$

donde el movimiento de la polea motriz y los términos  $\bar{d}_{n_{motriz}}$ ,  $\bar{v}_{n_{motriz}}$  y  $\bar{a}_{n_{motriz}}$  son variables conocidas como se mostró en las ecuaciones (6.3), (6.1) y (6.2) y por lo tanto, ya no son variables independientes desconocidas debiendo ser desplazadas hacia el lado derecho de la ecuación (6.39). Además el término  $\mathbf{f}_{cuerpo}$  se considera nulo debido a la ausencia de fuerzas de cuerpo ya explicada en la ecuación (6.12). Al

hacerlo obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{M}']_{n-1 \times n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n_{motriz}-1} \\ a_{n_{motriz}+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + [\mathbf{C}']_{n-1 \times n-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n_{motriz}-1} \\ v_{n_{motriz}+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + [\mathbf{K}']_{n-1 \times n-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n_{motriz}-1} \\ u_{n_{motriz}+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \\
 \dots = \mathbf{f}^{ext} & - \begin{bmatrix} m_{1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n_{motriz}-1,n_{motriz}} \\ m_{n_{motriz}+1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ m_{n,n_{motriz}} \end{bmatrix} \cdot \bar{a}_{p,motriz} - \begin{bmatrix} c_{1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n_{motriz}-1,n_{motriz}} \\ c_{n_{motriz}+1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ c_{n,n_{motriz}} \end{bmatrix} \cdot \bar{v}_{p,motriz} - \dots \\
 \dots = & \begin{bmatrix} k_{1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{n_{motriz}-1,n_{motriz}} \\ k_{n_{motriz}+1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ k_{n,n_{motriz}} \end{bmatrix} \cdot \bar{d}_{p,motriz}
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

donde el vector columna compuesto por los términos  $m_{i,n_{motriz}}$  ubicado en el lado derecho de la ecuación, representa a la columna “ $n_{motriz}$ ” de la matriz de masa  $[\mathbf{M}]$ . De la misma manera los vectores columna con los términos “ $c_{i,n_{motriz}}$ ” y “ $k_{i,n_{motriz}}$ ” representan a las columnas “ $n_{motriz}$ ” de las matrices de amortiguación  $[\mathbf{C}]$  y de rigidez  $[\mathbf{K}]$ , respectivamente.

La reagrupación de los términos del sistema de ecuaciones, modifica las matrices  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{C}]$  y  $[\mathbf{K}]$  originales y en la ecuación aparecen las nuevas matrices  $[\mathbf{M}']$ ,  $[\mathbf{C}']$  y  $[\mathbf{K}']$  que se obtienen de quitar la fila y la columna “ $n_{motriz}$ ” de las matrices originales, puesto que el movimiento del nodo  $n_{motriz}$  es conocido y deja de ser una variable desconocida.

A continuación, también se reescribe el término  $\mathbf{f}^{ext}$  y se descompone en 2 términos diferentes, según

la naturaleza de la fuerza externa

$$\mathbf{f}^{ext} = \begin{pmatrix} -F_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_{roce,2} \\ F_{roce,3} \\ \vdots \\ F_{roce,n-2} \\ F_{roce,n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{tensoras} + \mathbf{F}_{roce} \quad (6.41)$$

siendo el primer sumando, el término que agrupa las fuerzas que están relacionadas a las fuerzas tensoras aplicadas por una polea tensora mientras que el segundo término agrupa las fuerzas de roce estático o dinámico, que los polines aplican sobre la correa y que se calculan según se explica en la sección 6.4. Las fuerzas tensoras solo están aplicadas en los nodos que están en los extremos en contacto con la polea tensora, y por lo tanto, su vector columna solo tiene valores en su primer y última fila estando el resto de filas con valores nulos. El vector columna de fuerzas de roce solo tiene valores no nulos de fuerza en las filas que representan a los nodos interiores no fronterizos, por lo mismo, el vector columna solo tiene valores nulos en los extremos, la primera y ultima fila del vector columna que representa a los nodos que están en contacto con las poleas motriz y de cola.

En el primer vector columna de (6.41),  $F_1$  y  $F_n$  son parámetros desconocidos pero que son iguales y están relacionados por la ecuación (6.24) desde donde reordenando la ecuación tenemos

$$F_1 = F_n = F$$

$$-2 \cdot F = m_{pt} a_{lateral\ polea} - W_{pt} \quad (6.42)$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot (W_{pt} - m_{pt} a_{lateral\ polea}) \quad (6.43)$$

por lo tanto, si reemplazamos el termino  $F$  en la primera fila (fila “1”) y en la ultima fila (fila “n”) del sistema de ecuaciones (6.40), por la ecuación (6.43) y con una variable  $a_{polea}$  que se relaciona con las demás variables independientes por la ecuación (6.32), obtenemos un sistema de ecuaciones nuevo al

incorporar en (6.40) la ecuación (6.42):

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{M}']_{(n-1) \times (n-1)} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n_{motriz}-1} \\ a_{n_{motriz}+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + [\mathbf{C}']_{(n-1) \times (n-1)} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n_{motriz}-1} \\ v_{n_{motriz}+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \dots \\
& \dots + [\mathbf{K}']_{(n-1) \times (n-1)} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n_{motriz}-1} \\ u_{n_{motriz}+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \dots \\
& \dots = \begin{bmatrix} \frac{m_{pt} a_{lateral\ polea}}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{m_{pt} a_{lateral\ polea}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-W_{pt}}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{W_{pt}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_{roce,2} \\ F_{roce,3} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{roce,n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \dots \\
& \dots = \begin{bmatrix} m_{1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n_{motriz}-1,n_{motriz}} \\ m_{n_{motriz}+1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ m_{n,n_{motriz}} \end{bmatrix} \cdot \bar{a}_{p.motriz} - \begin{bmatrix} c_{1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n_{motriz}-1,n_{motriz}} \\ c_{n_{motriz}+1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ c_{n,n_{motriz}} \end{bmatrix} \cdot \bar{v}_{p.motriz} - \begin{bmatrix} k_{1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{n_{motriz}-1,n_{motriz}} \\ k_{n_{motriz}+1,n_{motriz}} \\ \vdots \\ k_{n,n_{motriz}} \end{bmatrix} \cdot \bar{d}_{p.motriz}
\end{aligned} \tag{6.44}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (6.44), el vector columna que contiene el término “ $m_{pt} \cdot a_{lateral\ polea}$ ” puede quedar expresado en función del vector columna de aceleraciones debido a que  $a_{polea}$  se relaciona con las aceleraciones  $a_i$  independientes a través de la ecuación (6.25), por lo tanto, dicho vector columna puede pasar al lado izquierdo de la ecuación y en función de las aceleraciones  $a_i$

independientes. Al pasar dicho término al lado izquierdo, los términos se reagrupan dentro de una nueva matriz de inercia  $[\mathbf{M}'']$  como ya se explicó en la sección 6.6, la forma de la nueva matriz de inercia se puede obtener de forma equivalente si es que dentro del ensamblaje de la matriz global de inercia  $[\mathbf{M}']$  se incorpora una matriz elemental de inercia adicional ya descrita en (6.32) (que viene a simplificar y desaparecer el vector columna del lado derecho, con los términos  $m_{pt} \cdot a_{\text{lateral polea}}$  al incorporarlos a una nueva matriz de inercia  $[\mathbf{M}'']$ , que combina a la matriz de inercia anterior y al vector columna), a través de la matriz de conexión (6.33). Así aparece una nueva matriz de inercia  $[\mathbf{M}'']$  y el sistema de ecuaciones se reordena nuevamente de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{M}'']_{n-1 \times n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n_{\text{motriz}}-1} \\ a_{n_{\text{motriz}}+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + [\mathbf{C}']_{n-1 \times n-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n_{\text{motriz}}-1} \\ v_{n_{\text{motriz}}+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + [\mathbf{K}']_{n-1 \times n-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n_{\text{motriz}}-1} \\ u_{n_{\text{motriz}}+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \\
& \dots = \begin{bmatrix} \frac{-W_{pt}}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{W_{pt}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\text{roce},2} \\ F_{\text{roce},3} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{\text{roce},n-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \dots \\
& \dots = \begin{bmatrix} m_{1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n_{\text{motriz}}-1,n_{\text{motriz}}} \\ m_{n_{\text{motriz}}+1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ m_{n,n_{\text{motriz}}} \end{bmatrix} \cdot \bar{a}_{p,\text{motriz}} - \begin{bmatrix} c_{1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n_{\text{motriz}}-1,n_{\text{motriz}}} \\ c_{n_{\text{motriz}}+1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ c_{n,n_{\text{motriz}}} \end{bmatrix} \cdot \bar{v}_{p,\text{motriz}} - \begin{bmatrix} k_{1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{n_{\text{motriz}}-1,n_{\text{motriz}}} \\ k_{n_{\text{motriz}}+1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ k_{n,n_{\text{motriz}}} \end{bmatrix} \cdot \bar{d}_{p,\text{motriz}}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

El sistema de ecuaciones anterior también puede ser reescrito de una forma más simple y ordenada

$$[\mathbf{M}'']\{\ddot{u}\} + [\mathbf{C}']\{\dot{u}\} + [\mathbf{K}']\{u\} = \mathbf{f}_{\text{pesoW}} + \mathbf{f}_{\text{fuerzas roce}}(\dot{u}, \dots) + \mathbf{f}_{\text{movimiento polea}}(t) \tag{6.46}$$

donde  $\mathbf{f}_{\text{pesoW}}$  es el vector de fuerzas que contiene a la fuerza ejercida por el contrapeso y es fija,  $\mathbf{f}_{\text{fuerzas roce}}$  es el vector de fuerzas que contiene a todas las fuerzas de roce aplicadas por los polines a la correa y

van a variar dependiendo de la velocidad en cada punto, y por último  $\mathbf{f}_{\text{movimiento polea}}$  es el vector fuerza que contiene a los términos relacionados con la detención controlada de la polea motriz y en su curva de velocidad que varía en el tiempo. Así tenemos un sistema de ecuaciones que puede ser resuelto utilizando el método de diferencias centrales ya descrito en la sección (4.2.1).

## 6.9. Resultados Obtenidos.

Una vez implementado el método numérico de diferencias centrales para solucionar el sistema de ecuaciones (6.46) en un código escrito para el programa comercial “MATLAB”, presentado en el anexo H, y se ingresan en dicho programa los parámetros de la correa transportadora ya presentados en las tablas 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.7 y 6.8. Los resultados obtenidos para la tensión y la velocidad a lo largo de la correa en el modelo construido son comparados con los resultados entregados por el programa comercial “Belt Analyst” de la compañía “Overland Conveyor” para los mismos parámetros de entrada. El uso del programa comercial “Belt Analyst” como parámetro de comparación se debe a que este programa es uno de los más populares en la industria del diseño de correas transportadoras.

La correa de 1 [Km] de distancia entre centros, que se propone modelar es descrita por unos parámetros de operación presentados en la Tabla 6.1, el programa comercial “Belt Analyst” es capaz de diseñar una correa que cumpla con esos requerimientos siguiendo la norma DIN22101, y entregar las características necesarias de los componentes del sistema de correa transportadora en un informe, como el presentado en el Anexo F. Desde el informe entregado por el programa comercial se extraen los datos que servirán para caracterizar a la correa, al material cargado, a las poleas y polines en el modelo de elementos finitos, buscando con esto obtener unos resultados que pueden ser comparados con los entregados por el modelo comercial, al estar ambos modelos representando a la misma correa de 1 [Km].

### 6.9.1. Velocidad en la polea motriz.

En la Figura 6.9 se muestran las curvas de velocidad seguida por la polea motriz en su parada controlada en 30[s] y junto a ella está la curva de velocidad seguida por la polea motriz en el programa comercial “**BeltAnalyst**” comparando ambas curvas a través del error relativo considerando que la curva de velocidad de “BeltAnalyst” es la curva que mejor representa lo que ocurre realmente en la correa transportadora real, dicho error relativo es presentado en el gráfico de la Figura 6.10.

El gráfico de error relativo se realiza solo para el intervalo de tiempo de 0 a 30 [s] debido a que un tiempo mayor a 30 [s] la velocidad del modelo comercial de referencia (utilizada en el error relativo) se vuelve nula y el error relativo se indetermina.

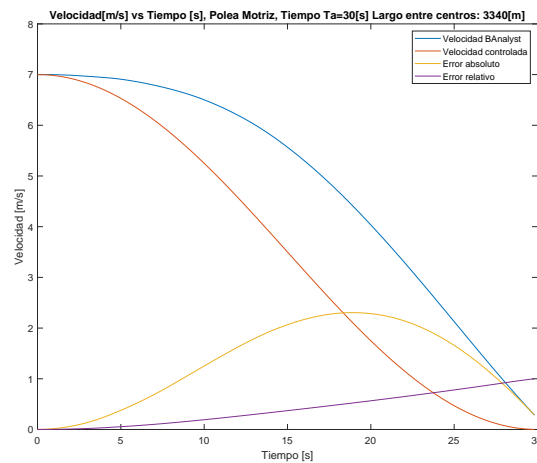


Figura 6.9: Curva de velocidad de la polea motriz en nuestro modelo construido predefinida como una curva de harrison, junto a la curva de velocidad seguida por la polea motriz según el programa “**BeltAnalyst**”.

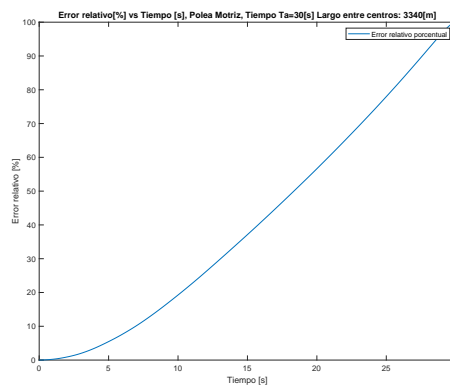


Figura 6.10: Error relativo de la velocidad de la polea motriz en el intervalo de tiempo 0-30[s] antes de que la velocidad se haga nula y el error relativo se indetermina.

## 6.9.2. Velocidad en la polea de cola.

En la Figura 6.11 se muestra la velocidad calculada en la polea de cola, calculada por el modelo propuesto y junto a otra curva entregada por el programa “Belt Analyst” con un error relativo presentado en el gráfico de la Figura 6.12.

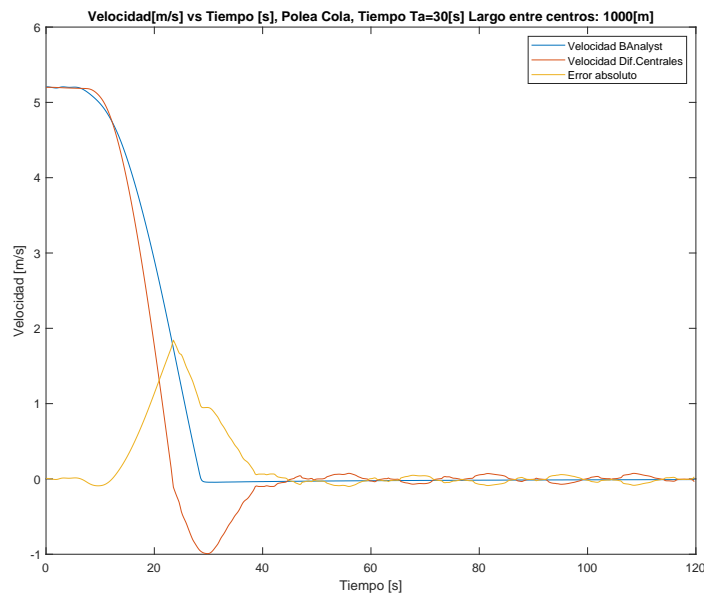


Figura 6.11: Gráfica de la velocidad de la polea de cola calculada por el modelo propuesto y también la velocidad de la polea de cola entregada por el programa “Belt Analyst.”

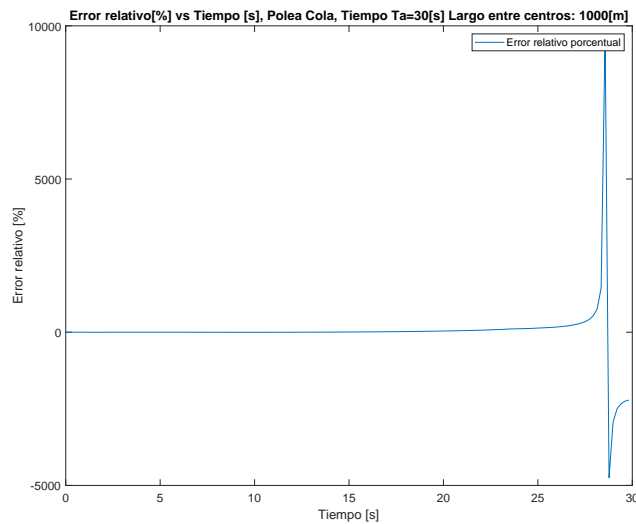


Figura 6.12: Error relativo de la velocidad de la polea de cola en el intervalo de tiempo 0-30[s] antes de que la velocidad se haga nula y el error relativo se indetermine.

### 6.9.3. Velocidad en la polea tensora.

La velocidad de la polea tensora se determina luego de derivar con respecto al tiempo la ecuación (5.2) que representa el movimiento tangencial de la polea, entregándonos la ecuación de velocidad:

$$v_{\text{polea tensora}} = \frac{v_1 + v_{nn}}{2} \quad (6.47)$$

donde la velocidad de la polea tensora es igual al promedio de la velocidad en los nodos frontera (1 y  $nn$ ) ubicados en los extremos de correa en contacto con la polea tensora.

En la Figura 6.13 se muestra la velocidad de la correa en la sección ubicada sobre la polea tensora, obtenida por el modelo de elementos finitos, y junto a la velocidad calculada se gráfica la velocidad de esa misma sección pero calculada según los métodos propios del programa comercial “Belt Analyst”, y de igual forma que las secciones anteriores, el error relativo al comparar ambas curvas es mostrada en la Figura 6.14.

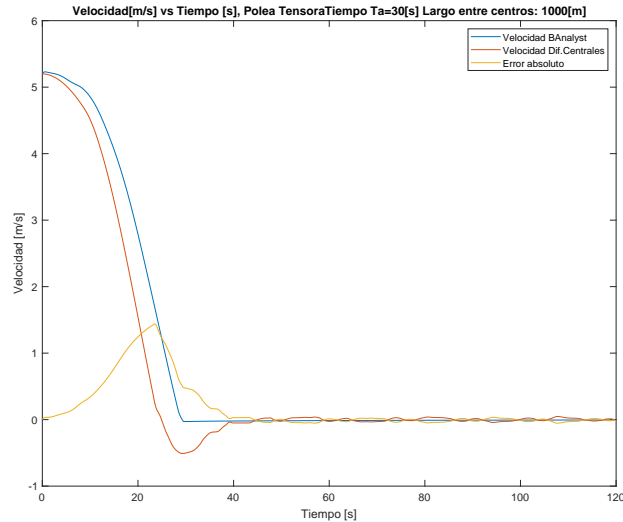


Figura 6.13: Velocidad en la polea tensora obtenida por el modelo construido y junto a ella, la velocidad entregada por el programa “Belt Analyst”.

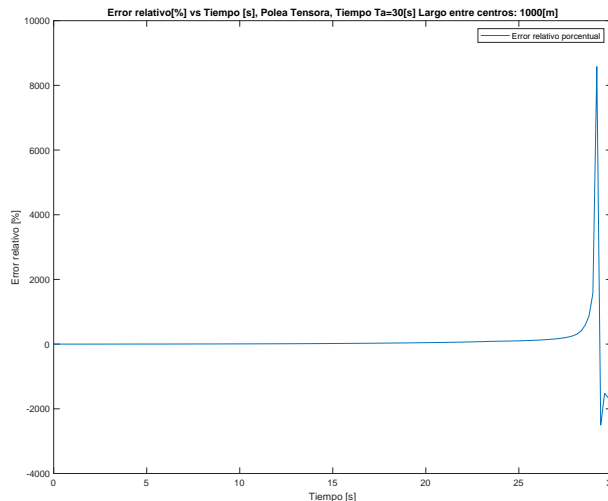


Figura 6.14: Error relativo de la velocidad de la polea tensora en el intervalo de tiempo 0-30[s] antes de que la velocidad se haga nula y el error relativo se indetermina.

#### 6.9.4. Tensión en la polea motriz.

En la Figura 6.15 se muestran los valores de tensión para la sección de correa ubicada justo antes de llegar a la polea motriz durante el proceso de parada controlada, el error relativo porcentual al comparar ambos resultados están presentados en la Figura 6.16.

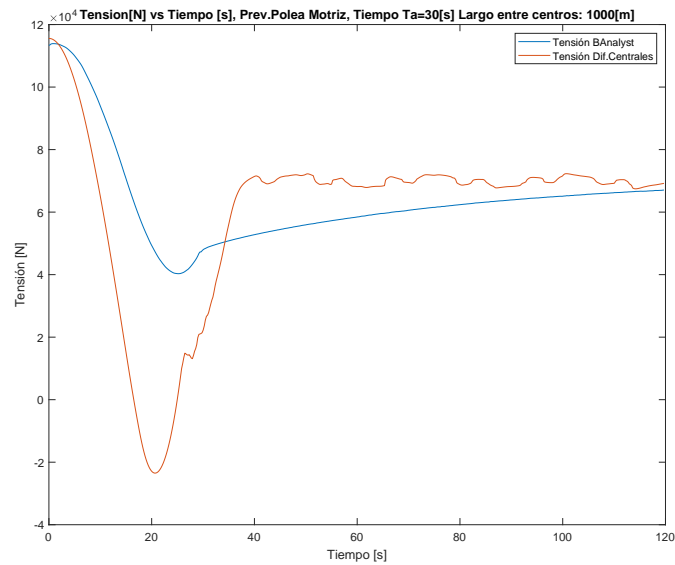


Figura 6.15: Tensión en la sección de correa previa a la polea motriz, calculada por el modelo construido y junta a ella, los resultados obtenidos por el programa “Belt Analyst”.

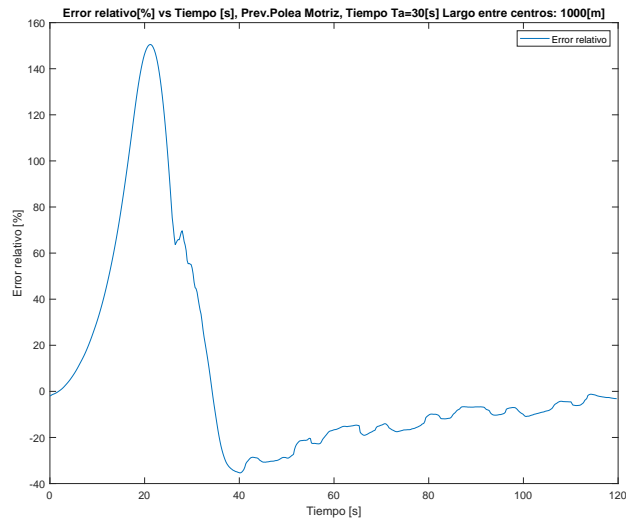


Figura 6.16: Error relativo en la tensión de la polea motriz, presente en la tensión calculada comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

### 6.9.5. Tensión en la polea de cola.

De la misma manera los resultados para la tensión en la sección de correa ubicada en la zona posterior a la polea de cola (la sección de correa ubicada junto a la polea de cola ubicada en el lado carga) y su error relativo están expuestos en las figuras 6.17 y 6.18.



Figura 6.17: Tensión en la polea de cola comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

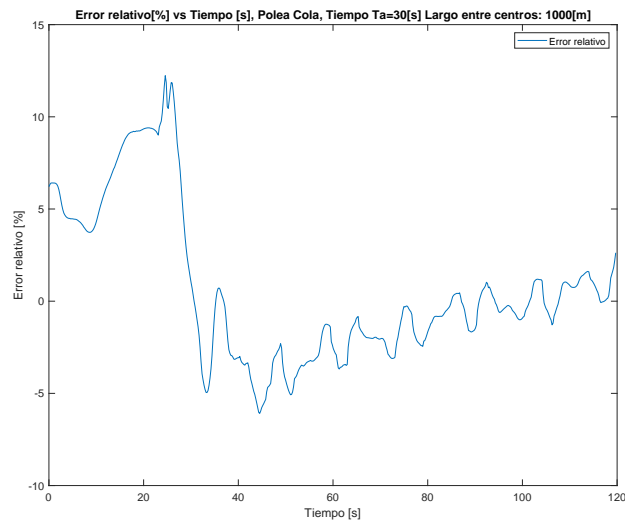


Figura 6.18: Error relativo presente en la tensión calculada de la polea de cola comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

### 6.9.6. Tensión en la polea tensora.

Los resultados obtenidos para la tensión en la sección de correa previa a la polea tensora, es decir, la sección de correa ubicada inmediatamente en el lado derecho de la polea tensora. Los datos de tensión entregados por el modelo construido están presentados junto a los resultados entregados por “Belt Analyst” en la Figura 6.19 y el error relativo que compara ambos resultados en la Figura 6.20.

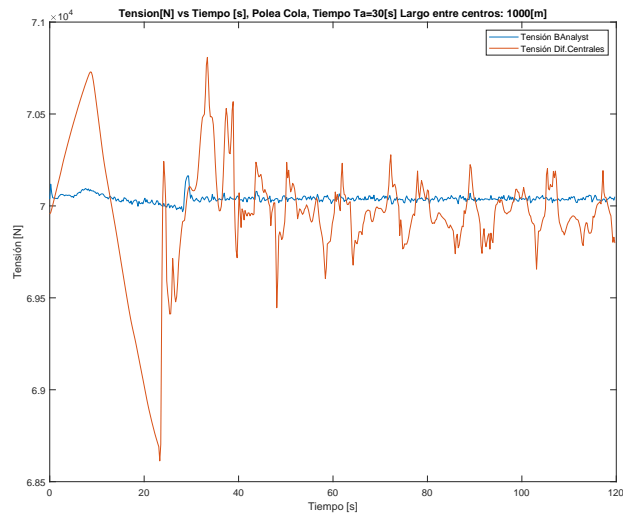


Figura 6.19: Tensión en la polea tensora (en la sección ubicada a la derecha de la polea tensora) comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

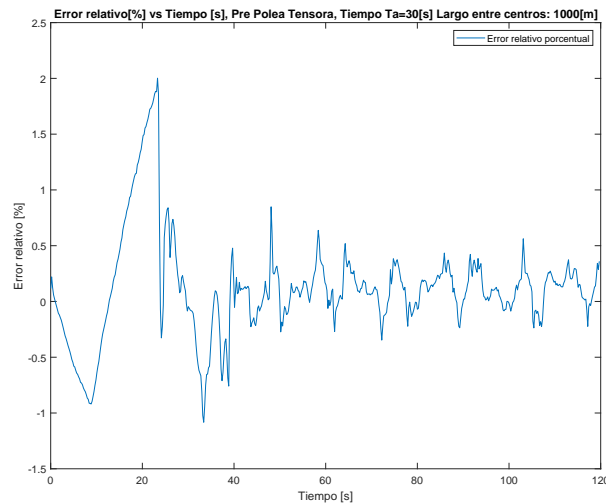


Figura 6.20: Error relativo presente en la tensión de la polea tensora comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

### 6.9.7. Comentarios.

Los errores relativos obtenidos (ver Tablas 6.10 y 6.11) nos permiten afirmar que los resultados entregados por el modelo de correa transportadora propuesto en este trabajo y el modelo comercial de “Belt Analyst” tienen grandes diferencias, y el modelo propuesto no es capaz de predecir correctamente el comportamiento de la velocidad y la tensión sobre la correa.

Tabla 6.10: Síntesis de los resultados obtenidos para la velocidad en los primeros 30 segundos de los resultados calculados.

Ubicación del nodo	error relativo máximo [%]	ubicación temporal del error máximo
Polea motriz	158,45 %	29,61[s]
Polea cola	9729,42 %	28,56[s]
Polea tensora	8579,19 %	29,19[s]

Tabla 6.11: Síntesis de los resultados obtenidos para la tensión en los primeros 30 segundos de los resultados calculados.

Ubicación sección de correa	error relativo máximo [%]	ubicación temporal del error máximo
Previa a la Polea motriz	150,52 %	21,21[s]
Posterior a la Polea cola	12,23 %	24,57[s]
Posterior a la Polea tensora	2 %	23,31[s]

La causa principal de las diferencias está en que la curva de velocidad seguida por la polea motriz es diferente en cada modelo de correa. En el modelo construido la curva de velocidad está predefinida como una curva de harrison, en cambio, en el modelo de correa de “Belt Analyst”, la curva de velocidad es un tanto irregular, como se muestra en la Figura 6.9. Para poder comparar correctamente los resultados obtenidos de velocidad y tensión en ambos modelos, la velocidad de la polea motriz debería ser idéntica en ambos y tener la forma de una curva de harrison de detención controlada en 30[s], sin embargo, se observa que dentro del programa comercial es imposible definir una curva de velocidad a la polea motriz de manera arbitraria y por lo tanto, la velocidad se desvía de la curva predefinida. La única forma de intervenir la velocidad de la polea motriz en el programa comercial “Belt Analyst” es el establecer la curva de harrison como una “curva de referencia” (set value) de detención controlada, usada como parámetro de entrada dentro de un proceso interno en el programa comercial de control PID de la velocidad en la polea motriz. Los detalles exactos de instalación del control PID y configuración no son entregados al usuario en el informe final en el Anexo F, ni por el programa ni por el soporte técnico asociado. El modelo de motor de inducción con variador de frecuencia (VFD) y control PID utilizado por el programa comercial “Belt Analyst” tampoco es informado al usuario, y por lo tanto se desconocen los parámetros utilizados ni el sistema de ecuaciones a resolver, haciendo imposible poder incorporar al modelo construido en este trabajo un modelo de motor de inducción con VFD y control PID completamente semejante al utilizado en el programa “Belt Analyst”.

Solo es posible modificar el sistema de control PID a través de las opciones entregadas por el programa comercial de modificación de las constantes proporcionales  $K$  del control PID, por lo tanto, la curva de

velocidad final de la polea motriz dentro del programa comercial se obtiene de un modelo interno de motor de inducción con VFD y control PID, en el que se ingresan los parámetros mostrados en la tabla 6.12, lo que entrega una curva final de velocidad diferente a la “curva de referencia” inicialmente propuesta, como se muestra en la Figura 6.9. Y es a partir de estas diferencias en las curvas de velocidad de la polea motriz desde donde nacen también las diferencias en las tensiones a lo largo de la correa.

Tabla 6.12: Constantes del control PID de la velocidad. Datos obtenidos desde el informe entregado por “Belt Analyst” y presente en el anexo F.

Constante	Valor [-]
Constante proporcional	0,2
Constante integral	0,2
Constante derivativa	2

Un fenómeno a destacar dentro de los resultados obtenidos por el modelo construido de correa transportadora es el comportamiento de la tensión en la sección de correa ubicada justo antes de llegar a la polea motriz, siguiendo la dirección de movimiento de la correa de izquierda a derecha por el lado carga. La tensión obtenida para esa sección de correa se observa en la Figura 6.15 donde la curva de tensión obtenida se hace negativa en el intervalo de tiempo de 15 a 25 segundos, cuando eso ocurre significa que la correa en esa sección no está en tensión y por lo tanto, experimenta una deflexión excesiva, junto con la caída de la carga de la correa y una desalineación de la correa con respecto a su ubicación sobre los polines. Debido a que la condición de tensión negativa no debe experimentarse en ningún momento sobre la correa transportadora se concluye que un tiempo de parada de 30[s] con una curva de harrison de pendiente suavizada sigue siendo demasiado brusco para las condiciones de operación de la correa a la que se le hace imposible detenerse en 30[s] sin experimentar tensión negativa, por lo tanto, para poder frenar la correa en 30[s] va a ser necesario además colocar algún accesorio auxiliar como un disco de freno en alguna parte de la correa, aunque comúnmente es colocada en la polea motriz.

En definitiva, el programa comercial “Belt Analyst” entrega unos resultados fácilmente replicables con nuestro modelo construido debido a la principal diferencia entre ambos: el programa comercial incorpora dentro de su modelo de un sistema de correa transportadora, un modulo que simula el comportamiento de un motor de inducción con variador de frecuencia y un control PID que le permite saber la velocidad y torque aplicado por la polea motriz, al resolver en forma simultanea las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones de inducción del motor eléctrico. En el modelo construido la ausencia de un modelo de motor de inducción se suple al definir de forma “a priori” una curva de velocidad seguida por la polea motriz de la correa, no considerando el apartado de motores eléctricos y el control industrial. Es a partir de estas diferencias de diseño de los modelos desde donde surgen las diferencias de resultados obtenidos.

Entonces, el modelo construido permite tan solo predecir el comportamiento de la correa transportadora siempre y cuando las curvas de velocidad de polea motriz estén “ya definidas” y que el control PID sigue de forma exacta, o por lo menos con desviaciones mínimas.

## 7. Modelo de correa inclinada de 3km.

La simulación de la correa transportadora de 1 [km] de la sección 6 sirvió para explicar como se simulan las diferentes partes de una correa transportadora y como influyen en el sistema de ecuaciones a resolver. Una vez explicado los detalles a través de la aplicación del modelo a un caso definido arbitrariamente, ahora procedemos en la presente sección a intentar simular correas ya existentes en la industria.

Se intenta simular una correa real como la modelada en el trabajo de Cerda[3], la correa C-01 de la mina Chuquicamata, de 3 [km] de largo entre centros y una capacidad nominal de 11.000[ton/hora] y una elevación de 8,35 [°] con una correa ST-10000, este es un modelo de correa a la vanguardia de la tecnología en su tipo, además de tener instalados dos motores de inducción con control de velocidad incorporado, hechos de manera especial por el fabricante “**ABB**” para no necesitar una caja reductora y ser más eficientes, sin embargo, aparece un problema inesperado dentro del programa comercial “Belt Analyst” debido a que el programa no cuenta dentro de su base de datos de modelos de correa, los parámetros más importantes de la correa ST-10000 para poder simular, y dentro de su base de datos tampoco puede incorporar motores de inducción de tipo especial como el que posee la correa C-01 de la mina Chuquicamata.

Al enfrentar esta limitación dentro del programa comercial, se decidió simular un sistema de correa transportadora lo más parecido a C-01, con el mismo largo entre centros y la misma capacidad de carga nominal pero con una elevación de correa de 29 [m] (0,5[°]) muy menor a los 8,35 [°] de elevación de la correa C-01 debido a las limitaciones de potencia de los motores de inducción disponibles en la base de datos del programa comercial “Belt Analyst”.

El sistema de correa transportadora propuesta para ser simulada en el programa comercial, tiene una disposición general visible en las Figuras 7.1 y 7.2, donde la polea tensora y la polea de cola, se fusionan para ser una sola polea combinada.

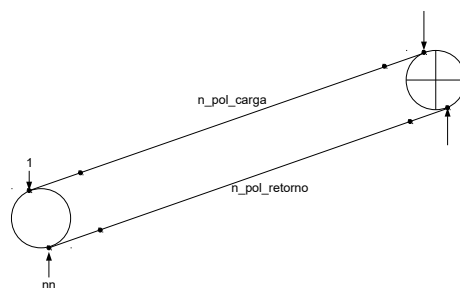


Figura 7.1: Correa transportadora con elevación, donde se muestra en detalle la numeración utilizada en los nodos del modelo de elementos finitos.

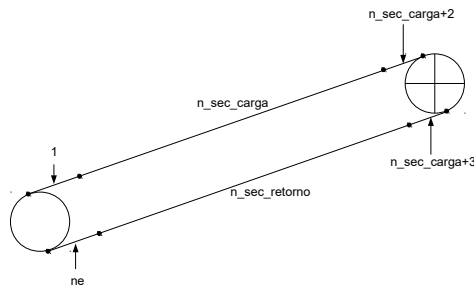


Figura 7.2: Correa transportadora con elevación, donde se muestra en detalle la numeración utilizada en los elementos discretos del modelo de elementos finitos.

### 7.1. Descripción de la correa transportadora.

Finalmente, la correa a simular en este capítulo se detalla en la tabla 7.1 donde se muestran los principales parámetros.

Tabla 7.1: Tabla descriptiva de todos los parámetros que describen a la correa transportadora inclinada de 3 [km]. Valor del factor de amortiguación  $\xi$  obtenido desde el programa “BeltAnalyst” v.20

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidades
Distancia entre centros	$L_c$	3.340	[m]
Capacidad Nominal	$Q_n$	11.000	[t/h]
Velocidad nominal de la correa	$V_c$	7,0	[m/s]
Elevación/Pendiente del recorrido de la correa	$\theta$	0,5	[°]
Tipo de correa		Steel	[-]
Descripción Correa		ST-5400	[-]
Masa por unidad de largo de la correa, sin considerar la carga	$m'_{correa}$	80,1	[Kg/m]
Modulo de elasticidad representativo de la correa.	$E_b$	–	[MPa]
Modulo de elasticidad por m de espesor.	$E^*$	388,5	[MPa · m]
Modulo $E^*$ entregado por el programa Belt Analyst, Anexo F	$E^*$	388.500,0	[N/mm]
1 [N/mm] = $10^3$ [N/m] = $10^3$ [Pa · m]		$388.500 \cdot 10^3$	[Pa · m]
Ancho de la correa.	$B$	1,8	[m]
Peso soportado sobre cada polín de soporte, lado carga.	$F_{z_{carga}}$	7.721	[N]
Peso soportado sobre cada polín de soporte, lado retorno.	$F_{z_{retorno}}$	2.396	[N]
Factor de amortiguación.	$\xi$	0,80	[-]

La masa de la correa por unidad de largo  $m'_{correa}$  es la que nos permite expresar la matriz elemental de inercia como:

$$M_{e_{correa}} = \frac{m'_{correa} \cdot l_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

donde  $l_e$  es el largo del elemento y varía dependiendo si el elemento finito está ubicado en el lado carga

o en el lado retorno. De acuerdo a lo ya descrito en la sección 5.5 para poder representar correctamente la influencia de las fuerzas de resistencia al movimiento aplicadas por los polines, la correa se discretiza de tal manera que los nodos de los elementos finitos siempre estén ubicados sobre las estaciones de polines, por lo tanto, el largo de cada elemento está determinada por la distancia entre polines que varían según estén en el lado carga o en el lado retorno. El valor de  $l_e$  es  $L_{\text{carga}}$  o  $L_{\text{retorno}}$  según sea el caso.

Tabla 7.2: Datos sobre la discretización espacial de la correa.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidad
Distancia entre centros	$L_c$	3.340	[m]
Distancia entre polines, lado carga	$L_{\text{carga}}$	1,52	[m]
número de estaciones de polines, lado carga	$n_{\text{carga}}$	2191	[-]
Distancia entre polines, lado retorno	$L_{\text{retorno}}$	3,05	[m]
número de estaciones de polines, lado retorno	$n_{\text{retorno}}$	1095	[-]
número de elementos totales	$n_e$	3288	[-]
número de nodos totales	$n_n$	3289	[-]
ubicación nodo polea motriz	$n_{\text{motriz}}$	2193	[-]
ubicación nodos polea tensora/cola		1 y $n_n$	[-]
número elemento previo a la polea motriz		2192	[-]
número elemento previo a la polea tensora/cola		1	[-]

De igual forma, las matrices elementales de rigidez y de amortiguación quedan definidas como:

$$K_e = \frac{E^* \cdot B}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (en N/m)} ; \quad C_e = c_{\text{elemento}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde el parámetro de amortiguamiento  $c_{\text{elemento}}$  es

$$c_{\text{elemento}} = \xi \cdot c_{\text{crítico}} = \xi \cdot 2 \cdot \sqrt{k_{\text{elemento}} \cdot m_{\text{elemento}}}$$

### 7.1.1. Descripción de las inercias presentes en la correa.

La matriz elemental de inercia de cada elemento finito no sólo incorpora la inercia de la correa,  $M_{e_{\text{correa}}}$ , sino también la inercia del material cargado sobre la correa y la inercia que aportan las poleas y polines cuando la correa está en movimiento. Una descripción general de como está compuesta una matriz elemental de inercia de una sección de correa ubicada en el lado carga es la siguiente ecuación:

$$M_{e_{\text{lado carga}}} = M_{e_{\text{correa}}} + M_{e_{\text{carga}}} + M_{e_{\text{polines}}} + M_{e_{\text{polea}}} \quad (7.2)$$

siendo  $M_{e_{\text{correa}}}$  la matriz de inercia de la correa ya descrita en la ecuación (6.4),  $M_{e_{\text{carga}}}$  la inercia del material transportado y  $M_{e_{\text{polines}}} + M_{e_{\text{polea}}}$  el aporte a la matriz de inercia de las poleas y polines, este ultimo termino se explicó en forma más detallada en la sección 6.2.

La matriz elemental de inercia de un elemento finito ubicado en el lado retorno de la correa estará

compuesto por

$$M_{e_{\text{lado retorno}}} = M_{e_{\text{correa}}} + M_{e_{\text{polines}}} + M_{e_{\text{polea}}} \quad (7.3)$$

donde debido a que la correa en el lado retorno circula ya habiendo descargado el material, el componente  $M_{e_{\text{carga}}}$  no existe.

Para describir correctamente al material cargado sobre la correa y su aporte a la matriz de inercia es necesario conocer sus principales parámetros, que son presentados en la tabla 7.3.

Tabla 7.3: Características del material transportado.

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidades
Densidad del mineral cargado	$\rho_m$	1442	[Kg/m <sup>3</sup> ]
Ángulo de sobrecarga	$\phi_s$	15°	ángulo sexagesimal
Área de la sección transversal de la carga sobre la correa	$A_m$	0,303	[m <sup>2</sup> ]
Masa por unidad de largo	$m'_{\text{carga}}$	436,93	[Kg/m]

La matriz elemental de inercia que representa a la inercia del material cargado sobre la correa es:

$$M_{e_{\text{carga}}} = \frac{m'_{\text{carga}} \cdot l_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

donde  $m'_{\text{carga}}$  es la masa por unidad de largo del material sobre la correa. Este componente de la matriz de inercia sólo está presente en las secciones de la correa ubicados en el lado de carga de la correa.

## 7.2. Descripción de polines.

La inercia que aportan los polines será distinta según que lado de la correa se modela. Los datos que representan a estas estaciones de polines se presentan a continuación:

Tabla 7.4: Datos de los polines de carga. Los datos entregados por el programa comercial “Belt Analyst” desde su base de datos de polines.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidad
número de polines por estación	$n_{pc}$	3	[-]
Masa reducida de un polín	$m_{pc}$		[Kg]
Masa equivalente polines lado carga	$m_c$	70,1	[Kg]

Tabla 7.5: Datos de los polines de retorno. Los datos entregados por el programa comercial “Belt Analyst” desde su base de datos de polines.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidad
número de polines por estación	$n_{pr}$	2	[-]
Masa reducida de un polín	$m_{pr}$		[Kg]
Masa equivalente polines lado retorno	$m_r$	58,5	[Kg]

Las masas equivalentes  $m_c$  y  $m_r$  se incorporan dentro de la matriz global de inercia como masas puntuales, a lo largo de la diagonal de la matriz, su ubicación en cada fila y columna depende de la ubicación del nodo en el modelo y se utiliza  $m_c$  o  $m_r$  según este ubicado en el lado carga o retorno, respectivamente.

### 7.3. Descripción de las fuerzas aplicadas.

**Fuerzas de cuerpo.** Las fuerzas de cuerpo  $\mathbf{f}_{\text{cuerpo}}$  cuyo origen es la fuerza de gravedad, se corresponden con las fuerzas de elevación de carga  $F_{st}$  de la norma DIN 22101, como ya se vio en la sección 5.6.3.

En nuestro caso la elevación según la tabla 7.2 es de  $\theta = 0,5^\circ$  y la fuerza de cuerpo para cada elemento finito depende de si está en el lado carga o retorno. Si el elemento finito está en el lado carga entonces la fuerza de cuerpo es:

$$\{f_{\text{cuerpo}}\} = (-1) \cdot (m'_{\text{correa}} + m'_{\text{carga}}) \cdot l_e \cdot g \cdot \sin(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

y si el elemento finito está en el lado retorno entonces:

$$\{f_{\text{cuerpo}}\} = (m'_{\text{correa}}) \cdot l_e \cdot g \cdot \sin(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Las variaciones en el sentido de las fuerzas de cuerpo se explican mirando la disposición general de la correa y del sentido de las fuerzas de gravedad presentes. En el lado carga, las fuerzas de gravedad son de un sentido contrario el sentido de movimiento de la correa, y en el lado retorno, por el contrario los sentidos de las fuerzas de cuerpo y movimiento coinciden, por lo tanto, la fuerza de cuerpo es positiva.

**Fuerzas de resistencia al movimiento.** El como se calculan las fuerzas de resistencia ya se ha explicado previamente en las secciones 5.6 y 6.4. Para obtener el término  $f_I^{\text{ext}}$  de un sistema de ecuaciones como 3.40 de una manera práctica, el procedimiento utilizado es el explicado en la sección 6.4 pero los parámetros utilizados en nuestro caso, son los presentados en la tabla 7.6 para una correa de 3 [km].

Tabla 7.6: Valores de los parámetros obtenidos desde el programa “Belt Analyst” para un  $L_c = 3340[m]$ .

Parámetro	Valor
$f_{\text{carga}}$	0,02
$f_{\text{retorno}}$	0,02
$q_o$	0,7
$q_u$	0,9
$C$	1,03

## 7.4. Descripción de poleas.

Desde la Figura 7.1, se puede observar que la polea de cola y la polea tensora se combinan en una sola polea, por lo tanto, la masa de la polea combinada (cola/tensora) queda distribuida en los nodos de frontera de modelo finito unidimensional. De igual forma, las fuerzas tensoras ejercidas por la polea tensora quedan aplicadas a los nodos de frontera del modelo, como se ve en la Figura 7.3.

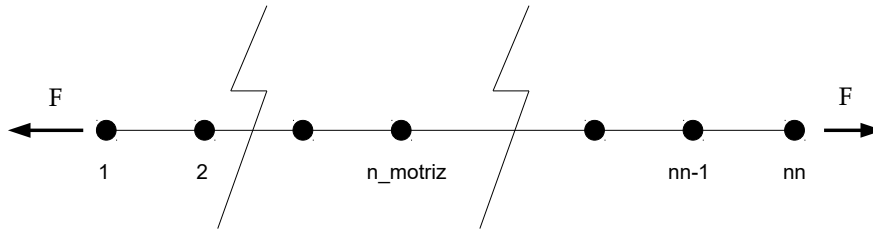


Figura 7.3: Modelo de correa transportadora con elevación, que se muestra extendida en el eje x y en el que se muestra la influencia de la polea tensora como las fuerzas externas  $F$  aplicadas en los nodos de frontera.

La polea motriz se describe de acuerdo a lo ya explicado en las secciones anteriores 5.3.3 y 6.7, donde el nodo que representa la polea motriz tiene un movimiento conocido.

La polea combinada (cola/tensora) se describe en las ecuaciones como una polea tensora omitiendo los aspectos de polea de cola. El desarrollo de las ecuaciones es el explicado en las secciones 5.3.3 y 6.6. El valor de la masa del sistema tensor completo  $m_{pt}$  está distribuida como se explicó en la sección 6.5.

Los datos de masas equivalente de las dos poleas presentes en el modelo están descrita en la Tabla 7.7.

