

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

VALPARAÍSO, CHILE



Desarrollo de un modelo de optimización para el problema de selección de pushbacks en minería a cielo abierto

Memoria de Título presentada por

Bruno Lucas Martínez Barrera

como requisito parcial para optar al título de

Ingeniero Civil Matemático

Profesor Guía

Dr. Enrique Jélvez Montenegro.

Profesor Correferente

Dr. Cristopher Hermosilla Jiménez.

Agosto, 2024.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a cada una de las personas que fueron parte de este largo (largo) proceso. Cada uno de ustedes ha contribuido a mi crecimiento personal y aprendizaje, lo cual es el mayor tesoro que llevaré conmigo en los caminos que la vida me depare.

En primer lugar, agradecer a mi madre Marcela, mi padre Claudio, y mi hermano Caco. Su apoyo incondicional y cariño durante toda mi vida han sido la fuerza que me ha impulsado a seguir adelante sin rendirme. Recuerdo con emoción las cartas que me entregaron al salir de la educación media, y dudo que la inspiración a estas horas de la locura sean tan significativos como lo que me ofrecieron entonces, pero aún así, las más de 100 páginas de trabajo son gracias a ustedes. A mis abuelos, Mario, Roberto, Rosa e Iris, aunque la distancia física nos separa, siempre han sido un pilar fundamental en mi vida. Ustedes han sido la mayor motivación para culminar este proceso. Un saludo a toda mi familia del Gran Concepción y San Fernando.

A mi pareja Noemi, gracias por tu cariño, comprensión, y por acompañarme en cada paso de este camino, tanto en los buenos como malos momentos. Espero seguir avanzando contigo, proyectando nuestro futuro, viajando, y construyendo junto los espacios que compartimos, físicos como en otro plano. Este párrafo queda corto ante todo lo que soy capaz de decir, pero esta memoria ya es muy extensa, y me queda mejor expresarlo con acciones. Toma estas palabras como una promesa: la promesa de manejar hasta el metro. Pronto llegará el momento de celebrar y de relajarnos juntos, cuando recordemos estos años de nuestras vidas con cariño. También quiero agradecer a Gloria, quien me recibe con tanto amor en Graneros.

A mis amigos de la universidad, especialmente a nuestro grupo “Sansanosaurios 2016±1” y al de la “Sala ICMAT”, así como también a quienes conocí y compartí en mi período como Mesa del Centro de Alumnos de Ciencias. Los recuerdos de los momentos compartidos permanecerán siempre en mi memoria, sin importar lo que el futuro y los proyectos personales de cada uno nos depare. Me comprometo a mantenernos siempre en contacto, y les agradezco por ser una fuente constante de

apoyo y motivación, incluso cuando estaba perdido en el camino. Pido disculpas si en alguna ocasión fui una distracción más que una ayuda: es mi forma de ser, qué te puedo decir.

A mis amigos externos a la universidad: mis amigos del Hispano, del “Palta con té” y la “Asamblea Gamer”. Aunque nuestros caminos hayan tomado direcciones distintas, hemos logrado mantener la comunicación y el contacto. Sus invitaciones, aunque en ocasiones no pude aceptar, son muy gratificantes para mí, recordándome que sigo siendo parte de sus vidas. Espero que podamos reencontrarnos pronto, sin importar cuando lean esto. Un screenshot a esto y organizamos algo.

A Matías Reyes y a mi profesor guía, Enrique Jélvez. Agradezco sinceramente el aprendizaje y la confianza que depositaron en mí, así como la colaboración y el valioso apoyo para llevar adelante este proyecto de investigación.

Quiero también agradecer al laboratorio Delphos por su apoyo computacional y por permitirme el uso de su biblioteca virtual Minelink, lo cual fue crucial para el desarrollo de los modelos utilizados en esta investigación.

Finalmente, agradezco el respaldo del proyecto FONDECYT de Iniciación N° 11221352 del Dr. Enrique Jélvez, que financió este trabajo de memoria.

*A todos los que han sido y son parte de esta etapa,
por llenarme el corazón,
muchas gracias.*

Resumen

La planificación de la producción a largo plazo en minería a cielo abierto se realiza tradicionalmente utilizando la metodología de pits anidados, cuyos fundamentos fueron establecidos en 1965 por Lerchs y Grossmann (LG). De un conjunto de pits anidados se genera un diseño de fases, esencial para el agendamiento de producción. Sin embargo, este diseño de fases presenta limitaciones: (i) el problema comúnmente conocido como gap problem, donde se generan grandes diferencias entre los tonelajes de fases consecutivas; y (ii) la falta de consideración del tiempo en esta definición, lo cual es un aspecto condicionante que debe incluirse en las siguientes etapas del agendamiento de producción de bloques.

En esta memoria, se presenta una extensión de la metodología tradicional de LG basada en pits anidados para generar una selección de fases basada en tres ideas: (i) nuevas familias de pits anidados parametrizadas por el límite de profundidad, (ii) incorporación de la dimensión temporal para generar nuevas familias de pits; y (iii) intersección de pits anidados tradicionales de LG con estos pits extendidos para ampliar aún más la base de selección. Además, se genera un modelo de selección automática de pushbacks para la búsqueda de planes de producción factibles. Una de las ventajas de este enfoque es la mejora en el proceso de selección de fases, aumentando las opciones para el diseño minero a cielo abierto, focalizando los esfuerzos de los planificadores mineros en etapas posteriores a la selección de pushbacks, reduciendo el tiempo empleado en esta tarea y generando planes de producción operativos.

Palabras clave: Minería a cielo abierto, planificación minera a largo plazo, diseño de pits anidados, selección de pushbacks, algoritmo de Lerchs-Grossmann.

Abstract

Long-term production planning in open-pit mining is traditionally carried out using the nested pits methodology, whose fundamentals were established in 1965 by Lerchs and Grossmann (LG). A phase design is generated from a set of nested pits, which is essential for production scheduling. However, this phase design has limitations: (i) the commonly called gap problem, where large differences between the tonnages of consecutive phases are generated; and (ii) the lack of time consideration within this definition, which are highly conditioning aspects that must be included in the following stages of block production scheduling.

This manuscript presents an extension of the traditional LG methodology based on nested pits to generate a phase selection based on three ideas: (i) new families of nested pits parameterized by depth limit, (ii) incorporation of the time dimension to generate new families of pits; and (iii) intersection of nested pits from the traditional LG methodology with these extended pits to further expand the selection base. Additionally, an automatic pushback selection model is generated to search for feasible production plans. One of the advantages of this approach is the improvement in the phase selection process, increasing options for open-pit mining design, focusing the efforts of mine planners on stages after the pushback selection, reducing the time spent on this task, and generating operational production plans.

Keywords: Open-pit mining, long-term mine planning, nested pit design, pushback selection, Lerchs-Grossmann algorithm.