Tabla 7.7: Datos sobre las poleas ubicadas en la correa transportadora. Datos obtenidos desde el programa “BeltAnalyst” v.20.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidad
masa polea motriz	$m_{\text{polea motriz}}$	8365,15	[Kg]
masa polea tensora/cola	$m_{\text{polea cola}}$	6813,75	[Kg]
masa polea tensora+contrapeso	$m_{pt}$	206570,0	[Kg]

## 7.5. Sistema de ecuaciones del modelo.

La polea motriz, tiene un movimiento que es conocido y sigue la curva de harrison descrita por las ecuaciones (6.3), (6.1) y (6.2) siendo  $\bar{a}_{p,motriz}$ ,  $\bar{v}_{p,motriz}$  y  $\bar{a}_{p,motriz}$  variables conocidas que siguen un movimiento de detención controlada con unos parámetros que son presentados en la Tabla 7.8.

El sistema de ecuaciones inicial que representa el modelo finito de una correa, es el mismo descrito

Tabla 7.8: Parámetros principales de la curva de harrison seguida por la velocidad de la polea motriz.

Parámetro	Valor	Unidad
Velocidad inicial $V_b$	7,00	[m/s]
Tiempo de frenado $T_a$	30	[s]

en la ecuación (3.40):

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}_{\text{cuerpo}} \quad (7.7)$$

cuyos términos quedan reescritos de la siguiente manera, siguiendo un razonamiento semejante al explicado en la sección 6.8;

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{M}'']_{n-1 \times n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n_{\text{motriz}}-1} \\ a_{n_{\text{motriz}}+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + [\mathbf{C}']_{n-1 \times n-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n_{\text{motriz}}-1} \\ v_{n_{\text{motriz}}+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + [\mathbf{K}']_{n-1 \times n-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n_{\text{motriz}}-1} \\ u_{n_{\text{motriz}}+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \\
 & \dots = \begin{bmatrix} \frac{-W_{pt}}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{W_{pt}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\text{roce},2} \\ F_{\text{roce},3} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{\text{roce},n-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n_{\text{motriz}}-1,n_{\text{motriz}}} \\ m_{n_{\text{motriz}}+1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ m_{n,n_{\text{motriz}}} \end{bmatrix} \cdot \bar{a}_{\text{p.motriz}} - \dots \\
 & \dots - \begin{bmatrix} c_{1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n_{\text{motriz}}-1,n_{\text{motriz}}} \\ c_{n_{\text{motriz}}+1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ c_{n,n_{\text{motriz}}} \end{bmatrix} \cdot \bar{v}_{\text{p.motriz}} - \begin{bmatrix} k_{1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{n_{\text{motriz}}-1,n_{\text{motriz}}} \\ k_{n_{\text{motriz}}+1,n_{\text{motriz}}} \\ \vdots \\ k_{n,n_{\text{motriz}}} \end{bmatrix} \cdot \bar{d}_{\text{p.motriz}} + \mathbf{f}_{\text{cuerpo}} \quad (7.8)
 \end{aligned}$$

que de una forma equivalente y más simplificada queda escrita como

$$[\mathbf{M}'']\{\ddot{u}\} + [\mathbf{C}']\{\dot{u}\} + [\mathbf{K}']\{u\} = \mathbf{f}_{\text{pesoW}} + \mathbf{f}_{\text{fuerzas roce}}(\dot{u}, \dots) + \mathbf{f}_{\text{movimiento polea}}(t) + \mathbf{f}_{\text{cuerpo}} \quad (7.9)$$

donde  $[\mathbf{M}'']$  es una nueva matriz de inercia que como ya se explicó en la sección 6.6, es una nueva matriz

de inercia que se obtiene luego de formar una matriz global de inercia donde se incorpora una matriz elemental de inercia adicional descrita en (6.32) a través de la matriz de conexión (6.33), que representa a la inercia de la polea tensora en un movimiento lateral ( $m_{pt} \cdot a_{lateral\ polea}$ ).

El término  $\mathbf{f}_{pesoW}$  es el vector de fuerzas que contiene a la fuerza ejercida por el contrapeso y es constante,  $\mathbf{f}_{fuerzas\ roce}$  es el vector de fuerzas que contiene a todas las fuerzas de roce aplicadas por los polines a la correa y van a variar dependiendo de la velocidad en cada punto, y por último  $\mathbf{f}_{movimiento\ polea}$  es el vector fuerza que tienen su origen en la detención controlada de la correa y en su curva de velocidad que varía en el tiempo. Así tenemos un sistema de ecuaciones que puede ser resuelto utilizando el método de diferencias centrales ya descrito en la sección (4.2.1).

## 7.6. Resultados Obtenidos.

Los valores calculados y presentados en esta sección se obtienen luego de ingresar los parámetros de la correa descrita anteriormente, en el modelo construido en el programa MATLAB cuyo código es presentado en el anexo I.

Los resultados obtenidos luego de calcular la tensión y la velocidad transiente a lo largo de la correa utilizando el método de diferencias centrales es comparada con los resultados obtenidos con el programa comercial “Belt Analyst” de la compañía “Overland Conveyor”, y que son mostrados en el anexo G.

La correa de 3 [Km] de distancia entre centros, que se propone modelar es descrita por unos parámetros de operación presentados en la Tabla 7.1 con una detención controlada descrita en la tabla 7.8, dichos parámetros se ingresan en el programa comercial “Belt Analyst” que es capaz de diseñar una correa que cumpla con esos requerimientos siguiendo la norma DIN22101, y entregar las características de los componentes de la correa transportadora diseñada en un informe, como el presentado en el Anexo G. Es desde ese informe entregado por el programa comercial desde donde se extraen los datos que servirán para caracterizar a la correa, material cargado, las poleas y polines en el modelo de elementos finitos construido, buscando con esto alcanzar unos resultados que pueden ser comparados con los entregados por el informe comercial, al estar ambos modelos representando a la misma correa de 3 [Km]. Los datos extraídos y utilizados para describir el sistema de correa transportadora se exponen en las tablas 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 6.7 y 7.7.

### 7.6.1. Velocidad en la polea motriz.

En la Figura 7.4 se muestra la curva de velocidad parada en 30[s] seguida por la polea motriz en el modelo construido y junto a ella está la curva de velocidad seguida por la polea motriz en el programa comercial “BeltAnalyst”, comparando ambas curvas a través del error relativo tomando como curva de referencia a la curva de velocidad entregada por “BeltAnalyst” al ser una mejor representación de una correa transportadora real. El error relativo es presentado en el gráfico de la Figura 7.5.

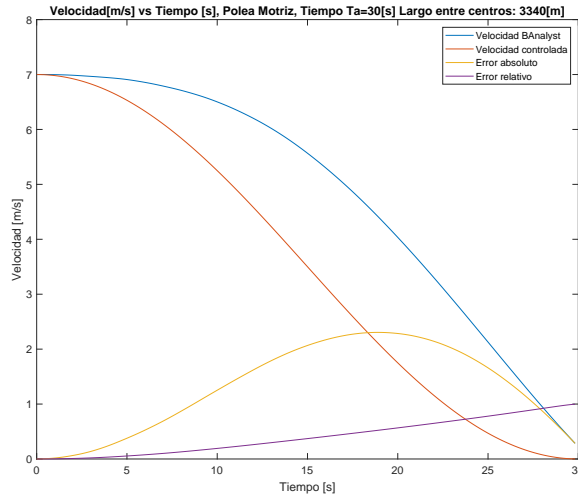


Figura 7.4: Curva de velocidad de la polea motriz obtenida de nuestro modelo a través del método de diferencias centrales junto a la curva de velocidad seguida por la polea motriz según el programa “BeltAnalyst”.

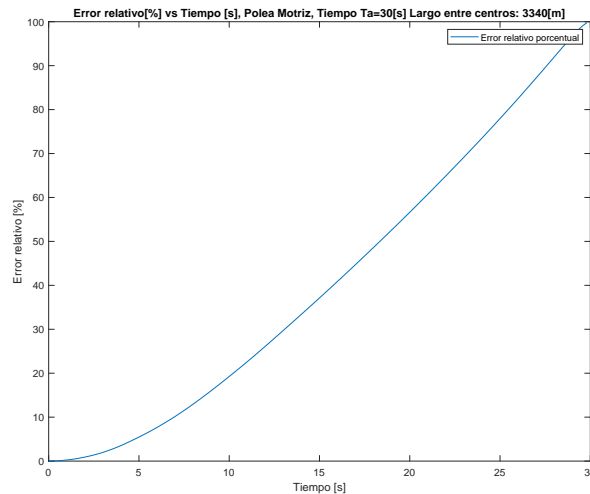


Figura 7.5: Error relativo de la velocidad de la polea motriz en el intervalo de tiempo 0-30[s] antes de que la velocidad se haga nula y el error relativo se indetermine.

### 7.6.2. Tensión en la polea motriz.

En la Figura 7.6 se muestran los valores de tensión para la sección de correa ubicada justo antes de llegar a la polea motriz durante el proceso de parada controlada en 30[s] en el modelo construido y en el modelo comercial, el error relativo porcentual está presentado en la Figura 7.7.

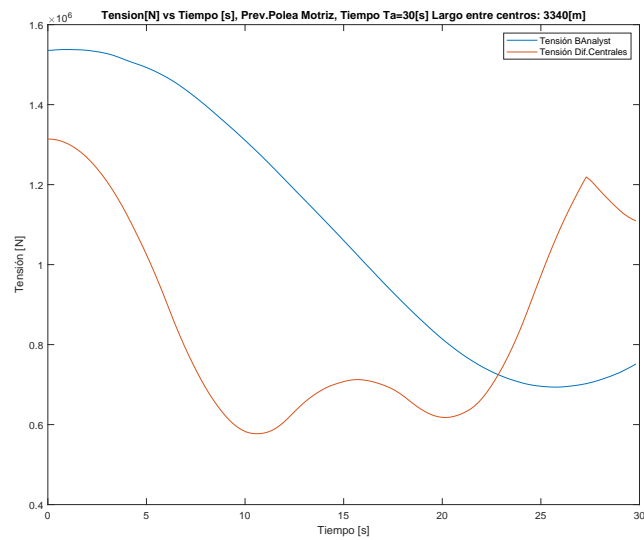


Figura 7.6: Tensión en la sección de correa previa a la polea motriz, calculada por el modelo construido y junta a ella, los resultados obtenidos por el programa “Belt Analyst”.

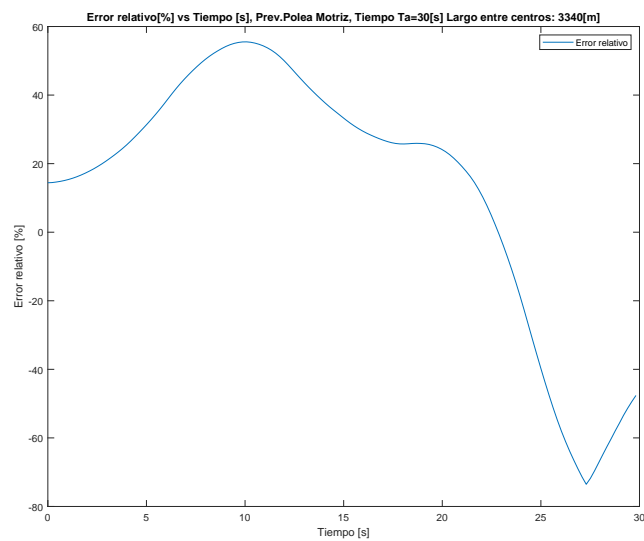


Figura 7.7: Error relativo en la tensión de la polea motriz, presente en la tensión calculada comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

### 7.6.3. Velocidad en la polea tensora.

La velocidad de la polea tensora se determina luego de derivar con respecto al tiempo la ecuación (5.2) que representa el movimiento tangencial de la polea, entregándonos la ecuación de velocidad:

$$v_{\text{polea tensora}} = \frac{v_1 + v_{nn}}{2} \quad (7.10)$$

En la Figura 7.8 se muestra la velocidad de la correa en la sección ubicada sobre la polea tensora, obtenida por el modelo de elementos finitos, y junto a la velocidad calculada se grafica la velocidad de esa misma sección pero calculada según los métodos propios del programa comercial “Belt Analyst”, y de igual forma que las secciones anteriores, el error relativo al comparar ambas curvas se muestra en la Figura 7.9.

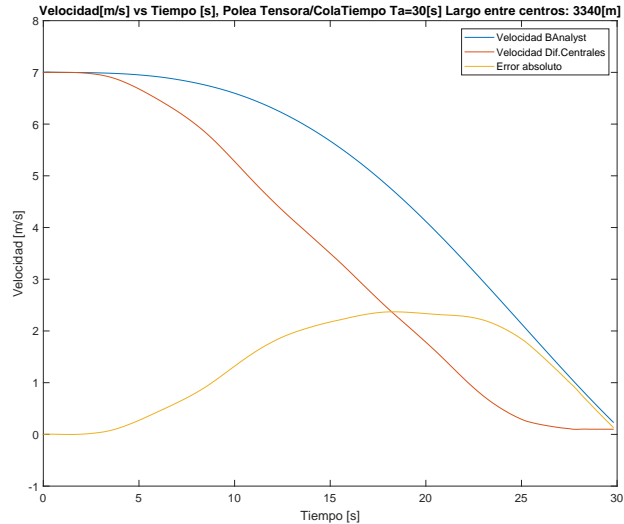


Figura 7.8: Velocidad en la polea tensora obtenida por el modelo construido y junto a ella, la velocidad entregada por el programa “Belt Analyst”.

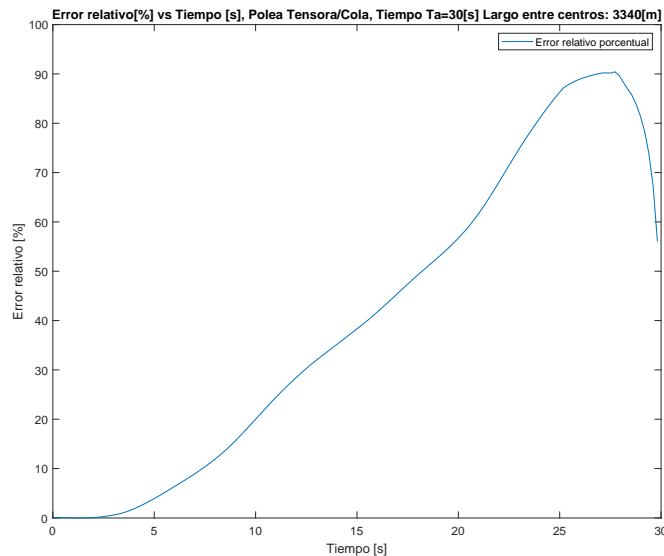


Figura 7.9: Error relativo de la velocidad de la polea tensora en el intervalo de tiempo 0-30[s] antes de que la velocidad se haga nula y el error relativo se indetermine.

#### 7.6.4. Tensión en la polea tensora.

Los resultados obtenidos para la tensión en la sección de correa previa a la polea tensora, es decir, la sección de correa ubicada inmediatamente en el lado derecho de la polea tensora (numerada como “ $ne$ ” en la Figura 7.2). Los resultados entregados por el modelo construido están presentados junto a los resultados entregados por “Belt Analyst” en la Figura 7.10 y el error relativo que compara ambos resultados en la Figura 7.11.

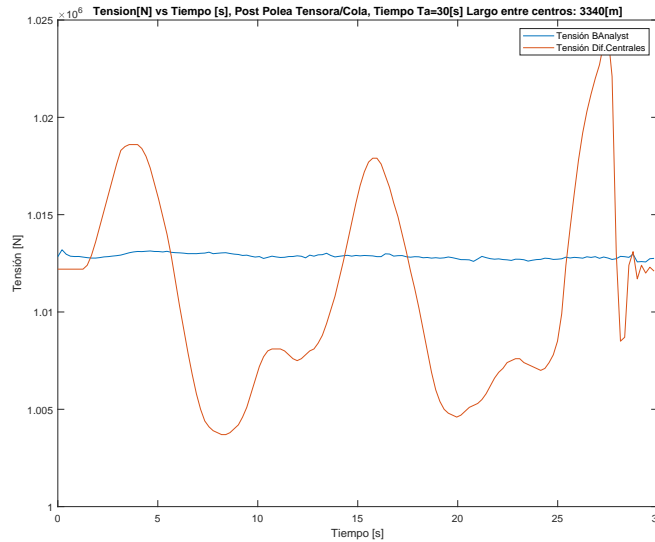


Figura 7.10: Tensión en la polea tensora (en la sección ubicada a la derecha de la polea tensora) comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

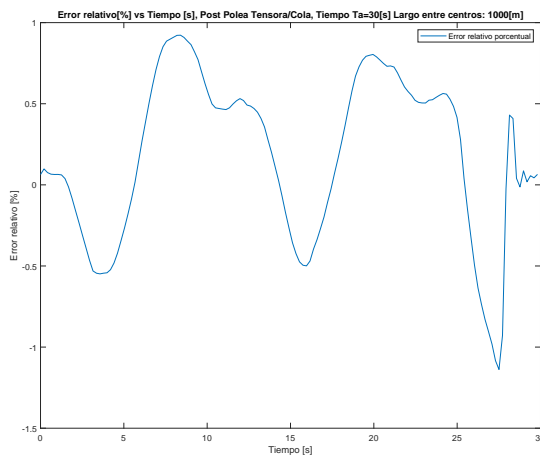


Figura 7.11: Error relativo presente en la tensión de la polea tensora comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

### 7.6.5. Comentarios.

Los errores relativos obtenidos (ver Tablas 7.9 y 7.10) nos permiten afirmar que los resultados entregados por el modelo de correa transportadora propuesto en este trabajo y los entregados por el modelo comercial de “Belt Analyst” tienen grandes diferencias, y el modelo propuesto no es capaz de predecir correctamente el comportamiento de la velocidad y la tensión sobre la correa.

Tabla 7.9: Síntesis de los resultados obtenidos para la velocidad en los resultados calculados.

Ubicación del nodo	error relativo máximo [%]	ubicación temporal del error máximo
Polea motriz	99,78 %	29,82[s]
Polea tensora/cola	90,43 %	27,20[s]

Tabla 7.10: Síntesis de los resultados obtenidos para la tensión en los resultados calculados.

Ubicación sección de correa	error relativo máximo [%]	ubicación temporal del error máximo
Previa a la Polea motriz	-73,53 %	27,30[s]
Posterior a la Polea tensora/cola	-1,14 %	27,51[s]

Para explicar las diferencias entre los resultados obtenidos y los resultados entregados por el programa comercial que se busca emular, se utilizan los argumentos ya expuestos también en la sección 6.9.7: las diferencias en las curvas de tensiones tienen su origen en la diferencia de las curvas de velocidad seguidas por la polea motriz. Debido a como está diseñado el programa comercial “Belt Analyst” es imposible definir de forma arbitraria la curva de velocidad seguida por la polea motriz en el programa, debido a que dicha curva depende de los resultados entregados por su modelo interno de motor de inducción con control PID, que está configurado con los siguientes parámetros:

Tabla 7.11: Constantes del control PID de la velocidad. Datos obtenidos desde el informe entregado por “Belt Analyst” y presente en el anexo F.

Constante	Valor [-]
Constante proporcional	0,2
Constante integral	0,2
Constante derivativa	2

El control PID de la velocidad, quizás necesite algunos ajustes para poder seguir de forma exacta la curva de velocidad de Harrison, sin embargo, con la configuración existente y presentada en la tabla 7.11, las diferencias en las curvas de velocidad de la polea motriz se hacen evidentes en la Figura 7.4. Y es desde esa diferencia inicial desde donde se generan los resultados tan diferentes en velocidad y tensión como los que se puede ver en las tablas 7.9 y 7.10, con errores relativos de hasta 99,78 %.

Una forma de alcanzar resultados similares a los generados por el programa comercial sería incorporar al modelo propuesto un motor de inducción con variador de frecuencia y un control PID de velocidad, sin embargo, el programa comercial no informa en ningún momento del modelo de motor de inducción utilizado ni los principales parámetros necesarios para modelar el motor eléctrico usado en la generación de los resultados. Frente a esta dificultad de no poder contar con un modelo matemático de motor de inducción se propone otra forma de generar unos resultados generales que sean comparables a los del modelo comercial, al seguir ambos modelos las mismas curvas de velocidad en la polea motriz.

Debido a que la función de velocidad de la polea motriz en el modelo construido puede ser definida de forma arbitraria, se propone reemplazar la curva de harrison de detención en 30[s] por una nueva curva que nace de interpolar los datos entregados por el programa comercial “Belt Analyst” para la velocidad de la polea motriz, perdiendo con esto un poco del propósito inicial de construir un modelo independiente propio y de correa transportadora, porque pasa a depender de unos datos obtenidos de velocidad en la polea motriz de un programa comercial de simulación de correa transportadora luego de ingresar los datos de detención controlada de las tablas 7.8 y 7.11.

## **7.7. Nuevo planteamiento del problema.**

Desde la sección anterior se establece que para generar unos resultados de velocidad y tensión que sean comparables, las curvas de velocidad predefinidas para la polea motriz deben ser las mismas en ambos modelos: el construido y el comercial, para que los resultados de ambos modelos representen el mismo fenómeno físico de parada controlada de una correa transportadora

Para lograr que en ambos modelos de correa transportadora, la polea motriz siga la misma curva de velocidad se elige modificar la curva de detención controlada en el modelo construido para que sea semejante a la curva de velocidad en la polea motriz entregada por el programa “Belt Analyst”, curva de forma irregular que se obtiene luego de ingresar una curva de harrison (parámetros descritos en la tabla 7.8) como “set value” en un control PID con unos parámetros internos ya mostrados en la tabla 7.11.

En la siguiente sección se muestra la nueva serie de resultados obtenidos por el modelo construido al ingresar en este, una curva de velocidad predefinida obtenida a través de la interpolación de una serie de datos (mostrada en el Anexo K), datos que fueron extraídos desde la curva de velocidad de la polea motriz seguida en el modelo comercial “Belt Analyst” (La curva de azul en la Figura 7.4). La implementación de este nuevo modelo con una nueva curva de velocidad en la polea motriz en un código escrito en “MATLAB” se puede ver en el Anexo J.

## 7.8. Nuevos resultados obtenidos.

### 7.8.1. Nueva velocidad en la polea motriz.

En la Figura 7.12 se muestra la curva de velocidad seguida en el modelo construido por la polea motriz en su parada controlada en 30[s] y junto a ella está la curva de velocidad seguida por la polea motriz en el programa comercial “BeltAnalyst” comparando ambas curvas a través del error relativo considerando que la curva de velocidad de “BeltAnalyst” es la curva que mejor representa lo que ocurre realmente en la correa transportadora real, dicho error relativo es presentado en el gráfico de la Figura 7.13.

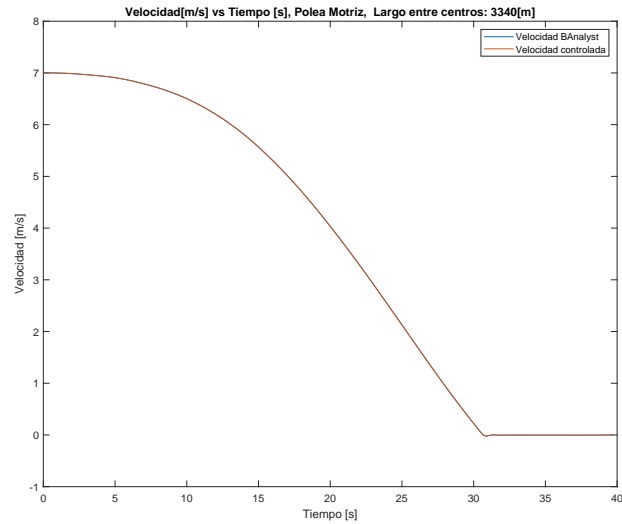


Figura 7.12: Curvas de velocidad de la polea motriz. La curva en rojo representa la velocidad en el modelo construido junto a ella, la curva de velocidad seguida por la polea motriz

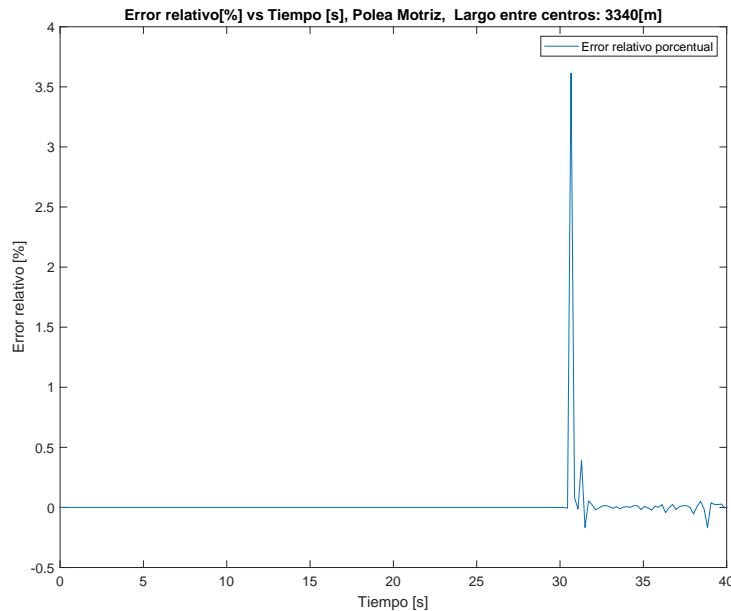


Figura 7.13: Error relativo de la velocidad de la polea motriz en el intervalo de tiempo 0-30[s] antes de que la velocidad se haga nula y el error relativo se indetermine.

### 7.8.2. Nueva velocidad en la polea tensora/cola.

La velocidad de la polea tensora se determina luego de derivar con respecto al tiempo la ecuación (5.2) que representa el movimiento tangencial de la polea, entregándonos la ecuación de velocidad:

$$v_{\text{polea tensora}} = \frac{v_1 + v_{nn}}{2} \quad (7.11)$$

En la Figura 7.14 se muestra la velocidad de la correa en la sección ubicada sobre la polea tensora, obtenida por el modelo de elementos finitos, y junto a ella, la velocidad en la polea tensora pero calculada según los métodos propios del programa comercial “Belt Analyst”, y de igual forma que las secciones anteriores, el error relativo al comparar ambas curvas es mostrada en la Figura 7.15.

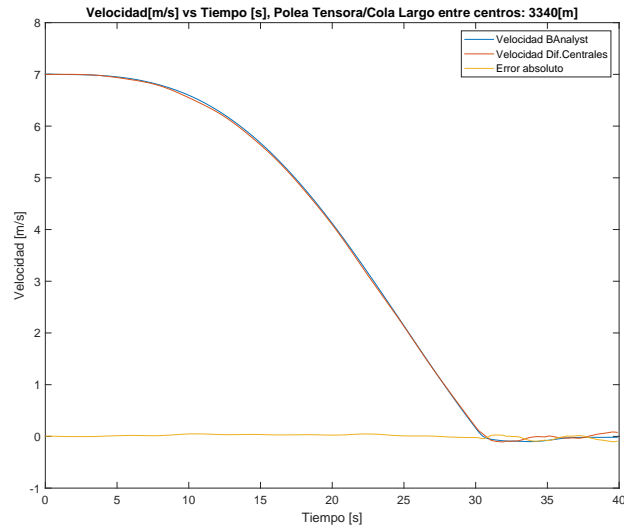


Figura 7.14: Velocidad en la polea tensora obtenida por el modelo construido y junto a ella, la velocidad entregada por el programa “Belt Analyst”.

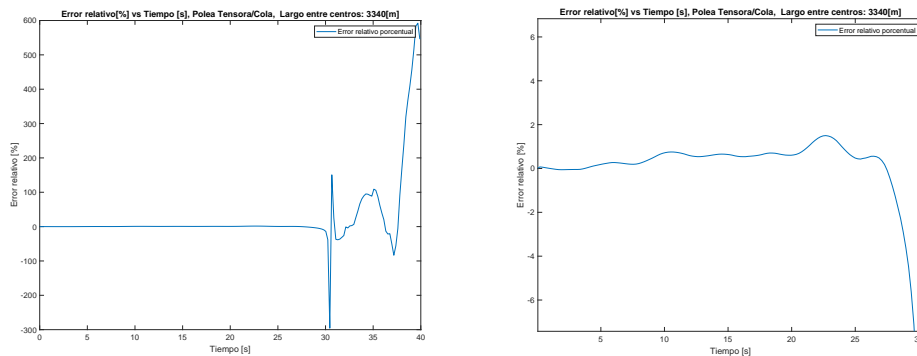


Figura 7.15: Izquierda: Error relativo de la velocidad de la polea tensora en el intervalo de tiempo de 0-40[s]. Derecha: Error relativo en el intervalo 0-30[s] antes de que la velocidad se haga nula y el error relativo se indetermina.

### 7.8.3. Nueva tensión en la polea motriz.

En la Figura 7.16 se muestran los valores de tensión para la sección de correa ubicada justo antes de llegar a la polea motriz durante el proceso de parada controlada, el error relativo porcentual al comparar ambos resultados están presentados en la Figura 7.17.

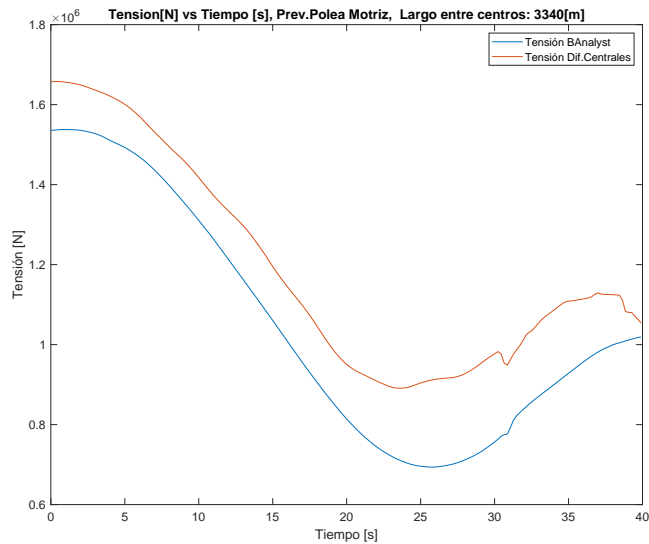


Figura 7.16: Tensión en la sección de correa previa a la polea motriz, calculada por el modelo construido y junta a ella, los resultados obtenidos por el programa “Belt Analyst”.

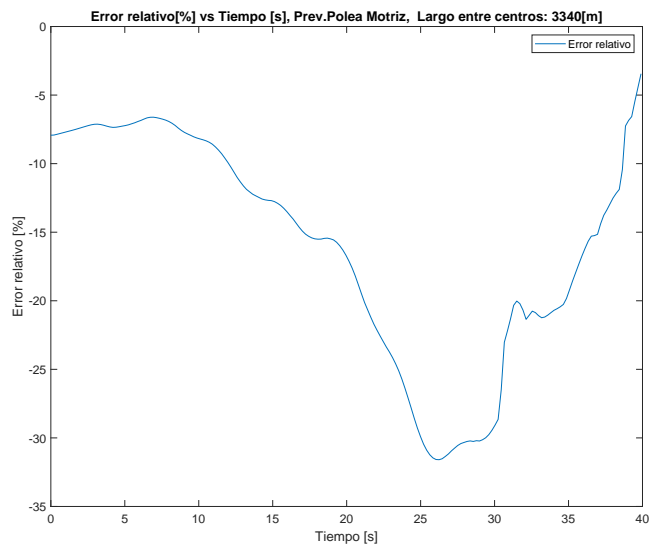


Figura 7.17: Error relativo en la tensión de la polea motriz, presente en la tensión calculada comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

#### 7.8.4. Nueva tensión en la polea tensora/cola.

Los resultados obtenidos en el modelo construido para la tensión en la sección de correa en contacto en la polea tensora (ubicada inmediatamente en el lado derecho inferior de la polea) están presentados junto a los resultados entregados por el programa “Belt Analyst” en la Figura 7.18 y el error relativo que compara ambos resultados se muestra en la Figura 7.19.

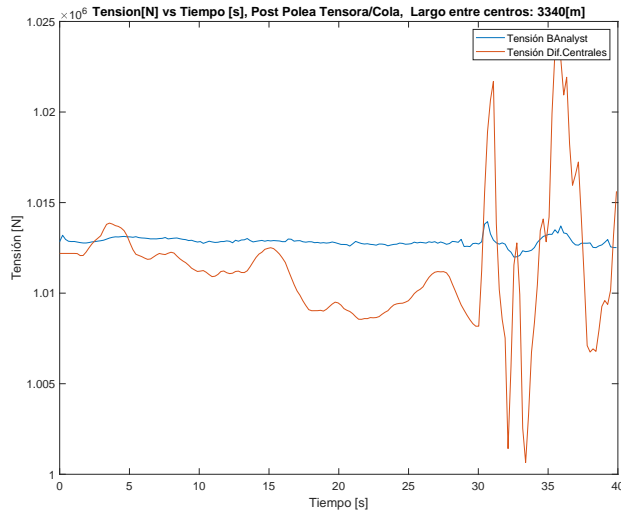


Figura 7.18: Tensión en la polea tensora (en la sección ubicada a la derecha de la polea tensora) comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

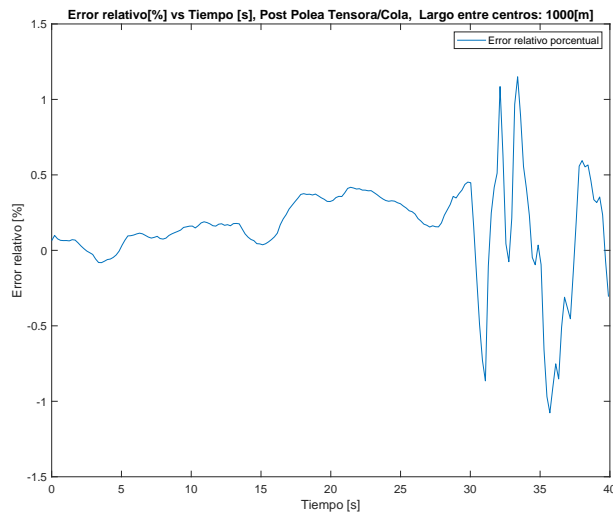


Figura 7.19: Error relativo presente en la tensión de la polea tensora comparada con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

### 7.8.5. Comentarios de los nuevos resultados.

Al ingresar los parámetros del sistema de correa transportadora junto con la nueva curva de velocidad predefinida para la polea motriz en el modelo construido en el programa MATLAB (Anexo J), se obtiene una nueva serie de datos que ya fueron presentados en la sección anterior 7.8.

Las principales características de la nueva serie de resultados obtenidos para velocidad y tensión son sintetizados en las tablas 7.12 y 7.13 donde se tabulan los errores relativos obtenidos luego de comparar los resultados entregados por el modelo construido con los resultados entregados por el programa comercial “Belt Analyst”. Son estos mismos datos los que nos permiten afirmar que la curva de velocidad seguida por la polea motriz es casi exactamente la misma en el modelo comercial “Belt Analyst” y en el modelo construido. Esto se puede observar en la Figura 7.12 donde las curvas de velocidad en la polea motriz seguidas por ambos modelos es idéntica.

Como se esperaba, los valores de velocidades y tensiones obtenidas en las secciones de correa de interés son muy cercanas a las entregadas por el programa comercial, como se ve en los bajos errores relativos mostrados en las tablas 7.12 y 7.13, que son mucho menores si son comparados con los resultados de la sección 7.6.5 y los errores relativos en las tablas 7.9 y 7.10.

Tabla 7.12: Síntesis de los resultados obtenidos para la velocidad en los resultados calculados en los primeros 30 segundos.

Ubicación del nodo	error relativo máximo [%] en la velocidad	ubicación temporal del error máximo
Polea motriz	-0,032 %	29,82[s]
Polea tensora/cola	-9,47 %	29,82[s]

Tabla 7.13: Síntesis de los nuevos resultados obtenidos para la tensión en los resultados calculados en los primeros 30 segundos.

Ubicación sección de correa	error relativo máximo [%] en la tensión	ubicación temporal del error máximo
Previa a la Polea motriz	-31,59 %	26,25[s]
Posterior a la Polea tensora/cola	0,45 %	29,82[s]

A partir de los bajos errores relativos en el cálculo de tensiones y velocidades es posible afirmar que el modelo construido es capaz de alcanzar resultados similares a los entregados por un programa comercial, siempre y cuando la curva de velocidad seguida por la polea motriz en ambos programas sea la misma.

## 8. Conclusiones, recomendaciones y aspectos del diseño.

Las principales dificultades al momento de modelar una correa transportadora están en incorporar las fuerzas de resistencia al movimiento y el comportamiento viscoelástico de la correa al modelo construido.

En la sección 2 se intentó construir un modelo de resistencia al movimiento que entregue una relación entre la velocidad de la polea sobre la estación de polines y la fuerza de resistencia al movimiento ejercida sobre la correa, sin embargo, como se puede ya se explico en la sección 2.5 es imposible establecer dicha relación sin contar con unos datos experimentales confiables y para amplios rangos de frecuencia y temperatura, cuestión que necesitaría una gran inversión en investigación y ensayos en laboratorio. Para poder superar este obstáculo se utiliza la norma DIN22101 para calcular la fuerza de resistencia al movimiento, en la sección 5.6, que luego se complementará con un modelo propio de roce estático como el mostrado en la sección 6.4.

En la sección 5 se utiliza el método de elementos finitos descritos en la sección 3 pero aplicado ya en una correa transportadora genérica, donde además se incorporan las ecuaciones que representan a las poleas y las fuerzas de resistencia ya estudiadas en la sección 2 generando un sistema de ecuaciones que representa a la correa y que será resuelto con el método de calculo numérico explicado en la sección 4.

El último paso de todo este desarrollo debería ser comparar los resultados obtenidos por el modelo, con los valores medidos “in situ” en una correa transportadora utilizada en la industria bajo un régimen en detención controlada, sin embargo, aquello también requiere tener disponibilidad y acceso a una correa transportadora ya instalada y una inversión en sensores y tiempo para realizar dichas mediciones en terreno y sin embargo se carece de ambas, por lo tanto, para superar esta nueva dificultad en este trabajo se busca demostrar la efectividad del modelo solo buscando emular los resultados entregados por el programa comercial “Belt Analyst” con los resultados calculados por el modelo construido al simular ambos una misma correa transportadora en detención controlada. Considerando que “Belt Analyst” es una empresa ya establecida de “software” que ha vendido sus programas de correas transportadoras a la industria durante bastantes años, es posible establecer este programa comercial como un modelo de referencia en la industria en cuanto a calidad de resultados en simulación de correas trasportadoras y frente a la ausencia de valores reales de velocidad y tensión con los cuales establecer una comparación, se utiliza como sustituto equivalente los resultados entregados por un programa comercial (“Belt Analyst”) con años de desarrollo y experiencia en lograr que su modelo de correa represente fielmente el comportamiento de una correa real.

Inicialmente, nuestro modelo construido se aplica en una correa horizontal genérica de 1 [km] con dos objetivos: primero para explicar el modelo construido y sus elementos de una manera más explícita y menos teórica para mostrar, en contexto, que representa cada parámetro ingresado y que suposiciones en detalle se utilizaron en el modelo, y segundo para comparar estos primeros resultados con los resultados entregados por el programa comercial para el mismo tipo de correa.

## Conclusiones del modelo de 1[km].

Durante el ejercicio de modelar una correa de 1[km] como la presentada en la sección 6, se muestran una serie de resultados obtenidos luego de ingresar los mismos parámetros de entrada en ambos modelos (el modelo comercial de “Belt Analyst” y el modelo construido), con excepción de la curva de velocidad en la polea motriz donde ambas difieren, como se puede ver en la tabla 6.10. Dichas diferencias como ya se explicaban en la sección 6.9.7 tienen su origen en la presencia de un modelo de motor de inducción con variador de frecuencia (VFD) y control PID de velocidad dentro del modelo comercial de “Belt Analyst”, mientras que en el modelo construido se carece de ese elemento acoplado a la velocidad de la polea motriz, al definirse “a priori” (como se explica en la sección 5.3.1) la curva de velocidad a seguir, ignorando el apartado electromecánico y de control industrial al asumir que los elementos de potencia y control en la correa transportadora a modelar, eran capaces de controlar la velocidad de la polea motriz, y establecer en ella una curva de harrison de detención controlada.

De los resultados obtenidos presentados en la sección 6 se obtuvieron errores y diferencias considerables en velocidades y tensiones, sobretodo en la sección más crítica de todas, la sección previa a la polea motriz. Allí donde el programa comercial entregaba tensiones positivas en los primeros 30[s], nuestro modelo construido entregaba tensiones negativas y estas diferencias tiene su origen en la curva de velocidad de parada controlada introducida en nuestro modelo construido, que es completamente fiel a la curva de harrison y en cambio, la curva de velocidad seguida por el modelo del programa comercial es comparativamente una curva mucho más suave que la curva de harrison pre-establecida, durante los primeros 30 segundos, como se puede ver en la Figura 6.9. El programa comercial al controlar la velocidad de la polea motriz con un control PID, utiliza la curva de harrison introducida solo como una “curva de referencia” o “set values” en su control PID que en combinación con los valores predeterminados de las constantes “ $K$ ” proporcionales PID ya presentadas en la tabla 6.12 entregan una curva de velocidad diferente y menos fiel a la curva de harrison “preestablecida”. Por lo tanto, las intenciones de lograr emular los resultados del programa comercial se encuentran con una nueva dificultad, la imposibilidad de predeterminar la curva de velocidad de forma directa en el programa comercial, y donde la curva de velocidad solo se puede manipular de forma indirecta a través de las constantes proporcionales  $K$  del control PID del motor de inducción acoplado a la polea motriz.

El camino largo para poder equiparar nuestro modelo construido con el modelo comercial, sería construir un modelo de motor de inducción con un variador de frecuencia incorporado, acoplarlo al modelo de correa transportadora e insertarlo entre ambos modelos, un modelo de control PID sobre el motor de inducción para controlar curva de velocidad de la polea motriz, sin embargo, es aquí donde se vuelve a complicar el problema, el soporte técnico del programa comercial “Belt Analyst” buscando proteger su propiedad intelectual, no comparten los detalles de sus modelos de motor de inducción con variador de frecuencia y no informa cual es el tipo de conexión entre el control PID y el modelo de motor de inducción, la importancia de esta información radica en que la construcción de un modelo de motor necesita conocer los parámetros internos del motor de inducción que determinan la potencia aplicada en el sistema de correa transportadora. Se presenta entonces una nueva necesidad, la de lograr que las curvas de velocidad sean similares en la polea motriz para el modelo construido y el modelo comercial teniendo en

cuenta la imposibilidad de “fijar” la curva de velocidad en el programa comercial de forma manual. La superación de esta dificultad se explica de forma explícita en la sección siguiente, durante el modelado de una correa de 3[km].

### **Conclusiones del modelo de 3[km].**

El sistema de correa transportadora a simular en el modelo construido, y comparar sus resultados con los de un programa comercial, puede ser un sistema imaginario de correa transportadora con características genéricas o un sistema de correa transportadora ya instalado en la industria. Frente a estas posibilidades, una primera intención es modelar una correa en uso en la industria, en especial una correa que aparece ya descrita y estudiada en la bibliografía revisada, porque en los trabajos anteriores en esta materia ya existe un caso infructuoso de modelamiento de una correa transportadora real, específicamente en el trabajo de Cerda [3]. En dicho trabajo se buscaba modelar una correa transportadora de uso en la industria minera, la correa C-01 de Codelco en la mina Chuquicamata, también descrita en el trabajo de Dilefeld [4], sin embargo, los parámetros de dicha correa transportadora al ser ingresadas en el programa termina provocando un bloqueo dentro del programa debido a que se sobrepasan las capacidades del programa comercial “Belt Analyst” al carecer dentro de su base de datos de correas, de las características principales del tipo de correa utilizada, la ST-10000, modelo de correa vanguardia en su tipo. Otra limitación es la potencia instalada en la correa transportadora C-01 de 2 motores de 10000[kW], porque el programa “Belt Analyst” también carece dentro de su base de datos de motores de inducción de esa potencia siendo su máximo, motores de 4750 [kW]. Además la característica principal de los motores de inducción utilizados en la correa C-01, es el ser motores de inducción de alta potencia que no necesitan de cajas reductoras, fabricados especialmente por la empresa “Takraf” y descritos en el trabajo de Dilefeld [4]. Son estas dificultades la que nos impide modelar la correa C-01 del trabajo de Cerda[3] directamente dentro del programa comercial “Belt Analyst”.

Para superar las dificultades mencionadas anteriormente se busca modelar un sistema de correa transportadora con parámetros de operación bastante próximos a los parámetros de la correa C-01 de Codelco pero sin salirnos de las limitaciones de modelamiento del programa comercial “Belt Analyst”. Entonces el sistema de correa transportadora finalmente a modelar es una correa de menor inclinación aunque con igual largo entre centros, capacidad de carga y velocidad nominal, cuyos parámetros en detalle se pueden observar en la sección 7, en especial en la tabla 7.1, donde la potencia instalada es de un motor de 4750 [kW], menor a los 2 motores de 10000[kW] de la correa C-01 y la correa instalada es la ST-5400 (de carga máxima de 5400 [N/mm]), en vez de la correa de ST-10000 presente en la correa C-01.

Es en la sección 7 donde en definitiva se modela una correa transportadora de gran longitud (de 3[Km] de largo entre centros) con los parámetros descritos en la tabla 7.1, y en cuyos resultados presentados en la sección 7.6 se vuelve a presentar el mismo problema con las curvas de velocidad de polea motriz, diferentes para el modelo construido y en el modelo comercial, problema que ya se había presenta en la sección 6. Es aquí donde las conclusiones obtenidas previamente para la sección 6 son utilizadas como base para el análisis de los resultados al modelar una correa inclinada de 3[Km].

Entonces para poder demostrar que el modelo construido es capaz de representar el comportamiento dinámico de la correa transportadora si es alimentada con los parámetros correctos, debemos enfrentar entonces el problema de las notables diferencias y los enormes errores relativos de las curvas de velocidad para la polea motriz. Para eso volvemos a replantear el objetivo de nuestro trabajo: el de demostrar la efectividad del modelo construido en simular el comportamiento de una correa transportadora, buscando que los resultados obtenidos por el modelo construido logren emular los resultados entregados por el programa comercial “Belt Analyst” cuando en ambos modelos se ingresan los mismos parámetros de entrada que corresponden a una misma correa transportadora en detención controlada pero esta vez poniendo énfasis en la curva de velocidad de la polea motriz. Queda entonces hacer todas las modificaciones necesarias para que efectivamente los parámetros de entrada sean iguales en el modelo construido, y eso incluye lograr que la curva de velocidad en la polea motriz sea la misma en ambos, para que así las curvas de velocidad y tensión obtenidas representen el mismo fenómeno físico de parada controlada (con los mismos parámetros) y los resultados calculados puedan ser comparados con los resultados del programa comercial, donde un modelo bien construido de correa transportadora debería obtener unos errores relativos bajos y cercanos a cero.

Como anteriormente se explicó, la causa raíz de los altos errores relativos es la diferencia en los valores de la velocidad de la polea motriz y como la velocidad de la polea motriz en el modelo comercial se desvía de forma significativa de la curva de harrison, curva suave sinusoidal, siendo esta misma curva seguida de forma estricta por la polea motriz en el modelo construido en este trabajo. La razón de que el modelo comercial no siga la curva de harrison de parada suave, es por la presencia del control PID sobre el motor de inducción que está acoplado a la polea motriz, donde la curva de harrison es tomada solo como una curva predefinida de “set-value”, que luego es comparada con los valores medidos en la polea motriz, la modificación de la velocidad en cada tiempo  $t$  es a través de las constantes proporcionales  $K$  que dentro del programa comercial “Belt Analyst” no tienen un ajuste óptimo y por lo tanto, la curva resultante de velocidad no es estrictamente igual a la curva de harrison, para lograr que la velocidad de la polea motriz siga la curva predefinida de forma estricta y lograr así igualar las curvas de velocidad en ambos modelos, se necesitaría de un proceso de ajuste óptimo para las constantes PID dentro del ciclo de funcionamiento del control PID ( Figura 8.1 ), que dentro de este trabajo fue imposible de alcanzar a través de modificar las constantes proporcionales por ensayo y error.

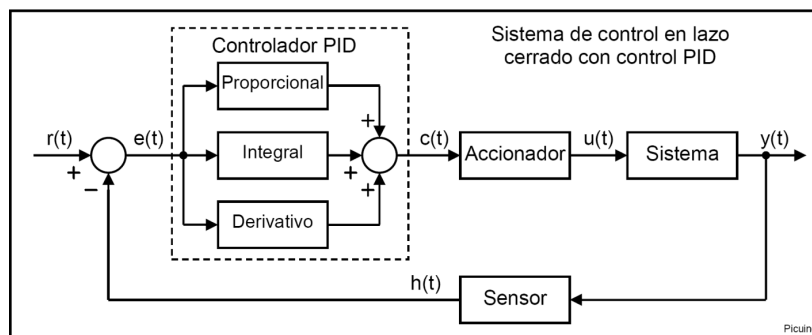


Figura 8.1: Esquema de funcionamiento de un control PID.

El camino largo para entonces lograr igualar ambas curvas, es construir un modelo de motor de inducción, con un variador de frecuencia y un control PID, e incorporarlos dentro de nuestro modelo construido, sin embargo, las dificultades son varias: los parámetros esenciales utilizados dentro del programa comercial y que deben ser conocidos para abordar esta tarea no son compartidos ni informados por la empresa dueña del programa comercial “Overland Conveyor”. En vez, de seguir aquel camino, se opta por un camino alternativo al problema y en vez de buscar manipular la curva de velocidad en el programa comercial para que iguale de forma estricta la curva de harrison seguida por el programa construido, se sigue un camino inverso. Se redefine la curva “predefinida” de velocidad, que deja de ser la curva de harrison y pasa a ser la curva de velocidad efectivamente seguida por la polea motriz en el modelo comercial, que es conocida “a posteriori” del ingreso de los parámetros y de la ejecución del programa, curva conocida porque es la entregada por el programa comercial en el informe de resultados (en el Anexo G) que se puede ver en la Figura 7.12 como una curva azul y cuyos datos extraídos se pueden ver en el Anexo K. Se utiliza dicha curva conocida y se ingresa como parámetro dentro del modelo de correa construido, buscando así que ambos modelos, construido y comercial, frente a los mismos parámetros de entrada entreguen los mismos resultados de salida y se demuestre la emulación de los resultados del programa comercial.

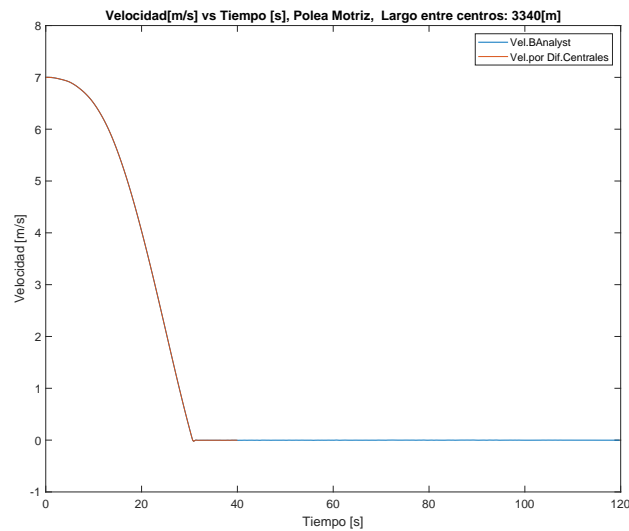


Figura 8.2: Velocidad en la polea motriz, los datos obtenidos por el modelo construido comparados con la velocidad obtenida por el programa “Belt Analyst”.

En consecuencia, se modifica la curva de velocidad de la polea motriz utilizada por el modelo construido, reemplazando la curva de harrison de detención controlada por otra curva exactamente igual a la velocidad de la polea motriz entregada por el programa comercial “Belt Analyst” aún cuando esta curva sea de forma irregular. Para reconstruir la forma de la curva seguida por el modelo comercial, simplemente se utiliza la interpolación para obtener la curva de velocidad a partir de la serie de datos puntuales entregados por el programa comercial “Belt Analyst” y que están adjuntados en el Anexo K. El resultado de esta interpolación se puede ver en la Figura 8.2 que es la misma curva de la Figura 7.12 pero extendida

hasta los 120 segundos, donde se puede observar que ambas curvas de velocidad son iguales.

Al obtener la curva de velocidad e introducirla en el modelo construido, junto a los demás parámetros que representan a la misma correa transportadora de 3[km], se obtienen unos resultados que esta vez logran emular los resultados entregados por el programa “Belt Analyst” con poco margen de error. Comparando los resultados mostrados en las secciones 7.6.5 y 7.8.5 muestran de forma clara una diferencia en los resultados obtenidos, donde los resultados más cercanos a los entregados por el programa comercial “Belt Analyst” y de menor margen de error son los de la sección 7.8.5, donde la curva de velocidad de la polea motriz ingresada como parámetro es la misma en ambos modelos, el comercial y el construido, en cada paso de tiempo.

Los resultados anteriores son calculados hasta el segundo 40 de detención controlada, sin embargo, la comparación de ambos resultados puede ser extendida hasta los 120 segundos de detención controlada por el programa comercial “Belt Analyst”, donde se observa como los resultados calculados logran emular a los resultados del programa comercial y siguen la misma tendencia de las curvas, como se muestra en las figuras 8.2, 8.3, 8.4 y 8.5, mostrándose con esto que el programa construido es capaz de emular los resultados del programa comercial no tan solo en el intervalo de parada controlada, en los primeros 35[s] aproximadamente sino que también sus resultados parecen converger a lo largo del eje del tiempo hacia las curvas entregadas por el modelo comercial con leves diferencias en los 40[s] de parada controlada.

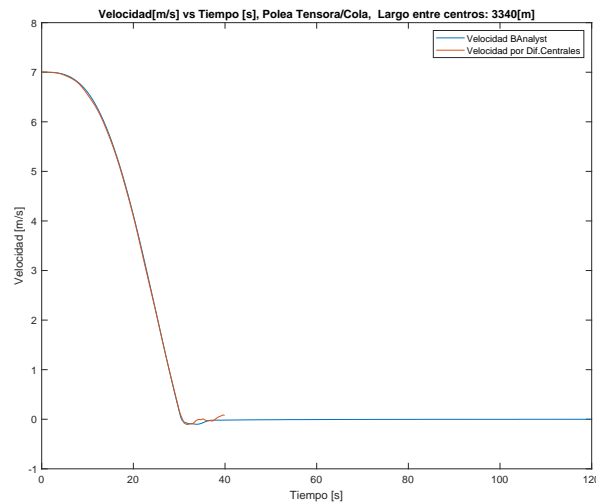


Figura 8.3: Velocidad en la polea tensora/cola, los datos obtenidos por el modelo construido comparados con la velocidad obtenida por el programa “Belt Analyst”.

Los resultados ya presentados permiten afirmar y sostener que el modelo construido aún cuando no ha sido comparado con datos experimentales levantados en terreno desde correas transportadoras realmente instaladas, es un buen avance en la dirección de representar el comportamiento dinámico de correas transportadoras, esto se afirma con base en el hecho de el modelo construido logra emular los resultados de un programa comercial , y demuestra ser un buen modelo que puede predecir el comportamiento de la correa.

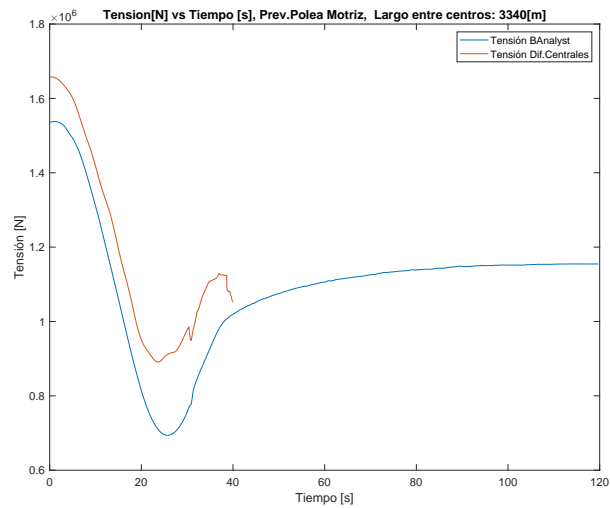


Figura 8.4: Tensión en la polea motriz, los datos obtenidos por el modelo construido comparados con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

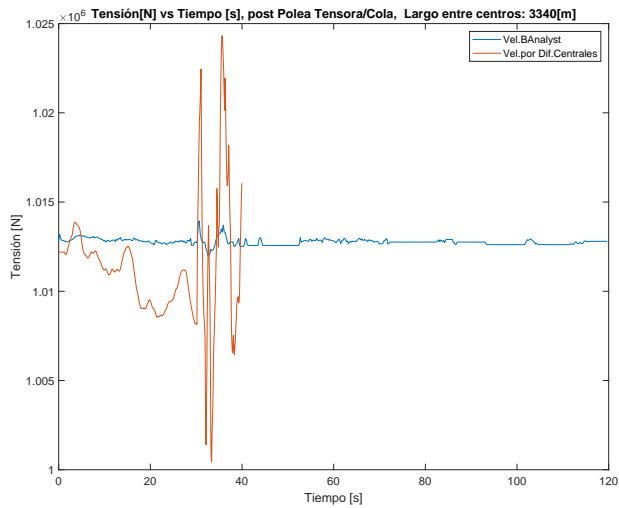


Figura 8.5: Tensión en la polea tensora/cola, los datos obtenidos por el modelo construido comparados con la tensión obtenida por el programa “Belt Analyst”.

Los resultados presentados nos permiten afirmar también que el modelo construido es útil para el estudio de la dinámica de correas transportadoras, siempre y cuando se le proporcionen los parámetros correctos necesarios, incluyendo la curva de velocidad de la polea motriz, de forma “a priori”. Esta última observación deja en evidencia una limitación del modelo: su poca capacidad de predecir la velocidad de la polea motriz al carecer de un modelo de motor de inducción incorporado con controles PID y un variador de frecuencias, esto limita la utilidad del modelo a solo estudiar el comportamiento dinámico de correas con una velocidad de polea motriz conocida en el intervalo de interés. En el control PID

de la velocidad de la polea motriz, son conocidas “a priori” las curvas de velocidad de referencia (“set values”), y son las únicas curvas conocidas de velocidad antes de ejecutar la simulación, y dependiendo del ajuste óptimo de sus constantes proporcionales del control PID ( ver en la Figura 8.1), la velocidad real de la polea motriz será más o menos fiel a la curva predefinida como “set value”, dependiendo de la mayor optimización del control PID. La curva de velocidad de la polea motriz será más fiel a la curva de velocidad conocida y predefinida como “set value”, si dentro del modelo de control se optimizan las constantes ambas velocidades, la curva de velocidad ingresada dentro del modelo construido y la curva de velocidad real en la polea motriz, serían la misma y tendrían los mismos valores. Dentro del modelo del programa comercial “Belt Analyst” lamentablemente el control PID no se optimiza automáticamente y no puede ser optimizada de forma manual a ensayo y error dentro de un plazo de tiempo razonable y que no supere el periodo de validez de la licencia de prueba del programa comercial. Es desde esta situación desde donde nacen los errores obtenidos, y el porqué, de forma poco común, se utilizó la curva de velocidad de la polea motriz entregada por el programa comercial como parámetro de entrada dentro del programa y modelo construido. Es interesante observar, que solo bastó igualar la velocidad en el nodo que representa a la polea motriz, para que las velocidades y las tensiones obtenidas a lo largo de la correa por el programa construido hayan logrado ser semejantes a los entregados por el programa comercial, demostrando con esto, una construcción correcta del modelo de correa transportadora y de sus componentes, y que sus características no están tan alejadas de los utilizados en la industria.

Para eliminar esta relación entre la presencia del control PID y la calidad de los resultados obtenidos, se recomienda como futuras mejoras dentro del modelo construido: la incorporación y construcción de un modelo de motor de inducción con variador de frecuencia y control PID y cuyos parámetros de entrada sean los parámetros eléctricos del motor con variador de frecuencia, que dependerán caso a caso según el tipo de motor instalado (la configuración de su armadura, etc), así como del modelo de control PID y el como este configurado o instalado en el motor.

Otros elementos que pueden ser sujetos de mejora son: la obtención de los valores de la fuerza de resistencia al movimiento y el factor de amortiguación de la correa transportadora. Ambos en el modelo construido fueron abordados de forma simplificada, sin embargo, la obtención de estas magnitudes para cada tipo de correa y para diferentes temperaturas de operación puede mejorarse y lograr así que el programa construido pueda abarcar la mayor cantidad de situaciones posibles. Lo anterior planteado es un objetivo ambicioso que requeriría un estudio más preciso del fenómeno físico y una serie de ensayos de materiales para obtener los parámetros necesarios para lograr un modelo de correa lo más general posible y pueda simular una multitud de situaciones en cuanto a condiciones de operación como a tipo de correa instalado, además de incorporar dentro de la selección de parámetros los criterios de las normas ISO y CEMA de correas transportadoras. Esta es una limitación superada en el trabajo aquí presentado con la ayuda del programa comercial “Belt Analyst”, ya que esté de forma automática calcula y entrega los parámetros necesarios (de amortiguación y de resistencia al movimiento) siguiendo la norma DIN 22101 para cada caso específico, como los presentados en las secciones 6 y 7, sin embargo, la obtención de algunos datos están fuera de los criterios de la norma DIN22101, por ejemplo, la constante de amortiguación  $\xi$  (de la tabla 7.1), requiere una gran inversión en investigación y desarrollo en el estudio de la viscoelasticidad como fenómeno físico, y las empresas desarrolladoras de “software” podrían elegir no

publicar esos parámetros si lo considerasen necesario para proteger su propiedad intelectual. La efectividad del modelo construido depende de conocer la constante de amortiguación  $\xi$  de la correa a modelar que se extrae del programa comercial y esta es también una limitación del modelo a superar en el futuro.

Se espera con la construcción de este modelo de correa transportadora no sólo emular los resultados de programas comerciales, sino que también este trabajo sirva como primer paso y una base para permitir modelar correas que sobrepasan las limitaciones de los programas comerciales y ser más flexible en cuanto a los parámetros de operación de un sistema de correa transportadora ya sean de configuración simple o quizás más complejas como correas transportadoras con un perfil en relieve con pendientes ascendentes y descendentes como las correas “Overland Conveyor” cuyos perfiles de relieve complejos hacen más complejo su estudio. Existen también limitaciones en cuanto a las características de los componentes a insertar en los sistemas de correas transportadoras dentro de los programas comerciales, como las limitaciones ya vistas en la sección 7 donde algunos valores de potencia en los parámetros de motores de inducción o valores de capacidad nominal de correa dentro de los tipos de correa no podían ser ingresados porque se salen del margen de posibilidades que entrega el programa comercial, límites que define el programa comercial tomando en cuenta su base de datos interna de componentes disponibles, limitando de forma automática sus capacidades de modelado cuando un tipo de componente nuevo tiene unas características que supera la capacidad de los componentes almacenado en su base de datos, provocando que el programa comercial abandone todo intento de simular el comportamiento dinámico de dichas correas con componentes especiales.

El tipo de elemento finito utilizado es otro de los aspectos que pueden ser sujetos de mejora ya que en la construcción del modelo se utilizó un elemento finito unidimensional para representar una sección de correa transportadora debido a que agiliza el cálculo numérico y reduce las horas de cálculo en el ordenador. Esto deja margen para modelar a la correa transportadora con elementos finitos más complejos y no solo unidimensionales sino que pueden plantearse elementos bidimensionales para incorporar el comportamiento de la correa en el eje transversal, además dentro del estudio del comportamiento en el eje longitudinal pueden utilizarse otros modelos más complejos de viscoelasticidad así como modelos de roce estático y dinámico más completos.

Tabla 8.1: Tiempos de ejecución del programa de simulación de correas transportadoras. La primera fila corresponde al programa descrito en el anexo H, mientras que la segunda y tercera fila son los tiempos de ejecución de los programas del anexo I y J, respectivamente.

Longitud del modelo[m]	número de elementos finitos [-]	intervalo de tiempo simulado [s]	tiempo real de cálculo [hr]
1000 [m]	986	120[s]	3 horas y 32 minutos
3340 [m]	3288	30[s]	33 horas y 9 minutos
3340 [m]	3288	40[s]	43 horas y 54 minutos

Otro aspecto que también puede ser optimizado es en el uso de métodos numéricos más eficientes para calcular la solución del sistema de ecuaciones. Una de las limitaciones a resolver para mejorar el modelo construido es el tiempo que demora el programa en simular una correa transportadora para un intervalo de tiempo determinado. Para simular el comportamiento dinámico de una correa transportadora de 1 [km] y obtener los resultados mostrados en la sección 6, se utilizó un modelo de elementos finitos con 986 elementos para el intervalo de tiempo que es de interés, 120 segundos. Para lograr aquello el programa

incluido en el anexo H necesito de 3 horas y 32 minutos de tiempo real de cálculo en una computadora portátil para obtener las soluciones al sistema de ecuaciones durante el intervalo de tiempo de interés. Mientras más larga la correa transportadora a simular, mayor tiempo de ejecución del programa será necesario, como se ve en la tabla 8.1 donde se muestran los tiempos de ejecución necesarios para obtener los resultados mostrados en las secciones 7.6 y 7.8 utilizando los programas descritos en los anexos I y J.

Comparando los tiempos de cálculo que necesitan los programas escritos en MATLAB con el tiempo que necesita el programa comercial “Belt Analyst” para modelar una misma correa transportadora, en la tabla 8.2 se puede observar que el programa comercial es capaz de entregar resultados en minutos mientras que los programas escritos en MATLAB tardan días y horas. Los tiempos de ejecución y demás parámetros de las simulaciones hecha por el programa “Belt Analyst” debieron ser extraídos del programa directamente debido a que no son datos incorporados en los informes que se añaden en los anexos. En las figuras 8.6 y 8.7 se pueden ver los datos extraídos desde la interfaz del programa comercial y que son presentados en la tabla 8.2.

Tabla 8.2: Comparación de los tiempos de ejecución entre el programa comercial “Belt Analyst” y el programa escrito en MATLAB.

Procesador Utilizado: Intel Pentium (R) CPU N4200 1.10Ghz con una memoria RAM de 8 Gb					
Longitud Correa a modelar	1[km]	1[km]	3,34[km]	3,34[km]	3,34[km]
Programa utilizado	Belt Analyst	MATLAB	Belt Analyst	MATLAB	MATLAB
intervalo de tiempo de interés	30[s]	120[s]	120[s]	30[s]	40[s]
paso del tiempo $\Delta t$ utilizado	0,010[s]	0,0013[s]	0,010[s]	7,6614e-4[s]	7,6614e-4[s]
número de pasos	3000	95577	12000	39158	52210
número de elementos finitos	42	986	106	3288	3288
Tiempo de ejecución	2 min. aprox.	3 hrs. 32 min.	2 min.aprox.	33 hrs. 9 min.	43 hrs. 53 min.

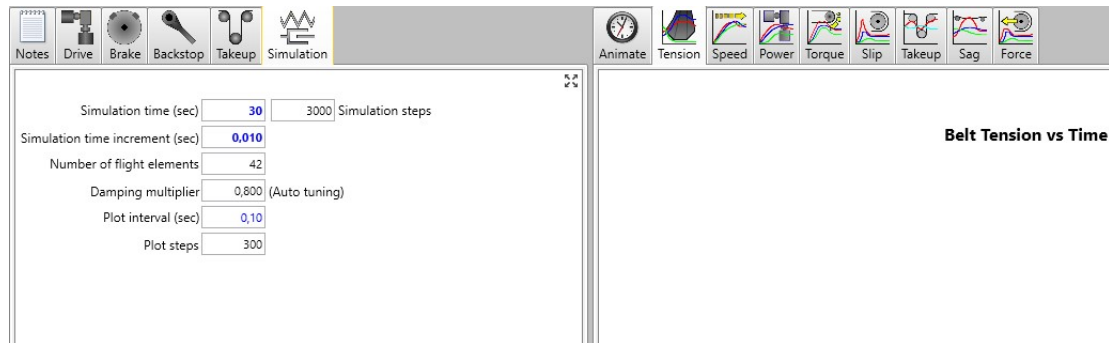


Figura 8.6: Parámetros de la simulación realizada por el programa comercial “Belt Analyst” para una correa de 1 [km] descrita en la sección 6 y cuyos resultados se muestran en el anexo F .

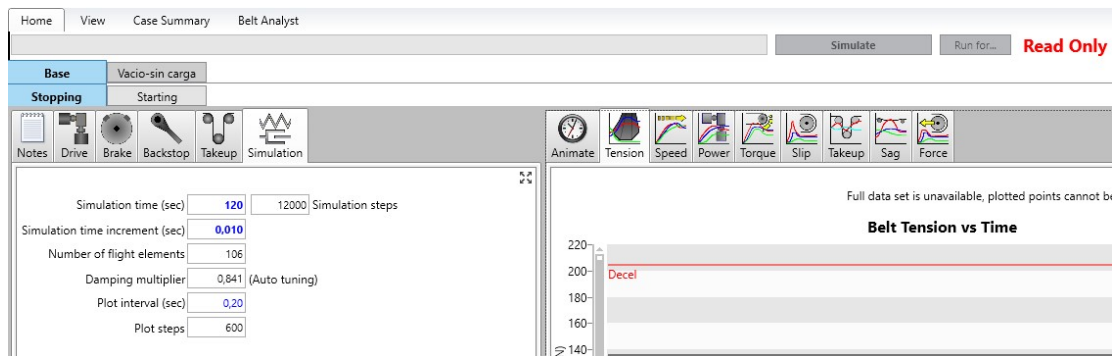


Figura 8.7: Parámetros de la simulación realizada por el programa comercial “Belt Analyst” para una correa de 3340 [m] descrita en la sección 7 y cuyos resultados se muestran en el anexo G .

Las diferencias en tiempo de ejecución del cálculo pueden ser explicadas a partir de la tabla 8.2, donde se puede observar que el modelo utilizado en el programa comercial utiliza una menor cantidad de elementos finitos que a su vez permite aumentar el tamaño del paso de tiempo utilizado en cada iteración de la simulación, debido seguramente a algunos criterios de diseño que permiten simplificar el modelo de elementos finitos a utilizar en la simulación y reducir el tiempo de cálculo, en cambio, el modelo presentado en las secciones anteriores e implementado en el programa “MATLAB” utiliza el número de elementos finitos necesario que le permita colocar un nodo en todo lugar donde los polines y poleas toman contacto con la correa, es ese criterio utilizado el que aumenta el número de elementos a utilizar y también aumenta el tiempo de cálculo necesario para obtener los resultados.

Si se lograra incorporar en el modelo las mejoras propuestas, el modelo construido tendría la capacidad de adaptarse a un amplio rango de características de las correas transportadoras y puede ser utilizado en un número mayor de problemas y situaciones diferentes, sin embargo, la principal limitación en la construcción de un modelo de correa transportadora está en la obtención de los datos experimentales suficientes como para construir un modelo que represente correctamente el comportamiento viscoelástico de la correa para diferentes velocidades de deformación, rango de temperaturas y tipos de materiales. De acuerdo a algunos comentarios compartidos por Nordell en varios artículos [14] y [15] la mayor parte del presupuesto para la construcción de un programa de simulación de correas transportadoras se invierte en desarrollar equipos de ensayos de materiales y en la creación de procedimientos para ensayar correas transportadoras y estudiar su comportamiento viscoelástico a altas y bajas frecuencias de deformación y a diferentes temperaturas. Por lo tanto, cualquier programa construido para simular correas transportadoras, mientras carezca de datos experimentales propios, siempre tendrá cierta dependencia a la cantidad de parámetros o constantes que pueda extraer de los programas comerciales a su disposición u obtenerlos desde los artículos de las revistas científicas, para incorporar el comportamiento viscoelástico correctamente en su modelo.

## Referencias

- [1] ALLERSTOFER, Christian. Dynamic design of belt conveyors. Tesis de Mestría (Master of Science). Leoben, Austria. Montanuniversität Loben. Department Product Engineering. 2012. 256 h.
- [2] BELYTSCHKO, Ted. LIU, Wing Kam, MORAN, Brian y ELKHODARY, Khalil. Nonlinear finite elements for continua and structures. 2.º ed. EEUU. John Wiley & Sons Ltd. 2014. 834 p.
- [3] CERDA, Mario. Implementación computacional de un modelo numérico-teórico para determinar cargas transientes en una correa transportadora. Tesis de pregrado (Ing. Civil Mecánico). Santiago de Chile. Universidad de Chile. Departamento de Ingeniería Mecánica. 2014. 126 h.
- [4] DILEFELD, Mario y POHL, Matthias. High powered gearless drives. En: International materials handling conference BELTCON (20.º, 2019, Sudáfrica).
- [5] GLADYSIEWICZ, Lech. Correas transportadoras teoría y cálculo. Polonia. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej. 2003. 316 p.
- [6] HARRISON, Alex. Criteria for minimising transient stresses in conveyor belts. En: International materials handling conference BELTCON (2.º, 1983, Sudáfrica).
- [7] JOHNSON, K.L. Contact mechanics. Cambridge University Press. 1985. 460 p.
- [8] JONKER, Ben. A finite elements dynamic analysis of flexible spatial mechanisms and manipulators. Tesis de doctorado. Delft University of Technology. 1998.
- [9] KAROLEWSKI, Boguslaw y LIGOCKI, Piotr. Modelling of long belt conveyors. Maintenance and Reliability. 16(2):179-183. Febrero. 2014.
- [10] LODDER, M.A. A survey of indentation rolling resistance models for belt conveyors. [en línea]. TU Delft Repository, Technical Report. Julio. 2017. N° 2017.TEL.8154 . <<http://resolver.tudelft.nl/uuid:150264c1-b6b4-4a38-acd1-5c6755c1234a>>. [Consulta: 06 Mayo 2021].
- [11] LODEWIJKS, Gabriel. Dynamics of belt systems. Tesis de doctorado. Delft University of Technology. Faculty of Mechanical Maritime and Materials Engineering. 1996. 276h.
- [12] LU, Yan. LIN, Fu-Yan. y WANG, Yu-Chao. Investigation on influence of speed on rolling resistance of belt conveyor based on viscoelastic properties. Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 45(3):53-68. Septiembre. 2015.
- [13] MAY, W. Donald. MORRIS, E. L. y ATACK Douglas. Rolling friction of a hard cylinder over a viscoelastic material. Journal of Applied Physics. 30(11):1713-1724. Noviembre. 1959.
- [14] NORDELL, Lawrence K. Belt dynamics-An alternative view. En: International materials handling conference BELTCON (4.º, 1987, Sudáfrica). Johannesburgo. 1987.

- [15] NORDELL, Lawrence K. y CIOZDA, Zbigniew Paul. Transient belt stresses during starting and stopping: elastic response simulated by finite element methods. Bulk Solids Handling. 4(1):93-98. Marzo. 1984.
- [16] O'SHEA, Jayne Isobel. Mechanical and dielectric relaxation studies of conveyor belt compounds to determine indentation rolling resistance properties. Tesis de doctorado. Newcastle, Australia. University of Newcastle. Noviembre. 2015. 162h.
- [17] PASCUAL, Rodrigo. MERUANE, Vivian y BARRIENTOS, Gabriel. Analisis of transient loads on cable-reinforced conveyor belts with damping consideration. En: CILAMCE Ibero-Latin American Congress on Computational Method in Engineering (26°, 2005, Brasil). Proceedings of the XXVI CILAMCE. Guarapari, Brasil. ABMEC. 2005.
- [18] PINGYUAN, Xin y YANGDONG, Song. Dynamic simulation on the belt conveyor on emergency braking. En: Second international conference on intelligent computation technology and automation. 2009.
- [19] RUDOLPHI, Thomas J. y REICKS, Allen V. Viscoelastic indentation and resistance to motion of conveyor belts using a generalized maxwell model of the backing material. Rubber Chemistry and Technology. 79(2):307-319. 2006.
- [20] SPAANS, Cornelis. The calculation of the main resistance of belt conveyors. Bulk Solids Handling. 11(4):809-826. Noviembre. 1991.
- [21] YAN, Chen y HE, Xue. Model and dynamic simulation of belt conveyor. En: International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application. (2010, China). Proceedings of the 2010 International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application. Changsha, China. 2010. pp.949-951.

# Anexos

## A. Anexo A: Datos obtenidos desde las curvas de las gráficas en las figuras 2.13 y 2.15

### A.1. Valores de $E'$

Desde el archivo '*E-apostrofe.txt*'.

Los datos están estructurados de la forma Temperatura[°C];frecuencia  $\omega$ ;  $E'$  [MPa]

-59.8419;0.001;229.923  
-40.1000;0.001;15.3617  
-19.5000;0.001;6.6813  
0.31023;0.001;4.29307  
9.14573;0.001;3.76939  
20.9314;0.001;3.76939  
42.3494;0.001;2.61866  
60;0.001;2.29923  
-59.8396;0.01;248.588  
-40.0900;0.01;20.991  
-20.0265;0.01;8.66669  
0.0484262;0.01;5.28645  
9.68599;0.01;4.40624  
20.936;0.01;4.40624  
39.9433;0.01;3.06109  
60;0.01;2.61866  
-60;0.1;275.853  
-40;0.1;39.1941  
-30;0.1;18.9163  
-20;0.1;11.5384  
0;0.1;6.68127  
9.69204;0.1;5.42579  
19.870;0.1;5.28645  
39.9478;0.1;3.57826  
60.0318;0.1;2.98247  
-60;1;306.109  
-40.0492;1;85.5467  
-29.3637;1;31.8291  
-20.0076;1;16.6088  
-12.5159;1;12.4751  
0.0628027;1;8.66669  
13.1795;1;6.50968  
18.0009;1;6.50968  
19.8752;1;6.34249  
39.9523;1;4.18282  
60.0363;1;3.48637

-59.8298;10;348.637  
-40.2898;10;218.264  
-25.0689;10;43.4929  
-19.9955;10;25.1843  
-0.195975;10;11.8426  
10.5092;10;8.66669  
20.1498;10;8.01595  
39.9584;10;5.15068  
60.0409;10;4.07539  
-59.8252;100;407.539  
-39.9939;100;571.560  
-19.9803;100;42.3759  
-9.28571;100;21.5443  
0.0802058;100;15.7667  
9.98184;100;11.5384  
19.8888;100;10.1309  
39.9652;100;6.50968  
60.0469;100;5.01840  
-59.8176;1000;528.645  
-39.9644;1000;1576.67  
-29.8290;1000;357.826  
-26.8969;1000;218.264  
-19.9652;1000;71.3029  
-14.0860;1000;44.6393  
-10.0772;1000;32.6681  
-2.05130;1000;23.2933  
0.0885291;1000;20.9910  
3.83550;1000;18.9163  
10.5259;1000;15.3617  
19.8956;1000;12.8040  
30.8709;1000;10.1309  
39.9712;1000;8.01595  
60.0515;1000;5.86626

## A.2. Valores de $\tan \delta$

Desde el archivo '*tan-delta.txt*'.

Los datos están estructurados de la forma Temperatura[°C];frecuencia  $\omega$ ;  $\tan \delta$  [-]

-60.0084;0.001;0.0280455  
-39.9250;0.001;0.198440  
-37.7712;0.001;0.177998  
-35.6182;0.001;0.160105  
-32.6576;0.001;0.134547  
-29.9654;0.001;0.108994  
-20.5724;0.001;0.118992  
-10.6463;0.001;0.141728  
0.628937;0.001;0.141488  
9.76640;0.001;0.108149  
19.9708;0.001;0.0977343  
28.5645;0.001;0.0873534  
38.7690;0.001;0.0769383  
49.5073;0.001;0.0767102  
59.9764;0.001;0.0790373  
-60.0129;0.01;0.0433431  
-39.9812;0.01;0.387110  
-30.2681;0.01;0.223731  
-20.0515;0.01;0.172522  
-10.3854;0.01;0.167218  
0.0874580;0.01;0.156797  
6.26656;0.01;0.141680  
11.1026;0.01;0.128518  
18.6225;0.01;0.118160  
40.1075;0.01;0.0896578  
59.7057;0.01;0.0866918  
-60.0198;0.1;0.0662894  
-58.6834;0.1;0.0860910  
-58.2722;0.1;0.107612  
-56.5542;0.1;0.147802  
-51.8183;0.1;0.270931  
-48.9181;0.1;0.347923  
-46.1671;0.1;0.425202  
-40.0406;0.1;0.585978  
-35.9878;0.1;0.499207  
-30.8537;0.1;0.386916  
-27.3477;0.1;0.333301  
-20.0705;0.1;0.236262  
-10.1238;0.1;0.190158  
0.0828950;0.1;0.172095  
7.06737;0.1;0.156649  
12.9772;0.1;0.143775  
19.9610;0.1;0.130879  
28.8231;0.1;0.120492  
40.1014;0.1;0.110055

46.5459;0.1;0.104818  
59.9696;0.1;0.101984  
-59.7604;1;0.0968788  
-57.3626;1;0.158018  
-40.0801;1;0.718557  
-34.1390;1;0.601150  
-29.5471;1;0.506718  
-24.9522;1;0.402088  
-19.8180;1;0.289798  
-9.86222;1;0.213099  
0.346790;1;0.187386  
20.4933;1;0.146165  
40.9030;1;0.122785  
59.9665;1;0.112182  
-59.7688;10;0.124924  
-57.1063;10;0.198805  
-51.5287;10;0.400103  
-40.1014;10;0.789945  
-36.5932;10;0.728681  
-29.8460;10;0.608708  
-19.8317;10;0.335690  
-16.3311;10;0.299922  
-13.9073;10;0.274375  
-11.4836;10;0.248828  
-10.4060;10;0.236057  
0.0752899;10;0.197590  
10.0128;10;0.182082  
19.9526;10;0.158925  
40.0915;10;0.143199  
59.9635;10;0.122380  
-59.7772;100;0.152970  
-40.1090;100;0.815441  
-30.4019;100;0.672459  
-20.1108;100;0.371390  
-9.87135;100;0.243694  
-0.464668;100;0.207800  
11.3521;100;0.192252  
18.8734;100;0.176794  
28.8102;100;0.163835  
40.0885;100;0.153398  
54.8582;100;0.137786  
59.9612;100;0.130029  
-59.7848;1000;0.178466  
-49.9477;1000;0.499503  
-40.1120;1000;0.825640  
-30.6788;1000;0.700510  
-29.5988;1000;0.680091  
-26.8907;1000;0.600996  
-23.9087;1000;0.504049  
-20.9291;1000;0.414751  
-19.5777;1000;0.384127  
-9.87439;1000;0.253893

-0.198492;1000;0.215443  
11.6175;1000;0.202444  
19.9458;1000;0.181871  
39.8155;1000;0.168701  
50.0214;1000;0.153187  
59.9582;1000;0.140228

## B. Anexo B: Programa MATLAB hecho para graficar las interpolaciones realizadas para $E'$ y $\tan \delta$ para diferentes frecuencias y temperaturas.

```

clear variables
format longEng
%Importación Datos de Material
E_storage=importdata('E-apostrofe.txt',';');
tan_delta=importdata('tan-delta.txt',';');
%Se define la interpolación de los datos, en las funciones
%interpolar_e_sto(E_storage,temperatura,frecuencia);
%interpolar_e_sto(E_storage,temperatura,frecuencia);
%Valores de las curvas de nivel de las frecuencias
frec_nivel=[0.001;0.01;0.1;1;10;100;1000];
%Almacenamos las curvas de nivel de frecuencia interpoladas en vectores columna
%Las curvas van de -60 a 60 grados celsius de temperatura
puntos_T=linspace(-60,60);
%Matriz almacen
curvas_e_sto=zeros(100,7);
%Generamos datos de E_sto vs frecuencia en T=25°C

for columnnum=1:7
    for filasnum=1:100
        efimero3=frec_nivel(columnnum,1);
        efimero4=interpolar_e_sto(E_storage,puntos_T(filasnum),efimero3);
        curvas_e_sto(filasnum,columnnum)=efimero4;
    end
end
%Generamos datos de tan_delta vs frec. en T=25°C

%Matriz almacen
curvas_tan_delta=zeros(100,7);
%Generamos datos de E_sto vs frecuencia en T=25°C
for columnnum=1:7
    for filasnum=1:100
        efimero3=frec_nivel(columnnum,1);
        efimero4=interpolar_tan_delta(tan_delta,puntos_T(filasnum),efimero3);
        curvas_tan_delta(filasnum,columnnum)=efimero4;
    end
end
eje_x_temperaturas=puntos_T';
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Para graficar E_sto vs frecuencia
%semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_e_sto(:,1),'-')
%title('E modulo de almacenamiento en [Mpa] vs Temperatura [°C]')
%xlabel('Temperatura °C')
%ylabel('modulo de almacenamiento [Mpa]')
%hold on
%semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_e_sto(:,2),'--')
%semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_e_sto(:,3),':')

```

```

%semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_e_sto(:,4),'-.')
%semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_e_sto(:,5),'-o')
%semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_e_sto(:,6),'-+')
%semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_e_sto(:,7),'-x')
%legend('0.001 Hz','0.01 Hz','0.1 Hz','1 Hz','10 Hz','100 Hz','1000 Hz')
%hold off

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%Para graficar tan_delta vs frecuencia
plot(eje_x_temperaturas,curvas_tan_delta(:,1),'-')
title('factor de perdida tan(delta) [-] vs Temperatura [°C]')
xlabel('Temperatura °C')
ylabel('factor de perdida [-]')
hold on
semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_tan_delta(:,2),'--')
semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_tan_delta(:,3),':')
semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_tan_delta(:,4),'-.')
semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_tan_delta(:,5),'-o')
semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_tan_delta(:,6),'-+')
semilogy(eje_x_temperaturas,curvas_tan_delta(:,7),'-x')
legend('0.001 Hz','0.01 Hz','0.1 Hz','1 Hz','10 Hz','100 Hz','1000 Hz')
hold off

```

```

function [valor_E_sto]= interpolar_e_sto(m,T,w)
if ~ismatrix(m)
    error('Input must be a matrix');
end
%Interpolacion lineal en un grafico semilogaritmo en el eje de las
%frecuencias y en el eje de E'.
%Descomponer los datos en vectores columnas
xt=m(:,1);
yt=log10(m(:,2));
zt=log10(m(:,3));
%Interpolar en el punto xq, yq
xq=T;
yq=log10(w);
F = scatteredInterpolant(xt,yt,zt);
exponente= F(xq,yq);
valor_E_sto=10^(exponente);
end

```

```

function [valor_tandelta]= interpolar_tan_delta(m,T,w)
if ~ismatrix(m)
    error('Input must be a matrix');
end
%Interpolacion lineal en un grafico semilogaritmo sólo en el eje de las
%frecuencias
%Descomponer los datos en vectores columnas
xt=m(:,1);
yt=log10(m(:,2));
zt=m(:,3);
%Interpolar en el punto xq, yq

```

```
xq=T;  
yq=log10(w);  
F = scatteredInterpolant(xt,yt,zt);  
valor_tandelta = F(xq,yq);  
end
```

## C. Anexo C: Resultados entregados por el programa de ajuste de curvas.

El programa de ajuste de curvas, nos entrega los valores de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\eta$ . Tenemos entonces que desde los pocos datos conocidos.

Parámetro	Valor
Material	Caucho estireno-butadieno(SBR)
$E_1$	5.26 [MPa]
$E_2$	6.17 [MPa]
$\eta$	0.084 [MPa · s]

Tabla C.1: Valores de los parámetros obtenidos desde el ajuste de curvas.