Índice general

Agradecimientos

Resumen

Abstract

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Modelo de bloques	6
2.1.1. Valorización del modelo de bloque	7
2.1.2. Precedencias entre bloques	8
2.2. Delimitación de pit final	9
2.2.1. Conos flotantes	13
2.2.2. Metodología de Lerchs y Grossmann	14
2.2.3. Algoritmo de Pseudo-Flow	14
2.3. Selección de pushbacks	15
2.3.1. Criterios de selección de pushbacks	16
2.3.2. Pits intermedios	18
2.4. Agendamiento de la producción	21
2.4.1. Agendamiento Directo de Bloques	21
3. Delimitación y objetivos del problema	29

3.1.	Hipótesis	30
3.2.	Objetivos	30
3.2.1.	Objetivo General	30
3.2.2.	Objetivos específicos	30
3.2.3.	Alcances	31
4.	Revisión de Literatura	32
4.1.	Metodologías para obtención de pits anidados	32
4.2.	Selección automática de pushbacks	34
4.3.	Agendamiento de producción	35
5.	Metodología	37
5.1.	Delimitación del pit final	38
5.2.	Cálculo de tiempo esperados de extracción	38
5.3.	Generación de pits intermedios	39
5.3.1.	Familias de pits intermedios	40
5.3.2.	Extensión de pits intermedios	42
5.3.3.	Consideraciones para la extensión de familias de pits intermedios	46
5.4.	Modelo de selección automática de pushbacks	48
5.4.1.	Simplificación de índices para pits intermedios	48
5.4.2.	Definición de pushbacks y conjuntos	50
5.4.3.	Variables	52
5.4.4.	Función Objetivo	52
5.4.5.	Restricciones	53
5.4.6.	Ejemplo de modelo de programación lineal	56
6.	Implementación y resultados	58
6.1.	Casos de Estudio	58
6.2.	Delimitación del pit final	60
6.3.	Cálculo de tiempos de extracción esperados	62
6.4.	Generación de pits intermedios	62
6.5.	Modelo de selección automática de pushbacks	78
6.5.1.	Pits intermedios por revenue factor	78

6.5.2. Pits intermedios por intersección de criterios	84
7. Conclusiones	96
A. Algoritmos	98
A.1. Problemas asociados en teoría de grafos	98
A.1.1. Problema de Flujo Máximo	98
A.1.2. Problema de Corte Mínimo	99
A.1.3. Problema de Clausura Máxima	101
A.1.4. Problema de Clausura de Bloqueo Máximo	101
A.2. Algoritmos para el problema de pit final	102
A.2.1. Representación de grafos	102
A.2.2. Algoritmo de Lerchs y Grossmann	103
A.2.3. Algoritmo de Pseudoflujo	106
B. Resultados	111
B.1. Número de pushbacks factibles	111

Capítulo 1

Introducción

La actividad minera consiste en la explotación de recursos minerales ubicados en la litosfera terrestre. Realizar exitosamente esta acción, basada en el desarrollo de la planificación, conducirá a beneficios económicos para quienes la ejecuten. Esta actividad se clasifica según la ubicación de los recursos en:

- *minería a cielo abierto*, si los recursos se encuentran cercanos a la superficie, y
- *minería subterránea*, si los recursos se encuentran a mayores profundidades.

En particular, la minería a cielo abierto se basa en la extracción de minerales a través de grandes excavaciones superficiales. Como consecuencia de esta extracción, se forma lo que se denomina “pit”: el agujero en la tierra que se expande a medida que la extracción progresa. Este proceso se lleva a cabo mediante operaciones unitarias como perforación, tronadura, carguío y transporte ([Miranda, 2023](#)).

La planificación estratégica de la explotación minera es indispensable en la operación minera a cielo abierto. Esta disciplina integra recursos geológicos, técnicos y económicos para definir la mejor estrategia productiva. El objetivo de la planificación estratégica es maximizar el Valor Actual Neto (VAN) del proyecto minero. El principal resultado de esta planificación es el *plan de producción*, apoyado por un *agendamiento*, que establece cómo y cuándo se extraerán las reservas mineras, cuantificando el capital humano, económico y técnico. Este plan debe asegurar ritmos de producción constantes, optimizando el uso de equipos y recursos, y satisfaciendo las demandas de la planta de procesamiento.

Si bien el desarrollo de la planificación minera es similar a la planificación de cualquier otro tipo de actividades, posee algunas características que la distinguen:

1. El valor de la actividad estará limitado al recurso minero conocido.
2. Se trata de un recurso agotable y complejo, cuyos atributos serán determinados a lo largo de la duración del proyecto.

Por tanto, se propone establecer una planificación óptima, que permita explotar el depósito con todas las complejidades técnico-operacionales y restricciones de distinta índole (Jélvez, 2017).

Una forma estratégica de llevar a cabo este proceso es dividir los horizontes de planificación en:

- *corto plazo*: visión operacional, enfocada en la ejecución diaria de las operaciones mineras, el cumplimiento de las metas de producción, y la retroalimentación con la información actualizada;
- *mediano plazo*: visión táctica, centrada en la planificación y coordinación de actividades en un horizonte de meses a pocos años, alineando los objetivos con la operación;
- *largo plazo*: visión estratégica, que define el plan minero, el tamaño y la vida de la mina, las reservas mineras y la forma en que serán explotadas, estableciéndose una secuencia de explotación.

Esta memoria se centra específicamente en la *planificación de producción minera a largo plazo de la minería a cielo abierto*. En este plan crucial, se define la secuencia temporal de explotación que maximice el VAN del proyecto. Dada la complejidad del proceso, la planificación se divide en etapas:

1. *Delimitación del pit final*, donde se define la subregión del yacimiento donde se llevará a cabo la extracción.
2. *Selección de pushbacks*, que corresponde a las fases intermedias de extracción, que guiarán el proceso de extracción y aseguran la estabilidad y seguridad en las paredes del pit.
3. *Agendamiento temporal de la producción*, donde se establece cuándo y cómo las diferentes zonas de la mina serán extraídas y procesadas.

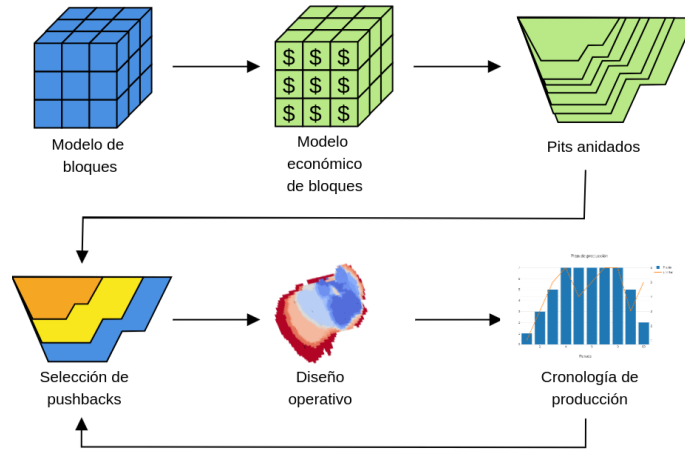


Figura 1.1: Etapas del proceso de planificación.

La Figura 1.1 muestra las diferentes etapas del proceso minero, desde la generación de un modelo de bloques a partir del cuerpo mineralizado hasta la creación de un plan de producción. Es un proceso iterativo y de prueba y error para obtener planes de producción factibles. En particular, el trabajo presentado se centrará en la selección de pushbacks, una etapa tradicionalmente desarrollada por ingenieros expertos en planificación minera. Utilizando reglas empíricas sobre los pits anidados generados mediante la metodología de [Lerchs y Grossmann \(1965\)](#), los ingenieros seleccionan un grupo de pits para definir los pushbacks, basándose en criterios técnicos y geológicos. Este procedimiento tiene limitaciones significativas:

1. No garantiza que los tonelajes de mineral y lastre se distribuyan uniformemente entre los pushbacks. Esto es conocido como el *problema del gap*: tener brechas de tonelaje muy grandes entre pits. En la Figura 1.2 se observa un ejemplo del problema del gap.
2. No se considera la incertidumbre de la ley del mineral.
3. La selección de pushbacks es una decisión subjetiva, dependiente de la experiencia del ingeniero a cargo de la planificación minera ([Meagher et al., 2014](#)).