Y en detalle en lo que respecta a el valor del error de la aplicación de los minimos cuadrados.

x =

5.26056936963142e+000    6.17312576664716e+000    84.5980300783046e-003

resnormal =

9.42775170526356e+000

residual =

1.74317828835176e+000  
 1.04044521218655e+000  
 104.174912400921e-003  
 -888.699652069134e-003  
 -2.09163694622302e+000  
 178.553345284804e-003  
 -81.8072434956356e-003  
 -91.6431143446145e-003  
 -107.852334667526e-003  
 -122.998280784502e-003  
 -124.013609738043e-003  
 -22.0081484180179e-006  
 149.919259622765e-003  
 -139.220242374418e-003

exitflag =

3.00000000000000e+000

output =

struct with fields:

```
firstorderopt: 4.37129562451055e-003
  iterations: 23.0000000000000e+000
    funcCount: 96.0000000000000e+000
  cgiterations: 0.0000000000000e+000
  algorithm: 'trust-region-reflective'
  stepsize: 345.989446067406e-006
  message: 'Local minimum possible.
lsqcurvefit stopped because the final change in the sum of squares
relative to its initial value is less than the default value
of the function tolerance.'
```

Stopping criteria details:

```
Optimization stopped because the relative sum of squares (r)
is changing by less than options.
FunctionTolerance = 1.000000e-06.
Optimization Metric
Options
relative change r = 5.71e-08
FunctionTolerance = 1e-06 (default)'
```

## D. Anexo D: Programa MATLAB hecho para realizar el ajuste de curvas por mínimos cuadrados de las curvas $E'$ y $\tan \delta$ a $25^\circ \text{C}$

```

clear variables
format longEng
%Importación Datos de Material
E_storage=importdata('E-apostrofe.txt','');
tan_delta=importdata('tan-delta.txt','');
%Definimos los puntos conocidos en vectores columna
dato_x=[0.001;0.01;0.1;1;10;100;1000];
dato_y1=zeros(7,1);
%Generamos datos de E_sto vs frecuencia en T=25°C
for num=1:7
    efimero3=dato_x(num,1);
    efimero4=interpolar_e_sto(E_storage,25,efimero3);
    dato_y1(num,1)=efimero4;
end
%Generamos datos de tan_delta vs frec. en T=25°C
dato_y2=zeros(7,1);
for num=1:7
    efimero3=dato_x(num,1);
    efimero4=interpolar_tan_delta(tan_delta,25,efimero3);
    dato_y2(num,1)=efimero4;
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Procedemos al Curve Fitting
xdata=[dato_x(:,1);dato_x(:,1)];
ydata=[dato_y1(:,1);dato_y2(:,1)];
%La función de E_sto
f1=@(x,rr)(x(1).*((x(2)).^2)+(rr.^2).*(x(3).^2).*(x(1)+x(2))).*(((x(2).^2)+...
    (rr.^2).*(x(3).^2)).^(-1));
%La función de tan_delta
f2=@(x,ss)(ss.*x(3).*(x(2).^2)).*(((x(1).*(x(2).^2))+((ss.^2).*(x(3).^2).*...
    (x(1)+x(2))))).^(-1));
fun=@(x,xdata) [f1(x,xdata(1:numel(xdata)/2));...
    f2(x,xdata(1:numel(xdata)/2))];
x0=[7 250 0.001875];
[x,resnormal,residual,exitflag,output]=lsqcurvefit(fun,x0,xdata,ydata)
times = linspace(dato_x(1),dato_x(end));
%Para graficar E_sto vs frecuencia
semilogx(dato_x,dato_y1,'ko',times',f1(x,times'),'b-')
legend('Datos','Función propuesta')
title('Datos y Curva Representativa')
xlabel('frecuencia [Hz]')
ylabel('modulo de almacenamiento [Mpa]')
hold on
hold off

%Para graficar tan-delta vs frecuencia
%semilogx(dato_x,dato_y2,'ko',times',f1(x,times'),'b-')

```

```

%legend('Datos','Función propuesta')
%title('Datos y Curva Representativa')
%xlabel('frecuencia [Hz]')
%ylabel('factor de perdida tan(delta) [-]')
%hold on
%hold off

function [valor_E_sto]= interpolar_e_sto(m,T,w)
if ~ismatrix(m)
    error('Input must be a matrix');
end
%Interpolacion lineal en un grafico semilogaritmo
%Descomponer los datos en vectores columnas
xt=m(:,1);
yt=log10(m(:,2));
zt=log10(m(:,3));
%Interpolar en el punto xq, yq
xq=T;
yq=log10(w);
F = scatteredInterpolant(xt,yt,zt);
exponente= F(xq,yq);
valor_E_sto=10^(exponente);
end

function [valor_tandelta]= interpolar_tan_delta(m,T,w)
if ~ismatrix(m)
    error('Input must be a matrix');
end
%Interpolacion lineal en un grafico semilogaritmo
%Descomponer los datos en vectores columnas
xt=m(:,1);
yt=log10(m(:,2));
zt=m(:,3);
%Interpolar en el punto xq, yq
xq=T;
yq=log10(w);
F = scatteredInterpolant(xt,yt,zt);
valor_tandelta = F(xq,yq);
end

```

## E. Anexo E: Programa MATLAB para calcular y gráficar el factor de resistencia usando el modelo de Jonker.

```

clear variables
global F_z D h T

%Importación Datos de Material
E_storage=importdata('E-apostrofe.txt','');
tan_delta=importdata('tan-delta.txt','');

%Datos de operación
T=25;% en [°C]
F_z=2000;% en [N/m]
%Datos del rodillo polin.
h=0.008;% en [m]
D=(2*0.0795);% en [m]
%Datos de la correa
B=1;% ancho total correa en[m]
%parametros del material de cubierta de la correa
E_1=5.26e6;%en [Pa]

puntos_velocidad=linspace(0.1,10);% 1-fila x 100-columnas
puntos_factor=zeros(1,100);
puntos_fd=zeros(1,100);

for i=1:100
    v=puntos_velocidad(i);
    [w]=calculo_iterado(E_1,v);
    %disp('valor frecuencia:');disp(w);
    E_s_f=interpol_e_sto(E_storage,T,w);%en [Mpa]
    tan_d_f=interpol_tan_delta(tan_delta,T,w);
    E_s_Pa=E_s_f*1e6;
    [valor_factor,valor_fd]=calculo_factor_jonker(E_s_Pa,tan_d_f);
    puntos_factor(i)=valor_factor;
    puntos_fd(i)=valor_fd;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
plot(puntos_velocidad,puntos_factor,'-')
ylim([0 0.04])
title('factor jonker [-] vs Velocidad [m/s]')
xlabel('Velocidad [m/s]')
ylabel('factor de resistencia [-]')
hold on
%plot(puntos_velocidad,puntos_fd,'-*')
%legend('factor fij','factor fd')
hold off

function [valorfjonker,f_d]=calculo_factor_jonker(xxE,xxtand)

```

```

%valor de xxE de entrada en [Pa]
global F_z D h
d=atan(xxtand);
bisagra=((pi+(2*d))*cos(d))./(4*(sqrt(1+sin(d))))).^.(4./3);
f_d=(1/2)*pi.*xxtand.*bisagra;
f_j=((F_z*h)/((D^2)*xxE))^(1/3)*(f_d);
valorfjonker=f_j;
end

function [valor_w]=calculo_iterado(xE,xV)
%valor de xxE de entrada en [Pa]
%valor de xV de entrada en [m/s]
global F_z D h T
%Importación Datos de Material
E_storage=importdata('E-apostrofe.txt','');
tan_delta=importdata('tan-delta.txt','');
nc=10000; %número de ciclos
cont=0;%contador
tol=1e-6;%error permitido para la convergencia
error=1+tol;
a_0=((3*F_z*D*h)/(4*xE))^(1/3);
w_anterior=((pi*xV)/(2*a_0));
while (error>tol) && (cont<nc)
    cont=cont+1;
    E_sto=interpolare_sto(E_storage,T,w_anterior);%en[Mpa]
    tan_d=interpolartan_delta(tan_delta,T,w_anterior);
    d=atan(tan_d);
    %Calculo de E_1 modulo de elasticidad
    E_1=(E_sto*1e6)/cos(d); %en[Pa]
    a=((3.*(F_z).*D.*h)./(4.*E_1)).^(1./3); % en [m]
    w_posterior=((pi*xV)./(2*a));
    error=abs((w_posterior-w_anterior)/w_anterior);
    %disp(cont);disp('error es:');disp(error);
    w_anterior=w_posterior;
end
valor_w=w_posterior;
end

function [valor_E_sto]= interpolare_sto(m,T,w)
if ~ismatrix(m)
    error('Input must be a matrix');
end
%Interpolacion lineal en un grafico semilogaritmo en el eje de las
%frecuencias y en el eje de E'.
%Descomponer los datos en vectores columnas
xt=m(:,1);
yt=log10(m(:,2));
zt=log10(m(:,3));
%Interpolacion en el punto xq, yq
xq=T;
yq=log10(w);
F = scatteredInterpolant(xt,yt,zt);

```

```

exponente= F(xq,yq);
valor_E_sto=10^(exponente);
end

function [valor_tandelta]= interpolar_tan_delta(m,T,w)
    if ~ismatrix(m)
        error('Input must be a matrix');
    end
    %Interpolacion lineal en un grafico semilogaritmo sólo en el eje de las
    %frecuencias
    %Descomponer los datos en vectores columnas
    xt=m(:,1);
    yt=log10(m(:,2));
    zt=m(:,3);
    %Interpolar en el punto xq, yq
    xq=T;
    yq=log10(w);
    F = scatteredInterpolant(xt,yt,zt);
    valor_tandelta = F(xq,yq);
end

```

**F. Anexo F: Informe sobre la correa transportadora de 1km planteada en la sección 6.1 generado por el programa comercial “Belt Analyst”.**

Project  
Location  
Description

**General**

Belt Width	mm	1200
Belt Speed	m/sec	5,20
Load	mtph	1996
Ambient Temp	°C	-18
Total Mass	kg	216051
Total HS Inertia	kg-m <sup>2</sup>	165
Calculation Method	DIN	
Friction Force	kN	39,5
Lift Force	kN	0,0
Misc Drag	kN	2,6
DIN Primary Resistance f		0.0200
DIN Secondary Resistance C		1.07

**Idlers**

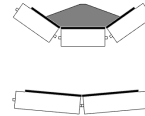
Specification		<b>Carry</b>	<b>Return</b>
Description		CEMA5 E7	CEMA5 E7
Estimated No of Idlers		656	326
Belt Width	mm	1219	1219
No of Rolls		3	2
Angle	deg	35,0	5,0
Roll Diameter	mm	178	178
Type		Fixed	Fixed
Rotating Weight	kg	45,9	40,8
Bearing Type		Roller	Roller
Rating	N	8006	5782
Max Actual Load	N	1978	769
Max Calc Load	N	2450	938
RPM		559	559
Min L10 Life	hr	2770588	22956024
Ave L10 Life	hr	2770588	22956024
Vert. Misalign	mm	3,175	3,175
Regen Multiplier		0,67	0,67

**Takeup**

Type		<b>Gravity</b>
Tension	kN	70,0
No of Pulleys		
Weight	kg	14276,7
Selected Due To		Accel Slip
Approx. Carriage Travel Due To		(Refer To Belt Manufacturer)
Permanent	m	19,20
Total	m	21,96

**Material**

Description		<b>Aggregate</b>
Material Density	kg/m <sup>3</sup>	850
Surcharge Angle	deg	20,0
Actual Area	m <sup>2</sup>	0,125
Percent Loaded	%	65
Edge Distance	mm	144
Bed Depth	mm	203
Lump Size	mm	152
Chute Drop Height	m	2,44
Impact Energy	N-m	89,9



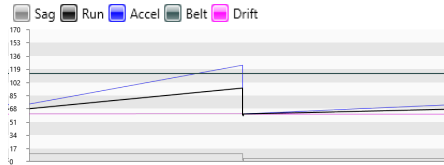
**Profile**

Horizontal Length	m	1000
Vertical Lift	m	0



**Belt**

Type		<b>Fabric-ISO</b>
Description		3/EP750
Cover Gauge	mm	6,4 6,4
Belt Rating	kN / (N/mm)	136 / 113
Safety/Design Factor		6,62
Elastic Modulus	N/mm	8663
Weight	kg/m	25,7
Apparent Length	m	2,020
Max Run Ten	kN / N/mm / %	113,3 / 94 / 83
Max Accel Ten	kN / N/mm / %	148,6 / 124 / 109
Max Decel Ten	kN / N/mm / %	73,6 / 61 / 54



Project  
 Location  
 Description

**Drives**

	<b>1</b>
Location	2
Number of Motors	2
Total Nameplate Power (kW)	150
Total Power (kW)	300
Power Ratio	1,00
Efficiency	<b>0,95</b>
Wrap Angle (Deg)	180
Synchronous RPM	<b>1800</b>
Full Load RPM	<b>1764</b>
Actual RPM	1764
Gearbox Ratio	14,66
Coupling Slip	0
HS Inertia (kg-m <sup>2</sup> )	8,01
Backstop Required?	Yes
Min Backstop Rating (N-m)	<b>30940</b>
Backstop Torque (N-m)	0
Running	
Running Power (kW)	231
Percent Nameplate (%)	76,9
Running Te (kN)	42,2
Friction Factor	<b>0,35</b>
Wrap Factor	0,50
Slip Ratio	3,00
Actual T1/T2 Ratio	1,58
Breakaway	
Breakaway Friction Multiplier	1,50
Req Breakaway Torque (% Nmpl)	115
Motor Peak Torque (% Nmpl)	225
Acceleration	
Start Time(sec)	30
Ave Starting Torque (% Nmpl)	145
Starting Te (kN)	77,6
Friction Factor	<b>0,35</b>
Wrap Factor	0,50
Slip Ratio	3,00
Actual T1/T2 Ratio	2,07
Stopping	
Est. Drift Time(sec)	26,6
Brake Stop Time(sec)	0,0
Brake Torque (N-m)	0
Brake Te (kN)	0
Brake Ratio	<b>0,00</b>
Friction Factor	<b>0,35</b>
Wrap Factor	0,50
Slip Ratio	3,00

Project  
 Location  
 Description

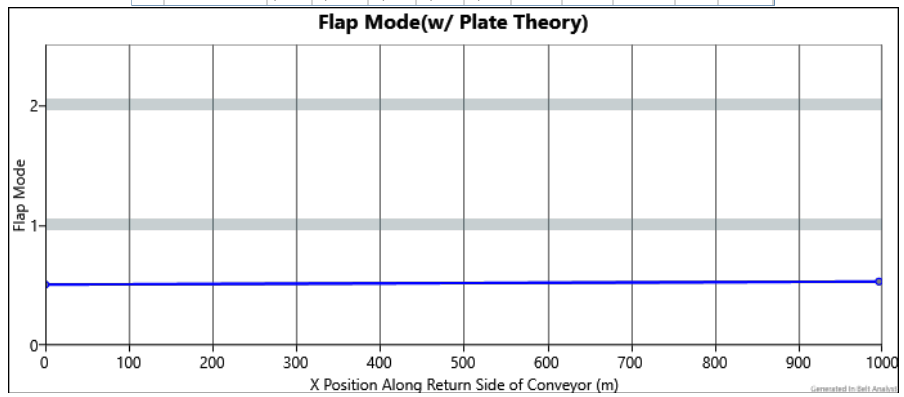
**Input**

Flt	Desc	Label	Horizontal Length (m)	Lift (m)	Angle (degrees)	Idler Selection	Idler Spacing (m)	Percent Load	Skirt Length (m)	Accel Load (mtph)	No. Of Cleaners	No. Of Plows	Extra Drag (N)
1	Carry		1000,00	0,00	0,00	Carry	1,52	100					
2	Dr/Head												
3	Return		-2,00	0,00	0,00	Return	X	X					
4	Bend												
5	Return		-0,37		-8,94	-87,63	Return	X	X				
6	Takeup												
7	Return		-0,37		8,96	87,63	Return	X	X				
8	Bend												
9	Return		-996,00	0,00	0,00	Return	3,05	X					
10	Tail												

Project  
 Location  
 Description

**Output**

Flt	Desc	Station (m)	Elevation (m)	Run Tension (kN)	Accel Tension (kN)	Decel Tension (kN)	Min Sag Tension (kN)	f Factor Allocat'n (N/m)	Misc Drag (N)	Mass (kg)	Idler L10 (1000 hr)
1	Carry	0,00	0,00	81,4	88,6	73,4	12,4	31,871		1623652771	
2	Dr/Head	1000,00	0,00	113,3	148,6	73,6			622	11530	
3	Return	1000,00	-0,83	71,8	71,6	72,0	3,2	5,047		51	
4	Bend	998,00	-0,83	71,8	71,6	72,0			463	621	
5	Return	997,69	-1,13	72,3	72,2	72,3	0,0	0,209		230	
6	Takeup	997,31	-10,06	70,0	70,0	70,0			546	655	
7	Return	996,69	-10,06	70,5	70,7	70,4	0,0	0,208		231	
8	Bend	996,31	-1,10	72,8	73,0	72,6			469	621	
9	Return	996,00	-0,80	73,3	73,5	73,0	4,8	7,671		38923	22956
10	Tail	0,00	-0,80	80,9	87,9	73,0			526	824	



Project  
Location  
Description

**Pulley**

Pulley No.	1	2	3	4	5
Flight Description	Dr/Head	Bend	Takeup	Bend	Tail
Label					
Location	2	4	6	8	10
Same As (Pulley No.)					
Pulley Group	A	B	B	B	A
Tension (T1) (kN)	113,3	71,8	70,0	72,8	80,9
Tension (T2) (kN)	71,8	72,3	70,5	73,3	81,4
T1 Incoming Angle (degrees)	360,0	0,0	92,4	87,6	180,0
Wrap Direction	Clockwise	Counterclockwise	Clockwise	Counterclockwise	Clockwise
Wrap Angle (degrees)	180,0	87,6	175,3	87,6	180,0
T2 Outgoing Angle (degrees)	180,0	272,4	267,6	360,0	360,0
Pulley Weight (kg)	1019,78	621,12	655,61	621,12	825,06
Resultant Force (kN)	185,4	104,2	134,0	105,6	162,6
Resultant Force Angle (degrees)	266,91	138,69	359,99	221,71	92,85
Pulley Diameter (mm)	800	630	630	630	800
Lagging Gauge (mm)	12,7	0,0	0,0	0,0	0,0
Lagging Type	Herringbone				
Face Width (mm)	1400	1400	1400	1400	1400
Pulley RPM (RPM)	120,32	157,64	157,64	157,64	124,14
Bearing Centers B (mm)	1683	1632	1632	1632	1683
Dimension A (mm)	330	292	292	292	330
Shaft Length (mm)	2535	1927	1927	1927	1983
Shaft Material	1045	1045	1045	1045	1045
Key Type	Profiled	None	None	None	None
Shaft Diameter (mm)	180	140	150	140	160
Bearing Bore (mm)	180	140	150	140	160
Bearing Type	Roller	Roller	Roller	Roller	Roller
Dynamic Capacity (N)	1200960,0	960768,0	960768,0	960768,0	1112000,0
Overhung Load (N)	0,0				
Shaft Deflection	0,0015	0,0021	0,0021	0,0021	0,0021
Shaft Safety Factor	1,63	2,60	2,45	2,56	2,14
Bearing L10 Life (hrs) (hr)	696929	1750617	757415	1674790	822108

1) Dr/Head@2



2) Bend@4



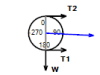
3) Takeup@6



4) Bend@8



5) Tail@10



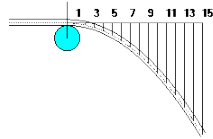
Project  
 Location  
 Description

**Idlers**

	Carry Default	Return Default	Idler No.3
Idler Name	Carry	Return	Carry
Specification	CEMAS5	CEMAS5	CEMAS5
Idler Selection	Database	Database	Database
Description	E7	E7	E7
Type	Fixed	Fixed	Fixed
Estimated No of Idlers	656	326	0
	<b>1219</b>	<b>1219</b>	<b>1219</b>
No. of Rolls	3	2	3
Angle (degrees)	35	5	35
Bearing Type	Roller	Roller	Roller
Roll Diameter (mm)	178	178	178
Roll Material	Steel	Steel	Steel
Rotating Weight (kg)	45,9	40,8	45,9
Load Rating (N)	8006	5782	8006
Max Actual Load (N)	1978	769	Unused
Max Calc. Idler Load - CIL (N)	2450	938	Unused
RPM	559	559	559
Min L10 Life (hr)	2770588	22956024	Unused
L10 Average (hr)	2770588	22956024	Unused
% Reliability for 50000 Hrs	99,97	100,00	Unused
Vertical Misalignment (mm)	3,175	3,175	3,175
DIN f Factor	0,0200	0,0200	0,0200
Regen Multiplier			

Project  
 Location  
 Description

**Trajectory**



**Material Discharge Trajectory**

Interval	X Dist mm	Y Drop mm
1	305	17
2	610	67
3	914	152
4	1219	270
5	1524	421
6	1829	606
7	2134	825
8	2438	1078
9	2743	1364
10	3048	1684
11	3353	2038
12	3658	2426
13	3962	2847
14	4267	3302
15	4572	3790

Vertical Bankboard

Pulley Center to Top of Material  
 X Dimension mm -1803  
 Y Dimension mm 0  
 Pulley Center to Bottom of Material  
 X Dimension mm -1803  
 Y Dimension mm 0

Horizontal Bankboard

Pulley Center to Top of Material  
 X Dimension mm 0  
 Y Dimension mm 1803  
 Pulley Center to Bottom of Material  
 X Dimension mm 0  
 Y Dimension mm 1803

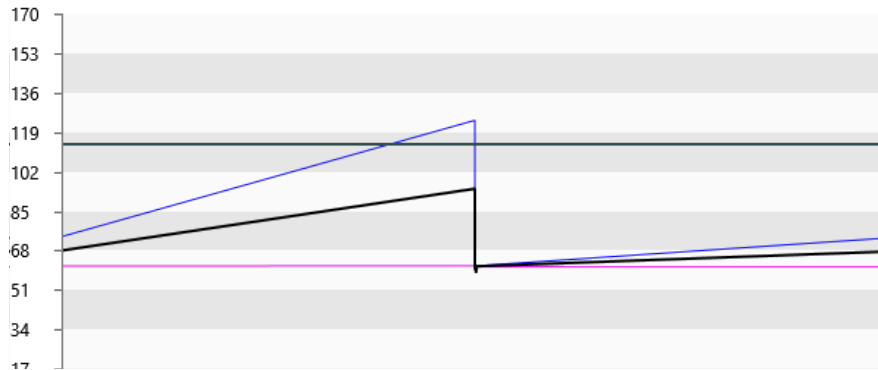
Project  
 Location  
 Description

**Belt**

Specification		<b>Fabric-ISO</b>
Carcass		<b>3/EP750</b>
DIN Calculated Rating	N/mm	113
Top Cover Gauge	mm	<b>6,4</b>
Bottom Cover Gauge	mm	<b>6,4</b>
Max Belt Width	mm	1829
Min Belt Width	mm	914
Weight	kg/m	25,7
Modulus	N/mm	8663
Accel/Decel Limit	%	150
Safety Factor S0		<b>1,10</b>
Safety Factor S1		<b>1,70</b>
Min Required Breaking Strength	N/mm	624,50
Min Required Splice Strength	N/mm	187,35
Min Required Safety Factor		6,62

	<b>Run</b>	<b>Accel</b>	<b>Decel</b>
Min Safety Factor	6,62	4,41	4,41
Actual Safety Factor	7,95	6,06	12,24
Local Tension Limits	%	<b>115</b>	
Min Local Safety Factor	5,75	3,84	3,84
Actual Local Safety Factor	7,49	5,79	11,07
Highest Local Tension Location	Head Transition	Head Transition	Tail Transition
Lowest Tension Allowable	N/mm	0,00	0,00
Lowest Local Tension	N/mm	65,77	71,73
Lowest Local Tension Location	Tail Transition	Tail Transition	Head Transition
Dynamic Splice Efficiency	<b>0,30</b>		
Min Splice Dynamic Safety Factor		1,10	1,10
Actual Splice Safety Factor	2,25	1,74	3,32

Sag  Run  Accel  Belt  Drift

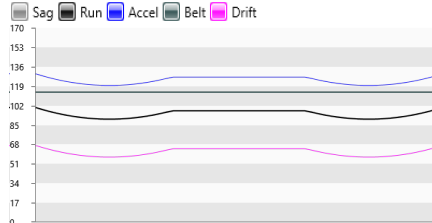


Project  
 Location  
 Description

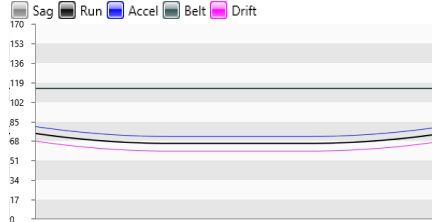
**Transitions**

Transitions	Run	Acceleration	Deceleration
Head Transition Point	2		
Length (mm)	2400		
Trough Depth (%)	50		
Pulley Height (mm)	103		
Tension At Head (kN)	113,3	148,6	73,6
Highest Local Stress (N/mm)	100,2	129,6	67,1
Local Safety Factor (S.F.)	7,49	5,79	11,18
Splice Safety Factor (S.F.)	2,25	1,74	3,35
Low Tension (N/mm)	89,9	119,3	56,8
Tail Transition Point	1		
Length (mm)	4800		
Trough Depth (%)	0		
Pulley Height (mm)	0		
Tension At Tail (kN)	81,4	88,6	73,4
Highest Local Stress (N/mm)	74,5	80,4	67,8
Local Safety Factor (S.F.)	10,07	9,32	11,07
Splice Safety Factor (S.F.)	3,02	2,80	3,32
Low Tension (N/mm)	65,8	71,7	59,1

**Head Transition**

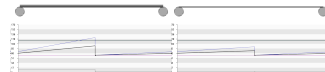


**Tail Transition**



Project  
 Location  
 Description

**Case Summary**



Case Name	Base	Vacio-sin carga
Load (mtph)	1996	0
Percent Loaded	65	0
Ambient Temperature (°C)	-17,8	-17,8
Total Friction Force (kN)	39,5	18,6
Lift Force (kN)	0,0	0,0
Misc Drag (kN)	2,6	2,5
Equivalent Friction Coefficient	0,0200	0,0200
Description	Aggregate	Aggregate
Material Density (kg/m <sup>3</sup> )	850	850
Dynamic Angle of Slope (degrees)	20,0	20,0
Effective Filling Ratio	1,00	1,00
Lump Size (mm)	152	152
Total Nameplate (kW)	300	300
Percent Running Power	76,9	38,6
Start Time (sec)	30,0	30,0
Stopping Belt Travel (m)	69,29	69,94
Stopping Discharge (kg)	7386,84	0,00
Rating (N/mm)	75	75
Average Running S.F.	7,9	9,7
Average Starting S.F.	6,1	8,2
Average Stopping S.F.	12,2	12,2
Local Running S.F.	7,5	9,1
Local Starting S.F.	5,8	7,7
Local Stopping S.F.	11,1	11,1
Splice Running S.F.	2,2	2,7
Splice Starting S.F.	1,7	2,3
Splice Stopping S.F.	3,3	3,3
Normal TU Tension kN	70	70
Requirement	Accel Slip	Run Slip

Project  
Location  
Description

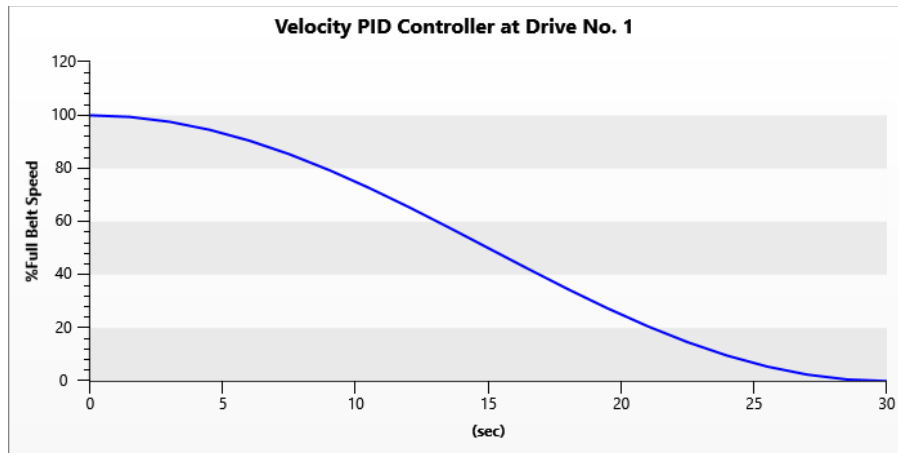
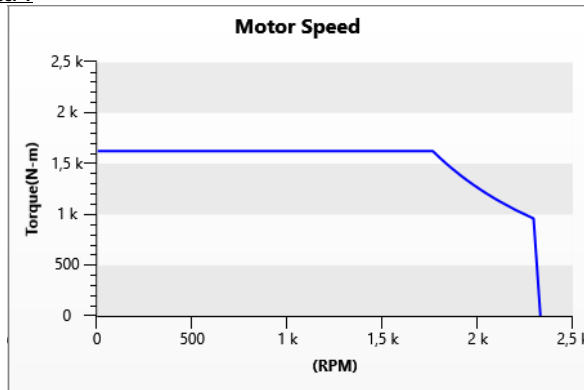
**Pulley Resultant Forces**

Case Name	Base	Vacio-sin carga
Resultant Forces (kN)		
1 - Dr/Head	185.4	164.5
2 - Bend	104.2	104.2
3 - Takeup	134.0	134.0
4 - Bend	105.6	105.6
5 - Tail	162.6	162.6

Project  
 Location  
 Description

**Motor and Controller Data for Drive Number 1**

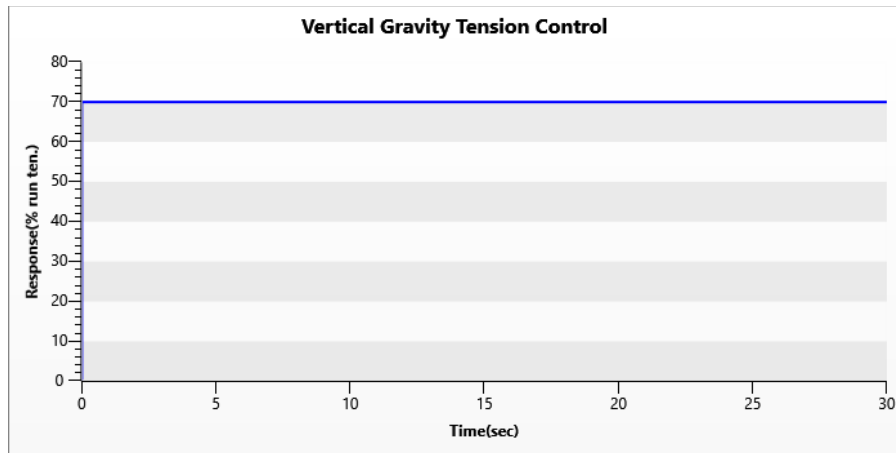
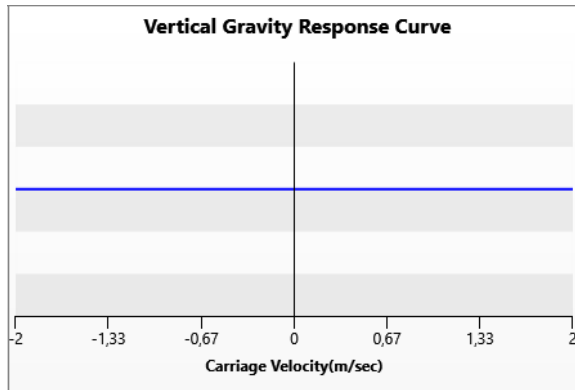
Drive Number	1
Motor Power (kW)	150
Number of Motors	2
Synchronous Speed (RPM)	1800
Full Load Speed (RPM)	1764
Full Load Torque (N-m)	812
Gear Ratio	14,66
Drive Efficiency	0,95
Pulley Diameter (mm)	800
Motor Controller Type	Velocity PID
Initial Torque (%)	76,8
Proportional Gain Coefficient	0,200
Integral Gain Coefficient	0,200
Derivative Gain Coefficient	2,000



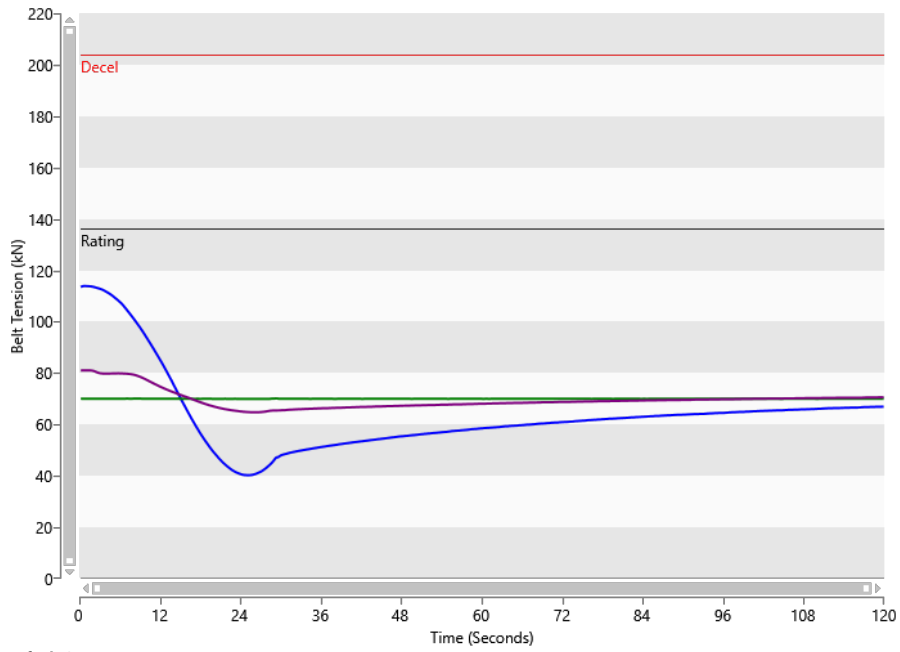
Project  
 Location  
 Description

**Takeup Controller Data**

Running Tension (kN)	70,0
Max Tension Setting (kN)	112,8
No. Takeup Sheaves	0
Takeup Type	Vertical Gravity



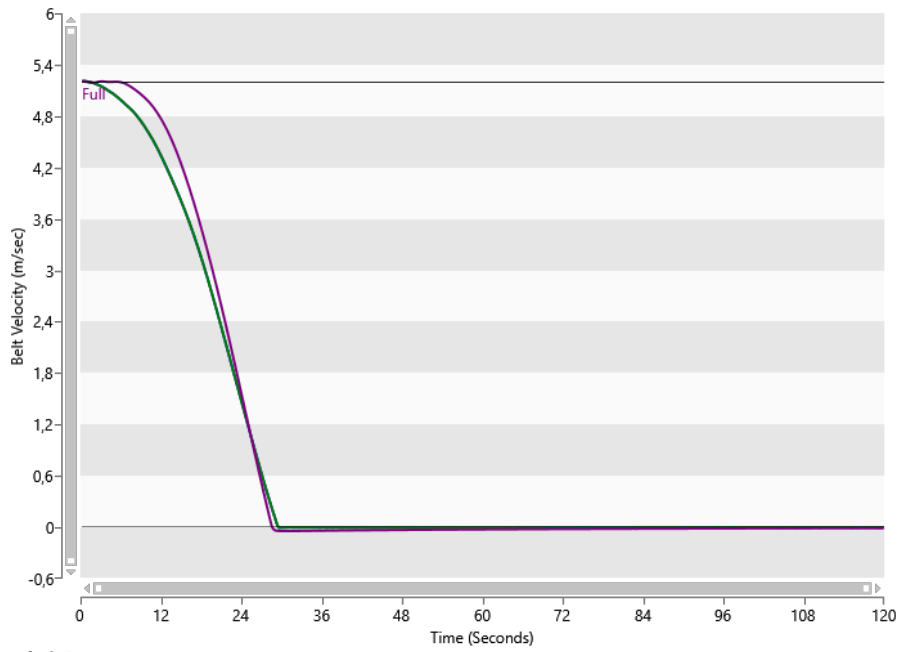
Project  
 Location  
 Description



**Default Set**

Description	Station (m)	Maximum	Minimum
Drive #1/Head	1000,00	113,9	40,3
Takeup	997,31	70,2	70,0
Tail	0,00	81,1	64,8

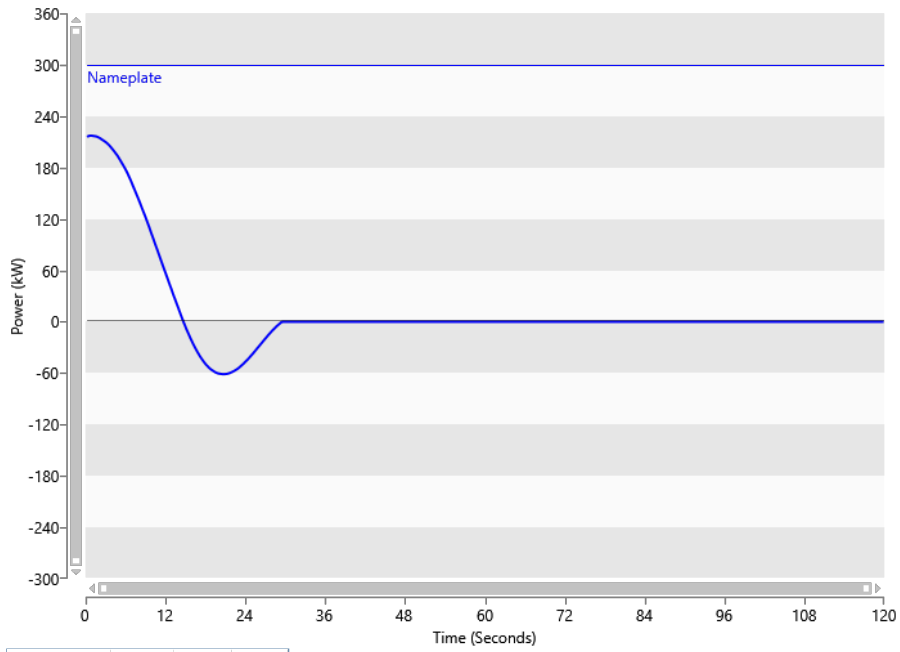
Project  
 Location  
 Description



**Default Set**

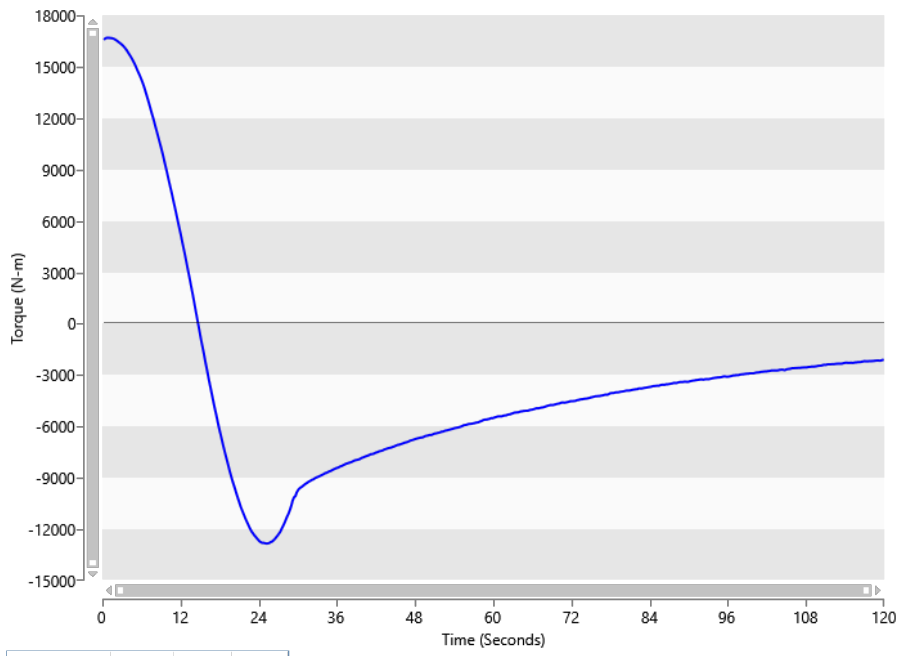
Description	Station (m)	Maximum	Minimum
Drive #1/Head	1000,00	5,21	0,00
Takeup	997,31	5,21	-0,01
Tail	0,00	5,21	-0,04

Project  
 Location  
 Description



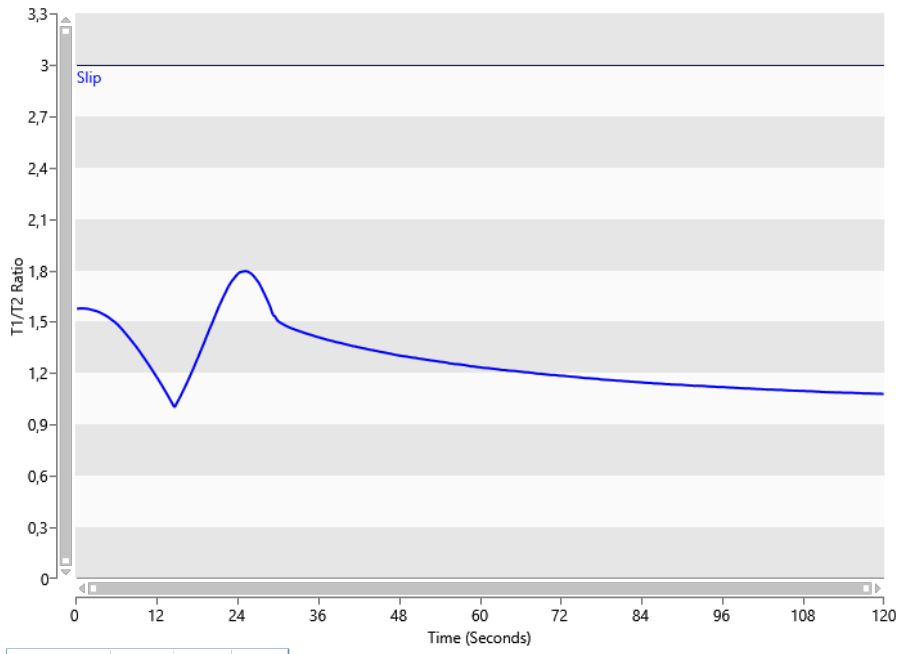
Description	Station (m)	Maximum	Minimum
■ Drive #1/Head	1000,00	217	-61

Project  
 Location  
 Description



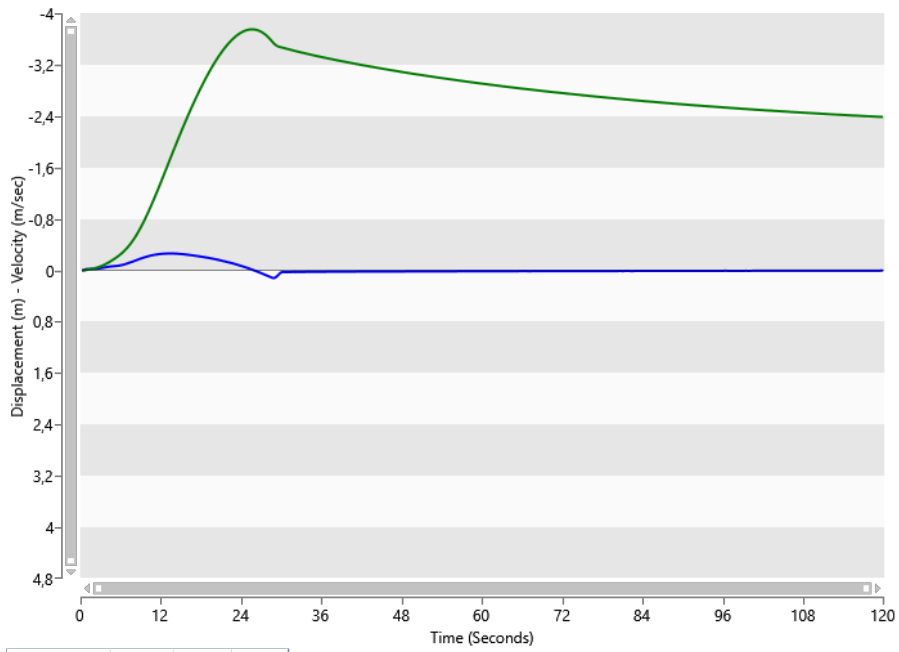
Description	Station (m)	Maximum	Minimum
Drive #1/Head	1000,00	16691	-12828

Project  
 Location  
 Description



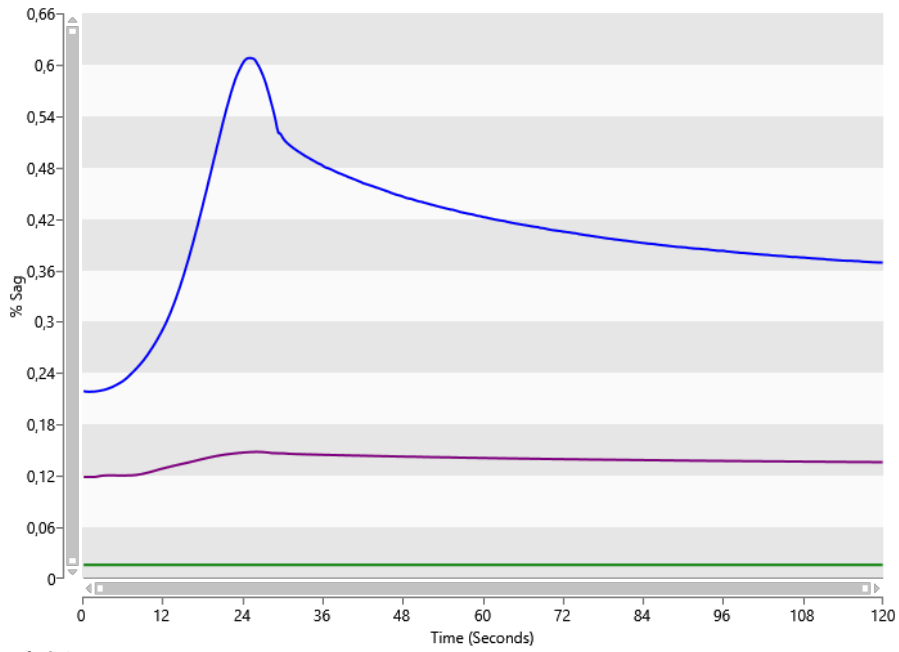
Description	Station (m)	Maximum	Minimum
Drive #1/Head	1000,00	1,80	1,00

Project  
 Location  
 Description



Description	Station (m)	Maximum	Minimum
Velocity	997,31	0,12	-0,26
Displacement	997,31	0,00	-3,75

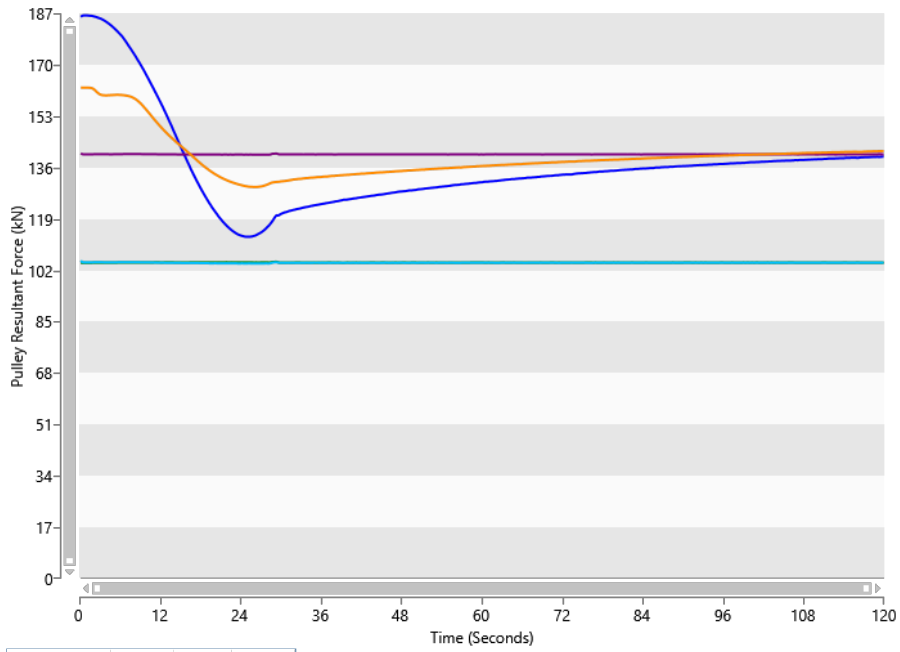
Project  
 Location  
 Description



**Default Set**

Description	Station (m)	Maximum	Minimum
Drive #1/Head	1000,00	0,61	0,22
Takeup	997,31	0,02	0,02
Tail	0,00	0,15	0,12

Project  
 Location  
 Description



Description	Station (m)	Maximum	% Running
Drive #1/Head	1000,00	186,3	100,53 %
Bend #2	998,00	104,8	100,60 %
Takeup	997,31	140,7	105,02 %
Bend #4	996,31	105,2	99,65 %
Tail	0,00	162,5	99,95 %

**G. Anexo G: Informe sobre la correa transportadora de 3 [km] planteada en la sección 7 generado por el programa comercial “Belt Analyst”.**

Project  
Location  
Description

**General**

Belt Width	mm	1800
Belt Speed	m/sec	7,00
Load	mtph	11000
Ambient Temp	°C	-18
Total Mass	kg	2741320
Total HS Inertia	kg-m²	3784
Calculation Method		DIN
Friction Force	kN	433,6
Lift Force	kN	124,8
Misc Drag	kN	13,9
DIN Primary Resistance f		0.0200
DIN Secondary Resistance C		1.03

**Material**

Description		<b>Aggregate</b>
Material Density	kg/m³	1442
Surcharge Angle	deg	15,0
Actual Area	m²	0,303
Percent Loaded	%	71
Edge Distance	mm	200
Bed Depth	mm	332
Lump Size	mm	300
Chute Drop Height	m	2,44
Impact Energy	N-m	1163,5

**Idlers**

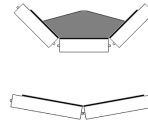
Specification		<b>Carry</b>	<b>Return</b>
Description		CEMA5 E7	CEMA5 E7
Estimated No of Idlers		2191	1095
Belt Width	mm	1829	1829
No of Rolls		3	2
Angle	deg	45,0	10,0
Roll Diameter	mm	178	178
Type		Fixed	Fixed
Rotating Weight	kg	70,1	58,5
Bearing Type		Roller	Roller
Rating	N	8006	5782
Max Actual Load	N	7721	2396
Max Calc Load	N	14772	4506
RPM		752	752
Min L10 Life	hr	5190	91570
Ave L10 Life	hr	5190	91570
Vert. Misalign	mm	3,175	3,175
Regen Multiplier		0,67	0,67

**Takeup**

Type		<b>Gravity</b>
Tension	kN	1012,8
No of Pulleys		
Weight	kg	206570,0
Selected Due To		Accel Slip
Approx. Carriage Travel Due To		(Refer To Belt Manufacturer)
Permanent	m	10,23
Total	m	11,65

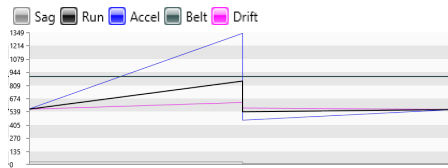
**Profile**

Horizontal Length	m	3340
Vertical Lift	m	29



**Belt**

Type		<b>Steel</b>
Description		ST5400
Cover Gauge	mm	6,4 6,4
Belt Rating	kN / (N/mm)	1621 / 900
Safety/Design Factor		6,00
Elastic Modulus	N/mm	388500
Weight	kg/m	80,1
Apparent Length	m	6,686
Max Run Ten	kN / N/mm / %	1535,5 / 852 / 95
Max Accel Ten	kN / N/mm / %	2415,0 / 1341 / 149
Max Decel Ten	kN / N/mm / %	1142,1 / 634 / 70



Project  
 Location  
 Description

**Drives**

	<b>1</b>
Location	2
Number of Motors	1
Total Nameplate Power (kW)	4750
Total Power (kW)	4750
Power Ratio	1,00
Efficiency	<b>0,95</b>
Wrap Angle (Deg)	<b>180</b>
Synchronous RPM	<b>1800</b>
Full Load RPM	<b>1764</b>
Actual RPM	1764
Gearbox Ratio	26,72
Coupling Slip	0
HS Inertia (kg-m <sup>2</sup> )	713,31
Backstop Required?	Yes
Min Backstop Rating (N-m)	<b>892987</b>
Backstop Torque (N-m)	0
Running	
Running Power (kW)	4217
Percent Nameplate (%)	88,8
Running Te (kN)	572,3
Friction Factor	<b>0,35</b>
Wrap Factor	0,50
Slip Ratio	3,00
Actual T1/T2 Ratio	1,58
Breakaway	
Breakaway Friction Multiplier	1,50
Req Breakaway Torque (% Nmpl)	124
Motor Peak Torque (% Nmpl)	225
Acceleration	
Start Time(sec)	15
Ave Starting Torque (% Nmpl)	287
Starting Te (kN)	1606,5
Friction Factor	<b>0,35</b>
Wrap Factor	0,50
Slip Ratio	3,00
Actual T1/T2 Ratio	2,96
Stopping	
Est. Drift Time(sec)	33,5
Brake Stop Time(sec)	0,0
Brake Torque (N-m)	0
Brake Te (kN)	0
Brake Ratio	<b>0,00</b>
Friction Factor	<b>0,35</b>
Wrap Factor	0,50
Slip Ratio	3,00