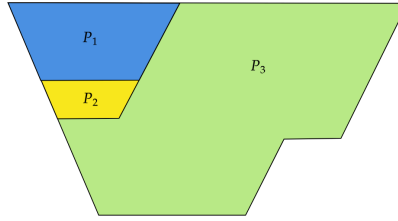


Figura 1.2: Representación del problema del gap. La brecha de tonelajes entre P_3 y P_2 es extensa. Fuente: [Meagher et al. \(2014\)](#).

Estas limitaciones afectan las etapas subsecuentes del proceso de planificación minera, influyendo sobre el plan de producción.

En esta memoria, se propone *una metodología para la selección automática de pushbacks* a partir de una generación extendida de pits anidados y el posterior uso de un modelo de programación lineal entera mixta, abordando las limitaciones mencionadas en el problema tradicional, y que permitirá definir las fases de extracción operativas que maximizan el VAN.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el [Capítulo 2](#) se presentan los antecedentes teóricos del problema, necesarios para su correcta comprensión; en el [Capítulo 3](#) se delimita el problema y se definen los objetivos; en el [Capítulo 4](#) se realiza una revisión de la literatura respecto a los avances obtenidos en la resolución de problemas asociados; en el [Capítulo 5](#) se expone la metodología propuesta y los pasos a seguir para la selección de pushbacks; en el [Capítulo 6](#) se evalúan y analizan los resultados del modelo en un caso de estudio; finalmente, en el [Capítulo 7](#) se presentan las conclusiones y las líneas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Preliminares

En esta sección, se detalla información relevante para el desarrollo de la metodología, con base en las etapas de la planificación minera.

En la planificación minera a largo plazo se establece la estrategia global de extracción. Dada la complejidad presentada de resolverlo directamente, es separado en problemas más pequeños para abordarlos de forma independiente. Estas etapas son:

- (i) Delimitación del pit final.
- (ii) Selección y diseño de pushbacks.
- (iii) Agendamiento de la producción.

Para este proceso, se considera como base de la planificación un modelo de bloques que describe los recursos geológicos de un yacimiento. A partir de este modelo, se desarrollan las etapas de planificación, cuyo resultado final es un *plan de producción* que busca obtener la mayor rentabilidad económica, considerando tanto los criterios geofísicos como los operativos.

Como todo proyecto, la planificación minera está sujeta a una evaluación de proyectos. A lo largo de este trabajo de memoria, se hablará de maximizar el *Valor Actual Neto* (VAN), que corresponde a la suma de los flujos de caja futuros descontados al presente, utilizando una *tasa de descuento* que determina cuánto valen hoy esos flujos futuro, reflejando el *costo de oportunidad*. Este parámetro posee la siguiente fórmula:

$$\sum_{t=1}^T F_t \cdot \left(\frac{1}{1+d} \right)^t - I_0, \quad (2.1)$$

donde T corresponde al horizonte de planificación, t a un periodo específico, F_t al flujo de dinero bruto durante el periodo t , d representa la tasa de descuento, e I_0 a la inversión inicial.

Si la tasa es alta, los flujos futuros valen menos en el presente, lo que puede impactar negativamente en la evaluación del proyecto. Por esto, la estrategia óptima busca extraer el mayor valor posible en las primeras etapas del proyecto, minimizando así el impacto negativo de la tasa de descuento en los flujos de caja a largo plazo.

2.1. Modelo de bloques

Sea $\mathcal{B}$ un conjunto de bloques, desde ahora el modelo de bloques. Esto corresponde a una discretización de las unidades de volumen que componen el yacimiento minero. Este modelo se basa en campañas de exploración, como los *sondajes*, que permiten estimar la concentración de mineral en el yacimiento mediante métodos de estadística espacial. Se considerará que $b \in \mathcal{B}$ es un bloque dentro del modelo. Se asumirá que el modelo de bloques contiene inicialmente la siguiente información:

x	y	z	Ley	Ton
-----	-----	-----	-----	-----

Tabla 2.1: Resumen de atributos del modelo geológico de bloques.

donde x , y , z corresponden a las coordenadas espaciales del bloques, Ley corresponde a la ley del bloque (concentración promedio de un metal valioso en una determinada masa), y Ton corresponde al tonelaje del bloque. Esto también se le denomina el *modelo geológico de bloques*.

Se asumirá que el modelo de bloques se compone de N niveles de profundidad llamados *bancos*, y además se ordena como sigue:

$$z_{\text{start}} > z_{\text{start}} - h > \dots > z_{\text{end}} + h > z_{\text{end}}, \quad (2.2)$$

donde z_{start} corresponde a la capa más alta del modelo de bloque y z_{end} a la capa más profunda. El valor h , que corresponde a la altura de cada banco, se obtiene calculando $\frac{z_{\text{start}} - z_{\text{end}}}{N}$.

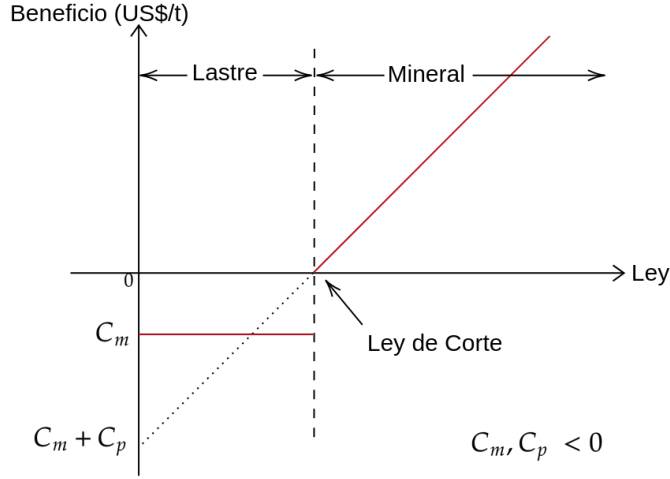


Figura 2.1: Representación de la Ley de Corte Marginal. La función en rojo corresponde a v_b , dada la ley del bloque.

2.1.1. Valorización del modelo de bloque

Las *leyes de corte* en minería se refieren al valor mínimo de concentración de un mineral en un yacimiento que hace económicamente viable su extracción. Estas leyes son fundamentales en la toma de decisiones y la evaluación de proyectos, ya que indican puntos críticos en la rentabilidad. Según el contexto operativo, pueden definirse distintas leyes de corte para un proyecto, como ley de corte marginal, ley de corte interna, leyes de corte mínimas, ley de corte de equilibrio, ley de corte para selección de procesos, entre otras.

En el contexto de valorización de bloques, la *ley de corte marginal* es la cantidad mínima de concentración de metal que debe tener una tonelada de material para que sea económicamente viable su procesamiento. Es decir, es el punto en el que el beneficio neto por procesar un bloque es cero (Miranda, 2023).

$$LC = \frac{C_m + C_p}{(P - C_v) \cdot \text{Rec} \cdot f}. \quad (2.3)$$

La evaluación del modelo de bloques es requerida para obtener un modelo de bloques económico, tomando en cuenta diferentes parámetros:

- P es el precio del metal por tonelada,
- C_m es el costo mina o de extracción por tonelada,

- C_p es el costo de procesamiento por tonelada,
- C_v es el costo de venta por tonelada,
- Rec es la recuperación metalúrgica por tonelada, que corresponde a la fracción del metal valioso que se recupera en el procesamiento del mineral,
- f es un factor de ajusta las unidades,
- Ley_b es la ley del bloque b , y
- Ton_b es el tonelaje del bloque b .

La ecuación (2.4) describe el cálculo del beneficio en un bloque b :

$$v_b = \begin{cases} ((P - C_v) \cdot Rec \cdot f \cdot Ley_b - C_m - C_p) \cdot Ton_b, & \text{si } Ley_b \geq LC, \\ -C_m \cdot Ton_b, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.4)$$

Existen distintos destinos que puede asignarse a cada bloque, por ejemplo su procesamiento o botadero. Los bloques que serán procesados son denominados *mineral* (del inglés, ore); en otro caso, se llamarán *estéril* o *lastre* (del inglés, waste). De esta forma, se puede obtener otro atributo, asociado a aquel tonelaje que será procesado en alguna planta:

$$OTon_b = \begin{cases} Ton_b, & \text{si } Ley_b \geq LC, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.5)$$

El modelo de bloques cuya valorización ya ha sido calculada se denominará *modelo económico de bloques*.

x	y	z	Ley	Ton	v	$OTon$
-----	-----	-----	-------	-------	-----	--------

Tabla 2.2: Resumen de atributos del modelo económico de bloques.

2.1.2. Precedencias entre bloques

Para trabajar correctamente sobre el modelo de bloques, se debe tomar en cuenta las características geológicas que debe cumplir la fosa durante la vida útil de la mina. Un *talud* es la pared inclinada de la mina que contiene cierto ángulo que determina su

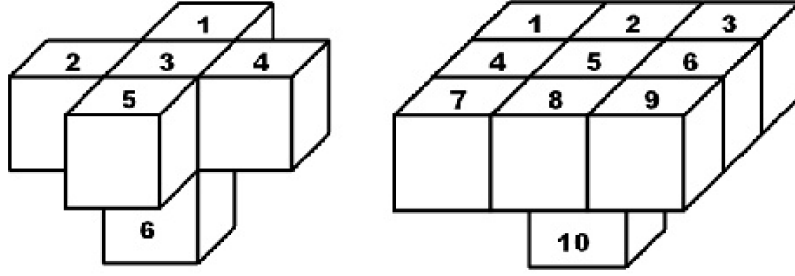


Figura 2.2: Precedencias de bloques. Las reglas de precedencias afecta la secuencia: por ejemplo, en la extracción de cinco bloques por arriba del bloque 6 (izquierda); o la extracción de nueve bloques por arriba de un bloque dado, bloque 10 (derecha). Fuente: [Espinoza et al. \(2013\)](#).

estabilidad, tamaño y forma. La estabilidad del talud es de suma importancia y está sujeta a un análisis continuo y cuidadoso para garantizar la seguridad y eficiencia de las operaciones mineras ([Miranda, 2023](#)).

Para resolver el problema de pit final, se considera la *precedencia* entre bloques a través de restricciones que limitan la extracción de un bloque dado. Deben ser extraídos todos los bloques que se encuentren inmediatamente en la parte superior de éste para poder ser sacado.

Esta limitante geofísica posee una propiedad de *transitividad*, que indica que, si el bloque a requiere que sea extraído el bloque b , y a su vez, el bloque b necesita que sea extraído el bloque c , entonces el bloque a también requiere que se extraiga el bloque c ([Espinoza et al., 2013](#)).

Se dirá $\mathcal{B}_b$ al conjunto de bloques que son predecesores del bloque $b \in \mathcal{B}$.

2.2. Delimitación de pit final

El problema del pit final corresponde a delimitar los bloques que serán extraídos del yacimiento, de modo de maximizar el valor neto de la operación durante la vida útil de la mina. Esta etapa es relevante en la planificación minera, pues se relaciona con la evaluación económica del proyecto, incorporando a su vez parámetros operacionales. Esta restricción dependerá de distintos parámetros, tales como los ángulos de talud, precio del metal y objetivos generales. Este problema se define como sigue:

$$\text{(UPIT)} \quad \max_{x_b} \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b \cdot x_b \quad (2.6)$$

$$\text{s.a.} \quad x_b \leq x_{b'}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \mathcal{B}_b, \quad (2.7)$$

$$x_b \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (2.8)$$

La función (2.6) modela el valor total bruto del pit final. La desigualdad (2.7) representa las restricciones de precedencia, donde para extraer un bloque b , se debe extraer primero el bloque $b' \in \mathcal{B}_b$. La condición (2.8) establece que x_b es una variable binaria; es 1 si el bloque se considera dentro del pit final, 0 en otro caso.

El problema (UPIT) posee buenas propiedades que permiten la construcción de algoritmos eficientes para su resolución. Entre ellas, existe la garantía de que un algoritmo eficiente (polinómico) puede resolverlo (Wolsey, 2020).

Definición 2.2.1. Una matriz A es totalmente unimodular si toda submatriz cuadrada de A tiene determinante $+1$, -1 , ó 0 .

Resultado 2.2.1. La matriz de restricciones del problema (UPIT) es totalmente unimodular.

Demostración. La formulación del problema se puede expresar como un problema de flujo máximo (Espinoza et al., 2013). La matriz de restricciones de un problema de flujo máximo es totalmente unimodular (Wolsey, 2020). $\square$

Teorema 2.2.1. Considere el problema lineal

$$\text{(LP)} \quad \max_x c^T x \quad (2.9)$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \leq b, \quad (2.10)$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n. \quad (2.11)$$

donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$ representan los conjuntos de parámetros, y $x \in \mathbb{R}^n$ representa el conjunto de variables. El problema (LP) tiene una solución entera óptima para todos los vectores enteros b para los cuales tiene un valor óptimo finito si y solo si A es totalmente unimodular. (Wolsey, 2020).

El Teorema 2.2.1 establece que el problema (UPIT) puede resolverse mediante la relajación de la restricción (2.8). Sin embargo, el problema no siempre tiene única solución, ya que pueden haber existir partes del yacimiento con beneficio nulo. En caso de haber múltiples soluciones, se suele optar por el conjunto mínimo como pit final, el cual será único.

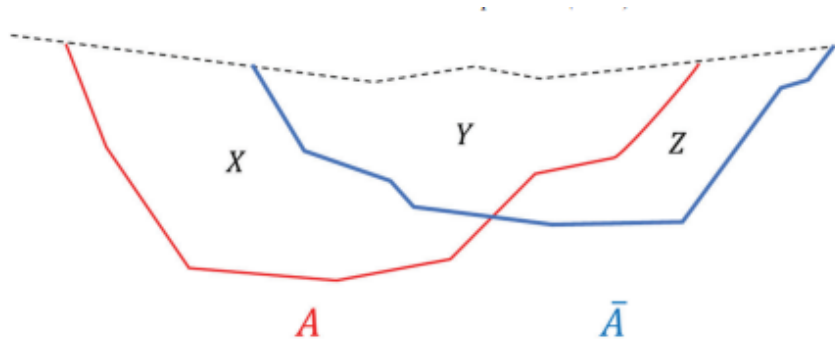


Figura 2.3: Dibujo conceptual de la sección de dos pits óptimos A (para valores v^λ) y A' (para valores $v^{\lambda'}$), considerando la partición X , Y e Z . Fuente: [Morales et al. \(2023\)](#).