Project  
 Location  
 Description

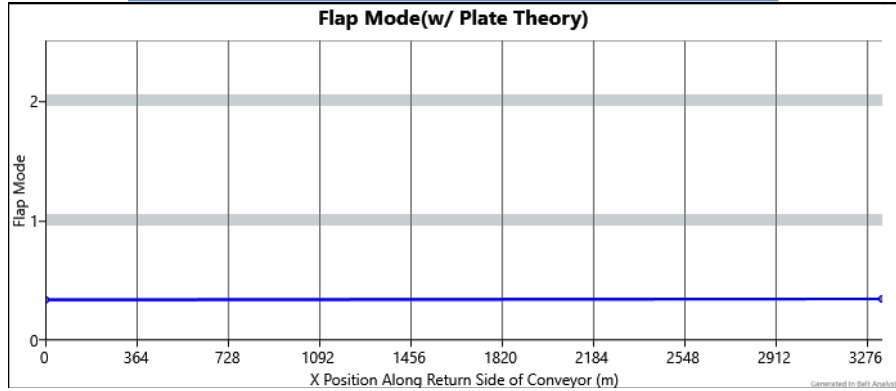
**Input**

Flt	Desc	Label	Horizontal Length (m)	Lift (m)	Angle (degrees)	Idler Selection	Idler Spacing (m)	Percent Load	Skirt Length (m)	Accel Load (mtph)	No. Of Cleaners	No. Of Plows	Extra Drag (N)
1	Carry		3340,00	29,15	0,50	Carry	1,52	100					
2	Dr/Head												
3	Return		-3340,00	-29,15	-0,50	Return	3,05	X					
4	Tail/TU												

Project  
 Location  
 Description

**Output**

Fit	Desc	Station (m)	Elevation (m)	Run Tension (kN)	Accel Tension (kN)	Decel Tension (kN)	Min Sag Tension (kN)	f Factor Allocat'n (N/m)	Misc Drag (N)	Mass (kg)	Idler L10 (1000 hr)
1	Carry	0,00	0,00	1019,3	1022,5	1017,9	48,3	110,349		18777825	
2	Dr/Head	3340,00	29,15	1535,5	2415,0	1142,1			7454	525165	
3	Return	3340,00	29,15	970,7	815,9	1039,9	15,0	19,485		331565	92
4	Tail/TU	0,00	0,00	1012,8	1012,8	1012,8			6463	6808	

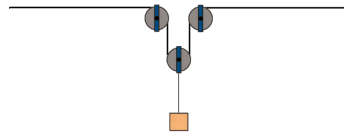


Project  
 Location  
 Description

**Takeup**

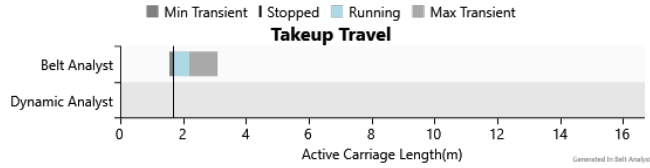
Type	Vertical Gravity
Belt Tension	1012,8 kN
Percent of Maximum	0 %
Weight-Pull	206570,0 kg
Rope Tension	2025,7 kN
Percent of Maximum	0 %
Max Belt Takeup Speed	9,81 m/sec
Travel Ratio [Weight/Carriage]	1,00
Load Ratio [Weight/Belt]	2,00
No of Pulleys in Carriage	1
Rope Tension	2025,7 kN
Running Sag Limit	2,00 %
Accel/Decel Sag Limit	3,00 %
Running Sag	123,2 kN
Accel Sag	206,9 kN
Drift Sag	123,2 kN
Running Slip	327,9 kN
Accel Slip	999,0 kN
Drift Slip	123,2 kN
Active Carriage Length	16,70 m
Percent Conveyor Length	0,50 %
Active Weight Travel	16,7 m

Approximate Arrangement Representing Mechanical Equivalence (2D)



Installed Position	1,67 m
Temperature Range	15,6 °C
Low Temperature	No
Low Temperature	0,00 °C
After Permanent Stretch	No
After Permanent Stretch	0,0
Permanent Stretch	10,23 m
Running	0,51 m
Accel	1,42 m
Running Slip	0,10 m
Decel	123,2 kN
Extra Belt Length	3,13 m

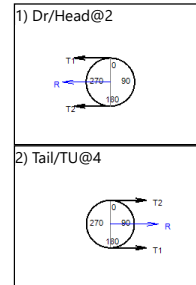
Generated in Belt Analyst



Project  
 Location  
 Description

**Pulley**

Pulley No.	1	2
Flight Description	Dr/Head	Tail/TU
Label		
Location	2	4
Same As (Pulley No.)		
Pulley Group	A	B
Tension (T1) (kN)	1535,5	1012,8
Tension (T2) (kN)	970,7	1019,3
T1 Incoming Angle (degrees)	0,0	180,0
Wrap Direction	Clockwise	Clockwise
Wrap Angle (degrees)	180,0	180,0
T2 Outgoing Angle (degrees)	179,5	-0,5
Pulley Weight (kg)	8365,15	6813,75
Resultant Force (kN)	2506,2	2032,1
Resultant Force Angle (degrees)	270,00	90,00
Pulley Diameter (mm)	2000	1800
Lagging Gauge (mm)	12,7	0,0
Lagging Type	Herringbone	
Face Width (mm)	2000	2000
Pulley RPM (RPM)	66,01	74,27
Bearing Centers B (mm)	2841	2740
Overhung Load (N)	0,0	
Face Pressure (kPa)	14,35	10,59



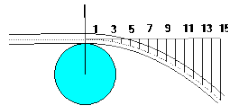
Project  
 Location  
 Description

**Idlers**

	Carry Default	Return Default
Idler Name	Carry	Return
Specification	CEMAS	CEMAS
Description	E7	E7
Type	Fixed	Fixed
Estimated No of Idlers	2191	1095
	1829	1829
No. of Rolls	3	2
Angle (degrees)	45	10
Bearing Type	Roller	Roller
Roll Diameter (mm)	178	178
Roll Material	Steel	Steel
Rotating Weight (kg)	70,1	58,5
Load Rating (N)	8006	5782
Max Actual Load (N)	7721	2396
Max Calc. Idler Load - CIL (N)	14772	4506
RPM	752	752
Min L10 Life (hr)	5190	91570
L10 Average (hr)	5190	91570
% Reliability for 50000 Hrs	0,00	95,90
Vertical Misalignment (mm)	3,175	3,175
DIN f Factor	0,0200	0,0200
Regen Multiplier		

Project  
 Location  
 Description

**Trajectory**



**Material Discharge Trajectory**

Interval	X Dist mm	Y Drop mm	Vertical Bankboard
1	305	9	Pulley Center to Top of Material
2	610	37	X Dimension mm -2409
3	914	84	Y Dimension mm 0
4	1219	149	Pulley Center to Bottom of Material
5	1524	232	X Dimension mm -2409
6	1829	335	Y Dimension mm 0
7	2134	455	<u>Horizontal Bankboard</u>
8	2438	595	Pulley Center to Top of Material
9	2743	753	X Dimension mm 0
10	3048	930	Y Dimension mm 2409
11	3353	1125	Pulley Center to Bottom of Material
12	3658	1339	X Dimension mm 0
13	3962	1571	Y Dimension mm 2409
14	4267	1822	
15	4572	2091	

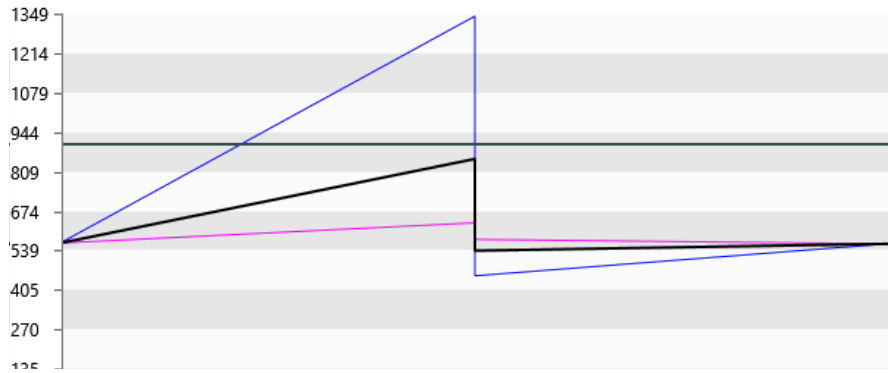
Project  
 Location  
 Description

**Belt**

Specification		<b>Steel</b>
Carcass		<b>ST5400</b>
DIN Calculated Rating	N/mm	900
Top Cover Gauge	mm	<b>6,4</b>
Bottom Cover Gauge	mm	<b>6,4</b>
Max Belt Width	mm	3048
Min Belt Width	mm	1219
Weight	kg/m	80,1
Modulus	N/mm	388500
Accel/Decel Limit	%	150
Safety Factor S0		1,10
Safety Factor S1		1,70
Min Required Breaking Strength	N/mm	5115,50
Min Required Splice Strength	N/mm	2301,97
Min Required Safety Factor		6,00

	<b>Run</b>	<b>Accel</b>	<b>Decel</b>
Min Safety Factor	6,00	4,00	4,00
Actual Safety Factor	6,33	4,03	8,52
Local Tension Limits	%	115	
Min Local Safety Factor		5,22	3,48
Actual Local Safety Factor		5,48	7,05
Highest Local Tension Location	Head Transition	Head Transition	Head Transition
Lowest Tension Allowable	N/mm	0,00	0,00
Lowest Local Tension	N/mm	527,97	529,73
Lowest Local Tension Location	Tail Transition	Tail Transition	Tail Transition
Dynamic Splice Efficiency		0,45	
Min Splice Dynamic Safety Factor		1,38	1,38
Actual Splice Safety Factor	2,47	1,65	3,17

Sag 
  Run 
  Accel 
  Belt 
  Drift

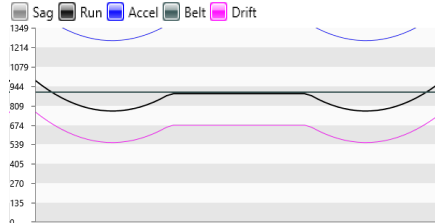


Project  
 Location  
 Description

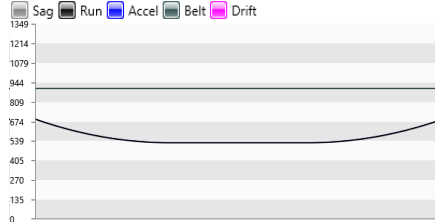
**Transitions**

Transitions	Run	Acceleration	Deceleration
Head Transition Point	2		
Length (mm)	7200		
Trough Depth (%)	50		
Pulley Height (mm)	193		
Tension At Head (kN)	1535,5	2415,0	1142,1
Highest Local Stress (N/mm)	984,8	1473,0	766,4
Local Safety Factor (S.F.)	5,48	3,67	7,05
Splice Safety Factor (S.F.)	2,47	1,65	3,17
Low Tension (N/mm)	771,5	1259,8	553,1
Tail Transition Point	1		
Length (mm)	14400		
Trough Depth (%)	0		
Pulley Height (mm)	0		
Tension At Tail (kN)	1019,3	1022,5	1017,9
Highest Local Stress (N/mm)	690,8	692,6	690,1
Local Safety Factor (S.F.)	7,82	7,80	7,83
Splice Safety Factor (S.F.)	3,52	3,51	3,52
Low Tension (N/mm)	528,0	529,7	527,2

**Head Transition**



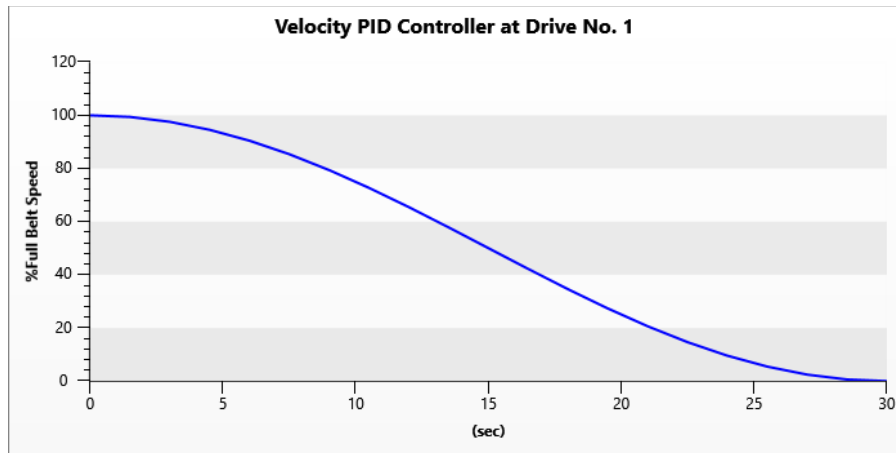
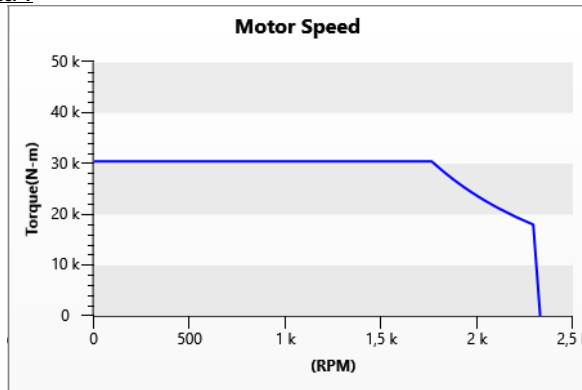
**Tail Transition**



Project  
 Location  
 Description

**Motor and Controller Data for Drive Number 1**

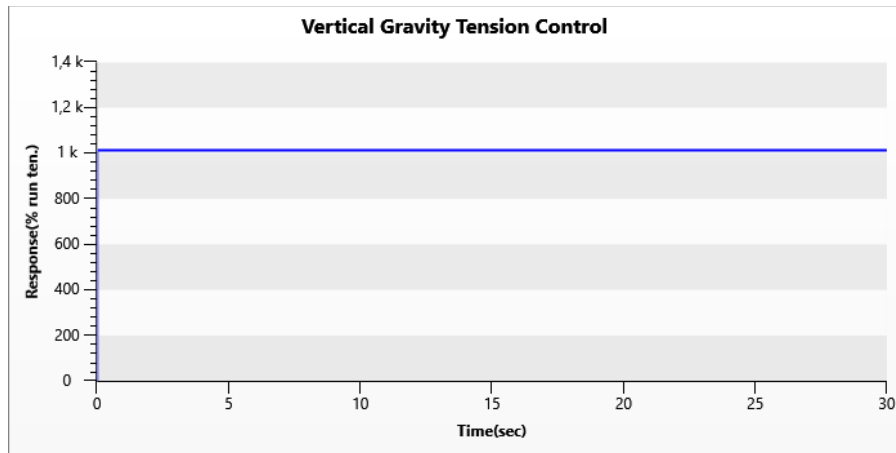
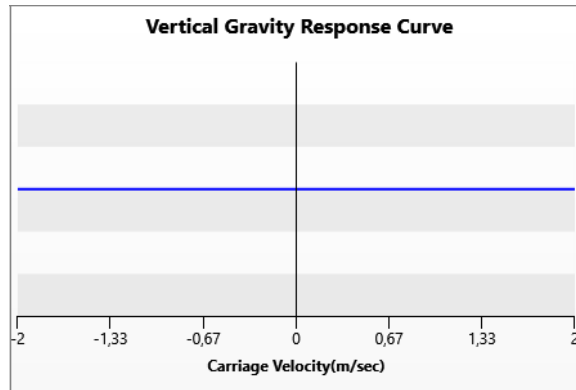
Drive Number	1
Motor Power (kW)	4750
Number of Motors	1
Synchronous Speed (RPM)	1800
Full Load Speed (RPM)	1764
Full Load Torque (N-m)	25713
Gear Ratio	26,72
Drive Efficiency	0,95
Pulley Diameter (mm)	2000
Motor Controller Type	Velocity PID
Initial Torque (%)	88,8
Proportional Gain Coefficient	0,200
Integral Gain Coefficient	0,200
Derivative Gain Coefficient	2,000



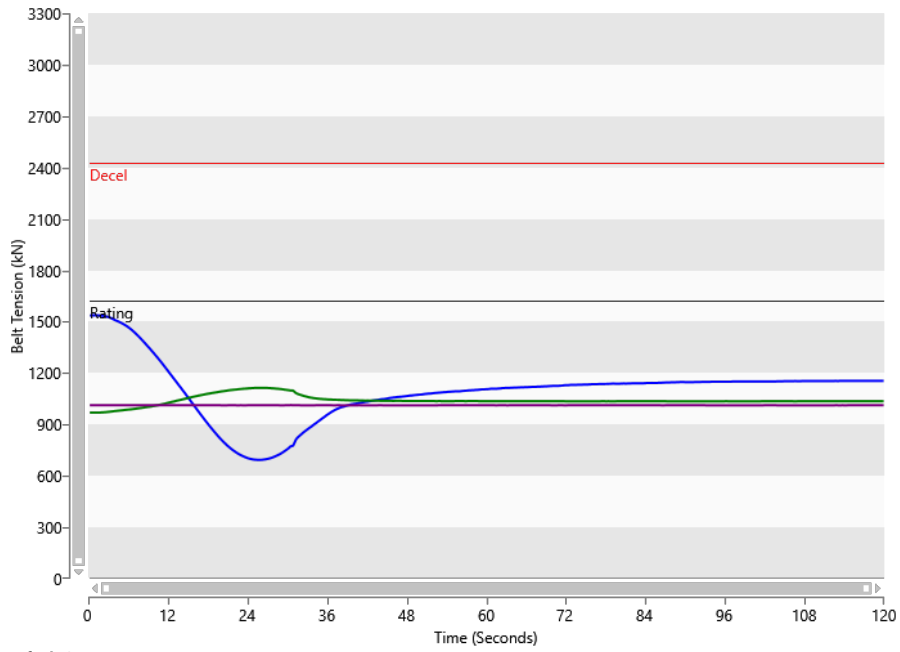
Project  
 Location  
 Description

**Takeup Controller Data**

Running Tension (kN)	1012,8
Max Tension Setting (kN)	0,0
No. Takeup Sheaves	0
Takeup Type	Vertical Gravity



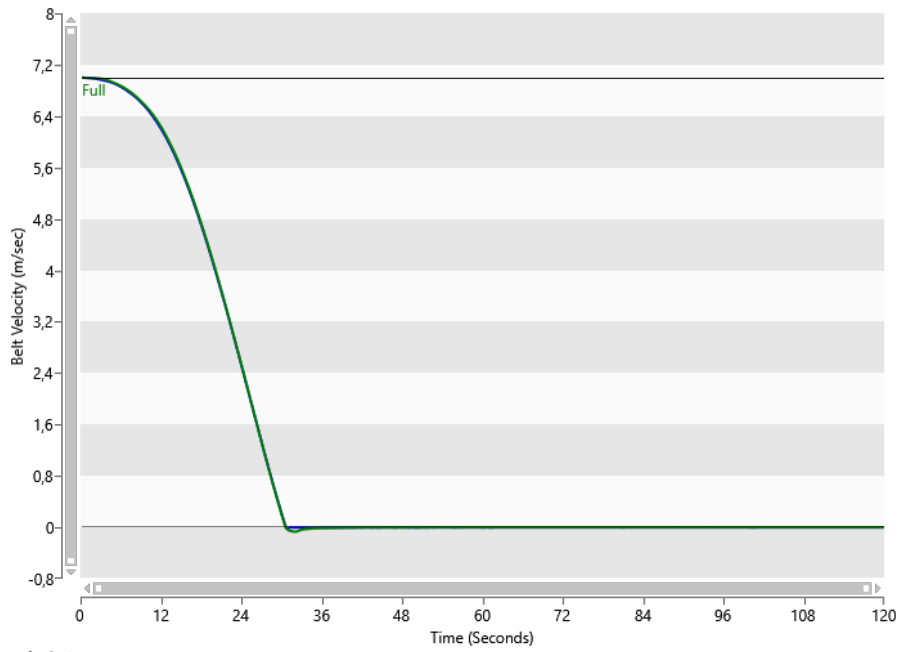
Project  
 Location  
 Description



**Default Set**

Description	Station (m)	Maximum	Minimum
Drive #1/Head	3340,00	1537,7	693,7
Return Max	3340,00	1114,2	969,8
Tail/TU	0,00	1013,9	1012,0

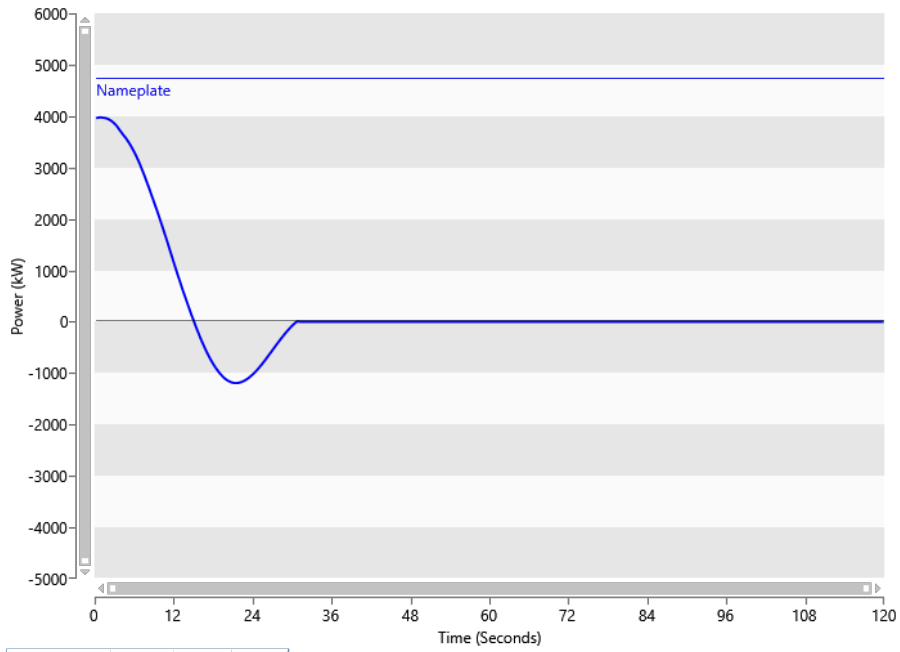
Project  
 Location  
 Description



**Default Set**

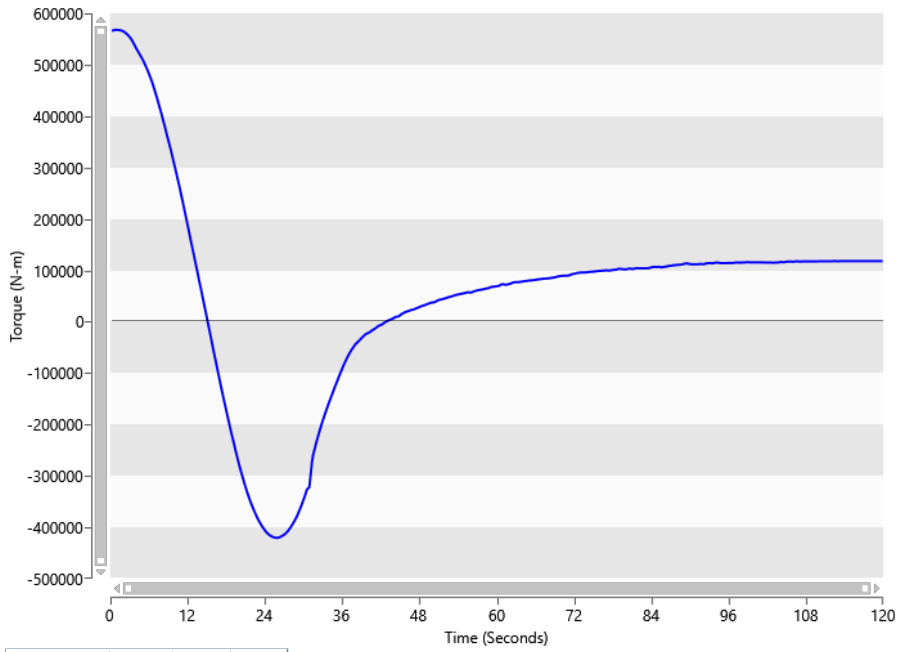
Description	Station (m)	Maximum	Minimum
■ Drive #1/Head	3340,00	7,00	-0,02
■ Tail/TU	0,00	7,00	-0,07

Project  
 Location  
 Description



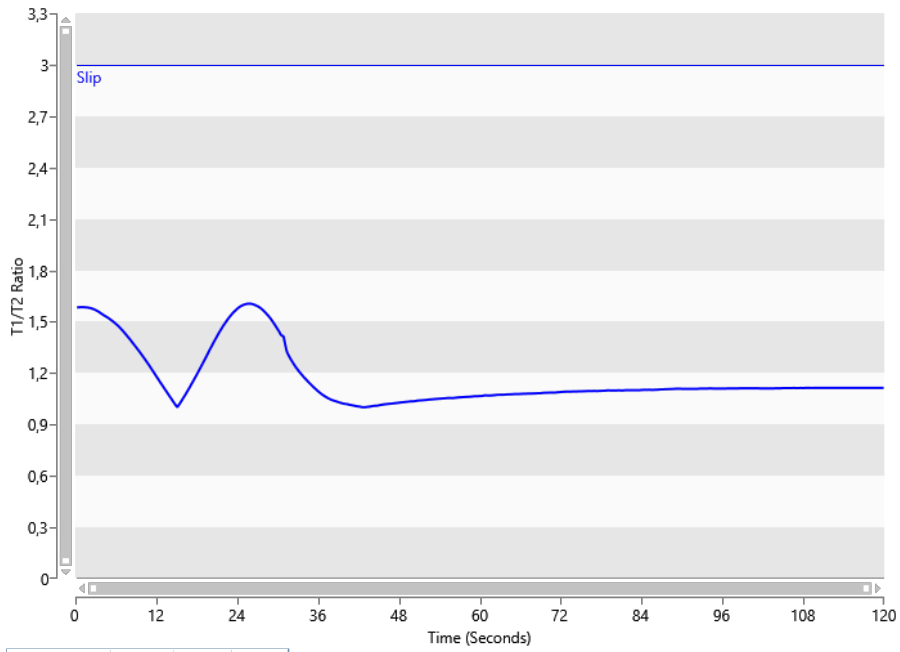
Description	Station (m)	Maximum	Minimum
■ Drive #1/Head	3340,00	3975	-1192

Project  
 Location  
 Description



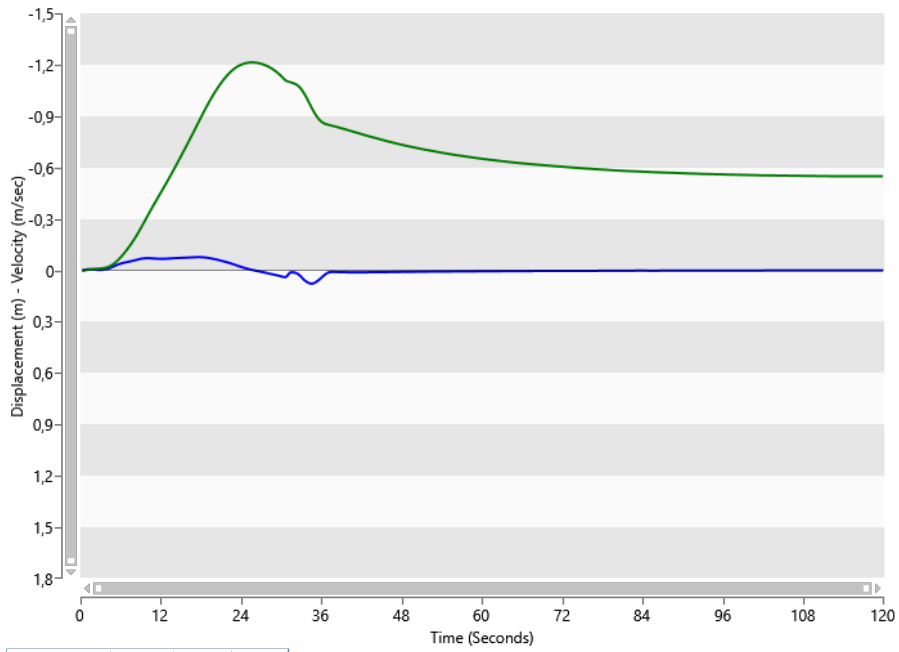
Description	Station (m)	Maximum	Minimum
■ Drive #1/Head	3340,00	567993	-420438

Project  
 Location  
 Description



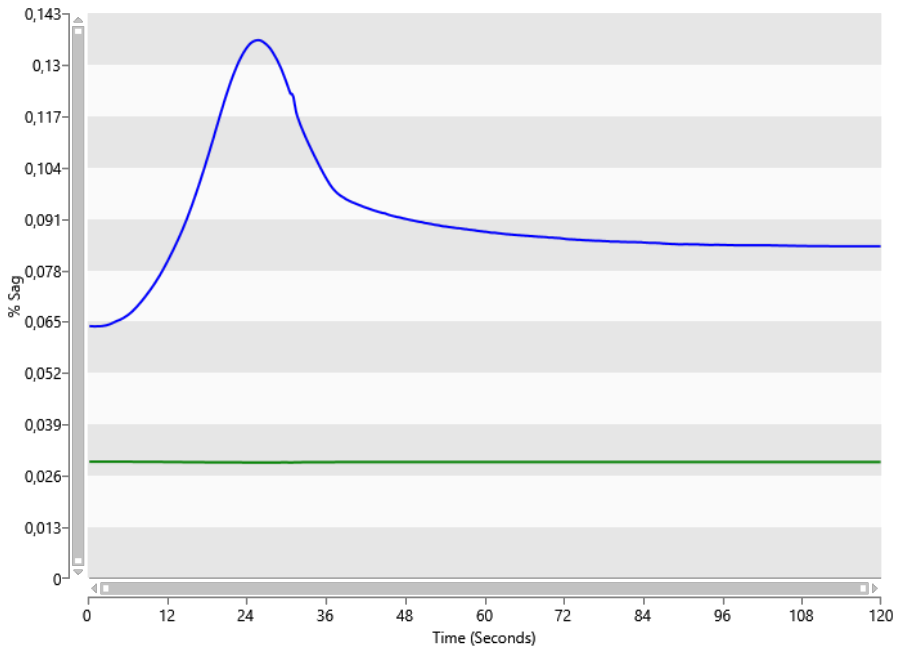
Description	Station (m)	Maximum	Minimum
Drive #1/Head	3340,00	1,61	1,00

Project  
 Location  
 Description



Description	Station (m)	Maximum	Minimum
Velocity	0,00	0,08	-0,08
Displacement	0,00	0,00	-1,21

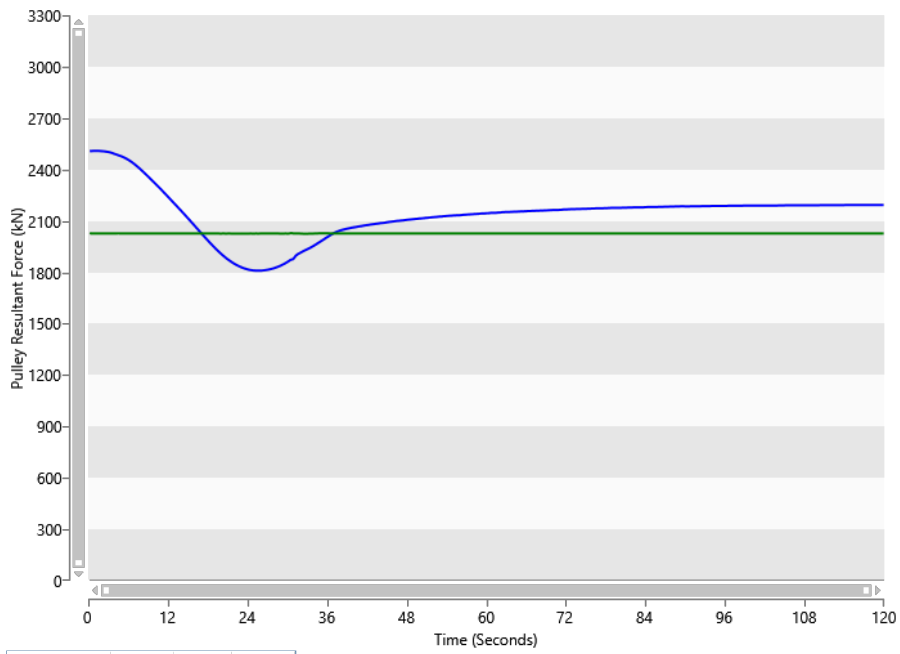
Project  
 Location  
 Description



**Default Set**

Description	Station (m)	Maximum	Minimum
■ Drive #1/Head	3340,00	0,14	0,06
■ Tail/TU	0,00	0,03	0,03

Project  
 Location  
 Description



Description	Station (m)	Maximum	% Running
■ Drive #1/Head	3340,00	2508,9	100,11 %
■ Tail/TU	0,00	2030,0	99,89 %

## H. Anexo H: Programa Matlab para modelar una correa de 1[km].

```
%Programa Correa 1-D transportadora en estado transiente
clear variables
%-----
%   Datos de la correa
%-----
%A_0=--; % area en [m^2] de la a_transv de la correa
densidad_correa=25.7;%en [kg/m], Kg por metro de largo para CORREA 3/EP750
densidad_carga_material=850*0.125;
%densidad*area_tr;en [kg/m], Kg por metro de largo
%E_b=--;%modulo de elasticidad en [Pa] de la correa
%Modulo de elasticidad por todo su espesor (E_modif) que es igual a
%E_modif [Pa*m]= E_b [Pa]*espesor[m]=E_modif [N/m]
E_modif_dado=8663;%en [N/mm]
E_modif=8663*1000;%en [Pa*m] o su equivalente [N/m]
B=1.2;% ancho correa en [m]
%-----
%   Datos poleas motriz, cola y tensora
%-----
%m_polea_motriz=1019.78;%en [kg]
%m_sist_motriz=0;%incorporado en polea motriz
%en [kg] masa del sistema motriz acoplado
m_polea_motriz=11530;%en [kg]
m_polea_cola=825.06;%en [kg], se asume igual a m_polea_motriz
%-----
m_polea_deflectora=621;%masa polea Bend / Deflectora en [kg]
%-----
m_polea_tensora=655.61; % en [kg]
m_contrapeso=14276.7-m_polea_tensora;% en [kg]
m_pt=14276.7;...
%en [kg] la masa del sistema tensor total(m_polea_tensora+contrapeso)
%no se usa polea combinada
%m_polea_combinada=m_polea_motriz+m_sist_motriz+...
(m_pt);%en [kg]
%-----
%   Datos Tension aplicada por el sistema tensor.
%-----
W_sist_tensor=9.8*(m_pt);%en [N] peso de la polea tensora+ contrapeso
T_2=W_sist_tensor/2; %en [N] tension minima aplicada en la correa
%-----
%   Datos polines de carga
%-----
%b_roll_carga=;%en [m]
%R_ext_carga=;%en [m]
%r_int_carga=;%en [m]
%densidad_polin_carga=;%en [kg/m^3], la del acero
%I_carga=;%en [Kg * m^2]
m_red_carga=45.9;% en [Kg]
%-----
%   Datos polines de retorno
```

```

%-----
%b_roll_retorno=;%en [m]
%R_ext_retorno=;%en [m]
%r_int_retorno=;%en [m]
%densidad_polin_retorno=;%en [kg/m^3], la del acero
%I_retorno=;%en [Kg * m^2]
m_red_retorno=40.8;%en [Kg]
%-----
% Influencia de los polines en el número de nodos
%-----
L_carga=1.52;%en [m] distancia entre polines de carga
L_retorno=3.05;%en [m] distancia entre polines de retorno
L_centros=1000;%en [m] distancia entre centros
%n_sec_carga=ceil(L_centros/L_carga);%numero de elementos lado carga
%n_sec_retorno=ceil(L_centros/L_retorno);%numero de elementos lado retorno
%n_pol_carga=n_sec_carga-1;
%n_pol_retorno=n_sec_retorno-1;
n_pol_carga=656;%numero de polines de carga
n_sec_carga=(656-1);%secciones con polines en ambos extremos
n_pol_retorno=326;%numero de polines de retorno
n_sec_retorno=(326-1);%secciones con polines en ambos extremos
nn=1+n_pol_retorno+1+n_pol_carga+3;%número de nodos
ne=1+n_sec_retorno+2+n_sec_carga+3;%número de elementos
%-----
% Datos cargas y fuerzas sobre la correa
%-----
%F_z=1732;% en [N/m] peso de correa y material por metro de ancho...
sobre un polin
lista_F_z=zeros(1,nn);
%lado retorno
for i=3:n_pol_retorno+1
    %carga_vertical_lado_retorno=;%en [N/m] fuerza soportada...
por la estación de polines
    %lista_F_z(1,i)=carga_vertical_lado_retorno;
    lista_F_z(1,i)=769/B;%en [N/m] fuerza vertical...
    sobre la esstación de polines
end
%lado carga
for i=n_pol_retorno+3:nn-3
    %carga_vertical_lado_carga=;%en [N/m] fuerza soportada...
por la estación de polines
    %lista_F_z(1,i)=carga_vertical_lado_carga;
    lista_F_z(1,i)=1978/B;%en [N/m] fuerza vertical...
    sobre la esstación de polines
end
%-----
% Distribución de los factores de fricción a lo largo de la correa
%-----
%Resistencia al movimiento por indentación
%factor_resistencia=0.02;%factor adimensional [-]
%nodos en los que hay una fuerza de resistencia al movimiento por
%indentación

```

```

ubicacion_fuerzas_resistencia=[3:n_pol_retorno+1 n_pol_retorno+3:nn-3];
%lista contenedora de la distribución de factores de fricción.
lista_factores_f=zeros(1,nn);
C_carga_secundaria=1.07;%(para un L_c de 1000 [m]);
%lado retorno
for i=3:n_pol_retorno+1
    f_polines_retorno=0.02;
    q_retorno=0.9;
    f_tmp=C_carga_secundaria*(1/q_retorno)*f_polines_retorno;
    lista_factores_f(1,i)=f_tmp;
end
%lado carga
for i=n_pol_retorno+3:nn-3
    f_polines_carga=0.02;
    q_carga=0.7;
    f_tmp=C_carga_secundaria*(1/q_carga)*f_polines_carga;
    lista_factores_f(1,i)=f_tmp;
end
%-----
% Cálculo del largo de los elementos
%-----
l_e_elementos=zeros(1,ne);
L_tail_pulley_transition=4.800;%en [m]
L_head_pulley_transition=2.400;%en [m]
for i=1:ne
    %lado retorno
    if i==1
        l_e_elementos(1,i)=8.9;
    elseif i>=2 && i<=11
        l_e_elementos(1,i)=1.24;
    elseif i>=12 && i<=n_sec_retorno+1
        l_e_elementos(1,i)=1.52;
    elseif i==n_sec_retorno+2
        l_e_elementos(1,i)=L_tail_pulley_transition;
    %lado carga
    elseif i==n_sec_retorno+3
        l_e_elementos(1,i)=L_tail_pulley_transition;
    elseif i>=n_sec_retorno+4 && i<=n_sec_retorno+8
        l_e_elementos(1,i)=3.04;
    elseif i>=n_sec_retorno+9 && i<=n_sec_retorno+n_sec_carga+3
        l_e_elementos(1,i)=3.05;
    elseif i==ne-2
        l_e_elementos(1,i)=L_head_pulley_transition;
    %lado retorno
    elseif i==ne-1
        l_e_elementos(1,i)=L_head_pulley_transition;
    elseif i==ne
        l_e_elementos(1,i)=8.9;
    end
end
%-----
%          FORMACION MATRIZ DE INERCIA M

```

```

%-----
%creación de una matriz identidad útil para obtener las matrices de
%conexión.
I_nn=eye(nn);
%-----
%Aporte de la masa de la correa
M_correa=zeros(nn,nn);
for i=1:ne
    L_e=matriz_conexion_L(i,I_nn);
    L_e_t=transpose(L_e);
    largo=l_e_elementos(i);
    %Para una correa cargada
    if i>=n_sec_retorno+3 && i<=ne-2 %secciones en el lado superior
        %secciones en el lado superior con carga
        %lumped mass
        %M_e=((densidad_correa+densidad_carga_material)*largo)*1/2*[1 0; 0 1];
        %distributed mass
        M_e=((densidad_correa+densidad_carga_material)*largo)*1/6*[2 1;1 2];
    else
        %secciones en el lado inferior sin carga
        %lumped mass
        %M_e=(densidad_correa*largo)*1/2*[1 0; 0 1];
        %distributed mass
        M_e=(densidad_correa*largo)*1/6*[2 1;1 2];
    end
    end
    subtotal=L_e_t*M_e*L_e;
    M_correa=M_correa+subtotal;
end
%Aporte de la masa de los polines y poleas (sin considerar polea tensora)
M_poleas=zeros(nn,nn);
for i=1:ne
    L_e=matriz_conexion_L(i,I_nn);
    L_e_t=transpose(L_e);
    if i==1
        M_e=(m_polea_deflectora/2)*[0 0;0 1];
    elseif i==2
        M_e=(m_polea_deflectora/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_red_retorno/2)*[0 0;0 1];
    elseif i>=3 && i<=n_sec_retorno+1
        M_e=(m_red_retorno/2)*[1 0;0 1];
    elseif i==n_sec_retorno+2
        M_e=(m_red_retorno/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_polea_cola/2)*[0 0;0 1];
    elseif i==n_sec_retorno+3
        M_e=(m_polea_cola/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_red_carga/2)*[0 0;0 1];
    elseif i>=n_sec_retorno+4 && i<=n_sec_retorno+n_sec_carga+3
        M_e=(m_red_carga/2)*[1 0;0 1];
    elseif i==ne-2

```

```

        M_e=(m_red_carga/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_polea_motriz/2)*[0 0;0 1];
    elseif i==ne-1
        M_e=(m_polea_motriz/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_polea_deflectora/2)*[0 0;0 1];
    elseif i==ne
        M_e=(m_polea_deflectora/2)*[1 0;0 0];
    end
    subtotal=L_e_t*M_e*L_e;
    M_poleas=M_poleas+subtotal;
end
%Obtenemos la matriz de inercia asociada a la polea tensora
fila_1=I_nn(1,:);
fila_2=I_nn(nn,:);
L_e_pt=[fila_1;fila_2];
L_e_pt_t=transpose(L_e_pt);
M_e=(m_pt/4)*[1 -1;-1 1];
M_polea_tensora=L_e_pt_t*M_e*L_e_pt;
%Obtenemos la matriz de masa total
Md=M_correa+M_poleas+M_polea_tensora;
%-----
%           FORMACION MATRIZ DE RIGIDEZ K
%-----
%Agrupamos constantes utiles
constantes_mode_correa=[B nn ne];
E_elementos=E_modif*ones(ne,1);
%Formamos la matriz de rigidez generica
Kd=creacion_matriz_K(l_e_elementos,E_elementos,constantes_mode_correa);
%-----
%           FORMACION MATRIZ DE AMORTIGUACION C
%-----
%Formamos la matriz de amortiguación
c_e_elementos=zeros(1,ne);
for i=1:ne
    l_elem=l_e_elementos(1,i);
    kte_e=E_modif*B/l_elem;
    m_e=densidad_correa*l_elem;
    %eta_damping=0.4;default
    eta_damping=0.847;%fracción de energia disipada en cada ciclo
    c_e_elementos(1,i)=eta_damping*(2*sqrt(kte_e*m_e));
end
ctes_utiles=[nn ne];
Cd=creacion_matriz_C(c_e_elementos,ctes_utiles);
%-----
% MODIFICACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES PARA VELOCIDAD CONTROLADA
%-----
% El sistema de ecuaciones  $Md\{a\}+Kd\{x\}=\{b\}$  se modifica a través de...
%operaciones elementales de filas y columnas para poder...
%incorporar en las variables, la curva de velocidad de freno...
%que siguen los nodos que representan a la polea motriz.