Resultado 2.2.2. *Existe una única solución del problema (UPIT) que es de conjunto mínimo, es decir, que posee el mínimo número de bloques.*

Demostración. Suponga que existen dos soluciones de conjunto mínimo $x = \{x_b\}_{b \in \mathcal{B}}$ y $x' = \{x'_b\}_{b \in \mathcal{B}}$ tales que $x \neq x'$ (es decir, difieren en al menos una coordenada). Se definen los siguiente conjuntos:

$$\begin{cases} A = \{b \in \mathcal{B} : x_b = 1\}, \\ A' = \{b \in \mathcal{B} : x'_b = 1\}, \\ X = A \setminus A', \\ Y = A \cap A', \\ Z = A' \setminus A. \end{cases} \quad (2.12)$$

La Figura 2.3 ilustra los conjuntos definidos en (2.12). De esta forma, se tiene

$$\sum_{b \in A} v_b = \sum_{b \in A'} v_b \quad (2.13)$$

$$\implies \sum_{b \in X} v_b + \sum_{b \in Y} v_b = \sum_{b \in Y} v_b + \sum_{b \in Z} v_b \quad (2.14)$$

$$\implies \sum_{b \in X} v_b = \sum_{b \in Z} v_b. \quad (2.15)$$

Observe que:

- Si $\sum_{b \in X} v_b = \sum_{b \in Z} v_b > 0$, entonces definiendo $\bar{x}$ tal que $\bar{x}_b = \max\{x_b, x'_b\}$ para cada $b \in \mathcal{B}$, se tendrá:

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} v_b \bar{x}_b > \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b x_b \quad , \quad \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b \bar{x}_b > \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b x'_b. \quad (2.16)$$

Esto implica que el valor de $\bar{x}_b$ en el problema (UPIT) es mayor, lo que contradice el hecho de que x, x' son soluciones óptimas.

- Si $\sum_{b \in X} v_b = \sum_{b \in Z} v_b = 0$, entonces definiendo $\bar{x}$ tal que $\bar{x}_b = \min\{x_b, x'_b\}$ para cada $b \in \mathcal{B}$, se tendrá que:

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} v_b \bar{x}_b = \sum_{b \in Y} v_b \bar{x}_b = \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b x_b = \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b x'_b. \quad (2.17)$$

Esto implica que $\bar{x}_b$ es solución de (UPIT) y, además, posee menos variables activas que x y x' , lo que contradice el hecho de que x, x' son soluciones de conjunto mínimo.

- Si $\sum_{b \in X} v_b = \sum_{b \in Z} v_b < 0$, entonces definiendo $\bar{x}$ tal que $\bar{x}_b = \min\{x_b, x'_b\}$ para cada $b \in \mathcal{B}$, se tendrá que:

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} v_b \bar{x}_b > \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b x_b \quad , \quad \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b \bar{x}_b > \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b x'_b. \quad (2.18)$$

Esto implica que el valor de $\bar{x}_b$ en el problema (UPIT) es mayor, lo cual nuevamente contradice el hecho de que x, x' son soluciones óptimas.

Por tanto, se concluye que existe una única solución del problema que corresponde al conjunto mínimo. $\square$

Los primeros esfuerzos en resolver este problema se originaron en los años 60, y han sido evolucionando continuamente hasta la actualidad, desarrollando metodologías más completas. Sin embargo, al ser un problema complejo, compuesto de distintos factores y aspectos técnicos, geométricos y geológicos, no se ha definido un consenso respecto a la formulación final del problema ([Miranda, 2023](#)).

A continuación, se presentan algoritmos desarrollados para resolver el problema ([UPIT](#)).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
2	-4	7	-4	6	-4	-4	-4	8	-4
3	-5	-5	-5	15	-5	-5	-5	-5	-5

(i)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
2	-4	7	-4	6	-4	-4	-4	8	-4
3	-5	-5	-5	15	-5	-5	-5	-5	-5

(ii)

Figura 2.4: Implementación del método de cono flotante. (i) valores del modelo económico de bloques en 2D; (ii) pit final óptimo desarrollado mediante el algoritmo. Fuente: [Elahi et al. \(2012\)](#).

2.2.1. Conos flotantes

El *método de conos flotantes* es una técnica clásica y utilizada en la planificación de minas a cielo abierto. Fue el primer intento computacional para resolver el límite del pit final, desarrollado en la década de los 60 por la Kennecott Copper Corporation. Este método es una simplificación geométrica que permite determinar el pit óptimo bajo ciertas condiciones.

Un *cono flotante* se refiere a una estructura geométrica tridimensional que simula la forma de un cono invertido. La idea es identificar un conjunto de bloques que pueden ser extraídos de manera rentable, considerando los costos de extracción, procesamiento, y el valor del mineral contenido.

El proceso comienza seleccionando un bloque de mineral y construyendo un cono hacia la superficie. Si la extracción de todos los bloques dentro de este cono es rentable, el cono se considera una unidad de extracción viable. Este proceso se repite para cada bloque mineralizado, generando múltiples conos. Luego, se comparan y seleccionan aquellos que maximizan el valor económico de la extracción.

El método de cono flotante tiene limitaciones en su capacidad para producir un pit óptimo:

1. No permite examinar todas las combinaciones posibles y, por tanto, no permiten el cálculo óptimo del pit final.
2. Un bloque de mineral puede no justificar la remoción de bloques de desecho mientras que la combinación de estos bloques con otros puede generar valores positivos.
3. La inclusión de bloques no rentables reduce el valor neto del diseño de la mina ([Ares et al., 2022](#)).

Para más detalle sobre algoritmos posteriores, se puede consultar a [Khalou \(2007\)](#), [Wright \(1999\)](#), [Elahi et al. \(2012\)](#), [David et al. \(1974\)](#) y [Dowd y Onur \(1993\)](#).

2.2.2. Metodología de Lerchs y Grossmann

La *metodología de Lerchs y Grossmann* (abreviado LG) corresponde a los algoritmos exactos para la optimización del pit final en 2D y 3D ([Lerchs y Grossmann, 1965](#)). Se presenta en 1965, y corresponde al método de mayor relevancia actualmente en la planificación minera a largo plazo. La metodología busca encontrar el *contorno óptimo* del pit que maximice el beneficio de la extracción.

Los alcances del algoritmo son:

1. Los parámetros económicos y geológicos son conocidos para todo punto.
2. Las restricciones geométricas del pit deben ser especificadas previamente.
3. El objetivo es maximizar el beneficio total neto.

A partir del modelo de bloques, el algoritmo en 2D aborda el problema por secciones transversales, donde cada bloque pondera un valor que representa el beneficio total del mineral luego de restar el costo de extracción. Una vez obtenidos los valores por bloques, se procede a calcular sumas por columnas del beneficio. Finalmente, se traza el contorno óptimo desde el máximo valor de la primera fila avanzando por los bloques adyacentes hacia la izquierda.

Para un modelo 3D, se propone un algoritmo de grafos tridimensional para abordar esta secuencia, donde cada bloque corresponderá a un vértice con peso equivalente al beneficio neto asociado, y las precedencias como arcos del grafo. El problema de pit final será equivalente al *problema de clausura máxima*. ([Miranda, 2023](#))

En [Anexo A](#), se presenta el algoritmo de Lerchs y Grossmann en profundidad.

2.2.3. Algoritmo de Pseudo-Flow

El algoritmo de pseudoflow es un método desarrollado en la década del 2000 por Dorit Hochbaum y sus colaboradores para resolver el problema de flujo máximo.

Este algoritmo, cuyas propiedades permiten ser utilizadas para la resolución del problema de pit final, permitió mejorar considerablemente los tiempos de procesamiento en comparación a la metodología de Lerchs y Grossmann. El algoritmo se centra en

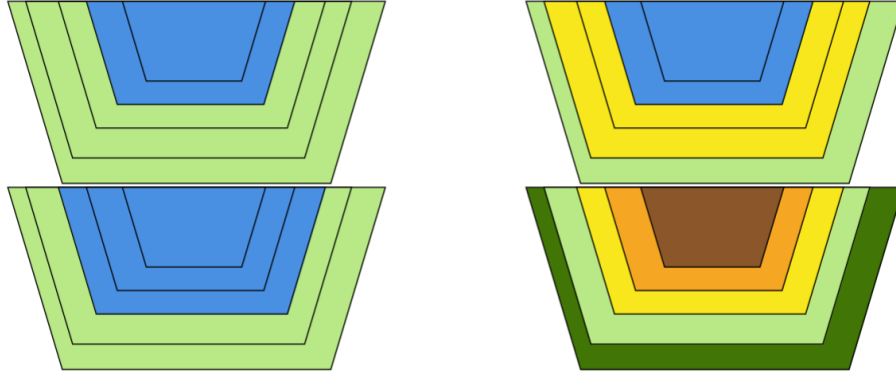


Figura 2.5: Algunas posibles selecciones de pushbacks a partir de cinco pits anidados.

buscar una partición del conjunto de nodos en subconjuntos, algunos de los cuales tienen excesos y otros tienen déficits, de modo que todos los arcos que van desde los subconjuntos con exceso hacia los subconjuntos con déficit estén saturados. La partición con esta propiedad es también un corte mínimo en el grafo. (Hochbaum, 2008)

Actualmente, el problema (UPIT) se resuelve con el algoritmo de pseudoflow, pues es el algoritmo más eficiente computacionalmente.

En Anexo A se presenta el algoritmo de pseudo-flow en profundidad, junto con conceptos previos necesarios.

2.3. Selección de pushbacks

Los pushbacks corresponden a volúmenes de roca conectados que forman una partición del pit final, definiendo *fases de extracción*. La selección de pushbacks está estrechamente vinculada con la planificación de mediano y corto plazo, ya que guiará el agendamiento de la producción, por lo que una correcta secuencia de pushbacks será fundamental para asegurar flujos de caja positivos y una recuperación rápida de la inversión inicial. Actualmente, esta selección se realiza principalmente utilizando la metodología de Lerchs y Grossmann a través de una parametrización del valor del metal (Kržanović et al., 2018).

2.3.1. Criterios de selección de pushbacks

La selección de pushbacks se basa en una variedad de criterios que varían según el tipo de yacimiento, la calidad de la información disponible, la distribución de la mineralización y los costos asociados. Los criterios incluyen, entre otros:

Tonelaje entre pushbacks

El tonelaje extraído debe ajustarse a la capacidad de procesamiento de la planta y la capacidad de movimiento de la mina. Los criterios de tonelaje ayudan a evitar brechas significativas entre fases y aseguran un flujo constante de material, lo que facilita la continuidad operacional y la optimización del uso de los equipos.

1. *Tonelaje a planta*: Se refiere a la cantidad de material que debe ser procesado en la planta de producción. El objetivo es mantener la planta funcionando de manera continua, evitando tiempos muertos y cumpliendo con las metas de producción que la planta debe alcanzar, también conocido como *cuota de fno.*
2. *Tonelaje a mina*: Se refiere a la capacidad de la mina para mover material. Este criterio está condicionado por la cantidad y tipo de equipos mineros disponibles, así como por las necesidades de la planta. Además, busca minimizar los gaps o saltos grandes entre fases, promoviendo una remoción de material lo más uniforme posible para asegurar la eficiencia operativa y la rentabilidad del proyecto a lo largo del tiempo.

Criterios geométricos y operacionales

Los criterios geométricos y operacionales son consideraciones de diseño que aseguran que los pushbacks planificados sean factibles desde un punto de vista práctico y operable en el entorno minero. Esto implica ajustar los modelos matemáticos y las optimizaciones teóricas para que se respeten las restricciones operacionales, evitando diseños imprácticos que, aunque maximizan el VAN, no pueden ser implementados de manera efectiva.

Los ingenieros expertos en diseño de fases consideran 3 parámetros operacionales:

1. *Espacios mínimos operacionales*: Cada fase debe tener un ancho operacional adecuado para permitir una operación segura y el transporte eficiente del equipo minero;

2. *Conectividad de la fase*: Todas las regiones de la fase deben estar conectadas para asegurar la continuidad operativa;
3. *Rampa*: Cada fase debe tener al menos una rampa de transporte para acceder a la fase desde acceso desde la superficie hasta el fondo del pit.

Si un pushback cumple con estos tres parámetros, se considera *práctico*. Si solo cumple con dos, se considera *semipráctico* (Yarmuch, 2020).

Razón estéril/mineral

La razón estéril/mineral, abreviado como REM, es la relación entre la cantidad de material sin valor económico (estéril) que debe ser removido de la mina y la cantidad de mineral valioso económicamente viable que se puede extraer. Esta relación es fundamental para el plan productivo. Se pueden aplicar diferentes estrategias para optimizar la recuperación de la inversión y minimizar los costos operativos, como una razón decreciente, creciente o constante.

1. *REM decreciente*: Se realiza la remoción de todo el material estéril junto con el mineral del mismo nivel hasta alcanzar el fondo del pit. Esto también se conoce como explotación en el “*worst case*”. Este enfoque, aunque sistemático, suele generar flujos de caja negativos durante los primeros años y requiere de una alta inversión inicial en equipos.
2. *REM creciente*: Se enfoca en remover menos estéril al principio, lo que permite un rápido retorno de la inversión y con menores riesgos iniciales. Esto también se conoce como una explotación en el “*best case*”. A medida que la explotación avanza y se profundiza, se incrementa la cantidad de estéril removido. Este enfoque busca minimizar la inversión inicial y acelerar la recuperación del capital, aunque puede aumentar los costos hacia el final de la vida útil de la mina debido a la necesidad de adquirir más equipos.
3. *REM constante*: Se mantiene una relación estable entre el estéril y el mineral a lo largo de la vida útil de la mina. Su principal ventaja es la estabilidad en el uso de la maquinaria y el personal, evitando fluctuaciones significativas en los costos operativos. Este enfoque es equilibrado, pero requiere una inversión inicial considerable para adquirir la flota completa de equipos desde el comienzo.

Es posible combinar diferentes tipos de REM a lo largo de la vida útil de la mina para optimizar la inversión inicial, la recuperación del capital y la estabilidad operativa. Un enfoque flexible que ajuste la REM según las condiciones del proyecto puede proporcionar una mejor adaptación a las exigencias financieras y técnicas a lo largo del tiempo.

Valor neto entre pushbacks

El principal objetivo del valor neto entre pushbacks es maximizar los flujos de caja durante los primeros periodos de la vida útil del proyecto. Esto implica diseñar los pushbacks de manera que los ingresos sean más altos al principio, logrando una rápida recuperación de la inversión y asegurando la estabilidad financiera del proyecto. Idealmente, los flujos de caja deberían ser decrecientes a lo largo del tiempo, lo que significa que las fases iniciales deben ser las más rentables, reduciendo gradualmente la generación de ingresos a medida que el proyecto avanza. A medida que se progresa en el proyecto, es necesario ajustar las fases para mantener un equilibrio entre la rentabilidad y la sostenibilidad operativa, evitando caídas abruptas en los flujos de caja.