```

```

%
%   La modificación del sistema de ecuaciones, modifica las matrices
% Md y Kd, y es necesario definir nuevas matrices M y K, a traves de
%operaciones elementales entre filas y columnas.
%-----
% Formación de los vectores columna col_i_M,col_i_C,col_i_K
% que son utiles para representar a las fuerzas en el nodo "nn-2"
% cuando el movimiento del nodo es conocido.
%-----
%Extraemos una columna modificada de Md
col_i_Md=Md([1:nn-3 nn-1:nn],nn-2);
%Extraemos una columna modificada de Kd
col_i_Kd=Kd([1:nn-3 nn-1:nn],nn-2);
%Extraemos una columna modificada de Cd
col_i_Cd=Cd([1:nn-3 nn-1:nn],nn-2);
%-----
% Modificacion de las matrices Md y Kd, del sistema de ecuaciones
% Md{a}+Cd{v}+Kd{x}={b}
%-----
%
% Modificación de M
%-----
%quitamos la fila y columna "nn-2"
M=Md([1:nn-3 nn-1:nn],[1:nn-3 nn-1:nn]);
%
% Modificación de K
%-----
%quitamos la fila y columna "nn-2"
K=Kd([1:nn-3 nn-1:nn],[1:nn-3 nn-1:nn]);
%
% Modificación de C
%-----
%quitamos la fila y columna "nn-2"
C=Cd([1:nn-3 nn-1:nn],[1:nn-3 nn-1:nn]);
%-----
%           CASO: VELOCIDAD CONTROLADA DE FRENO
%-----
%Definición del desplazamiento, velocidad y aceleración.
%La velocidad de la polea motriz toma una curva de harrison
%Parametros de la curva de harrison
V_b=5.2;%en [m/s] %velocidad inicial de la correa
T_a=30;%en [s] %tiempo de freno
%-----
%           TIEMPO t=0, CALCULO DESPLAZAMIENTO INICIAL U_0
%-----
%distancia lineal\tangencial recorrida en el tiempo t=0 en la polea motriz
d_cero=0;
%velocidad conocida v=V_b en los nodos
v_cero=V_b*ones(nn,1);
%aceleracion conocida a=0 en los nodos
a_cero=zeros(nn,1);
%constantes utiles en el calculo

```

```

constantes_correa_cero=[nn B];
%formacion del vector contenedor de las fuerzas externas
f_ext_inicial=zeros(nn-1,1);
%calculo de las fuerzas de resistencia en t=0
aux_fzas_resistencia=calculo_fuerza_resistencia(v_cero,...
    zeros(nn,1),ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes_correa_cero);
fzas_rsist_mov_cero=aux_fzas_resistencia([1:nn-3 nn-1:nn],1);
suma_fuerzas_resist_cero=(-1)*sum(aux_fzas_resistencia);
%calculo de las fuerzas debido al movimiento de la polea motriz en t=0
tiempo_cero=0;
constantes_mov_cero=[V_b T_a d_cero];
%las columnas col_i_Cd y col_i_Md se anulan como
%ceros porque el sistema de ecuaciones es de la forma [K]{u}=F
fzas_mov=calculo_fuerzas_cond_frontera(tiempo_cero,...
    col_i_Kd,zeros(nn-1,1),zeros(nn-1,1),constantes_mov_cero);
%fuerzas que representan al peso del contrapeso
f_tensor=zeros(nn-1,1);
f_tensor(1,1)=(-1)*(W_sist_tensor/2);
f_tensor(end,1)=(W_sist_tensor/2);
%formacion del vector final de fuerzas
f_ext_inicial(:,1)=...
    f_tensor...
    +...
    fzas_rsist_mov_cero...
    +...
    fzas_mov;
% Solucion de u tamaño (nn-1 x 1) desde nodo 1 a nn saltandose "nn-2"
u_cero_aux=K\f_ext_inicial;
% Armamos el vector "u" para todos los nodos
u_cero=zeros(nn,1);
u_cero(1:nn-3,1)=u_cero_aux(1:nn-3,1);
u_cero(nn-2,1)=movimiento_polea(tiempo_cero,V_b,T_a,d_cero);
u_cero(nn-1:nn,1)=u_cero_aux(end-1:end,1);
%Calculo de fuerzas externas en todos los nodos en t=0
f_ext_cero=Kd*u_cero;
%Calculo de la tension en los elementos discretos a lo largo de la correa
tension_inicial=calculo_tension_elementos(u_cero,...
    l_e_elementos,E_elementos,constantes_mode_correa);
%-----
%
%                AGRUPAR CONSTANTES UTILES
%-----
constantes=[V_b T_a d_cero];
constantes_2=[nn B];
%-----
%
%                CÁLCULO TIEMPO CRITICO Y PASO DE TIEMPO
%-----
%Frecuencias naturales en [Hz]
[~,W]=eig(Kd,Md);
w= sqrt(diag(W))/(2*pi);% en [Hz]
%Paso del tiempo
dpt=2; %factor de seguridad tiempo critico

```

```

T=1./w;
dt_cr=min(T)/pi; %paso tiempo critico
dt=dt_cr/dpt;
%Definicion tiempos
ti=0;
%tf=60;%en este caso solo nos interesa este tiempo
%tf=100;%240 falló
tf=120;
t0=0;
t=ti:dt:tf;
nt=length(t); %largo del vector
%Descripción del numero y tamaño de los pasos de tiempo en pantalla
texto1=['Número de pasos: ',num2str(nt),' Tamaño del paso: ',num2str(dt)];
disp(texto1);
%-----
%           DEFINICION MATRICES QUE GUARDAN VALORES
%-----
%Matrices para alojar valores
u_almacen=zeros(nn,nt);%desplazamiento
u_t_almacen=zeros(nn,nt);%velocidad
u_tt_almacen=zeros(nn,nt);%aceleración
R_almacen=zeros(nn,nt);%fuerzas nodales externas totales.
Tension_almacen=zeros(ne,nt);%valor de la tensión en los elementos
F_motriz_almacen=zeros(1,nt);%valor de las fuerzas de resistencias total
v_tmp=zeros(nn,nt);%para valores aproximados de la velocidad en cada nodo
a_tmp=zeros(nn,nt);%para valores aproximados de la aceleracion en cada nodo
Fext_tmp=zeros(nn,nt);%para valores aproximados de las fuerzas externas
%Matrices para alojar valores del movimiento de la polea
mov_circular_polea=zeros(1,nt);
vel_tangen_polea=zeros(1,nt);
acel_tangen_polea=zeros(1,nt);
%-----
%           DEFINICION DE LAS CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA
%-----
%Condiciones iniciales
u_almacen(:,1)=u_cero; %despl. inicial
u_t_almacen(:,1)=V_b; %velocidad inicial
u_tt_almacen(:,1)=0; %aceleración inicial cero
Tension_almacen(:,1)=tension_inicial; %tension inicial
F_motriz_almacen(1,1)=suma_fuerzas_resist_cero;...
%sumatoria de las fuerzas de resist.
%Condiciones de frontera
for i=1:nt
    tiempo=t(i);
    %Velocidad, Aceleracion y distancia recorrida por un punto en la
    %superficie de la polea motriz, siguiendo la curva de harrison
    mov_circular_polea(1,nt)=movimiento_polea(tiempo,V_b,T_a,d_cero);
    vel_tangen_polea(1,nt)=velocidad_polea(tiempo,V_b,T_a);
    acel_tangen_polea(1,nt)=aceleracion_polea(tiempo,V_b,T_a);
end
%Vector columna de fuerzas tensoras del contrapeso de la correa, ya arreglado
fuerzas_tensoras=zeros(nn-1,1);

```

```

fuerzas_tensoras(1,1)=(-1)*(W_sist_tensor/2);
fuerzas_tensoras(end,1)=(W_sist_tensor/2);
%-----
%
%           METODO DIFERENCIAS CENTRALES
%-----
%Constantes de integración propias
%...del método de diferencias centrales
a0=1/(dt^2);
a1=1/(2*dt);
a2=2*a0;
a3=1/a2;
%Si en nuestro modelo no hay damping
%C=0;
%Calculo matriz de masa efectiva
M_ef=a0*M+a1*C;
%
%Calculo desplazamiento en t=-dt
%-----
%velocidad conocida v=V_b en t=-dt en los nodos
v_ant=V_b*ones(nn,1);
%aceleracion conocida a=0 en t=-dt en los nodos
a_ant=zeros(nn,1);
%calculo de las fuerzas de resistencia en t=-dt
aux_fzas_res_ant=calculo_fuerza_resistencia(...
    v_ant,...
    zeros(nn,1),...
    ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes_2);
fzas_rsist_mov_ant=aux_fzas_res_ant([1:nn-3 nn-1:nn],1);
%calculo de las fuerzas debido al movimiento de la polea motriz en t=-dt
tiempo_anterior=-dt;
%las columnas col_nn_Cd y col_nn_Md son cero porque el sistema de
%ecuaciones es  $[K]\{u\}=F(t)$ 
fzas_mov_ant=calculo_fuerzas_cond_frontera(tiempo_anterior,...
col_i_Kd,zeros(nn-1,1),zeros(nn-1,1),constantes);
%formacion del vector final de fuerzas
f_ext_anterior=...
    fuerzas_tensoras...
    +...
    fzas_rsist_mov_ant...
    +...
    fzas_mov_ant;
% Solucion de u desde 1 hasta nn, saltandose el nodo "nn-2"
pre_u_anterior=K\f_ext_anterior;
% Armamos el vector u_anterior completo desde 1 hasta nn
u_anterior=zeros(nn,1);
u_anterior(1:nn-3,1)=pre_u_anterior(1:nn-3,1);
u_anterior(nn-2,1)=movimiento_polea(tiempo_anterior,V_b,T_a,d_cero);
u_anterior(end-1:end,1)=pre_u_anterior(end-1:end,1);
%-----
%   PRIMER PASO DEL CÁLCULO
%-----

```

```

%variable auxiliar
Fext_tmp(:,1)=Md*u_tt_almacen(:,1)+...
    Cd*u_t_almacen(:,1)+...
    Kd*u_almacen(:,1);
%calculamos la suma de las fuerzas de resistencia nodales
vector_fzas_resist_0=calculo_fuerza_resistencia(...
    u_t_almacen(:,1),...
    Fext_tmp(:,1),...
    ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes_2);
%sumatoria
F_motriz_almacen(1,1)=(-1)*sum(vector_fzas_resist_0);
%calculamos las fuerzas externas en t=0
R_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],1)=...
    fuerzas_tensoras...
    +...
    vector_fzas_resist_0([1:nn-3 nn-1:nn],1)...
    +...
    calculo_fuerzas_cond_frontera(t(1),col_i_Kd,...
    col_i_Cd,col_i_Md,constantes);%valores negativos
%calcula fuerza efectiva
F_ef=...
    R_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],1)...
    -(K-a2*M)*u_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],1)...
    -(a0*M-a1*C)*u_anterior([1:nn-3 nn-1:nn],1);
%Cálculo desplazamiento para t=dt, el primer paso
pre_u = M_ef\F_ef;
u_almacen(1:nn-3,2)=pre_u(1:nn-3,:);
u_almacen(nn-2,2)=movimiento_polea(t(2),V_b,T_a,d_cero);
u_almacen(nn-1:nn,2)=pre_u(end-1:end,:);
%cálculos para i=2
Tension_almacen(:,2)=calculo_tension_elementos(u_almacen(:,2),...
l_e_elementos,E_elementos,constantes_mode_correa);
%calcula variable opcional u_{-2}
u_anterior_2=calculo_u_anteriores((-2*dt),K,col_i_Kd,W_sist_tensor,...
    ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes,constantes_2);
%calcula velocidad aproximada
v_tmp(:,2)=calculo_v_aproximada(2,dt,u_anterior,u_cero,u_almacen);
a_tmp(:,2)=calculo_a_aproximada(2,dt,u_anterior_2,u_anterior,u_cero,u_almacen);
%
Fext_amp(:,2)=...
    (Md*u_tt_almacen(:,2))+...
    (Cd*u_t_almacen(:,2))+...
    (Kd*u_almacen(:,2))...
    ;
%-----
%   SIGUIENTES PASOS DEL CÁLCULO
%-----
%medir cuanto se demora en ejecutar el código con tic(),toc()
tic % Inicia el contador de tiempo
for i = 3:nt

```

```

%Marcar en que paso del algoritmo está ejecutando el programa
texto=['Estamos en el paso de tiempo: ',num2str(i),...
' de un total de: ', num2str(nt)];
disp(texto);
%calculo fuerzas resistencia en cada nodo para t_(i-1)
vector_fuerzas_resistencia_i_ant=calculo_fuerza_resistencia(...
    v_tmp(:,i-1),...
    Fext_tmp(:,i-1),...
    ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes_2...
);
F_motriz_almacen(1,i-1)=(-1)*sum(vector_fuerzas_resistencia_i_ant);
%Formacion del vector columna de fuerzas
vector_efimero=...
    fuerzas_tensoras...
+...
    vector_fuerzas_resistencia_i_ant([1:nn-3 nn-1:nn],1)...
+...
    calculo_fuerzas_cond_frontera(t(i-1),col_i_Kd,col_i_Cd,...
    col_i_Md,constantes);
%se almacena el vector R para el tiempo i-1
R_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],i-1)=vector_efimero;
%Cálculo de la carga efectiva para el tiempo i-1
F_ef=vector_efimero...
    -(K-a2*M)*u_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],i-1)...
    -(a0*M-a1*C)*u_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],i-2);
%Cálculo del desplazamiento para i
pre_u_i=M_ef\F_ef;
u_almacen(1:nn-3,i)=pre_u_i(1:nn-3,1);
u_almacen(nn-2,i)=movimiento_polea(t(i),V_b,T_a,d_cero);
u_almacen(nn-1:nn,i)=pre_u_i(end-1:end,1);
%Cálculo aceleración para el tiempo anterior i-1
u_tt_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],i-1)=...
    a0*...
    (...
    u_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],i-2)...
    -2*u_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],i-1)...
    +u_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],i)...
    );
u_tt_almacen(nn-2,i-1)=aceleracion_polea(t(i-1),V_b,T_a);
%%%%%
%Cálculo velocidad para el tiempo anterior i-1
u_t_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],i-1)=...
    a1*...
    (...
    u_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],i)-u_almacen([1:nn-3 nn-1:nn],i-2)...
    );
u_t_almacen(nn-2,i-1)=velocidad_polea(t(i-1),V_b,T_a);
%%%%%
%calculos de la tensión para i
Tension_almacen(:,i)=calculo_tension_elementos(u_almacen(:,i),...
    l_e_elementos,E_elementos,constantes_mode_correa);

```

```

[T_minima,ubicacion_T_min]=min(Tension_almacen(:,i));
if T_minima<0
    texto=['tensión negativa en el paso de tiempo= ',num2str(i),...
          'de: ',num2str(T_minima),'[N]',...
          ' ubicado en el elemento: ',num2str(ubicacion_T_min)];
    disp(texto);
    %break;
end
%
%calculo velocidad aproximada
%v_tmp(:,i)=(1/dt)*(u_almacen(:,i)-u_almacen(:,i-1));
v_tmp(:,i)=calculo_v_aproximada(i,dt,u_anterior,u_cero,u_almacen);
a_tmp(:,i)=calculo_a_aproximada(i,dt,u_anterior_2,u_anterior,...
    u_cero,u_almacen);
%
Fext_tmp(:,i)=(Md*u_tt_almacen(:,i))+...
    (Cd*u_t_almacen(:,i))+...
    (Kd*u_almacen(:,i));
%-----
% Comandos relacionados a medir el tiempo de calculo
%-----
progreso=i/nt;          % Progreso (Entre 0 y 1)
transcurrido=toc;      % Tiempo transcurrido
estimado=transcurrido/progreso; % Estimamos el tiempo total
quedada = estimado-transcurrido; % Tiempo restante
%Formato del texto
orden_texto=...
'Progreso %2.2f%%. Tiempo Transcurrido: %ds. Tiempo...
  estimado: %ds. Tiempo restante %ds.';
texto=sprintf(orden_texto, progreso*100...
, round(transcurrido), round(estimado), round(quedada));
%Mostramos el texto en pantalla
disp(texto);
%-----
end
%-----
% Movimiento de la polea tensora + contrapeso
%-----
%desplazamiento del contrapeso
desplazamiento_contrapeso=(u_almacen(end,:)-u_almacen(1,:))*0.5;
%velocidad del contrapeso
velocidad_contrapeso=(u_t_almacen(end,:)-u_t_almacen(1,:))*0.5;
%aceleración del contrapeso m_pt
aceleracion_contrapeso=(u_tt_almacen(end,:)-u_tt_almacen(1,:))*0.5;
%-----
% Calculo de fuerza sobre el nodo motriz en este caso: "nn-2"
%-----
%como el movimiento del nodo nn es conocido:
F_nodo_motriz_almacen=zeros(1,nt);
for i=1:nt
    f_nodo_motriz_inercia=Md(nn-2,:)*u_tt_almacen(:,i);
    f_nodo_motriz_elastica=Kd(nn-2,:)*u_almacen(:,i);

```

```

    f_nodo_motriz_disipa=Cd(nn-2,:)*u_t_almacen(:,i);
    F_nodo_motriz_almacen(1,i)=f_nodo_motriz_inercia+...
    f_nodo_motriz_elastica+f_nodo_motriz_disipa;
end
%-----
%           GENERACIÓN GRÁFICOS
%-----
%-----
plot(t(1:end-1),desplazamiento_contrapeso(1:end-1));
title('Desplazamiento de contrapeso [m] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Desplazamiento de contrapeso [m]')
%-----
plot(t(1:end-1),velocidad_contrapeso(1:end-1));
title('Velocidad de contrapeso [m/s] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Velocidad de contrapeso [m/s]')
%-----
%Graficar fuerzas sobre la correa
%-----
%-----
%Graficar Desplazamientos de la correa
%-----
plot(t,u_almacen(1,:), '--')
title('Desplazamiento [m] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Desplazamiento [m]')
hold on
plot(t(1:nt-1),u_almacen(100,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(1+n_pol_retorno+1,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(900,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(984,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(nn-2,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(nn,1:nt-1))
legend(...
    ['nodo 1' '(post-polea tensora)'],...
    'nodo 100',...
    ['nodo ' num2str(1+n_pol_retorno+1) ' (polea cola)'],...
    'nodo 900',...
    'nodo 984',...
    ['nodo ' num2str(nn-2) '(polea motriz)'],...
    ['nodo ' num2str(nn) '(pre-polea-tensora)'])
hold off
%-----
%Graficar Velocidades de la correa
%-----
plot(t,u_t_almacen(1,:), '--')
title(['Velocidad [m/s] vs Tiempo [s], ',...
    'Tiempo Ta=', num2str(T_a), '[s]', ' ...
    Largo entre centros:', num2str(L_centros), '[m] '])
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Velocidad [m/s]')

```



```

    ['elemento ' num2str(ne) '(pre-polea tensora)']
hold off

%-----
%Graficar aceleración del contrapeso
plot(t,aceleracion_contrapeso)
title('Aceleración [m/s^2] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Aceleración [m/s^2]')
hold on
legend('aceleracion contrapeso')
hold off
%-----
plot(t,F_nodo_motriz_almacen)
title('Fuerza [N] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Fuerza [N]')
hold on
legend('Fuerza aplicada por la polea motriz')
hold off
%-----
%
%           FUNCIONES
%-----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Funcion creadora de matrices de conexion para el ensamblaje
function[L]= matriz_conexion_L(x_ne,matriz_identidad)
    L= matriz_identidad([x_ne,x_ne+1],:);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Funcion para determinar las fuerza resisten. en función de la velocidad
function [vector_salida]=calculo_fuerza_resistencia(vector_col_vel,...
vector_col_fuerzas_ext,...
    fila_ubicaciones,filas_fuerzas_v,filas_factores,x constantes_3 )
%constantes
x_nn=x constantes_3(1,1);
x_B=x constantes_3(1,2);
%-----
%   resistencia por indentación
%-----
vel_limite=0.1;
rango_velocidad_cero=1e-2;
f_nodos=zeros(x_nn,1);
for w=filas_ubicaciones
    %coeficiente de roce estatico supuesto
    coef_est=0.35;
    %Calculo fuerza de roce dinamico
    x_F_z=filas_fuerzas_v(1,w);%distribución F vertical
    x_factor_resistencia=filas_factores(1,w);%distribucion...
        factores de fricción
    %fuerza roce dinamico
    F_c=x_factor_resistencia*x_F_z*x_B;
    %Fuerza de roce limite, que se puede aplicar sin que haya

```

```

%deslizamiento
F_s=coef_est*x_F_z*x_B;
%Fuerza externa y Velocidad en el nodo de interes
velocidad_nodo=vector_col_vel(w,1);
F_ext_nodo=vector_col_fuerzas_ext(w,1);
vel_abs=abs(velocidad_nodo);
if vel_abs<=vel_limite
    %Fuerza de roce estatico
    %la fuerza de resistencia es de sentido opuesto al de la fuerza
    if vel_abs<=rango_velocidad_cero
        %Para evitar tanta distorsion en las fuerzas aplicadas
        %Se evita aplicar fuerzas de roce estatico para velocidad muy
        %bajas para que las únicas fuerzas disipativas sean las de
        %amortiguación [C]{v}
        f_nodos(w,1)=0;
    elseif vel_abs>rango_velocidad_cero
        if abs(F_ext_nodo)<=F_s
            f_nodos(w,1)=(-1)*F_ext_nodo;
        elseif abs(F_ext_nodo)>F_s
            f_nodos(w,1)=sign(F_ext_nodo)*(-1)*(F_s);
        end
    end
elseif vel_abs>vel_limite
    %Fuerza de roce dinamico
    %la fuerza de resistencia es de sentido opuesto al de la velocidad
    f_nodos(w,1)=sign(velocidad_nodo)*(-1)*(F_c);
end

end

%-----
%   Calculo factor resistencia total
%-----
vector_salida=f_nodos;
end
%-----
%Funcion para determinar las fuerza debido a la cond. de borde
%-----
function [y_columna_fuerzas]=calculo_fuerzas_cond_frontera(x_tiempo,...
    col_ii_K,col_ii_C,col_ii_Masa,fila_constantes)
%Parametros del movimiento de la polea motriz
valor_vb=fila_constantes(1,1);
valor_ta=fila_constantes(1,2);
valor_d0=fila_constantes(1,3);
%Calculo de la distancia recorrida y aceleracion para el tiempo t
valor_desplaz=movimiento_polea(x_tiempo,valor_vb,valor_ta,valor_d0);
valor_vel=velocidad_polea(x_tiempo,valor_vb,valor_ta);
valor_acel=aceleracion_polea(x_tiempo,valor_vb,valor_ta);
%Calculo de los vectores columna, de las fuerzas
vector_1=col_ii_Masa*(valor_acel);
vector_2=col_ii_K*(valor_desplaz);
vector_3=col_ii_C*(valor_vel);
y_columna_fuerzas=-vector_1-vector_2-vector_3;

```

```

end
%-----
% Funciones que representan el desplazamiento tangencial, velocidad
% tangencial y aceleración tangencial del movimiento de la polea motriz
%-----
% velocidad en la superficie de la polea motriz
%
function [valor_v]=velocidad_polea(valor_t,valor_vb,valor_ta)
    %x_tiempo_Ta tiempo de detención
    if valor_t<0
        valor_v=valor_vb;
    elseif valor_t>=0 && valor_t<=valor_ta
        valor_v=(valor_vb/2)*(1+cos((pi/valor_ta)*valor_t));
    elseif valor_t>valor_ta
        valor_v=0;
    end
end
%aceleracion tangencial en la superficie de la polea motriz
%
function [valor_a]=aceleracion_polea(valor_t,valor_vb,valor_ta)
    if valor_t<0
        valor_a=0;
    elseif valor_t>=0 && valor_t<=valor_ta
        valor_a=((valor_vb/2)*(-1*(pi/valor_ta)*sin((pi/valor_ta)*valor_t)));
    elseif valor_t>valor_ta
        valor_a=0;
    end
end
%distancia recorrida por un punto en la superficie de la polea motriz
%tambien llamado desplazamiento
function [valor_d]=movimiento_polea(valor_t,valor_vb,valor_ta,valor_d_cero)
    if valor_t<0
        valor_d=valor_d_cero+(valor_vb*valor_t);
    elseif valor_t>=0 && valor_t<=valor_ta
        valor_d=valor_d_cero+...
            ((valor_vb/2)*(valor_t+((valor_ta/pi)*sin((pi/valor_ta)*valor_t))));
    elseif valor_t>valor_ta
        valor_d=valor_d_cero+(valor_vb*valor_ta/2);
    end
end
%-----
% función creadora de la matriz K de rigidez
%-----
function [matriz_K]=creacion_matriz_K(fila_largo,vector_columna_E,...
x_constantes_2)
    x_B=x_constantes_2(1,1);
    x_nn=x_constantes_2(1,2);
    x_ne=x_constantes_2(1,3);
    x_I=eye(x_nn);
    k_global=zeros(x_nn,x_nn);
    for j=1:x_ne
        L_e=matriz_conexion_L(j,x_I);
    end
end

```

```

        L_e_t=transpose(L_e);
        valor_E=vector_columna_E(j,1);
        valor_l_e=fila_largo(1,j);
        k_e=(valor_E*x_B/valor_l_e)*[1 -1;-1 1];
        elemento=L_e_t*k_e*L_e;
        k_global=k_global+elemento;
    end
    %Obtenemos la matriz K final
    matriz_K=k_global;
end
%-----
% Funcion calculo tension en cada momento
%-----
function [y_columna_tension]=calculo_tension_elementos(x_columna_u,...
fila_L,col_Eef,x_constantes_2)
    x_nn=x_constantes_2(1,2);
    x_ne=x_constantes_2(1,3);
    x_u=x_columna_u;
    fila_long=fila_L;
    columna_E_ef=col_Eef;
    columna_tension=zeros(x_ne,1);
    I=eye(x_nn);
    for i=1:x_ne
        L_e=matriz_conexion_L(i,I);
        u_e=L_e*x_u;
        xx_L=fila_long(1,i);
        xx_E=columna_E_ef(i,1);
        k_e=calculo_k_elemental(xx_L,xx_E,x_constantes_2);
        Fuerzas=k_e*u_e;
        Tension=Fuerzas(2,1);
        columna_tension(i,1)=Tension;
        %if Tension<0
        % texto_1=['elemento:',num2str(i),'atento tensión negativa'];
        % disp(texto_1);
        %break
    %end
    end
    y_columna_tension=columna_tension;
end
%-----
% Funcion para obtener las matrices elementales k_e de cada elemento
%-----
function [y_matriz2x2]=calculo_k_elemental(x_L,x_E,xx_constantes_2)
    x_B=xx_constantes_2(1,1);
    y_matriz2x2=(x_E*x_B/x_L)*[1 -1;-1 1];
end
%-----
% Funcion para obtener los desplazamiento en tiempos t negativos previos
% a t_cero
%-----
function [u_salida]=calculo_u_anteriores(tiempo_neg,matrizK,columnaK,...
valor_w_peso,...

```

```

        lista_ubicaciones,lista_fuerzas_2,lista_factores_2,constantes_mov,...
        constantes_resistencia)
vb_cte=constantes_mov(1,1);
ta_cte=constantes_mov(1,2);
dcero_cte=constantes_mov(1,3);
nn_cte=constantes_resistencia(1,1);
%valores para t menores a t=0
v_anterior=vb_cte*ones(nn_cte,1);
%Calculo de las fuerza de resistencia
aux_fzas_resi=calculo_fuerza_resistencia(...
    v_anterior,...
    zeros(nn_cte,1),...
    lista_ubicaciones,...
    lista_fuerzas_2,lista_factores_2,...
    constantes_resistencia);
fzas_resi_mov=aux_fzas_resi([1:nn_cte-3 nn_cte-1:nn_cte],1);
%Calculo de las fuerzas aplicadas por el contrapeso
fzas_tensoras=ones(nn_cte-1,1);
fzas_tensoras(1,1)=(-1)*(valor_w_peso/2);
fzas_tensoras(end,1)=(valor_w_peso/2);
%calculo de las fuerzas debido a la cond de frontera
%columna nn de C y M se omiten como ceros, porque el sistema
%de ecuaciones es  $[K]\{u\}=F(t)$  porque el sistema es estacionario
%por lo tanto son variables que se deben omitir
fzas_mov=calculo_fuerzas_cond_frontera(...
    tiempo_neg,columnaK,zeros(nn_cte-1,1),...
    zeros(nn_cte-1,1),constantes_mov);
%formacion del vector columna de fuerzas
fzas_nodales=...
    fzas_resi_mov...
    +...
    fzas_tensoras...
    +...
    fzas_mov;
%calculo desplazamiento u
pre_u=matrizK\fzas_nodales;
u=zeros(nn_cte,1);
u([1:nn_cte-3 nn_cte-1:nn_cte],1)=pre_u;
%el desplazamiento del nodo "nn-2" es conocido
u(nn_cte-2,1)=movimiento_polea(tiempo_neg,vb_cte,ta_cte,dcero_cte);
%salida
u_salida=u;
end

function [v_salida]=calculo_v_aproximada(indice,delta_t,uanterior,...
ucero,ualmacen)
%Calculo diferencias finitas hacia atras
%con un error del orden de  $O(h^2)$ 
if indice==1
    sum1=(3/2)*ualmacen(:,indice);
    sum2=(-2)*ucero;
    sum3=(1/2)*uanterior;

```

```

        v_salida=(sum1+sum2+sum3)/delta_t;
elseif indice==2
    sum1=(3/2)*ualmacen(:,indice);
    sum2=(-2)*ualmacen(:,indice-1);
    sum3=(1/2)*ucero;
    v_salida=(sum1+sum2+sum3)/delta_t;
elseif indice>=3
    sum1=(3/2)*ualmacen(:,indice);
    sum2=(-2)*ualmacen(:,indice-1);
    sum3=(1/2)*ualmacen(:,indice-2);
    v_salida=(sum1+sum2+sum3)/delta_t;
end
end
end

function [a_salida]=calculo_a_aproximada(indice,delta_t,uanterior_2,...
uanterior,ucero,ualmacen)
    if indice==1
        A=(2)*ualmacen(:,indice);
        B=(-5)*ucero;
        C=(4)*uanterior;
        D=(-1)*uanterior_2;
        a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
    elseif indice==2
        A=(2)*ualmacen(:,indice);
        B=(-5)*ualmacen(:,indice-1);
        C=(4)*ucero;
        D=(-1)*uanterior;
        a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
    elseif indice==3
        A=(2)*ualmacen(:,indice);
        B=(-5)*ualmacen(:,indice-1);
        C=(4)*ualmacen(:,indice-2);
        D=(-1)*ucero;
        a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
    elseif indice>=4
        A=(2)*ualmacen(:,indice);
        B=(-5)*ualmacen(:,indice-1);
        C=(4)*ualmacen(:,indice-2);
        D=(-1)*ualmacen(:,indice-3);
        a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
    end
end
end
%
%funcion creacion matriz amortiguacion
function [matriz_c]=creacion_matriz_C(fila_c_elementos,x_constantes_utiles)
    x_nn=x_constantes_utiles(1,1);
    x_ne=x_constantes_utiles(1,2);
    x_I=eye(x_nn);
    c_global=zeros(x_nn,x_nn);
    for indice=1:x_ne
        L_e=matriz_conexion_L(indice,x_I);
        L_e_t=transpose(L_e);
    end
end

```

```
        valor_c=fila_c_elementos(1,indice);
        c_e=valor_c*[1 -1;-1 1];
        subtotal=L_e_t*c_e*L_e;
        c_global=c_global+subtotal;
    end
    matriz_c=c_global;
end
```

## I. Anexo I: Programa Matlab para modelar una correa de 3[km] con una curva de harrison de velocidad.

```

%Programa Correa 1-D transportadora en estado transiente
%Largo centros 3340 metros
clear variables
tic;%inicio conteo de tiempo
texto_A1='Inicio del programa Dinamica Correa';
disp(texto_A1);
%-----
%   Datos de la correa
%-----
%A_0=--; % area en [m^2] de la a_transv de la correa
densidad_correa=80.1;%en [kg/m], Kg por metro de largo para CORREA 3/EP750
densidad_carga_material=1442*0.303;...
%densidad*area_tr;en [kg/m], Kg por metro de largo
%E_b=--;%modulo de elasticidad en [Pa] de la correa
%Modulo de elasticidad por todo su espesor (E_modif) que es igual a
%E_modif [Pa*m]= E_b [Pa]*espesor[m]=E_modif [N/m]
E_modif_dado=388500;%en [N/mm]
E_modif=388500*1000;%en [Pa*m] o su equivalente [N/m]
B=1.8;% ancho correa en [m]
%-----
%   Datos poleas motriz, cola y tensora
%-----
%m_sist_motriz=0;%incorporado en polea motriz...
%en [kg] masa del sistema motriz acoplado
%m_polea_tensora=---; % en [kg]
m_polea_motriz=8365.12;%en [kg]
m_polea_cola=6813.75;%en [kg], se asume igual a m_polea_motriz
%no existen poleas deflectoras y la polea de cola esta combinada con la
%polea tensora
%m_contrapeso=---;% en [kg]
m_pt=206570;%en [kg] la masa del...
sistema tensor total(m_polea_tensora+contrapeso)
%no se usa polea combinada
%m_polea_combinada=m_polea_motriz+m_sist_motriz+(m_pt);%en [kg]
%-----
%   Datos Tension aplicada por el sistema tensor.
%-----
W_sist_tensor=9.8*(m_pt);%en [N] peso de la polea tensora+ contrapeso
T_2=W_sist_tensor/2; %en [N] tension minima aplicada en la correa
%-----
%   Datos polines de carga
%-----
%b_roll_carga=%en [m]
%R_ext_carga=%en [m]
%r_int_carga=%en [m]
%densidad_polin_carga=%en [kg/m^3], la del acero
%I_carga=-;%en [Kg * m^2]

```

```

m_red_carga=70.1;% en [Kg]
%-----
%   Datos polines de retorno
%-----
%b_roll_retorno=;%en [m]
%R_ext_retorno=;%en [m]
%r_int_retorno=;%en [m]
%densidad_polin_retorno=;%en [kg/m^3], la del acero
%I_retorno=;%en [Kg * m^2]
m_red_retorno=58.5;%en [Kg]
%-----
% Influencia de los polines en el número de nodos
%-----
L_carga=1.52;%en [m] distancia entre polines de carga
L_retorno=3.05;%en [m] distancia entre polines de retorno
L_centros=3340;%en [m] distancia entre centros
%n_sec_carga=ceil(L_centros/L_carga);%numero de elementos lado carga
%n_sec_retorno=ceil(L_centros/L_retorno);%numero de elementos lado retorno
%n_pol_carga=n_sec_carga-1;
%n_pol_retorno=n_sec_retorno-1;
n_pol_carga=2191;%numero de polines de carga
n_sec_carga=(2191-1);%secciones con polines en ambos extremos
n_pol_retorno=1095;%numero de polines de retorno
n_sec_retorno=(1095-1);%secciones con polines en ambos extremos
nn=1+n_pol_retorno+1+n_pol_carga+1;%número de nodos
ne=1+n_sec_retorno+2+n_sec_carga+1;%número de elementos
%-----
%   Datos cargas y fuerzas sobre la correa
%-----
%F_z=1732;% en [N/m] peso de...
correa y material por metro de ancho sobre un polin
lista_F_z=zeros(1,nn);
%lado carga
for i=2:n_pol_carga+1
    %carga_vertical_lado_retorno=;%en [N/m] fuerza soportada...
    por la estación de polines
    %lista_F_z(1,i)=carga_vertical_lado_retorno;
    lista_F_z(1,i)=2396/B;%en [N/m] fuerza vertical...
    sobre la esstación de polines
end
%lado retorno
for i=n_pol_carga+3:nn-1
    %carga_vertical_lado_carga=;%en [N/m] fuerza soportada...
    por la estación de polines
    %lista_F_z(1,i)=carga_vertical_lado_carga;
    lista_F_z(1,i)=7721/B;%en [N/m] fuerza vertical sobre...
    la esstación de polines
end
%-----
% Distribución de los factores de fricción a lo largo de la correa
%-----
%Resistencia al movimiento por indentación

```

```

%factor_resistencia=0.02;%factor adimensional [-]
%nodos en los que hay una fuerza de resistencia al movimiento por
%indentación
ubicacion_fuerzas_resistencia=[2:n_pol_retorno+1 n_pol_retorno+3:nn-1];
%lista contenedora de la distribución de factores de fricción.
lista_factores_f=zeros(1,nn);
C_carga_secundaria=1.03;%(para un L_c de 3340 [m]);
%lado retorno
for i=n_pol_carga+3:nn-1
    f_polines_retorno=0.02;
    q_retorno=0.9;
    f_tmp=C_carga_secundaria*(1/q_retorno)*f_polines_retorno;
    lista_factores_f(1,i)=f_tmp;
end
%lado carga
for i=2:n_pol_carga+1
    f_polines_carga=0.02;
    q_carga=0.7;
    f_tmp=C_carga_secundaria*(1/q_carga)*f_polines_carga;
    lista_factores_f(1,i)=f_tmp;
end
%-----
% Cálculo del largo de los elementos
%-----
l_e_elementos=zeros(1,ne);
L_tail_pulley_transition=7.2;%en [m]
L_head_pulley_transition=14.4;%en [m]
for i=1:ne
    %lado carga
    if i==1
        l_e_elementos(1,i)=L_tail_pulley_transition;
    elseif i>=2 && i<=n_sec_carga+1
        l_e_elementos(1,i)=L_carga;
    elseif i==n_sec_carga+2
        l_e_elementos(1,i)=L_head_pulley_transition;
    %lado retorno
    elseif i==n_sec_carga+3
        l_e_elementos(1,i)=L_head_pulley_transition;
    elseif i>=n_sec_carga+4 && i<=ne-1
        l_e_elementos(1,i)=L_retorno;
    elseif i==ne
        l_e_elementos(1,i)=L_tail_pulley_transition;
    end
end
%-----
%          FORMACION MATRIZ DE INERCIA M
%-----
%creación de una matriz identidad útil para obtener las matrices de
%conexión.
I_nn=eye(nn);
%-----
%Aporte de la masa de la correa

```

```

M_correa=zeros(nn,nn);
for i=1:ne
    L_e=matriz_conexion_L(i,I_nn);
    L_e_t=transpose(L_e);
    largo=l_e_elementos(i);
    %Para una correa cargada
    if i>=1 && i<=n_sec_carga+2 %secciones en el lado superior
        %secciones en el lado superior con carga
        %lumped mass
        M_e=((densidad_correa+densidad_carga_material)*largo)*1/2*[1 0; 0 1];
        %distributed mass
        %M_e=((densidad_correa+densidad_carga_material)*largo)*1/6*[2 1;1 2];
    elseif i>=n_sec_carga+3 && i<=ne
        %secciones en el lado inferior sin carga
        %lumped mass
        M_e=(densidad_correa*largo)*1/2*[1 0; 0 1];
        %distributed mass
        %M_e=(densidad_correa*largo)*1/6*[2 1;1 2];
    end
    subtotal=L_e_t*M_e*L_e;
    M_correa=M_correa+subtotal;
end
%Aporte de la masa de los polines y poleas (sin considerar polea tensora)
M_poleas=zeros(nn,nn);
for i=1:ne
    L_e=matriz_conexion_L(i,I_nn);
    L_e_t=transpose(L_e);
    if i==1
        M_e=(m_polea_cola/2)*[1 0;0 0]...
            +m_red_carga*[0 0;0 1];
    elseif i>=2 && i<=n_sec_carga+1
        M_e=(m_red_carga/2)*[1 0;0 1];
    elseif i==n_sec_carga+2
        M_e=(m_red_carga/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_polea_motriz/2)*[0 0;0 1];
    elseif i==n_sec_carga+3
        M_e=(m_polea_motriz/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_red_retorno/2)*[0 0;0 1];
    elseif i>=n_sec_retorno+4 && i<=n_sec_carga+n_sec_retorno+3
        M_e=(m_red_retorno/2)*[1 0;0 1];
    elseif i==ne
        M_e=(m_red_retorno/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_polea_cola/2)*[0 0;0 1];
    end
    subtotal=L_e_t*M_e*L_e;
    M_poleas=M_poleas+subtotal;
end
%Obtenemos la matriz de inercia asociada a la polea tensora
fila_1=I_nn(1,:);

```

```

fila_2=I_nn(nn,:);
L_e_pt=[fila_1;fila_2];
L_e_pt_t=transpose(L_e_pt);
M_e=(m_pt/4)*[1 -1;-1 1];
M_polea_tensora=L_e_pt_t*M_e*L_e_pt;
%Obtenemos la matriz de masa total
Md=M_correa+M_poleas+M_polea_tensora;
%-----
%           FORMACION MATRIZ DE RIGIDEZ K
%-----
%Agrupamos constantes utiles
constantes_mode_correa=[B nn ne];
E_elementos=E_modif*ones(ne,1);
%Formamos la matriz de rigidez generica
Kd=creacion_matriz_K(l_e_elementos,E_elementos,constantes_mode_correa);
%-----
%           FORMACION MATRIZ DE AMORTIGUACION C
%-----
%Formamos la matriz de amortiguación
c_e_elementos=zeros(1,ne);
for i=1:ne
    l_elem=l_e_elementos(1,i);
    kte_e=E_modif*B/l_elem;
    m_e=densidad_correa*l_elem;
    %eta_damping=0.4;default
    eta_damping=0.80;%fracción de energia disipada en cada ciclo
    c_e_elementos(1,i)=eta_damping*(2*sqrt(kte_e*m_e));
end
ctes_utiles=[nn ne];
Cd=creacion_matriz_C(c_e_elementos,ctes_utiles);
%-----
% MODIFICACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES PARA VELOCIDAD CONTROLADA
%-----
% El sistema de ecuaciones  $Md\{a\}+Kd\{x\}=\{b\}$  se modifica a través de...
%operaciones elementales de filas y columnas para poder...
%incorporar en las variables, la curva de velocidad de freno...
%que siguen los nodos que representan a la polea motriz.
%
% La modificación del sistema de ecuaciones, modifica las matrices
% Md y Kd, y es necesario definir nuevas matrices M y K, a traves de
%operaciones elementales entre filas y columnas.
%-----
% Formación de los vectores columna col_i_M,col_i_C,col_i_K
% que son utiles para representar a las fuerzas en el nodo "nn-2"
% cuando el movimiento del nodo es conocido.
%-----
%Definicion de nodo que representa el mov conocido de la polea motriz
n_motriz=n_pol_carga+2;
%Extraemos una columna modificada de Md
col_i_Md=Md([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],n_motriz);
%Extraemos una columna modificada de Kd
col_i_Kd=Kd([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],n_motriz);

```

```

%Extraemos una columna modificada de Cd
col_i_Cd=Cd([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],n_motriz);
%-----
% Modificación de las matrices Md y Kd, del sistema de ecuaciones
%  $Md\{a\}+Cd\{v\}+Kd\{x\}=\{b\}$ 
%-----
%
% Modificación de M
%-----
%quitamos la fila y columna "nn-2"
M=Md([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],[1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn]);
%
% Modificación de K
%-----
%quitamos la fila y columna "nn-2"
K=Kd([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],[1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn]);
%
% Modificación de C
%-----
%quitamos la fila y columna "nn-2"
C=Cd([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],[1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn]);
%-----
%          FORMACIÓN Vector fuerzas de cuerpo caso correa inclinada
%-----
fuerzas_cuerpo=zeros(nn,1);
angulo_elevacion=0.5;%en grados [°]
for i=1:ne
    L_e=matriz_conexion_L(i,I_nn);
    L_e_t=transpose(L_e);
    largo_l=l_e_elementos(i);
    %lado carga
    if i>=2 && i<=n_sec_carga+2
        F_e=(-1)*(densidad_correa+densidad_carga_material)*largo_l...
            *(9.8*sin((2*pi/360)*angulo_elevacion))*[1/2;1/2];
        subtotal=L_e_t*F_e;
        fuerzas_cuerpo=subtotal+fuerzas_cuerpo;
    elseif i>=n_sec_carga+3 && i<=ne
        F_e=(densidad_correa)*largo_l*...
            (9.8*sin((2*pi/360)*angulo_elevacion))*[1/2;1/2];
        subtotal=L_e_t*F_e;
        fuerzas_cuerpo=subtotal+fuerzas_cuerpo;
    end
end
end
%-----
%Fin de formación de matrices y vectores
%-----
transcurrido=toc;
texto_A2=['Tiempo de preliminares formación de matrices y vectores'...
    num2str(transcurrido)];
disp(texto_A2);
%-----
%          CASO: VELOCIDAD CONTROLADA DE FRENO

```

```

%-----
%Definición del desplazamiento, velocidad y aceleración.
%La velocidad de la polea motriz toma una curva de harrison
%Parametros de la curva de harrison
V_b=7.0;%en [m/s] %velocidad inicial de la correa
T_a=30;%en [s] %tiempo de freno
%-----
%          TIEMPO t=0, CALCULO DESPLAZAMIENTO INICIAL U_0
%-----
%distancia lineal\tangencial recorrida en el tiempo t=0 en la polea motriz
d_cero=0;
%velocidad conocida v=V_b en los nodos
v_cero=V_b*ones(nn,1);
%aceleracion conocida a=0 en los nodos
a_cero=zeros(nn,1);
%constantes utiles en el calculo
constantes_correa_cero=[nn B];
%formacion del vector contenedor de las fuerzas externas
f_ext_inicial=zeros(nn-1,1);
%calculo de las fuerzas de resistencia en t=0
aux_fzas_resistencia=calculo_fuerza_resistencia(v_cero,...
    zeros(nn,1),ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes_correa_cero);
fzas_rsist_mov_cero=aux_fzas_resistencia([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1);
suma_fuerzas_resist_cero=(-1)*sum(aux_fzas_resistencia);
%calculo de las fuerzas debido al movimiento de la polea motriz en t=0
tiempo_cero=0;
constantes_mov_cero=[V_b T_a d_cero];
%las columnas col_i_Cd y col_i_Md se anulan
%como zeros porque el sistema de ecuaciones es de la forma [K]{u}=F
fzas_mov=calculo_fuerzas_cond_frontera(tiempo_cero,col_i_Kd,...
    zeros(nn-1,1),zeros(nn-1,1),constantes_mov_cero);
%fuerzas que representan al peso del contrapeso
f_tensor=zeros(nn-1,1);
f_tensor(1,1)=(-1)*(W_sist_tensor/2);
f_tensor(end,1)=(W_sist_tensor/2);
%formacion del vector final de fuerzas
f_ext_inicial(:,1)=...
    fuerzas_cuerpo([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    +...
    f_tensor...
    +...
    fzas_rsist_mov_cero...
    +...
    fzas_mov;
% Solucion de u tamaño (nn-1 x 1) desde nodo 1 a nn saltandose "nn-2"
u_cero_aux=K\f_ext_inicial;
% Armamos el vector "u" para todos los nodos
u_cero=zeros(nn,1);
u_cero(1:n_motriz-1,1)=u_cero_aux(1:n_motriz-1,1);
u_cero(n_motriz,1)=movimiento_polea(tiempo_cero,V_b,T_a,d_cero);
u_cero(n_motriz+1:end,1)=u_cero_aux(n_motriz:end,1);

```

```

%Calculo de fuerzas externas en todos los nodos en t=0
f_ext_cero=Kd*u_cero;
%Calculo de la tension en los elementos discretos a lo largo de la correa
tension_inicial=calculo_tension_elementos(u_cero,l_e_elementos,...
E_elementos,constantes_mode_correa);
%-----
%
%                AGRUPAR CONSTANTES UTILES
%-----
constantes=[V_b T_a d_cero];
constantes_2=[nn B];
%-----
%
%                CÁLCULO TIEMPO CRITICO Y PASO DE TIEMPO
%-----
%Frecuencias naturales en [Hz]
[~,W]=eig(Kd,Md);
w= sqrt(diag(W))/(2*pi);% en [Hz]
%Paso del tiempo
dpt=1.5; %factor de seguridad tiempo critico
T=1./w;
dt_cr=min(T)/pi; %paso tiempo critico
dt=dt_cr/dpt;
%Definicion tiempos
ti=0;
%tf=60;%en este caso solo nos interesa este tiempo
%tf=100;%120s 58hr tiempo real de calculo
tf=30;
t0=0;
t=ti:dt:tf;
nt=length(t); %largo del vector
%Descripción del numero y tamaño de los pasos de tiempo en pantalla
texto1=['Número de pasos: ',num2str(nt),' Tamaño del paso: ',num2str(dt)];
disp(texto1);
%-----
%
%                DEFINICION MATRICES QUE GUARDAN VALORES
%-----
%Matrices para alojar valores
u_almacen=zeros(nn,nt);%desplazamiento
u_t_almacen=zeros(nn,nt);%velocidad
u_tt_almacen=zeros(nn,nt);%aceleración
R_almacen=zeros(nn,nt);%fuerzas nodales externas totales.
Tension_almacen=zeros(ne,nt);%valor de la tensión en los elementos
F_motriz_almacen=zeros(1,nt);%valor de las fuerzas de resistencias total
v_tmp=zeros(nn,nt);%para valores aproximados de la velocidad en cada nodo
a_tmp=zeros(nn,nt);%para valores aproximados de la aceleracion en cada nodo
Fext_tmp=zeros(nn,nt);%para valores aproximados de las fuerzas externas
%Matrices para alojar valores del movimiento de la polea
%mov_circular_polea=zeros(1,nt);
%vel_tangen_polea=zeros(1,nt);
%acel_tangen_polea=zeros(1,nt);
%-----
%
%                DEFINICION DE LAS CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA
%-----

```

```

%Condiciones iniciales
u_almacen(:,1)=u_cero; %despl. inicial
u_t_almacen(:,1)=V_b; %velocidad inicial
u_tt_almacen(:,1)=0; %aceleración inicial cero
Tension_almacen(:,1)=tension_inicial; %tension inicial
F_motriz_almacen(1,1)=suma_fuerzas_resist_cero;%sumatoria de...
    las fuerzas de resist.
%Vector columna de fuerzas tensoras del contrapeso de la correa, ya arreglado
fuerzas_tensoras=zeros(nn-1,1);
fuerzas_tensoras(1,1)=(-1)*(W_sist_tensor/2);
fuerzas_tensoras(end,1)=(W_sist_tensor/2);
%-----
%
%                METODO DIFERENCIAS CENTRALES
%-----
%Constantes de integración propias
%...del método de diferencias centrales
a0=1/(dt^2);
a1=1/(2*dt);
a2=2*a0;
a3=1/a2;
%Si en nuestro modelo no hay damping
%C=0;
%Calculo matriz de masa efectiva
M_ef=a0*M+a1*C;
%
%Calculo desplazamiento en t=-dt
%-----
%velocidad conocida v=V_b en t=-dt en los nodos
v_ant=V_b*ones(nn,1);
%aceleracion conocida a=0 en t=-dt en los nodos
a_ant=zeros(nn,1);
%calculo de las fuerzas de resistencia en t=-dt
aux_fzas_res_ant=calculo_fuerza_resistencia(...
    v_ant,...
    zeros(nn,1),...
    ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes_2);
fzas_rsist_mov_ant=aux_fzas_res_ant([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1);
%calculo de las fuerzas debido al movimiento de la polea motriz en t=-dt
tiempo_anterior=-dt;
%las columnas col_nn_Cd y col_nn_Md son cero porque el sistema de
%ecuaciones es  $[K]\{u\}=F(t)$ 
fzas_mov_ant=calculo_fuerzas_cond_frontera(tiempo_anterior,...
col_i_Kd,zeros(nn-1,1),zeros(nn-1,1),constantes);
%formacion del vector final de fuerzas
f_ext_anterior=...
    fuerzas_cuerpo([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    +...
    fuerzas_tensoras...
    +...
    fzas_rsist_mov_ant...
    +...