Leyes de corte

Las leyes de corte determinan la cantidad mínima de mineral valioso para que su extracción sea económicamente viable, afectando la rentabilidad y la vida útil de la mina. Al aplicar leyes de corte altas al inicio, se maximizan los flujos de caja tempranos y el VAN. Con el tiempo, estas leyes pueden disminuir, extendiendo la explotación del yacimiento. Además, las leyes de corte pueden ser ajustadas para diferentes escenarios dentro del proyecto, como la decisión de almacenar material para un procesamiento futuro o la selección del proceso adecuado cuando existen múltiples opciones.

2.3.2. Pits intermedios

La selección de pushbacks requiere particionar el pit final en distintas fases de extracción. Para esto, la metodología más utilizada en la actualidad es la presentada por Lerchs y Grossmann, donde se ingresa a la valorización de bloques un ponderador λ (también conocido como *revenue factor*) que modifica el precio de venta del mineral y, en consecuencia, entrega una serie de pits intermedios óptimos para cada valor del

precio. El propósito de estos pits intermedios es establecer la transición desde el pit con mayor material económicamente rentable, hasta el pit menos rentable.

La metodología se realiza como sigue: Considere un revenue factor λ , con $0 < \lambda \leq 1$. La ley de corte marginal es reemplazada por

$$LC_\lambda = \frac{C_m + C_p}{(\lambda \cdot P - C_v) \cdot \text{Rec} \cdot f}. \quad (2.19)$$

Por tanto, la valorización del bloque para un revenue factor está dado por:

$$v_b^\lambda = \begin{cases} ((\lambda \cdot P - C_v) \cdot \text{Rec} \cdot f \cdot \text{Ley}_b - C_m - C_p) \cdot \text{Ton}_b, & \text{si } \text{Ley}_b \geq LC_\lambda, \\ -C_m \cdot \text{Ton}_b, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.20)$$

Finalmente, para obtener los pits intermedios anidados para cada revenue factor λ , se resuelve el siguiente problema:

$$(\text{UPIT}_\lambda) \quad \max_{x_b} \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b^\lambda \cdot x_b \quad (2.21)$$

$$\text{s.a.} \quad x_b \leq x_{b'}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \mathcal{B}_b, \quad (2.22)$$

$$x_b \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (2.23)$$

Este problema, cuya formulación es equivalente al problema (UPIT) con una modificación del precio, se resuelve con los métodos presentados por la Sección 2.2.

Observe que la familia de pits generados por esta metodología es *anidada* (creciente en términos de conjuntos). En efecto:

Teorema 2.3.1 (Anidamiento). *Sean λ y λ' dos revenue factors, donde $0 < \lambda < \lambda' \leq 1$. Supongamos que $\{v^\lambda\}_{b \in \mathcal{B}}$ y $\{v^{\lambda'}\}_{b \in \mathcal{B}} \subseteq \mathbb{R}^N$ son dos vectores de valores de bloques definidos según la ecuación (2.20), con N representando el tamaño de un modelo de bloques $\mathcal{B}$. Además, supongamos que $\{x_b\}_{b \in \mathcal{B}}$ y $\{x'_b\}_{b \in \mathcal{B}} \subseteq \{0, 1\}^N$ son soluciones óptimas de conjunto mínimo para los problemas (UPIT_λ) y $(\text{UPIT}_{\lambda'})$ respectivamente. Entonces, el conjunto $\{\bar{x}_b\}_{b \in \mathcal{B}} \subseteq \{0, 1\}^N$ definido por*

$$\bar{x}_b = \max\{x_b, x'_b\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (2.24)$$

también es una solución óptima de conjunto mínimo de $(\text{UPIT}_{\lambda'})$

Demostración. En primer lugar, observe que si $\lambda \cdot P < C_v$, entonces la operación no sería rentable, de modo que:

$$\{x_b\}_{b \in \mathcal{B}} = \{x'_b\}_{b \in \mathcal{B}} = \{\bar{x}_b\}_{b \in \mathcal{B}} \equiv 0 \quad (2.25)$$

Luego, $\bar{x}_b$ es solución de $(\text{UPIT}_{\lambda'})$. En caso contrario, suponga que $\lambda \cdot P > C_v$. Observe que $LC_\lambda > 0$ en este caso. Se probará que LC_λ es decreciente con respecto a λ . En efecto:

$$\begin{aligned} \lambda < \lambda' &\implies \lambda \cdot P - C_v < \lambda' \cdot P - C_v \implies \frac{1}{(\lambda \cdot P - C_v)} > \frac{1}{(\lambda' \cdot P - C_v)} \\ &\implies LC_\lambda > LC_{\lambda'}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Además, si $\lambda < \lambda'$, entonces $v_b^\lambda \leq v_b^{\lambda'}$ para todo $b \in \mathcal{B}$. En efecto, se deben estudiar tres casos:

- Para un bloque $b \in \mathcal{B}$ tal que $\text{Ley}_b \geq LC_\lambda > LC_{\lambda'}$, se tiene $\lambda \cdot P < \lambda' \cdot P$, que implicará $v_b^\lambda < v_b^{\lambda'}$.
- Si $LC_\lambda > \text{Ley}_b \geq LC_{\lambda'}$, entonces $-C_m < 0 \leq (\lambda'P - C_v)$, lo que implica $v_b^\lambda < v_b^{\lambda'}$.
- Si $LC_\lambda > LC_{\lambda'} > \text{Ley}_b$, entonces el valor del bloque corresponderá al costo de extracción y, por tanto, $v_b^\lambda = v_b^{\lambda'}$.

Por tanto, $v_b^\lambda \leq v_b^{\lambda'}$ para todo $b \in \mathcal{B}$.

Ahora, se definen los conjuntos dados por la ecuación (2.12). Se probará que $X = \emptyset$. Supongamos, por contradicción, que X no es vacío. Se tendrá que los bloques $b \in X$ son rentables para un valor v_b pero no para v'_b .

$$\sum_{b \in X} v_b > 0 \geq \sum_{b \in X} v'_b. \quad (2.27)$$

Pero, según el análisis previo:

$$v_b \leq v'_b, \forall b \in \mathcal{B} \implies \sum_{b \in X} v_b \leq \sum_{b \in X} v'_b. \quad (2.28)$$

Esto es una contradicción. Observe que, la suma en X es cero, pues en otro caso, x_b no sería solución de conjunto mínimo. Por tanto, X debe ser un conjunto vacío.

Como resultado, se obtiene que $x_b \leq x'_b$, para todo bloque $b \in \mathcal{B}$, y se concluye que $\{\bar{x}_b\}_{b \in \mathcal{B}}$ es óptima de conjunto mínimo para $(\text{UPIT}_{\lambda'})$. Se concluye finalmente que $A \subseteq A'$, lo que corresponde a la anidación de los pits intermedios. $\square$

2.4. Agendamiento de la producción

El *agendamiento de la producción* consiste en determinar qué bloques deben ser explotados, en qué momento y qué destino les corresponde (Jélvez, 2017).

Esta es la última etapa de la planificación minera, y corresponde al proceso posterior a la selección de pushbacks. A partir de este proceso, los pushbacks seleccionados se subdividen en conjuntos de bloques que se encuentren a la misma profundidad. Estas subdivisiones se conocen como *fases-bancos*. El procedimiento implica asignar, a cada fase-banco, tiempos de extracción que no excedan las capacidades de los recursos involucrados en la operación minera. La Figura 2.6 presenta una representación por etapa del proceso.