```

```

    fzas_mov_ant;
% Solucion de u desde 1 hasta nn, saltandose el nodo "nn-2"
pre_u_anterior=K\f_ext_anterior;
% Armamos el vector u_anterior completo desde 1 hasta nn
u_anterior=zeros(nn,1);
u_anterior(1:n_motriz-1,1)=pre_u_anterior(1:n_motriz-1,1);
u_anterior(n_motriz,1)=movimiento_polea(tiempo_anterior,V_b,T_a,d_cero);
u_anterior(n_motriz+1:end,1)=pre_u_anterior(n_motriz:end,1);

%-----
%Fin de Preliminares
%-----
transcurrido=toc;
texto_A2=['Tiempo final de preliminares' num2str(transcurrido)];
%-----
%   PRIMER PASO DEL CÁLCULO
%-----
%variable auxiliar
Fext_tmp(:,1)=Md*u_tt_almacen(:,1)+...
    Cd*u_t_almacen(:,1)+...
    Kd*u_almacen(:,1);
%calculamos la suma de las fuerzas de resistencia nodales
vector_fzas_resist_0=calculo_fuerza_resistencia(...
    u_t_almacen(:,1),...
    Fext_tmp(:,1),...
    ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes_2);
%sumatoria
F_motriz_almacen(1,1)=(-1)*sum(vector_fzas_resist_0);
%calculamos las fuerzas externas en t=0
R_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)=...
    fuerzas_cuerpo([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    +...
    fuerzas_tensoras...
    +...
    vector_fzas_resist_0([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    +...
    calculo_fuerzas_cond_frontera(t(1),col_i_Kd,...
    col_i_Cd,col_i_Md,constantes);%valores negativos
%calcula fuerza efectiva
F_ef=...
    R_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    -(K-a2*M)*u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    -(a0*M-a1*C)*u_anterior([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1);
%Cálculo desplazamiento para t=dt, el primer paso
pre_u = M_ef\F_ef;
u_almacen(1:n_motriz-1,2)=pre_u(1:n_motriz-1,:);
u_almacen(n_motriz,2)=movimiento_polea(t(2),V_b,T_a,d_cero);
u_almacen(n_motriz+1:nn,2)=pre_u(n_motriz:nn-1,:);
%cálculos para i=2
Tension_almacen(:,2)=calculo_tension_elementos(u_almacen(:,2),l_e_elementos,...
E_elementos,constantes_mode_correa);

```

```

%calculo variable opcional u_{-2} t=2*(-dt)
%v_ant=V_b*ones(nn,1);a_ant=zeros(nn,1);
u_anterior_2=u_anterior...
    -(dt)*v_ant...
    +(a3)*a_ant;
%calculo velocidad aproximada
v_tmp(:,2)=calculo_v_aproximada(2,dt,u_anterior,u_cero,u_almacen);
a_tmp(:,2)=calculo_a_aproximada(2,dt,u_anterior_2,u_anterior,u_cero,u_almacen);
%
Fext_amp(:,2)=...
    (Md*u_tt_almacen(:,2))+...
    (Cd*u_t_almacen(:,2))+...
    (Kd*u_almacen(:,2))...
;
%-----
%   SIGUIENTES PASOS DEL CÁLCULO
%-----
%medir cuanto se demora en ejecutar el codigo con tic(),toc()
tic % Inicia el contador de tiempo
for i = 3:nt
    %Marcar en que paso del algoritmo está ejecutando el programa
    texto=['Estamos en el paso de tiempo: ',num2str(i),...
        ' de un total de: ', num2str(nt)];
    disp(texto);
    %calculo fuerzas resistencia en cada nodo para t_{i-1}
    vector_fuerzas_resistencia_i_ant=calculo_fuerza_resistencia(...
        v_tmp(:,i-1),...
        Fext_tmp(:,i-1),...
        ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
        constantes_2...
    );
    F_motriz_almacen(1,i-1)=(-1)*sum(vector_fuerzas_resistencia_i_ant);
    %Formacion del vector columna de fuerzas
    vector_efimero=...
        fuerzas_cuerpo([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
        +...
        fuerzas_tensoras...
        +...
        vector_fuerzas_resistencia_i_ant([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
        +...
        calculo_fuerzas_cond_frontera(t(i-1),col_i_Kd,col_i_Cd,...
            col_i_Md,constantes);
    %se almacena el vector R para el tiempo i-1
    R_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-1)=vector_efimero;
    %Cálculo de la carga efectiva para el tiempo i-1
    F_ef=vector_efimero...
        -(K-a2*M)*u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-1)...
        -(a0*M-a1*C)*u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-2);
    %Cálculo del desplazamiento para i
    pre_u_i=M_ef\F_ef;
    u_almacen(1:n_motriz-1,i)=pre_u_i(1:n_motriz-1,1);
    u_almacen(n_motriz,i)=movimiento_polea(t(i),V_b,T_a,d_cero);

```

```

u_almacen(n_motriz+1:nn,i)=pre_u_i(n_motriz:nn-1,1);
%Cálculo aceleración para el tiempo anterior i-1
u_tt_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-1)=...
    a0*...
    (...
    u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-2)...
    -2*u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-1)...
    +u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i)...
    );
u_tt_almacen(n_motriz,i-1)=aceleracion_polea(t(i-1),V_b,T_a);
%%%%%%
%Cálculo velocidad para el tiempo anterior i-1
u_t_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-1)=...
    a1*...
    (...
    u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i)-...
    u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-2)...
    );
u_t_almacen(n_motriz,i-1)=velocidad_polea(t(i-1),V_b,T_a);
%%%%%%
%calculos de la tensión para i
Tension_almacen(:,i)=calculo_tension_elementos(u_almacen(:,i),...
    l_e_elementos,...
    E_elementos,constantes_mode_correa);
[T_minima,ubicacion_T_min]=min(Tension_almacen(:,i));
if T_minima<0
    texto=['tensión negativa en el paso de tiempo= ',num2str(i),...
        'de: ',num2str(T_minima),'[N] ',...
        ' ubicado en el elemento: ',num2str(ubicacion_T_min)];
    disp(texto);
    %break;
end
%
%calculo velocidad aproximada
%v_tmp(:,i)=(1/dt)*(u_almacen(:,i)-u_almacen(:,i-1));
v_tmp(:,i)=calculo_v_aproximada(i,dt,u_anterior,u_cero,u_almacen);
a_tmp(:,i)=calculo_a_aproximada(i,dt,u_anterior_2,u_anterior,...
    u_cero,u_almacen);
%
Fext_tmp(:,i)=(Md*u_tt_almacen(:,i))+...
    (Cd*u_t_almacen(:,i))+...
    (Kd*u_almacen(:,i));
%-----
% Comandos relacionados a medir el tiempo de calculo
%-----
progreso=i/nt; % Progreso (Entre 0 y 1)
transcurrido=toc; % Tiempo transcurrido
estimado=transcurrido/progreso; % Estimamos el tiempo total
queda = estimado-transcurrido; % Tiempo restante
%Formato del texto
orden_texto=...
'Progreso %2.2f%%. Tiempo Transcurrido: %ds. Tiempo...

```

```

    estimado: %ds. Tiempo restante %ds.';
    texto=...
    sprintf(orden_texto, progreso*100, round(transcurrido),...
        round(estimado), round(queda));
    %Mostramos el texto en pantalla
    disp(texto);
    %-----
end
%-----
%   Movimiento de la polea tensora + contrapeso
%-----
%desplazamiento del contrapeso
desplazamiento_contrapeso=(u_almacen(end,:)-u_almacen(1,:))*0.5;
%velocidad del contrapeso
velocidad_contrapeso=(u_t_almacen(end,:)-u_t_almacen(1,:))*0.5;
%aceleración del contrapeso m_pt
aceleracion_contrapeso=(u_tt_almacen(end,:)-u_tt_almacen(1,:))*0.5;
%-----
%   Calculo de fuerza sobre el nodo motriz en este caso: "nn-2"
%-----
%como el movimiento del nodo nn es conocido:
F_nodo_motriz_almacen=zeros(1,nt);
for i=1:nt
    f_nodo_motriz_inercia=Md(nn-2,:)*u_tt_almacen(:,i);
    f_nodo_motriz_elastica=Kd(nn-2,:)*u_almacen(:,i);
    f_nodo_motriz_disipa=Cd(nn-2,:)*u_t_almacen(:,i);
    F_nodo_motriz_almacen(1,i)=f_nodo_motriz_inercia+...
        f_nodo_motriz_elastica+f_nodo_motriz_disipa;
end
%-----
%           GENERACIÓN GRÁFICOS
%-----
%-----
plot(t(1:end-1),desplazamiento_contrapeso(1:end-1));
title('Desplazamiento de contrapeso [m] vs Tiempo [s] ');
xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('Desplazamiento de contrapeso [m]');
%-----
plot(t(1:end-1),velocidad_contrapeso(1:end-1));
title('Velocidad de contrapeso [m/s] vs Tiempo [s] ');
xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('Velocidad de contrapeso [m/s]');
%-----
%Graficar fuerzas sobre la correa
%-----
%-----
%Graficar Desplazamientos de la correa
%-----
plot(t,u_almacen(1,:), '--');
title('Desplazamiento [m] vs Tiempo [s] ');
xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('Desplazamiento [m]');

```

```

hold on
plot(t(1:nt-1),u_almacen(100,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(1+n_pol_retorno+1,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(900,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(984,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(nn-2,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(nn,1:nt-1))
legend(...
    ['nodo 1' '(post-polea tensora)'],...
    'nodo 100',...
    ['nodo ' num2str(1+n_pol_retorno+1) ' (polea cola)'],...
    'nodo 900',...
    'nodo 984',...
    ['nodo ' num2str(nn-2) '(polea motriz)'],...
    ['nodo ' num2str(nn) '(pre-polea-tensora)'])
hold off
%-----
%Graficar Velocidades de la correa
%-----
plot(t,u_t_almacen(1,:),'--')
title(['Velocidad [m/s] vs Tiempo [s], ',...
    'Tiempo Ta=', num2str(T_a),'[s]',...
    ' Largo entre centros:',num2str(L_centros),'[m]'])
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Velocidad [m/s]')
hold on
plot(t(1:nt-1),u_t_almacen(1+n_pol_retorno+1,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_t_almacen(nn-2,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_t_almacen(nn,1:nt-1),'--')
legend(...
    ['nodo 1' '(post-polea tensora)'],...
    ['nodo ' num2str(1+n_pol_retorno+1) '(polea cola)'],...
    ['nodo ' num2str(nn-2) '(polea motriz)'],...
    ['nodo ' num2str(nn) '(pre-polea tensora)'])
hold off
%&-----
%%%%%%%%%%
%Graficar curva de harrison
%plot(t,velocidad_borde(t));title('Velocidad [m/s] vs Tiempo [s] ');
%xlabel('Tiempo [s]');
%ylabel('Velocidad [m/s]');
%%%%%%%%%%
%Para graficar aceleracion
plot(t(1:nt-1),u_tt_almacen(1,1:nt-1),'-')
title('Aceleración [m/s^2] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Aceleración [m/s^2]')
hold on
plot(t(1:nt-1),u_tt_almacen(200,1:nt-1),'-')
plot(t(1:nt-1),u_tt_almacen(1+n_pol_retorno+1,1:nt-1),'-')
plot(t(1:nt-1),u_tt_almacen(500,1:nt-1),'-')
plot(t(1:nt-1),u_tt_almacen(end,1:nt-1),'-')

```

```

legend('nodo 1 inicio','nodo 200','nodo 401','nodo 500', 'nodo 987 final')
hold off
%-----
%Graficar la tensión
%-----
plot(t,Tension_almacen(1,:), '--<')
title(['Tensión [N] vs Tiempo [s], ',...
      'Tiempo Ta=', num2str(T_a), '[s]',...
      ' Largo entre centros:', num2str(L_centros), '[m]'])
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Tensión [N]')
hold on
plot(t(1:nt-1),Tension_almacen(100,1:nt-1), '-x')
plot(t(1:nt-1),Tension_almacen(n_sec_retorno+2,1:nt-1), '-o')
plot(t(1:nt-1),Tension_almacen(n_sec_retorno+3,1:nt-1), '-o')
plot(t(1:nt-1),Tension_almacen(ne-2,1:nt-1), '-o')
plot(t(1:nt-1),Tension_almacen(ne-1,1:nt-1), '-s')
plot(t(1:nt-1),Tension_almacen(ne,1:nt-1), '-s')
legend(...
      ['elemento 1' '(post-polea tensora)'],...
      ['elemento 100'],...
      ['elemento ' num2str(n_sec_retorno+2) '(segmento pre polea cola)'],...
      ['elemento ' num2str(n_sec_retorno+3) '(segmento post polea cola)'],...
      ['elemento ' num2str(ne-2) '(pre polea motriz)'],...
      ['elemento ' num2str(ne-1) '(post polea motriz)'],...
      ['elemento ' num2str(ne) '(pre-polea tensora)'])
hold off

%-----
%Graficar aceleración del contrapeso
plot(t,aceleracion_contrapeso)
title('Aceleración [m/s^2] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Aceleración [m/s^2]')
hold on
legend('aceleracion contrapeso')
hold off
%-----
plot(t,F_nodo_motriz_almacen)
title('Fuerza [N] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Fuerza [N]')
hold on
legend('Fuerza aplicada por la polea motriz')
hold off
%-----
%          FUNCIONES
%-----
%%%%%%%%%%
%Funcion creadora de matrices de conexion para el ensamblaje
function[L]= matriz_conexion_L(x_ne,matriz_identidad)
      L= matriz_identidad([x_ne,x_ne+1],:);

```

```

end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Funcion para determinar las fuerza resisten. en función de la velocidad
function [vector_salida]=calculo_fuerza_resistencia(vector_col_vel,...
vector_col_fuerzas_ext,...
    fila_ubicaciones,filas_fuerzas_v,filas_factores,x constantes_3)
%constantes
x_nn=x constantes_3(1,1);
x_B=x constantes_3(1,2);
%-----
% resistencia por indentación
%-----
vel_limite=0.1;
rango_velocidad_cero=1e-2;
f_nodos=zeros(x_nn,1);
for w=filas_ubicaciones
    %coeficiente de roce estatico supuesto
    coef_est=0.35;
    %Calculo fuerza de roce dinamico
    x_F_z=filas_fuerzas_v(1,w);%distribución F vertical
    x_factor_resistencia=filas_factores(1,w);...
    %distribucion factores de fricción
    %fuerza roce dinamico
    F_c=x_factor_resistencia*x_F_z*x_B;
    %Fuerza de roce limite, que se puede aplicar sin que haya
    %deslizamiento
    F_s=coef_est*x_F_z*x_B;
    %Fuerza externa y Velocidad en el nodo de interes
    velocidad_nodo=vector_col_vel(w,1);
    F_ext_nodo=vector_col_fuerzas_ext(w,1);
    vel_abs=abs(velocidad_nodo);
    if vel_abs<=vel_limite
        %Fuerza de roce estatico
        %la fuerza de resistencia es de sentido opuesto al de la fuerza
        if vel_abs<=rango_velocidad_cero
            %Para evitar tanta distorsion en las fuerzas aplicadas
            %Se evita aplicar fuerzas de roce estatico para velocidad muy
            %bajas para que las únicas fuerzas disipativas sean las de
            %amortiguación [C]{v}
            f_nodos(w,1)=0;
        elseif vel_abs>rango_velocidad_cero
            if abs(F_ext_nodo)<=F_s
                f_nodos(w,1)=(-1)*F_ext_nodo;
            elseif abs(F_ext_nodo)>F_s
                f_nodos(w,1)=sign(F_ext_nodo)*(-1)*(F_s);
            end
        end
    elseif vel_abs>vel_limite
        %Fuerza de roce dinamico
        %la fuerza de resistencia es de sentido opuesto al de la velocidad
        f_nodos(w,1)=sign(velocidad_nodo)*(-1)*(F_c);
    end
end

```

```

end
%-----
%   Calculo factor resistencia total
%-----
vector_salida=f_nodos;
end
%-----
%Funcion para determinar las fuerza debido a la cond. de borde
%-----
function [y_columna_fuerzas]=calculo_fuerzas_cond_frontera(x_tiempo,...
    col_ii_K,col_ii_C,col_ii_Masa,filas_constantes)
%Parametros del movimiento de la polea motriz
valor_vb=filas_constantes(1,1);
valor_ta=filas_constantes(1,2);
valor_d0=filas_constantes(1,3);
%Calculo de la distancia recorrida y aceleracion para el tiempo t
valor_desplaz=movimiento_polea(x_tiempo,valor_vb,valor_ta,valor_d0);
valor_vel=velocidad_polea(x_tiempo,valor_vb,valor_ta);
valor_acel=aceleracion_polea(x_tiempo,valor_vb,valor_ta);
%Calculo de los vectores columna, de las fuerzas
vector_1=col_ii_Masa*(valor_acel);
vector_2=col_ii_K*(valor_desplaz);
vector_3=col_ii_C*(valor_vel);
y_columna_fuerzas=-vector_1-vector_2-vector_3;
end
%-----
% Funciones que representan el desplazamiento tangencial, velocidad
% tangencial y aceleración tangencial del movimiento de la polea motriz
%-----
% velocidad en la superficie de la polea motriz
%
function [valor_v]=velocidad_polea(valor_t,valor_vb,valor_ta)
%x_tiempo-Ta tiempo de detención
if valor_t<0
    valor_v=valor_vb;
elseif valor_t>=0 && valor_t<=valor_ta
    valor_v=(valor_vb/2)*(1+cos((pi/valor_ta)*valor_t));
elseif valor_t>valor_ta
    valor_v=0;
end
end
%aceleracion tangencial en la superficie de la polea motriz
%
function [valor_a]=aceleracion_polea(valor_t,valor_vb,valor_ta)
if valor_t<0
    valor_a=0;
elseif valor_t>=0 && valor_t<=valor_ta
    valor_a=((valor_vb/2)*(-1*(pi/valor_ta)*sin((pi/valor_ta)*valor_t)));
elseif valor_t>valor_ta
    valor_a=0;
end
end

```

```

end
%distancia recorrida por un punto en la superficie de la polea motriz
%tambien llamado desplazamiento
function [valor_d]=movimiento_polea(valor_t,valor_vb,valor_ta,valor_d_cero)
    if valor_t<0
        valor_d=valor_d_cero+(valor_vb*valor_t);
    elseif valor_t>=0 && valor_t<=valor_ta
        valor_d=valor_d_cero+...
            ((valor_vb/2)*(valor_t+((valor_ta/pi)*sin((pi/valor_ta)*valor_t))));
    elseif valor_t>valor_ta
        valor_d=valor_d_cero+(valor_vb*valor_ta/2);
    end
end
%-----
%  función creadora de la matriz K de rigidez
%-----
function [matriz_K]=creacion_matriz_K(fila_largo,vector_columna_E,...
x_constantes_2)
    x_B=x_constantes_2(1,1);
    x_nn=x_constantes_2(1,2);
    x_ne=x_constantes_2(1,3);
    x_I=eye(x_nn);
    k_global=zeros(x_nn,x_nn);
    for j=1:x_ne
        L_e=matriz_conexion_L(j,x_I);
        L_e_t=transpose(L_e);
        valor_E=vector_columna_E(j,1);
        valor_l_e=fila_largo(1,j);
        k_e=(valor_E*x_B/valor_l_e)*[1 -1;-1 1];
        elemento=L_e_t*k_e*L_e;
        k_global=k_global+elemento;
    end
    %Obtenemos la matriz K final
    matriz_K=k_global;
end
%-----
%  Funcion calculo tension en cada momento
%-----
function [y_columna_tension]=calculo_tension_elementos(x_columna_u,...
fila_L,col_Eef,x_constantes_2)
%
    x_nn=x_constantes_2(1,2);
    x_ne=x_constantes_2(1,3);
    x_u=x_columna_u;
    fila_long=fila_L;
    columna_E_ef=col_Eef;
    columna_tension=zeros(x_ne,1);
    I=eye(x_nn);
    for i=1:x_ne
        L_e=matriz_conexion_L(i,I);
        u_e=L_e*x_u;
        xx_L=fila_long(1,i);
    end

```

```

        xx_E=columna_E_ef(i,1);
        k_e=calculo_k_elemental(xx_L,xx_E,x_constantes_2);
        Fuerzas=k_e*u_e;
        Tension=Fuerzas(2,1);
        columna_tension(i,1)=Tension;
        %if Tension<0
        % texto_1=['elemento:',num2str(i),'atento tensión negativa'];
        % disp(texto_1);
        %break
        %end
    end
    y_columna_tension=columna_tension;
end
%-----
% Funcion para obtener las matrices elementales k_e de cada elemento
%-----
function [y_matriz2x2]=calculo_k_elemental(x_L,x_E,xx_constantes_2)
    x_B=xx_constantes_2(1,1);
    y_matriz2x2=(x_E*x_B/x_L)*[1 -1;-1 1];
end

function [v_salida]=calculo_v_aproximada(indice,delta_t,uanterior,ucero,...
    ualmacen)
    %Calculo diferencias finitas hacia atras
    %con un error del orden de O(h^2)
    if indice==1
        sum1=(3/2)*ualmacen(:,indice);
        sum2=(-2)*ucero;
        sum3=(1/2)*uanterior;
        v_salida=(sum1+sum2+sum3)/delta_t;
    elseif indice==2
        sum1=(3/2)*ualmacen(:,indice);
        sum2=(-2)*ualmacen(:,indice-1);
        sum3=(1/2)*ucero;
        v_salida=(sum1+sum2+sum3)/delta_t;
    elseif indice>=3
        sum1=(3/2)*ualmacen(:,indice);
        sum2=(-2)*ualmacen(:,indice-1);
        sum3=(1/2)*ualmacen(:,indice-2);
        v_salida=(sum1+sum2+sum3)/delta_t;
    end
end

function [a_salida]=calculo_a_aproximada(indice,delta_t,uantterior_2,...
    uanterior,ucero,ualmacen)
    if indice==1
        A=(2)*ualmacen(:,indice);
        B=(-5)*ucero;
        C=(4)*uanterior;
        D=(-1)*uanterior_2;
        a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
    elseif indice==2

```

```

        A=(2)*ualmacen(:,indice);
        B=(-5)*ualmacen(:,indice-1);
        C=(4)*ucero;
        D=(-1)*uanterior;
        a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
elseif indice==3
        A=(2)*ualmacen(:,indice);
        B=(-5)*ualmacen(:,indice-1);
        C=(4)*ualmacen(:,indice-2);
        D=(-1)*ucero;
        a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
elseif indice>=4
        A=(2)*ualmacen(:,indice);
        B=(-5)*ualmacen(:,indice-1);
        C=(4)*ualmacen(:,indice-2);
        D=(-1)*ualmacen(:,indice-3);
        a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
end
end
%
%funcion creacion matriz amortiguacion
function [matriz_c]=creacion_matriz_C(fila_c_elementos,x_constantes_utiles)
    x_nn=x_constantes_utiles(1,1);
    x_ne=x_constantes_utiles(1,2);
    x_I=eye(x_nn);
    c_global=zeros(x_nn,x_nn);
    for indice=1:x_ne
        L_e=matriz_conexion_L(indice,x_I);
        L_e_t=transpose(L_e);
        valor_c=fila_c_elementos(1,indice);
        c_e=valor_c*[1 -1;-1 1];
        subtotal=L_e_t*c_e*L_e;
        c_global=c_global+subtotal;
    end
    matriz_c=c_global;
end
end

```

## J. Anexo J: Programa Matlab para modelar una correa de 3 [km] con una curva de velocidad entregada por el programa “Belt Analyst”

```

%Programa Correa 1-D transportadora en estado transiente
%Largo centros 3340 metros
clear variables
tic;%inicio conteo de tiempo
texto_A1='Inicio del programa Dinamica Correa';
disp(texto_A1);
%-----
%   Datos de la correa
%-----
%A_0=--; % area en [m^2] de la a_transv de la correa
densidad_correa=80.1;%en [kg/m], Kg por metro de largo para CORREA 3/EP750
densidad_carga_material=1442*0.303;%densidad*area_tr;...
en [kg/m], Kg por metro de largo
%E_b=--;%modulo de elasticidad en [Pa] de la correa
%Modulo de elasticidad por todo su espesor (E_modif) que es igual a
%E_modif [Pa*m]= E_b [Pa]*espesor[m]=E_modif [N/m]
E_modif_dado=388500;%en [N/mm]
E_modif=388500*1000;%en [Pa*m] o su equivalente [N/m]
B=1.8;% ancho correa en [m]
%-----
%   Datos poleas motriz, cola y tensora
%-----
%m_sist_motriz=0;%incorporado en polea motriz %en [kg] masa del...
sistema motriz acoplado
%m_polea_tensora=---; % en [kg]
m_polea_motriz=8365.12;%en [kg]
m_polea_cola=6813.75;%en [kg], se asume igual a m_polea_motriz
%no existen poleas deflectoras y la polea de cola esta combinada con la
%polea tensora
%m_contrapeso=---;% en [kg]
m_pt=206570;%en [kg] la masa del...
sistema tensor total(m_polea_tensora+contrapeso)
%no se usa polea combinada
%m_polea_combinada=m_polea_motriz+m_sist_motriz+(m_pt);%en [kg]
%-----
%   Datos Tension aplicada por el sistema tensor.
%-----
W_sist_tensor=9.8*(m_pt);%en [N] peso de la polea tensora+ contrapeso
T_2=W_sist_tensor/2; %en [N] tension minima aplicada en la correa
%-----
%   Datos polines de carga
%-----
%b_roll_carga=%en [m]
%R_ext_carga=%en [m]
%r_int_carga=%en [m]
%densidad_polin_carga=%en [kg/m^3], la del acero

```

```

%I_carga=-;%en [Kg * m^2]
m_red_carga=70.1;% en [Kg]
%-----
%   Datos polines de retorno
%-----
%b_roll_retorno=%en [m]
%R_ext_retorno=%en [m]
%r_int_retorno=%en [m]
%densidad_polin_retorno=%en [kg/m^3], la del acero
%I_retorno=%en [Kg * m^2]
m_red_retorno=58.5;%en [Kg]
%-----
% Influencia de los polines en el número de nodos
%-----
L_carga=1.52;%en [m] distancia entre polines de carga
L_retorno=3.05;%en [m] distancia entre polines de retorno
L_centros=3340;%en [m] distancia entre centros
%n_sec_carga=ceil(L_centros/L_carga);%numero de elementos lado carga
%n_sec_retorno=ceil(L_centros/L_retorno);%numero de elementos lado retorno
%n_pol_carga=n_sec_carga-1;
%n_pol_retorno=n_sec_retorno-1;
n_pol_carga=2191;%numero de polines de carga
n_sec_carga=(2191-1);%secciones con polines en ambos extremos
n_pol_retorno=1095;%numero de polines de retorno
n_sec_retorno=(1095-1);%secciones con polines en ambos extremos
nn=1+n_pol_retorno+1+n_pol_carga+1;%número de nodos
ne=1+n_sec_retorno+2+n_sec_carga+1;%número de elementos
%-----
%   Datos cargas y fuerzas sobre la correa
%-----
%F_z=1732;% en [N/m] peso de correa y material por metro de...
    ancho sobre un polin
lista_F_z=zeros(1,nn);
%lado carga
for i=2:n_pol_carga+1
    %carga_vertical_lado_retorno=%en [N/m] fuerza soportada...
        por la estación de polines
    lista_F_z(1,i)=7721/B;%en [N/m] fuerza vertical sobre...
        la esstación de polines
end
%lado retorno
for i=n_pol_carga+3:nn-1
    %carga_vertical_lado_carga=%en [N/m] fuerza soportada por la...
        estación de polines
    %lista_F_z(1,i)=carga_vertical_lado_retorno;
    lista_F_z(1,i)=2396/B;%en [N/m] fuerza vertical sobre...
        la esstación de polines
end
%-----
% Distribución de los factores de fricción a lo largo de la correa
%-----
%Resistencia al movimiento por indentación

```

```

%factor_resistencia=0.02;%factor adimensional [-]
%nodos en los que hay una fuerza de resistencia al movimiento por
%indentación
ubicacion_fuerzas_resistencia=[2:n_pol_retorno+1 n_pol_retorno+3:nn-1];
%lista contenedora de la distribución de factores de fricción.
lista_factores_f=zeros(1,nn);
C_carga_secundaria=1.03;%(para un L_c de 3340 [m]);
%lado retorno
for i=n_pol_carga+3:nn-1
    f_polines_retorno=0.02;
    q_retorno=0.9;
    f_tmp=C_carga_secundaria*(1/q_retorno)*f_polines_retorno;
    lista_factores_f(1,i)=f_tmp;
end
%lado carga
for i=2:n_pol_carga+1
    f_polines_carga=0.02;
    q_carga=0.7;
    f_tmp=C_carga_secundaria*(1/q_carga)*f_polines_carga;
    lista_factores_f(1,i)=f_tmp;
end
%-----
% Cálculo del largo de los elementos
%-----
l_e_elementos=zeros(1,ne);
L_tail_pulley_transition=7.2;%en [m]
L_head_pulley_transition=14.4;%en [m]
for i=1:ne
    %lado carga
    if i==1
        l_e_elementos(1,i)=L_tail_pulley_transition;
    elseif i>=2 && i<=n_sec_carga+1
        l_e_elementos(1,i)=L_carga;
    elseif i==n_sec_carga+2
        l_e_elementos(1,i)=L_head_pulley_transition;
    %lado retorno
    elseif i==n_sec_carga+3
        l_e_elementos(1,i)=L_head_pulley_transition;
    elseif i>=n_sec_carga+4 && i<=ne-1
        l_e_elementos(1,i)=L_retorno;
    elseif i==ne
        l_e_elementos(1,i)=L_tail_pulley_transition;
    end
end
%-----
%          FORMACION MATRIZ DE INERCIA M
%-----
%creación de una matriz identidad útil para obtener las matrices de
%conexión.
I_nn=eye(nn);
%-----
%Aporte de la masa de la correa

```

```

M_correa=zeros(nn,nn);
for i=1:ne
    L_e=matriz_conexion_L(i,I_nn);
    L_e_t=transpose(L_e);
    largo=l_e_elementos(i);
    %Para una correa cargada
    if i>=1 && i<=n_sec_carga+2 %secciones en el lado superior
        %secciones en el lado superior con carga
        %lumped mass
        M_e=((densidad_correa+densidad_carga_material)*largo)*1/2*[1 0; 0 1];
        %distributed mass
        %M_e=((densidad_correa+densidad_carga_material)*largo)*1/6*[2 1;1 2];
    elseif i>=n_sec_carga+3 && i<=ne
        %secciones en el lado inferior sin carga
        %lumped mass
        M_e=(densidad_correa*largo)*1/2*[1 0; 0 1];
        %distributed mass
        %M_e=(densidad_correa*largo)*1/6*[2 1;1 2];
    end
    subtotal=L_e_t*M_e*L_e;
    M_correa=M_correa+subtotal;
end
%Aporte de la masa de los polines y poleas (sin considerar polea tensora)
M_poleas=zeros(nn,nn);
for i=1:ne
    L_e=matriz_conexion_L(i,I_nn);
    L_e_t=transpose(L_e);
    if i==1
        M_e=(m_polea_cola/2)*[1 0;0 0]...
            +m_red_carga*[0 0;0 1];
    elseif i>=2 && i<=n_sec_carga+1
        M_e=(m_red_carga/2)*[1 0;0 1];
    elseif i==n_sec_carga+2
        M_e=(m_red_carga/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_polea_motriz/2)*[0 0;0 1];
    elseif i==n_sec_carga+3
        M_e=(m_polea_motriz/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_red_retorno/2)*[0 0;0 1];
    elseif i>=n_sec_retorno+4 && i<=n_sec_carga+n_sec_retorno+3
        M_e=(m_red_retorno/2)*[1 0;0 1];
    elseif i==ne
        M_e=(m_red_retorno/2)*[1 0;0 0]...
            +...
            (m_polea_cola/2)*[0 0;0 1];
    end
    subtotal=L_e_t*M_e*L_e;
    M_poleas=M_poleas+subtotal;
end
%Obtenemos la matriz de inercia asociada a la polea tensora
fila_1=I_nn(1,:);

```

```

fila_2=I_nn(nn,:);
L_e_pt=[fila_1;fila_2];
L_e_pt_t=transpose(L_e_pt);
M_e=(m_pt/4)*[1 -1;-1 1];
M_polea_tensora=L_e_pt_t*M_e*L_e_pt;
%Obtenemos la matriz de masa total
Md=M_correa+M_poleas+M_polea_tensora;
%-----
%           FORMACION MATRIZ DE RIGIDEZ K
%-----
%Agrupamos constantes utiles
constantes_mode_correa=[B nn ne];
E_elementos=E_modif*ones(ne,1);
%Formamos la matriz de rigidez generica
Kd=creacion_matriz_K(l_e_elementos,E_elementos,constantes_mode_correa);
%-----
%           FORMACION MATRIZ DE AMORTIGUACION C
%-----
%Formamos la matriz de amortiguación
c_e_elementos=zeros(1,ne);
for i=1:ne
    l_elem=l_e_elementos(1,i);
    kte_e=E_modif*B/l_elem;
    m_e=densidad_correa*l_elem;
    %eta_damping=0.4;default
    eta_damping=0.80;%fracción de energia disipada en cada ciclo
    c_e_elementos(1,i)=eta_damping*(2*sqrt(kte_e*m_e));
end
ctes_utiles=[nn ne];
Cd=creacion_matriz_C(c_e_elementos,ctes_utiles);
%-----
% MODIFICACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES PARA VELOCIDAD CONTROLADA
%-----
% El sistema de ecuaciones  $Md\{a\}+Kd\{x\}=\{b\}$  se modifica a través de...
%operaciones elementales de filas y columnas para poder...
%incorporar en las variables, la curva de velocidad de freno...
%que siguen los nodos que representan a la polea motriz.
%
% La modificación del sistema de ecuaciones, modifica las matrices
% Md y Kd, y es necesario definir nuevas matrices M y K, a traves de
%operaciones elementales entre filas y columnas.
%-----
% Formación de los vectores columna col_i_M,col_i_C,col_i_K
% que son utiles para representar a las fuerzas en el nodo "nn-2"
% cuando el movimiento del nodo es conocido.
%-----
%Definicion de nodo que representa el mov conocido de la polea motriz
n_motriz=n_pol_carga+2;
%Extraemos una columna modificada de Md
col_i_Md=Md([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],n_motriz);
%Extraemos una columna modificada de Kd
col_i_Kd=Kd([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],n_motriz);

```

```

%Extraemos una columna modificada de Cd
col_i_Cd=Cd([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],n_motriz);
%-----
% Modificación de las matrices Md y Kd, del sistema de ecuaciones
%  $Md\{a\}+Cd\{v\}+Kd\{x\}=\{b\}$ 
%-----
%
% Modificación de M
%-----
%quitamos la fila y columna "nn-2"
M=Md([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],[1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn]);
%
% Modificación de K
%-----
%quitamos la fila y columna "nn-2"
K=Kd([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],[1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn]);
%
% Modificación de C
%-----
%quitamos la fila y columna "nn-2"
C=Cd([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],[1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn]);
%-----
%          FORMACIÓN Vector fuerzas de cuerpo caso correa inclinada
%-----
fuerzas_cuerpo=zeros(nn,1);
angulo_elevacion=0.5;%en grados [°]
for i=1:ne
    L_e=matriz_conexion_L(i,I_nn);
    L_e_t=transpose(L_e);
    largo_l=l_e_elementos(i);
    %lado carga
    if i>=2 && i<=n_sec_carga+2
        F_e=(-1)*(densidad_correa+densidad_carga_material)*largo_l...
            *(9.8*sin((2*pi/360)*angulo_elevacion))*[1/2;1/2];
        subtotal=L_e_t*F_e;
        fuerzas_cuerpo=subtotal+fuerzas_cuerpo;
    elseif i>=n_sec_carga+3 && i<=ne
        F_e=(densidad_correa)*largo_l*...
            (9.8*sin((2*pi/360)*angulo_elevacion))*[1/2;1/2];
        subtotal=L_e_t*F_e;
        fuerzas_cuerpo=subtotal+fuerzas_cuerpo;
    end
end
%-----
%Fin de formación de matrices y vectores
%-----
transcurrido=toc;
texto_A2=['Tiempo de preliminares...
formación de matrices y vectores' num2str(transcurrido)];
disp(texto_A2);
%-----
%          CASO: VELOCIDAD CONTROLADA DE FRENO

```

```

%-----
%Definición del desplazamiento, velocidad y aceleración.
%La velocidad de la polea motriz toma una curva de harrison
%Parametros de la curva de harrison
V_b=7.0;%en [m/s] %velocidad inicial de la correa
T_a=30;%en [s] %tiempo de freno
%-----
%          TIEMPO t=0, CALCULO DESPLAZAMIENTO INICIAL U_0
%-----
%distancia lineal\tangencial recorrida en el tiempo t=0 en la polea motriz
d_cero=0;
%velocidad conocida v=V_b en los nodos
v_cero=V_b*ones(nn,1);
%aceleracion conocida a=0 en los nodos
a_cero=zeros(nn,1);
%constantes utiles en el calculo
constantes_correa_cero=[nn B];
%formacion del vector contenedor de las fuerzas externas
f_ext_inicial=zeros(nn-1,1);
%calculo de las fuerzas de resistencia en t=0
aux_fzas_resistencia=calculo_fuerza_resistencia(v_cero,...
    zeros(nn,1),ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes_correa_cero);
fzas_rsist_mov_cero=aux_fzas_resistencia([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1);
suma_fuerzas_resist_cero=(-1)*sum(aux_fzas_resistencia);
%calculo de las fuerzas debido al movimiento de la polea motriz en t=0
tiempo_cero=0;
constantes_mov_cero=[V_b T_a d_cero];
%las columnas col_i_Cd y col_i_Md se anulan como ceros
%porque el sistema de ecuaciones es de la forma [K]{u}=F
fzas_mov=calculo_fuerzas_cond_frontera(tiempo_cero,col_i_Kd,...
    zeros(nn-1,1),zeros(nn-1,1),constantes_mov_cero);
%fuerzas que representan al peso del contrapeso
f_tensor=zeros(nn-1,1);
f_tensor(1,1)=(-1)*(W_sist_tensor/2);
f_tensor(end,1)=(W_sist_tensor/2);
%formacion del vector final de fuerzas
f_ext_inicial(:,1)=...
    fuerzas_cuerpo([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    +...
    f_tensor...
    +...
    fzas_rsist_mov_cero...
    +...
    fzas_mov;
% Solucion de u tamaño (nn-1 x 1) desde nodo 1 a nn saltandose "nn-2"
u_cero_aux=K\f_ext_inicial;
% Armamos el vector "u" para todos los nodos
u_cero=zeros(nn,1);
u_cero(1:n_motriz-1,1)=u_cero_aux(1:n_motriz-1,1);
u_cero(n_motriz,1)=movimiento_polea(tiempo_cero,V_b,T_a,d_cero);
u_cero(n_motriz+1:end,1)=u_cero_aux(n_motriz:end,1);

```

```

%Calculo de fuerzas externas en todos los nodos en t=0
f_ext_cero=Kd*u_cero;
%Calculo de la tension en los elementos discretos a lo largo de la correa
tension_inicial=calculo_tension_elementos(u_cero,l_e_elementos,...
E_elementos,constantes_mode_correa);
%-----
%
%                AGRUPAR CONSTANTES UTILES
%-----
constantes=[V_b T_a d_cero];
constantes_2=[nn B];
%-----
%
%                CÁLCULO TIEMPO CRITICO Y PASO DE TIEMPO
%-----
%Frecuencias naturales en [Hz]
[~,W]=eig(Kd,Md);
w= sqrt(diag(W))/(2*pi);% en [Hz]
%Paso del tiempo
dpt=1.5; %factor de seguridad tiempo critico
T=1./w;
dt_cr=min(T)/pi; %paso tiempo critico
dt=dt_cr/dpt;
%Definicion tiempos
ti=0;
%tf=60;%en este caso solo nos interesa este tiempo
%tf=100;%120s 58hr tiempo real de calculo
tf=40;
t0=0;
t=ti:dt:tf;
nt=length(t); %largo del vector
%Descripción del numero y tamaño de los pasos de tiempo en pantalla
texto1=['Número de pasos: ',num2str(nt),' Tamaño del paso: ',num2str(dt)];
disp(texto1);
%-----
%
%                DEFINICION MATRICES QUE GUARDAN VALORES
%-----
%Matrices para alojar valores
u_almacen=zeros(nn,nt);%desplazamiento
u_t_almacen=zeros(nn,nt);%velocidad
u_tt_almacen=zeros(nn,nt);%aceleración
R_almacen=zeros(nn,nt);%fuerzas nodales externas totales.
Tension_almacen=zeros(ne,nt);%valor de la tensión en los elementos
F_motriz_almacen=zeros(1,nt);%valor de las fuerzas de resistencias total
v_tmp=zeros(nn,nt);%para valores aproximados de la velocidad en cada nodo
a_tmp=zeros(nn,nt);%para valores aproximados de la aceleracion en cada nodo
Fext_tmp=zeros(nn,nt);%para valores aproximados de las fuerzas externas
%Matrices para alojar valores del movimiento de la polea
%mov_circular_polea=zeros(1,nt);
%vel_tangen_polea=zeros(1,nt);
%acel_tangen_polea=zeros(1,nt);
%-----
%
%                DEFINICION DE LAS CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA
%-----

```

```

%Condiciones iniciales
u_almacen(:,1)=u_cero; %despl. inicial
u_t_almacen(:,1)=V_b; %velocidad inicial
u_tt_almacen(:,1)=0; %aceleración inicial cero
Tension_almacen(:,1)=tension_inicial; %tension inicial
F_motriz_almacen(1,1)=suma_fuerzas_resist_cero;%sumatoria de...
    las fuerzas de resist.
%Vector columna de fuerzas tensoras del contrapeso de la correa, ya arreglado
fuerzas_tensoras=zeros(nn-1,1);
fuerzas_tensoras(1,1)=(-1)*(W_sist_tensor/2);
fuerzas_tensoras(end,1)=(W_sist_tensor/2);
%-----
%
%                METODO DIFERENCIAS CENTRALES
%-----
%Constantes de integración propias
%...del método de diferencias centrales
a0=1/(dt^2);
a1=1/(2*dt);
a2=2*a0;
a3=1/a2;
%Si en nuestro modelo no hay damping
%C=0;
%Calculo matriz de masa efectiva
M_ef=a0*M+a1*C;
%
%Calculo desplazamiento en t=-dt
%-----
%velocidad conocida v=V_b en t=-dt en los nodos
v_ant=V_b*ones(nn,1);
%aceleracion conocida a=0 en t=-dt en los nodos
a_ant=zeros(nn,1);
%calculo de las fuerzas de resistencia en t=-dt
aux_fzas_res_ant=calculo_fuerza_resistencia(...
    v_ant,...
    zeros(nn,1),...
    ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes_2);
fzas_rsist_mov_ant=aux_fzas_res_ant([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1);
%calculo de las fuerzas debido al movimiento de la polea motriz en t=-dt
tiempo_anterior=-dt;
%las columnas col_nn_Cd y col_nn_Md son cero porque el sistema de
%ecuaciones es  $[K]\{u\}=F(t)$ 
fzas_mov_ant=calculo_fuerzas_cond_frontera(tiempo_anterior,col_i_Kd,...
zeros(nn-1,1),zeros(nn-1,1),constantes);
%formacion del vector final de fuerzas
f_ext_anterior=...
    fuerzas_cuerpo([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    +...
    fuerzas_tensoras...
    +...
    fzas_rsist_mov_ant...
    +...

```

```

    fzas_mov_ant;
% Solucion de u desde 1 hasta nn, saltandose el nodo "nn-2"
pre_u_anterior=K\f_ext_anterior;
% Armamos el vector u_anterior completo desde 1 hasta nn
u_anterior=zeros(nn,1);
u_anterior(1:n_motriz-1,1)=pre_u_anterior(1:n_motriz-1,1);
u_anterior(n_motriz,1)=movimiento_polea(tiempo_anterior,V_b,T_a,d_cero);
u_anterior(n_motriz+1:end,1)=pre_u_anterior(n_motriz:end,1);

%-----
%Fin de Preliminares
%-----
transcurrido=toc;
texto_A2=['Tiempo final de preliminares' num2str(transcurrido)];
%-----
%   PRIMER PASO DEL CÁLCULO
%-----
%variable auxiliar
Fext_tmp(:,1)=Md*u_tt_almacen(:,1)+...
    Cd*u_t_almacen(:,1)+...
    Kd*u_almacen(:,1);
%calculamos la suma de las fuerzas de resistencia nodales
vector_fzas_resist_0=calculo_fuerza_resistencia(...
    u_t_almacen(:,1),...
    Fext_tmp(:,1),...
    ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
    constantes_2);
%sumatoria
F_motriz_almacen(1,1)=(-1)*sum(vector_fzas_resist_0);
%calculamos las fuerzas externas en t=0
R_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)=...
    fuerzas_cuerpo([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    +...
    fuerzas_tensoras...
    +...
    vector_fzas_resist_0([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    +...
    calculo_fuerzas_cond_frontera(t(1),col_i_Kd,...
    col_i_Cd,col_i_Md,constantes);%valores negativos
%calcula fuerza efectiva
F_ef=...
    R_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    -(K-a2*M)*u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
    -(a0*M-a1*C)*u_anterior([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1);
%Cálculo desplazamiento para t=dt, el primer paso
pre_u = M_ef\F_ef;
u_almacen(1:n_motriz-1,2)=pre_u(1:n_motriz-1,:);
u_almacen(n_motriz,2)=movimiento_polea(t(2),V_b,T_a,d_cero);
u_almacen(n_motriz+1:nn,2)=pre_u(n_motriz:nn-1,:);
%cálculos para i=2
Tension_almacen(:,2)=calculo_tension_elementos(u_almacen(:,2),l_e_elementos,...
E_elementos,constantes_mode_correa);

```

```

%calculo variable opcional u_{-2} t=2*(-dt)
%v_ant=V_b*ones(nn,1);a_ant=zeros(nn,1);
u_anterior_2=u_anterior...
    -(dt)*v_ant...
    +(a3)*a_ant;
%calculo velocidad aproximada
v_tmp(:,2)=calculo_v_aproximada(2,dt,u_anterior,u_cero,u_almacen);
a_tmp(:,2)=calculo_a_aproximada(2,dt,u_anterior_2,u_anterior,u_cero,u_almacen);
%
Fext_amp(:,2)=...
    (Md*u_tt_almacen(:,2))+...
    (Cd*u_t_almacen(:,2))+...
    (Kd*u_almacen(:,2))...
;
%-----
% SIGUIENTES PASOS DEL CÁLCULO
%-----
%medir cuanto se demora en ejecutar el codigo con tic(),toc()
tic % Inicia el contador de tiempo
for i = 3:nt
    %Marcar en que paso del algoritmo está ejecutando el programa
    texto=['Estamos en el paso de tiempo: ',num2str(i),...
        ' de un total de: ', num2str(nt)];
    disp(texto);
    %calculo fuerzas resistencia en cada nodo para t_(i-1)
    vector_fuerzas_resistencia_i_ant=calculo_fuerza_resistencia(...
        v_tmp(:,i-1),...
        Fext_tmp(:,i-1),...
        ubicacion_fuerzas_resistencia,lista_F_z,lista_factores_f,...
        constantes_2...
    );
    F_motriz_almacen(1,i-1)=(-1)*sum(vector_fuerzas_resistencia_i_ant);
    %Formacion del vector columna de fuerzas
    vector_efimero=...
        fuerzas_cuerpo([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
        +...
        fuerzas_tensoras...
        +...
        vector_fuerzas_resistencia_i_ant([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],1)...
        +...
        calculo_fuerzas_cond_frontera(t(i-1),col_i_Kd,col_i_Cd,...
            col_i_Md,constantes);
    %se almacena el vector R para el tiempo i-1
    R_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-1)=vector_efimero;
    %Cálculo de la carga efectiva para el tiempo i-1
    F_ef=vector_efimero...
        -(K-a2*M)*u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-1)...
        -(a0*M-a1*C)*u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-2);
    %Cálculo del desplazamiento para i
    pre_u_i=M_ef\F_ef;
    u_almacen(1:n_motriz-1,i)=pre_u_i(1:n_motriz-1,1);
    u_almacen(n_motriz,i)=movimiento_polea(t(i),V_b,T_a,d_cero);

```

```

u_almacen(n_motriz+1:nn,i)=pre_u_i(n_motriz:nn-1,1);
%Cálculo aceleración para el tiempo anterior i-1
u_tt_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-1)=...
    a0*...
    (...
    u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-2)...
    -2*u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-1)...
    +u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i)...
    );
u_tt_almacen(n_motriz,i-1)=aceleracion_polea(t(i-1),V_b,T_a);
%%%%%%
%Cálculo velocidad para el tiempo anterior i-1
u_t_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-1)=...
    a1*...
    (...
    u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i)-...
    u_almacen([1:n_motriz-1 n_motriz+1:nn],i-2)...
    );
u_t_almacen(n_motriz,i-1)=velocidad_polea(t(i-1),V_b,T_a);
%%%%%%
%calculos de la tensión para i
Tension_almacen(:,i)=calculo_tension_elementos(u_almacen(:,i),...
    l_e_elementos,...
    E_elementos,constantes_mode_correa);
[T_minima,ubicacion_T_min]=min(Tension_almacen(:,i));
if T_minima<0
    texto=['tensión negativa en el paso de tiempo= ',num2str(i),...
        'de: ',num2str(T_minima),'[N] ',...
        ' ubicado en el elemento: ',num2str(ubicacion_T_min)];
    disp(texto);
    %break;
end
%
%calculo velocidad aproximada
%v_tmp(:,i)=(1/dt)*(u_almacen(:,i)-u_almacen(:,i-1));
v_tmp(:,i)=calculo_v_aproximada(i,dt,u_anterior,u_cero,u_almacen);
a_tmp(:,i)=calculo_a_aproximada(i,dt,u_anterior_2,u_anterior,...
    u_cero,u_almacen);
%
Fext_tmp(:,i)=(Md*u_tt_almacen(:,i))+...
    (Cd*u_t_almacen(:,i))+...
    (Kd*u_almacen(:,i));
%-----
% Comandos relacionados a medir el tiempo de calculo
%-----
progreso=i/nt; % Progreso (Entre 0 y 1)
transcurrido=toc; % Tiempo transcurrido
estimado=transcurrido/progreso; % Estimamos el tiempo total
queda = estimado-transcurrido; % Tiempo restante
%Formato del texto
orden_texto=...
'Progreso %2.2f%%. Tiempo Transcurrido: %ds. Tiempo estimado...

```

```

        : %ds. Tiempo restante %ds.';
    texto=...
    sprintf(orden_texto, progreso*100, round(transcurrido),...
        round(estimado), round(queda));
    %Mostramos el texto en pantalla
    disp(texto);
    %-----
end
%-----
%   Movimiento de la polea tensora + contrapeso
%-----
%desplazamiento del contrapeso
desplazamiento_contrapeso=(u_almacen(end,:)-u_almacen(1,:))*0.5;
%velocidad del contrapeso
velocidad_contrapeso=(u_t_almacen(end,:)-u_t_almacen(1,:))*0.5;
%aceleración del contrapeso m_pt
aceleracion_contrapeso=(u_tt_almacen(end,:)-u_tt_almacen(1,:))*0.5;
%-----
%   Calculo de fuerza sobre el nodo motriz en este caso: "nn-2"
%-----
%como el movimiento del nodo nn es conocido:
F_nodo_motriz_almacen=zeros(1,nt);
for i=1:nt
    f_nodo_motriz_inercia=Md(nn-2,:)*u_tt_almacen(:,i);
    f_nodo_motriz_elastica=Kd(nn-2,:)*u_almacen(:,i);
    f_nodo_motriz_disipa=Cd(nn-2,:)*u_t_almacen(:,i);
    F_nodo_motriz_almacen(1,i)=f_nodo_motriz_inercia+...
        f_nodo_motriz_elastica+f_nodo_motriz_disipa;
end
%-----
%           GENERACIÓN GRÁFICOS
%-----
%-----
plot(t(1:end-1),desplazamiento_contrapeso(1:end-1));
title('Desplazamiento de contrapeso [m] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Desplazamiento de contrapeso [m]')
%-----
plot(t(1:end-1),velocidad_contrapeso(1:end-1));
title('Velocidad de contrapeso [m/s] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Velocidad de contrapeso [m/s]')
%Graficar fuerzas sobre la correa
%-----
%-----
%Graficar Desplazamientos de la correa
%-----
plot(t,u_almacen(1,:), '--')
title('Desplazamiento [m] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Desplazamiento [m]')
hold on

```

```

plot(t(1:nt-1),u_almacen(100,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(1+n_pol_retorno+1,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(900,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(984,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(nn-2,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_almacen(nn,1:nt-1))
legend(...
    ['nodo 1' '(post-polea tensora)'],...
    'nodo 100',...
    ['nodo ' num2str(1+n_pol_retorno+1) ' (polea cola)'],...
    'nodo 900',...
    'nodo 984',...
    ['nodo ' num2str(nn-2) '(polea motriz)'],...
    ['nodo ' num2str(nn) '(pre-polea-tensora)'])
hold off
%-----
%Graficar Velocidades de la correa
%-----
plot(t,u_t_almacen(1:,:), '--')
title(['Velocidad [m/s] vs Tiempo [s], ',...
    ' Largo entre centros:', num2str(L_centros), '[m]'])
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Velocidad [m/s]')
hold on
plot(t(1:nt-1),u_t_almacen(1+n_pol_carga+1,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),u_t_almacen(nn,1:nt-1), '--')
legend(...
    ['nodo 1' '(post-polea tensora)'],...
    ['nodo ' num2str(1+n_pol_carga+1) '(polea motriz)'],...
    ['nodo ' num2str(nn) '(pre-polea tensora)'])
hold off
%&-----
%%%%%%%%%%%%%%
%Graficar curva de harrison
%plot(t, velocidad_borde(t));title('Velocidad [m/s] vs Tiempo [s] ');
%xlabel('Tiempo [s]');
%ylabel('Velocidad [m/s]');
%%%%%%%%%%%%%%
%Para graficar aceleracion
plot(t(1:nt-1),u_tt_almacen(1,1:nt-1), '-')
title('Aceleración [m/s^2] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Aceleración [m/s^2]')
hold on
plot(t(1:nt-1),u_tt_almacen(200,1:nt-1), '-')
plot(t(1:nt-1),u_tt_almacen(1+n_pol_retorno+1,1:nt-1), '-')
plot(t(1:nt-1),u_tt_almacen(500,1:nt-1), '-')
plot(t(1:nt-1),u_tt_almacen(end,1:nt-1), '-')
legend('nodo 1 inicio', 'nodo 200', 'nodo 401', 'nodo 500', 'nodo 987')
hold off
%-----
%Graficar la tensión

```

```

%-----
plot(t,Tension_almacen(1,:), '--<')
title(['Tensión [N] vs Tiempo [s], ',...
      'Tiempo Ta=', num2str(T_a), '[s]',...
      ' Largo entre centros:', num2str(L_centros), '[m]'])
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Tensión [N]')
hold on
plot(t(1:nt-1),Tension_almacen(n_sec_carga+2,1:nt-1), '-o')
plot(t(1:nt-1),Tension_almacen(n_sec_carga+3,1:nt-1))
plot(t(1:nt-1),Tension_almacen(ne,1:nt-1))
legend(...
      ['elemento 1' '(post-polea tensora/cola)'],...
      ['elemento ' num2str(n_sec_carga+2) '(segmento pre polea motriz)'],...
      ['elemento ' num2str(n_sec_carga+3) '(segmento post polea motriz)'],...
      ['elemento ' num2str(ne) '(pre-polea tensora/cola)'])
hold off
%-----
%Graficar aceleración del contrapeso
plot(t,aceleracion_contrapeso)
title('Aceleración [m/s^2] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Aceleración [m/s^2]')
hold on
legend('aceleracion contrapeso')
hold off
%-----
plot(t,F_nodo_motriz_almacen)
title('Fuerza [N] vs Tiempo [s] ')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Fuerza [N]')
hold on
legend('Fuerza aplicada por la polea motriz')
hold off
%-----
%          FUNCIONES
%-----
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Funcion creadora de matrices de conexion para el ensamblaje
function[L]= matriz_conexion_L(x_ne,matriz_identidad)
    L= matriz_identidad([x_ne,x_ne+1],:);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Funcion para determinar las fuerza resisten. en función de la velocidad
function [vector_salida]=calculo_fuerza_resistencia(vector_col_vel,...
vector_col_fuerzas_ext,...
    fila_ubicaciones, fila_fuerzas_v, fila_factores, x_constantes_3)
%constantes
x_nn=x_constantes_3(1,1);
x_B=x_constantes_3(1,2);
%-----
% resistencia por indentación

```

```

%-----
vel_limite=0.1;
rango_velocidad_cero=1e-3;
f_nodos=zeros(x_nn,1);
for w=fila_ubicaciones
    %coeficiente de roce estatico supuesto
    coef_est=0.35;
    %Calculo fuerza de roce dinamico
    x_F_z=fila_fuerzas_v(1,w);%distribución F vertical
    x_factor_resistencia=fila_factores(1,w);...
    %distribucion factores de fricción
    %fuerza roce dinamico
    F_c=x_factor_resistencia*x_F_z*x_B;
    %Fuerza de roce limite, que se puede aplicar sin que haya
    %deslizamiento
    F_s=coef_est*x_F_z*x_B;
    %Fuerza externa y Velocidad en el nodo de interes
    velocidad_nodo=vector_col_vel(w,1);
    F_ext_nodo=vector_col_fuerzas_ext(w,1);
    vel_abs=abs(velocidad_nodo);
    if vel_abs<=vel_limite
        %Fuerza de roce estatico
        %la fuerza de resistencia es de sentido opuesto al de la fuerza
        if vel_abs<=rango_velocidad_cero
            %Para evitar tanta distorsion en las fuerzas aplicadas
            %Se evita aplicar fuerzas de roce estatico para velocidad muy
            %bajas para que las únicas fuerzas disipativas sean las de
            %amortiguación [C]{v}
            f_nodos(w,1)=0;
        elseif vel_abs>rango_velocidad_cero
            if abs(F_ext_nodo)<=F_s
                f_nodos(w,1)=(-1)*F_ext_nodo;
            elseif abs(F_ext_nodo)>F_s
                f_nodos(w,1)=sign(F_ext_nodo)*(-1)*(F_s);
            end
        end
    elseif vel_abs>vel_limite
        %Fuerza de roce dinamico
        %la fuerza de resistencia es de sentido opuesto al de la velocidad
        f_nodos(w,1)=sign(velocidad_nodo)*(-1)*(F_c);
    end

end

%-----
%   Calculo factor resistencia total
%-----
vector_salida=f_nodos;
end
%-----
%Funcion para determinar las fuerza debido a la cond. de borde
%-----
function [y_columna_fuerzas]=calculo_fuerzas_cond_frontera(x_tiempo,...

```

```

col_ii_K,col_ii_C,col_ii_Masa,filas_constantes)
%Parametros del movimiento de la polea motriz
valor_vb=filas_constantes(1,1);
valor_ta=filas_constantes(1,2);
valor_d0=filas_constantes(1,3);
%Calculo de la distancia recorrida y aceleracion para el tiempo t
valor_desplaz=movimiento_polea(x_tiempo,valor_vb,valor_ta,valor_d0);
valor_vel=velocidad_polea(x_tiempo,valor_vb,valor_ta);
valor_acel=aceleracion_polea(x_tiempo,valor_vb,valor_ta);
%Calculo de los vectores columna, de las fuerzas
vector_1=col_ii_Masa*(valor_acel);
vector_2=col_ii_K*(valor_desplaz);
vector_3=col_ii_C*(valor_vel);
y_columna_fuerzas=-vector_1-vector_2-vector_3;
end
%-----
% Funciones que representan el desplazamiento tangencial, velocidad
% tangencial y aceleración tangencial del movimiento de la polea motriz
%-----
% velocidad en la superficie de la polea motriz
%
function [valor_v]=velocidad_polea(valor_t,valor_vb,valor_ta)
    %x_tiempo-Ta tiempo de detención
    if valor_t<0
        valor_v=valor_vb;
    elseif valor_t>=0
        DATA_BA_v_polea_motriz=...
        importdata('BAnalyst-velocidad-polea-motriz-ta30s-3km.txt',';');
        BA_velocidad_p_motriz=DATA_BA_v_polea_motriz(:,end);
        BA_tiempo_p_motriz=DATA_BA_v_polea_motriz(:,end-1);
        cfit_datos_vpm=fit(BA_tiempo_p_motriz,...
            BA_velocidad_p_motriz,'linearinterp');
        valor_v=cfit_datos_vpm(valor_t);
    end
end
%aceleracion tangencial en la superficie de la polea motriz
%
function [valor_a]=aceleracion_polea(valor_t,valor_vb,valor_ta)
    if valor_t<=0
        valor_a=0;
    elseif valor_t>0
        DATA_BA_v_polea_motriz=...
        importdata('BAnalyst-velocidad-polea-motriz-ta30s-3km.txt',';');
        BA_velocidad_p_motriz=DATA_BA_v_polea_motriz(:,end);
        BA_tiempo_p_motriz=DATA_BA_v_polea_motriz(:,end-1);
        cfit_datos_vpm=fit(BA_tiempo_p_motriz,...
            BA_velocidad_p_motriz,'linearinterp');
        valor_a=differentiate(cfit_datos_vpm,valor_t);
    end
end
%distancia recorrida por un punto en la superficie de la polea motriz
%tambien llamado desplazamiento

```

```

function [valor_d]=movimiento_polea(valor_t,valor_vb,valor_ta,valor_d_cero)
    if valor_t<=0
        valor_d=valor_d_cero+(valor_vb*valor_t);
    elseif valor_t>0
        DATA_BA_v_polea_motriz=...
        importdata('BAnalyst-velocidad-polea-motriz-ta30s-3km.txt',';');
        BA_velocidad_p_motriz=DATA_BA_v_polea_motriz(:,end);
        BA_tiempo_p_motriz=DATA_BA_v_polea_motriz(:,end-1);
        cfit_datos_vpm=fit(BA_tiempo_p_motriz,...
            BA_velocidad_p_motriz,'linearinterp');
        valor_d=valor_d_cero+integrate(cfit_datos_vpm,valor_t,0);
    end
end
%-----
%  función creadora de la matriz K de rigidez
%-----
function [matriz_K]=creacion_matriz_K(fila_largo,vector_columna_E,...
x_constantes_2)
    x_B=x_constantes_2(1,1);
    x_nn=x_constantes_2(1,2);
    x_ne=x_constantes_2(1,3);
    x_I=eye(x_nn);
    k_global=zeros(x_nn,x_nn);
    for j=1:x_ne
        L_e=matriz_conexion_L(j,x_I);
        L_e_t=transpose(L_e);
        valor_E=vector_columna_E(j,1);
        valor_l_e=fila_largo(1,j);
        k_e=(valor_E*x_B/valor_l_e)*[1 -1;-1 1];
        elemento=L_e_t*k_e*L_e;
        k_global=k_global+elemento;
    end
    %Obtenemos la matriz K final
    matriz_K=k_global;
end
%-----
%  Funcion calculo tension en cada momento
%-----
function [y_columna_tension]=calculo_tension_elementos(x_columna_u,...
fila_L,col_Eef,x_constantes_2)
    x_nn=x_constantes_2(1,2);
    x_ne=x_constantes_2(1,3);
    x_u=x_columna_u;
    fila_long=fila_L;
    columna_E_ef=col_Eef;
    columna_tension=zeros(x_ne,1);
    I=eye(x_nn);
    for i=1:x_ne
        L_e=matriz_conexion_L(i,I);
        u_e=L_e*x_u;
        xx_L=fila_long(1,i);
        xx_E=columna_E_ef(i,1);
    end
end

```

```

        k_e=calculo_k_elemental(xx_L,xx_E,x_constantes_2);
        Fuerzas=k_e*u_e;
        Tension=Fuerzas(2,1);
        columna_tension(i,1)=Tension;
        %if Tension<0
        %   texto_1=['elemento:',num2str(i),'atento tensión negativa'];
        %   disp(texto_1);
        %       %break
        %end
    end
    y_columna_tension=columna_tension;
end
%-----
%   Funcion para obtener las matrices elementales k_e de cada elemento
%-----
function [y_matriz2x2]=calculo_k_elemental(x_L,x_E,xx_constantes_2)
    x_B=xx_constantes_2(1,1);
    y_matriz2x2=(x_E*x_B/x_L)*[1 -1;-1 1];
end

function [v_salida]=calculo_v_aproximada(indice,delta_t,uanterior,ucero,...
    ualmacen)
    %Calculo diferencias finitas hacia atras
    %con un error del orden de  $O(h^2)$ 
    if indice==1
        sum1=(3/2)*ualmacen(:,indice);
        sum2=(-2)*ucero;
        sum3=(1/2)*uanterior;
        v_salida=(sum1+sum2+sum3)/delta_t;
    elseif indice==2
        sum1=(3/2)*ualmacen(:,indice);
        sum2=(-2)*ualmacen(:,indice-1);
        sum3=(1/2)*ucero;
        v_salida=(sum1+sum2+sum3)/delta_t;
    elseif indice>=3
        sum1=(3/2)*ualmacen(:,indice);
        sum2=(-2)*ualmacen(:,indice-1);
        sum3=(1/2)*ualmacen(:,indice-2);
        v_salida=(sum1+sum2+sum3)/delta_t;
    end
end

function [a_salida]=calculo_a_aproximada(indice,delta_t,uanterior_2,...
    uanterior,ucero,ualmacen)
    if indice==1
        A=(2)*ualmacen(:,indice);
        B=(-5)*ucero;
        C=(4)*uanterior;
        D=(-1)*uanterior_2;
        a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
    elseif indice==2
        A=(2)*ualmacen(:,indice);

```

```

        B=(-5)*ualmacen(:,indice-1);
        C=(4)*ucero;
        D=(-1)*uanterior;
        a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
elseif indice==3
    A=(2)*ualmacen(:,indice);
    B=(-5)*ualmacen(:,indice-1);
    C=(4)*ualmacen(:,indice-2);
    D=(-1)*ucero;
    a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
elseif indice>=4
    A=(2)*ualmacen(:,indice);
    B=(-5)*ualmacen(:,indice-1);
    C=(4)*ualmacen(:,indice-2);
    D=(-1)*ualmacen(:,indice-3);
    a_salida=(A+B+C+D)/(delta_t^2);
end
end
%
%funcion creacion matriz amortiguacion
function [matriz_c]=creacion_matriz_C(fila_c_elementos,x_constantes_utiles)
    x_nn=x_constantes_utiles(1,1);
    x_ne=x_constantes_utiles(1,2);
    x_I=eye(x_nn);
    c_global=zeros(x_nn,x_nn);
    for indice=1:x_ne
        L_e=matriz_conexion_L(indice,x_I);
        L_e_t=transpose(L_e);
        valor_c=fila_c_elementos(1,indice);
        c_e=valor_c*[1 -1;-1 1];
        subtotal=L_e_t*c_e*L_e;
        c_global=c_global+subtotal;
    end
    matriz_c=c_global;
end
end

```

## **K. Anexo K: Datos de la curva de velocidad de la polea motriz entregada por el programa “Belt Analyst”, utilizadas en el anexo J**

Los datos aquí presentados son utilizados para interpolar reconstruir la polea de la curva de velocidad de la polea motriz, así como extraer de estos datos la aceleración y la distancia recorrida de la polea motriz.

El formato de los datos es:

Nro.Nodo21 ; posición-eje-x [m] ; tiempo [s] ; velocidad [m/s]

```
21;3340.00;0;7
21;3340.00;0.21;7.000526
21;3340.00;0.42;7.000766
21;3340.00;0.63;7.000221
21;3340.00;0.84;6.999116
21;3340.00;1.05;6.99761
21;3340.00;1.26;6.995835
21;3340.00;1.47;6.993868
21;3340.00;1.68;6.991652
21;3340.00;1.89;6.988771
21;3340.00;2.1;6.985217
21;3340.00;2.31;6.981198
21;3340.00;2.52;6.976854
21;3340.00;2.73;6.97231
21;3340.00;2.94;6.9677
21;3340.00;3.15;6.963182
21;3340.00;3.36;6.958395
21;3340.00;3.57;6.953296
21;3340.00;3.78;6.948055
21;3340.00;3.99;6.942595
21;3340.00;4.2;6.936789
21;3340.00;4.41;6.930523
21;3340.00;4.62;6.923694
21;3340.00;4.83;6.915892
21;3340.00;5.04;6.907084
21;3340.00;5.25;6.897318
21;3340.00;5.46;6.886775
21;3340.00;5.67;6.875615
21;3340.00;5.88;6.863873
21;3340.00;6.09;6.851636
21;3340.00;6.3;6.838666
21;3340.00;6.51;6.824829
21;3340.00;6.72;6.810364
21;3340.00;6.93;6.795379
21;3340.00;7.14;6.779996
21;3340.00;7.35;6.764241
21;3340.00;7.56;6.748075
```

21;3340.00;7.77;6.731371  
21;3340.00;7.98;6.713836  
21;3340.00;8.19;6.69547  
21;3340.00;8.4;6.676305  
21;3340.00;8.61;6.656488  
21;3340.00;8.82;6.635871  
21;3340.00;9.03;6.614455  
21;3340.00;9.24;6.592167  
21;3340.00;9.45;6.568675  
21;3340.00;9.66;6.544106  
21;3340.00;9.87;6.518427  
21;3340.00;10.08;6.491739  
21;3340.00;10.29;6.464096  
21;3340.00;10.5;6.435637  
21;3340.00;10.71;6.406117  
21;3340.00;10.92;6.375543  
21;3340.00;11.13;6.343944  
21;3340.00;11.34;6.3114  
21;3340.00;11.55;6.277843  
21;3340.00;11.76;6.243438  
21;3340.00;11.97;6.20798  
21;3340.00;12.18;6.171676  
21;3340.00;12.39;6.134132  
21;3340.00;12.6;6.095389  
21;3340.00;12.81;6.055501  
21;3340.00;13.02;6.014399  
21;3340.00;13.23;5.972107  
21;3340.00;13.44;5.928458  
21;3340.00;13.65;5.883727  
21;3340.00;13.86;5.83775  
21;3340.00;14.07;5.790429  
21;3340.00;14.28;5.741957  
21;3340.00;14.49;5.692242  
21;3340.00;14.7;5.641442  
21;3340.00;14.91;5.589483  
21;3340.00;15.12;5.536571  
21;3340.00;15.33;5.482517  
21;3340.00;15.54;5.427478  
21;3340.00;15.75;5.37146  
21;3340.00;15.96;5.314475  
21;3340.00;16.17;5.256565  
21;3340.00;16.38;5.197475  
21;3340.00;16.59;5.13747  
21;3340.00;16.8;5.076537  
21;3340.00;17.01;5.014663  
21;3340.00;17.22;4.951874  
21;3340.00;17.43;4.888008  
21;3340.00;17.64;4.823259  
21;3340.00;17.85;4.757487  
21;3340.00;18.06;4.690672  
21;3340.00;18.27;4.622994  
21;3340.00;18.48;4.554485

21;3340.00;18.69;4.485151  
21;3340.00;18.9;4.415017  
21;3340.00;19.11;4.343951  
21;3340.00;19.32;4.272209  
21;3340.00;19.53;4.199594  
21;3340.00;19.74;4.126339  
21;3340.00;19.95;4.052617  
21;3340.00;20.16;3.978234  
21;3340.00;20.37;3.903297  
21;3340.00;20.58;3.827711  
21;3340.00;20.79;3.751566  
21;3340.00;21;3.674539  
21;3340.00;21.21;3.597034  
21;3340.00;21.42;3.519048  
21;3340.00;21.63;3.440666  
21;3340.00;21.84;3.361768  
21;3340.00;22.05;3.282313  
21;3340.00;22.26;3.202317  
21;3340.00;22.47;3.121722  
21;3340.00;22.68;3.040511  
21;3340.00;22.89;2.959178  
21;3340.00;23.1;2.877495  
21;3340.00;23.31;2.795674  
21;3340.00;23.52;2.713427  
21;3340.00;23.73;2.63088  
21;3340.00;23.94;2.547962  
21;3340.00;24.15;2.464756  
21;3340.00;24.36;2.381519  
21;3340.00;24.57;2.298443  
21;3340.00;24.78;2.215275  
21;3340.00;24.99;2.132097  
21;3340.00;25.2;2.04876  
21;3340.00;25.41;1.965297  
21;3340.00;25.62;1.881689  
21;3340.00;25.83;1.798219  
21;3340.00;26.04;1.715154  
21;3340.00;26.25;1.632298  
21;3340.00;26.46;1.549632  
21;3340.00;26.67;1.466999  
21;3340.00;26.88;1.384671  
21;3340.00;27.09;1.302348  
21;3340.00;27.3;1.220523  
21;3340.00;27.51;1.139427  
21;3340.00;27.72;1.05874  
21;3340.00;27.93;0.9787472  
21;3340.00;28.14;0.8991482  
21;3340.00;28.35;0.8198089  
21;3340.00;28.56;0.7411283  
21;3340.00;28.77;0.6629582  
21;3340.00;28.98;0.5857738  
21;3340.00;29.19;0.5096064  
21;3340.00;29.4;0.4340445

21;3340.00;29.61;0.3592478  
21;3340.00;29.82;0.2851076  
21;3340.00;30.03;0.2115992  
21;3340.00;30.24;0.1387527  
21;3340.00;30.45;0.06643464  
21;3340.00;30.66;-0.0008685416  
21;3340.00;30.87;-0.02428701  
21;3340.00;31.08;-0.009700404  
21;3340.00;31.29;0.0003272417  
21;3340.00;31.5;-0.0003675721  
21;3340.00;31.71;-0.00297132  
21;3340.00;31.92;-0.003187059  
21;3340.00;32.13;-0.002514616  
21;3340.00;32.34;-0.002201388  
21;3340.00;32.55;-0.002249285  
21;3340.00;32.76;-0.002210609  
21;3340.00;32.97;-0.002089274  
21;3340.00;33.18;-0.002263766  
21;3340.00;33.39;-0.002188147  
21;3340.00;33.6;-0.002059599  
21;3340.00;33.81;-0.001923316  
21;3340.00;34.02;-0.002313136  
21;3340.00;34.23;-0.002242012  
21;3340.00;34.44;-0.002234357  
21;3340.00;34.65;-0.002198289  
21;3340.00;34.86;-0.002219618  
21;3340.00;35.07;-0.002270192  
21;3340.00;35.28;-0.00233492  
21;3340.00;35.49;-0.00217849  
21;3340.00;35.7;-0.00219639  
21;3340.00;35.91;-0.002286027  
21;3340.00;36.12;-0.002342209  
21;3340.00;36.33;-0.001914166  
21;3340.00;36.54;-0.002345051  
21;3340.00;36.75;-0.003131071  
21;3340.00;36.96;-0.002788752  
21;3340.00;37.17;-0.002984243  
21;3340.00;37.38;-0.002929465  
21;3340.00;37.59;-0.003010261  
21;3340.00;37.8;-0.002112699  
21;3340.00;38.01;-0.00162463  
21;3340.00;38.22;-0.002404272  
21;3340.00;38.43;-0.003063538  
21;3340.00;38.64;-0.002057552  
21;3340.00;38.85;-0.0008236222  
21;3340.00;39.06;-0.001214237  
21;3340.00;39.27;-0.001470233  
21;3340.00;39.48;-0.0008862835  
21;3340.00;39.69;-0.001391518  
21;3340.00;39.9;-0.001917511  
21;3340.00;40.11;-0.003024038  
21;3340.00;40.32;-0.002629136

21;3340.00;40.53;-0.001959427  
21;3340.00;40.74;-0.002220471  
21;3340.00;40.95;-0.002272802  
21;3340.00;41.16;-0.001707173  
21;3340.00;41.37;-0.0009038498  
21;3340.00;41.58;-0.0009315369  
21;3340.00;41.79;-0.001539775  
21;3340.00;42;-0.002204312  
21;3340.00;42.21;-0.001699375  
21;3340.00;42.42;-0.00105194  
21;3340.00;42.63;-0.001282006  
21;3340.00;42.84;-0.001100383  
21;3340.00;43.05;-0.00064351  
21;3340.00;43.26;-0.001435456  
21;3340.00;43.47;-0.001671224  
21;3340.00;43.68;-0.002089798  
21;3340.00;43.89;-0.001052575  
21;3340.00;44.1;-0.0006838564  
21;3340.00;44.31;-0.00154907  
21;3340.00;44.52;-0.002540609  
21;3340.00;44.73;-0.003081907  
21;3340.00;44.94;-0.001137211  
21;3340.00;45.15;-4.106593E-05  
21;3340.00;45.36;-0.0003669419  
21;3340.00;45.57;-0.0003419069  
21;3340.00;45.78;-0.0004989253  
21;3340.00;45.99;-0.00091203  
21;3340.00;46.2;-0.001253329  
21;3340.00;46.41;-0.0007530706  
21;3340.00;46.62;-0.001105139  
21;3340.00;46.83;-0.001625618  
21;3340.00;47.04;-0.002164563  
21;3340.00;47.25;-0.001418467  
21;3340.00;47.46;-0.0009680302  
21;3340.00;47.67;-0.001258149  
21;3340.00;47.88;-0.0008416913  
21;3340.00;48.09;-0.0009888213  
21;3340.00;48.3;-0.001259098  
21;3340.00;48.51;-0.001143011  
21;3340.00;48.72;-0.001336747  
21;3340.00;48.93;-0.001073868  
21;3340.00;49.14;-0.001289832  
21;3340.00;49.35;-0.0008845943  
21;3340.00;49.56;-0.00050434  
21;3340.00;49.77;-0.0009028612  
21;3340.00;49.98;-0.001559769  
21;3340.00;50.19;-0.001952486  
21;3340.00;50.4;-0.001692674  
21;3340.00;50.61;-0.0003893388  
21;3340.00;50.82;-0.0002462322  
21;3340.00;51.03;-0.0005410393  
21;3340.00;51.24;-0.001221548

21;3340.00;51.45;-0.001229541  
21;3340.00;51.66;-0.0009336887  
21;3340.00;51.87;-0.001292937  
21;3340.00;52.08;-0.0005110002  
21;3340.00;52.29;-0.0004097959  
21;3340.00;52.5;-0.0006874434  
21;3340.00;52.71;-0.001282401  
21;3340.00;52.92;-0.001205902  
21;3340.00;53.13;-0.001064384  
21;3340.00;53.34;-0.0002513345  
21;3340.00;53.55;-0.000348789  
21;3340.00;53.76;-0.0005740771  
21;3340.00;53.97;-0.001309172  
21;3340.00;54.18;-0.00111142  
21;3340.00;54.39;-0.001151422  
21;3340.00;54.6;-0.001002165  
21;3340.00;54.81;-0.001115667  
21;3340.00;55.02;-0.001235251  
21;3340.00;55.23;-0.0007423278  
21;3340.00;55.44;-0.001075889  
21;3340.00;55.65;-0.001949091  
21;3340.00;55.86;-0.0030194  
21;3340.00;56.07;-0.002125189  
21;3340.00;56.28;-0.001270407  
21;3340.00;56.49;-0.001330429  
21;3340.00;56.7;-0.0006245961  
21;3340.00;56.91;-0.0005978041  
21;3340.00;57.12;-0.001232854  
21;3340.00;57.33;-0.001255515  
21;3340.00;57.54;-0.0007381824  
21;3340.00;57.75;-0.0006840217  
21;3340.00;57.96;-0.00133792  
21;3340.00;58.17;-0.001034998  
21;3340.00;58.38;-0.001044234  
21;3340.00;58.59;-0.001073298  
21;3340.00;58.8;-0.000387241  
21;3340.00;59.01;-0.0001727582  
21;3340.00;59.22;-0.0004457281  
21;3340.00;59.43;-0.001210783  
21;3340.00;59.64;-0.00092501  
21;3340.00;59.85;-0.0007412544  
21;3340.00;60.06;-0.001346754  
21;3340.00;60.27;-0.0008580373  
21;3340.00;60.48;0.0003835234  
21;3340.00;60.69;0.001251339  
21;3340.00;60.9;-2.982616E-05  
21;3340.00;61.11;-0.001288191  
21;3340.00;61.32;-0.002274288  
21;3340.00;61.53;-0.00165855  
21;3340.00;61.74;-0.00108286  
21;3340.00;61.95;-0.0005710913  
21;3340.00;62.16;-0.0003922362

21;3340.00;62.37;0.0001662832  
21;3340.00;62.58;0.0002848471  
21;3340.00;62.79;-0.0004449338  
21;3340.00;63;-0.0007686163  
21;3340.00;63.21;-0.001127195  
21;3340.00;63.42;-0.001275974  
21;3340.00;63.63;-0.001194773  
21;3340.00;63.84;-0.001247907  
21;3340.00;64.05;-0.001300712  
21;3340.00;64.26;-0.0008350693  
21;3340.00;64.47;-0.0005670457  
21;3340.00;64.68;-0.0004952879  
21;3340.00;64.89;-0.0005608097  
21;3340.00;65.1;-0.0008533389  
21;3340.00;65.31;-0.001166202  
21;3340.00;65.52;-0.00102049  
21;3340.00;65.73;-0.001002097  
21;3340.00;65.93999;-0.001100544  
21;3340.00;66.15;-0.00128706  
21;3340.00;66.36;-0.0009242538  
21;3340.00;66.57;-0.0007083096  
21;3340.00;66.78;-0.0006276778  
21;3340.00;66.99;-0.0006732467  
21;3340.00;67.2;-0.0009347499  
21;3340.00;67.41;-0.001306946  
21;3340.00;67.62;-0.001160279  
21;3340.00;67.83;-0.0009281537  
21;3340.00;68.04;-0.0008088139  
21;3340.00;68.25;-0.0008086045  
21;3340.00;68.46;-0.0009200509  
21;3340.00;68.67;-0.001129079  
21;3340.00;68.88;-0.001320615  
21;3340.00;69.09;-0.0008302979  
21;3340.00;69.3;2.981749E-05  
21;3340.00;69.51;0.0004384175  
21;3340.00;69.72;-0.0001150931  
21;3340.00;69.93;-0.0004590312  
21;3340.00;70.14;-0.0004805351  
21;3340.00;70.35;-0.000530442  
21;3340.00;70.56;-0.0006562014  
21;3340.00;70.77;-0.001011234  
21;3340.00;70.98;-0.001222273  
21;3340.00;71.18999;-0.0006825648  
21;3340.00;71.4;0.000522267  
21;3340.00;71.61;0.0005338081  
21;3340.00;71.82;0.0005868495  
21;3340.00;72.03;0.0008789577  
21;3340.00;72.24;0.001135064  
21;3340.00;72.45;0.001124931  
21;3340.00;72.66;0.0009325279  
21;3340.00;72.87;0.0005120482  
21;3340.00;73.08;0.0003164693

21;3340.00;73.29;-7.100236E-05  
21;3340.00;73.5;-0.0003954473  
21;3340.00;73.71;-0.0003140208  
21;3340.00;73.92;-0.0002639069  
21;3340.00;74.13;-0.0003218951  
21;3340.00;74.34;-0.0004535376  
21;3340.00;74.55;-0.0003088428  
21;3340.00;74.76;5.981018E-05  
21;3340.00;74.97;0.0002621317  
21;3340.00;75.18;0.0003481466  
21;3340.00;75.39;0.0003247614  
21;3340.00;75.6;0.0001671437  
21;3340.00;75.81;-8.952032E-05  
21;3340.00;76.02;-0.0003771561  
21;3340.00;76.23;1.682022E-05  
21;3340.00;76.43999;0.0002725929  
21;3340.00;76.65;0.0002892871  
21;3340.00;76.86;0.0001517405  
21;3340.00;77.07;-0.0007055493  
21;3340.00;77.28;-0.001239785  
21;3340.00;77.49;-0.0005889187  
21;3340.00;77.7;-0.0001019988  
21;3340.00;77.91;0.0003910155  
21;3340.00;78.12;4.261322E-05  
21;3340.00;78.33;-0.0004326874  
21;3340.00;78.54;9.247236E-05  
21;3340.00;78.75;0.001147533  
21;3340.00;78.96;0.001118355  
21;3340.00;79.17;0.0002320821  
21;3340.00;79.38;-0.0006862581  
21;3340.00;79.59;-0.001247872  
21;3340.00;79.8;-0.001201283  
21;3340.00;80.00999;-0.0006768555  
21;3340.00;80.22;-0.0003751028  
21;3340.00;80.43;0.000413115  
21;3340.00;80.64;0.0003970789  
21;3340.00;80.85;-0.0008641856  
21;3340.00;81.06;-0.001378262  
21;3340.00;81.27;-0.0005124631  
21;3340.00;81.48;0.0002615297  
21;3340.00;81.68999;0.0001466514  
21;3340.00;81.9;-0.0006056997  
21;3340.00;82.11;-0.0008028313  
21;3340.00;82.32;-0.0008996817  
21;3340.00;82.53;-0.0009843578  
21;3340.00;82.74;-0.001061453  
21;3340.00;82.95;-0.001135856  
21;3340.00;83.16;-0.001237288  
21;3340.00;83.37;-0.001008496  
21;3340.00;83.58;-0.0005221233  
21;3340.00;83.79;0.000274177  
21;3340.00;84;0.0005159867

21;3340.00;84.21;0.0004843101  
21;3340.00;84.42;0.0001602522  
21;3340.00;84.63;-0.000393491  
21;3340.00;84.84;3.995224E-05  
21;3340.00;85.05;0.000282117  
21;3340.00;85.25999;-0.0007036392  
21;3340.00;85.47;-0.001341948  
21;3340.00;85.68;-0.0008240738  
21;3340.00;85.89;-0.0004053962  
21;3340.00;86.1;-0.0002311112  
21;3340.00;86.31;0.0003281162  
21;3340.00;86.52;0.0006608153  
21;3340.00;86.73;0.0008453536  
21;3340.00;86.93999;0.0008320806  
21;3340.00;87.15;0.0006037537  
21;3340.00;87.36;0.0005631295  
21;3340.00;87.57;0.0006925575  
21;3340.00;87.78;0.001051888  
21;3340.00;87.99;0.001081185  
21;3340.00;88.2;0.0008398386  
21;3340.00;88.41;0.0005729025  
21;3340.00;88.62;0.0005361181  
21;3340.00;88.82999;0.0008770557  
21;3340.00;89.04;0.001467233  
21;3340.00;89.25;0.001471937  
21;3340.00;89.46;0.0009922694  
21;3340.00;89.67;0.0001146566  
21;3340.00;89.88;-0.0004725001  
21;3340.00;90.09;-0.0009000928  
21;3340.00;90.3;-0.001300276  
21;3340.00;90.50999;-0.001111888  
21;3340.00;90.72;-0.000513127  
21;3340.00;90.93;-0.0002579734  
21;3340.00;91.14;6.134631E-05  
21;3340.00;91.35;0.0003819067  
21;3340.00;91.56;0.0002488268  
21;3340.00;91.77;-0.0004559186  
21;3340.00;91.98;-0.001107671  
21;3340.00;92.18999;-0.0008106831  
21;3340.00;92.4;0.0004759198  
21;3340.00;92.61;0.001306004  
21;3340.00;92.82;0.0007593654  
21;3340.00;93.03;0.0003834675  
21;3340.00;93.24;-1.300218E-05  
21;3340.00;93.45;-0.0003118961  
21;3340.00;93.66;0.0004944505  
21;3340.00;93.87;0.001094465  
21;3340.00;94.07999;0.001339352  
21;3340.00;94.29;0.0004138619  
21;3340.00;94.5;-0.0007067434  
21;3340.00;94.71;-0.001282553  
21;3340.00;94.92;-0.001238906

21;3340.00;95.13;-0.0007115378  
21;3340.00;95.34;-0.0005841475  
21;3340.00;95.55;-0.0003955929  
21;3340.00;95.75999;-0.0002719145  
21;3340.00;95.97;-0.0002934512  
21;3340.00;96.18;-0.0003181743  
21;3340.00;96.39;-0.0002979003  
21;3340.00;96.6;-0.0003544777  
21;3340.00;96.81;0.0002433844  
21;3340.00;97.02;0.0003587492  
21;3340.00;97.23;7.651533E-05  
21;3340.00;97.43999;-0.0003528728  
21;3340.00;97.65;-0.0002853828  
21;3340.00;97.86;0.0003346254  
21;3340.00;98.07;0.0002452575  
21;3340.00;98.28;-0.0004618994  
21;3340.00;98.49;-9.332737E-05  
21;3340.00;98.7;0.0003990718  
21;3340.00;98.91;0.0001467509  
21;3340.00;99.12;-0.0005684461  
21;3340.00;99.32999;-0.0007111526  
21;3340.00;99.54;-0.0008102462  
21;3340.00;99.75;-0.0009064386  
21;3340.00;99.96;-0.0009766811  
21;3340.00;100.17;-0.001023552  
21;3340.00;100.38;-0.001050672  
21;3340.00;100.59;-0.001059572  
21;3340.00;100.8;-0.001053657  
21;3340.00;101.01;-0.001032343  
21;3340.00;101.22;-0.0009987911  
21;3340.00;101.43;-0.0009549916  
21;3340.00;101.64;-0.0009028926  
21;3340.00;101.85;-0.0008453584  
21;3340.00;102.06;-0.0007864018  
21;3340.00;102.27;-0.0007287455  
21;3340.00;102.48;-0.0006743316  
21;3340.00;102.69;-0.0006284502  
21;3340.00;102.9;-0.0005881898  
21;3340.00;103.11;-0.000542763  
21;3340.00;103.32;-0.0004319796  
21;3340.00;103.53;0.0001218323  
21;3340.00;103.74;0.0004765649  
21;3340.00;103.95;0.0003452217  
21;3340.00;104.16;0.0001884399  
21;3340.00;104.37;-0.0003076206  
21;3340.00;104.58;-9.721886E-06  
21;3340.00;104.79;0.0005299674  
21;3340.00;105;0.0004572751  
21;3340.00;105.21;0.0003470011  
21;3340.00;105.42;0.0001832835  
21;3340.00;105.63;2.541004E-05  
21;3340.00;105.84;-0.0003585138

21;3340.00;106.05;0.0002070034  
21;3340.00;106.26;0.0004384558  
21;3340.00;106.47;0.0003710992  
21;3340.00;106.68;-8.708101E-05  
21;3340.00;106.89;-0.0003887394  
21;3340.00;107.1;-9.644841E-05  
21;3340.00;107.31;0.0003530278  
21;3340.00;107.52;0.0003613987  
21;3340.00;107.73;-0.00010189  
21;3340.00;107.94;-0.0004654644  
21;3340.00;108.15;-0.0003258607  
21;3340.00;108.36;-0.0002651396  
21;3340.00;108.57;-0.000252948  
21;3340.00;108.78;-0.000219325  
21;3340.00;108.99;-0.000193865  
21;3340.00;109.2;-0.0001823943  
21;3340.00;109.41;-0.000190159  
21;3340.00;109.62;-0.0002259179  
21;3340.00;109.83;-0.0002792534  
21;3340.00;110.04;-0.0003376594  
21;3340.00;110.25;-0.0004142192  
21;3340.00;110.46;-0.0004153795  
21;3340.00;110.67;-0.0004268897  
21;3340.00;110.88;-0.0004732527  
21;3340.00;111.09;-0.0004689214  
21;3340.00;111.3;-0.0005289253  
21;3340.00;111.51;-0.000536035  
21;3340.00;111.72;-0.0004999268  
21;3340.00;111.93;-0.0004527657  
21;3340.00;112.14;-0.0004232461  
21;3340.00;112.35;-0.0004397375  
21;3340.00;112.56;-0.0004393026  
21;3340.00;112.77;-0.0004715444  
21;3340.00;112.98;-0.0005715607  
21;3340.00;113.19;-0.0005545027  
21;3340.00;113.4;-0.0005259453  
21;3340.00;113.61;-0.0005460921  
21;3340.00;113.82;-0.0005840439  
21;3340.00;114.03;-0.0005740874  
21;3340.00;114.24;-0.0005717706  
21;3340.00;114.45;-0.000577621  
21;3340.00;114.66;-0.000711775  
21;3340.00;114.87;-0.0008195891  
21;3340.00;115.08;-0.000850577  
21;3340.00;115.29;-0.0008757918  
21;3340.00;115.5;-0.0008966861  
21;3340.00;115.71;-0.0009141254  
21;3340.00;115.92;-0.0009288521  
21;3340.00;116.13;-0.0009415138  
21;3340.00;116.34;-0.0009524491  
21;3340.00;116.55;-0.000961908  
21;3340.00;116.76;-0.0009700932

21;3340.00;116.97;-0.0009771757  
21;3340.00;117.18;-0.0009833043  
21;3340.00;117.39;-0.0009886066  
21;3340.00;117.6;-0.0009931948  
21;3340.00;117.81;-0.0009971641  
21;3340.00;118.02;-0.001000598  
21;3340.00;118.23;-0.00100357  
21;3340.00;118.44;-0.00100614  
21;3340.00;118.65;-0.001008364  
21;3340.00;118.86;-0.001010289  
21;3340.00;119.07;-0.001011953  
21;3340.00;119.28;-0.001013394  
21;3340.00;119.49;-0.001014641  
21;3340.00;119.7;-0.001015719