Este proceso puede ajustarse y repetirse a otras consideraciones técnicas, tales como espacio mínimo de trabajo de las maquinarias, camiones y requisitos de mezclas. Además, existen parámetros que no son constantes, y su variación puede modificar los planes trazados, como lo son el precio del metal o dificultades operativas. Es importante considerar que, a medida que se desarrolla la explotación del yacimiento, se obtiene nueva información la cual puede obligar a corregir el plan determinado inicialmente.

Para resolver este problema, existe una serie de algoritmos que han sido desarrollados para la planificación minera. El algoritmo más conocido es “Milawa”, de Gemcom Software (2011). Sin embargo, existen una serie de softwares comerciales que utilizan el mismo principio o similar (Chicoisne et al., 2012).

En esta etapa se considera la dimensión temporal, utilizando parámetros necesarios para evaluar el valor del dinero en el tiempo, y así calcular el mayor beneficio descontado para el proyecto.

Esta etapa finaliza con un *plan de producción*, que consiste en la programación de la explotación, identificando la cantidad, calidad y origen de los bloques a extraer en un período específico a lo largo de la vida útil del yacimiento. Además, se determinan los equipos que se utilizarán en cada período de expansión. El plan de producción puede elaborarse para distintos horizontes de tiempo, ya sea a corto o largo plazo (Delgado, s.f.).

2.4.1. Agendamiento Directo de Bloques

El *agendamiento directo de bloques* (DBS, por sus siglas en inglés) es una metodología que permite planificar la extracción de bloques en un yacimiento minero, integrando la dimensión temporal. Este enfoque optimiza la producción a lo largo del tiempo

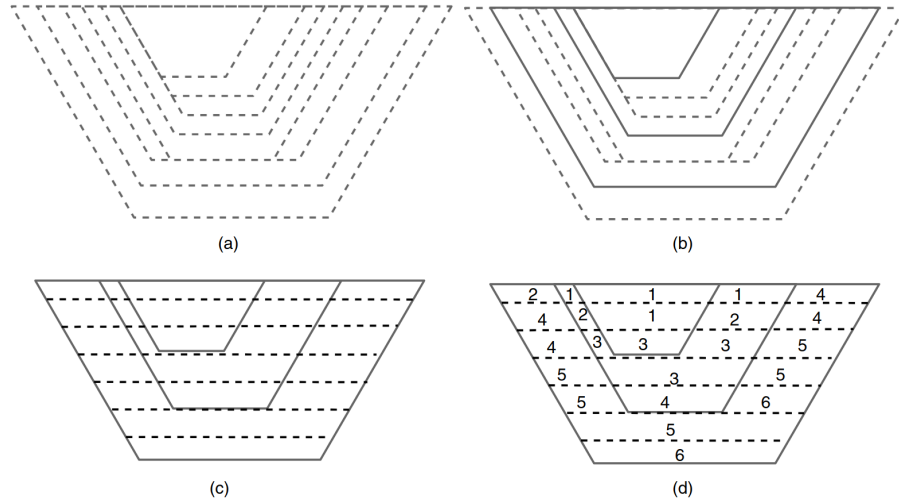


Figura 2.6: Secuencia de la planificación minera a largo plazo. (a) se define una familia de pits anidados; (b) se seleccionan los pushbacks; (c) se definen las fases-bancos; (d) a las fases-bancos se les asigna un período de extracción. Fuente: [Chicoisne et al. \(2012\)](#).

y maximiza el VAN del proyecto minero, proporcionando una mayor flexibilidad y precisión en la planificación.

El DBS implica la secuenciación de la extracción de bloques, asegurando un flujo constante de material procesable y respetando las capacidades operativas de la mina. Para ello, se define un horizonte temporal (ya sea en años o meses) y se asignan bloques específicos a cada periodo, considerando criterios técnicos y operativos.

El DBS sustituye las etapas tradicionales de planificación minera, pues en lugar de generar pits anidados como en la metodología de Lerchs y Grossmann, el DBS asigna periodos de extracción a los bloques mediante un problema de optimización subyacente.

El concepto de DBS fue propuesto por primera vez por Johnson en 1968. Sin embargo, debido a limitaciones computacionales de la época, esta metodología no fue ampliamente adoptada. Con el avance de la tecnología y el desarrollo de nuevas técnicas de optimización, el agendamiento directo de bloques ha ganado popularidad y se ha convertido en una alternativa viable a los métodos tradicionales.

A pesar de sus ventajas, el DBS presenta ciertos desafíos:

1. *Complejidad Computacional*: Resolver problemas de programación entera mixta para modelos grandes puede ser computacionalmente intensivo.

Método	Ventajas	Desventajas
LG	- Ampliamente usado en la industria. - Operatividad de los resultados.	- Criterio de selección de fases (pushbacks) manual y “gap problem”. - Proceso iterativo.
DBS	- Genera programas directamente. - Considera el tiempo y costo de oportunidad.	- Nuevo enfoque, lenta asimilación en la industria. - Tiempo de computación considerable en casos de estudios reales.

Tabla 2.3: Ventajas y desventajas entre las metodologías LG y DBS.

2. *Viabilidad Operacional*: Las soluciones obtenidas pueden no siempre ser operativamente viables, y puede ser necesario realizar ajustes manuales.
3. *Implementación Completa de Restricciones*: No todas las restricciones operativas pueden ser implementadas en los modelos actuales, lo que puede resultar en planes de producción a largo plazo no factibles.

El agendamiento directo de bloques posee distintas formulaciones dependiendo de las características consideradas. A continuación, se presentarán dos formulaciones inspiradas en esta metodología.

The constrained pit limit problem

El problema de delimitación de pit restringido (del inglés, constrained pit limit problem), abreviado como CPIT, extiende el problema (UPIT) introducido previamente, incorporando la dimensión temporal y añadiendo restricciones asociadas al modelo. En este contexto, se asume que cada bloque puede ser extraído completamente en un solo periodo de tiempo. Además, se consideran restricciones sobre los recursos operacionales disponibles en cada periodo. A continuación, se presenta la notación utilizada:

- El conjunto de periodos de tiempo, denotado por T .
- El conjunto de recursos operacionales (por ejemplo, aquellos asociados a la extracción o el procesamiento), denotado por R .

- La tasa de descuento, denotado por α .
- El valor descontado del bloque b en el periodo t , denotado por v_{bt} , la cual puede obtenerse a partir de la siguiente fórmula:

$$v_{bt} = v_b \cdot \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^t. \quad (2.29)$$

- Las disponibilidades mínima y máxima del recurso operacional r en el tiempo t , denotadas por C_{rt}^- y C_{rt}^+ , respectivamente.
- La cantidad de recursos operacionales requeridos para extraer el bloque b para la operación r , denotada por q_{br} .
- La decisión de extraer el bloque b en periodo t , denotado por x_{bt} .

De esta manera, el problema se formula clásicamente de la siguiente manera:

$$\text{(CPIT*)} \quad \max_{x_{bt}} \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{t \in T} v_{bt} \cdot x_{bt} \quad (2.30)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{\tau \leq t} x_{b\tau} \leq \sum_{\tau \leq t} x_{b'\tau}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \mathcal{B}_b, t \in T, \quad (2.31)$$

$$\sum_{t \in T} x_{bt} \leq 1, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (2.32)$$

$$C_{rt}^- \leq \sum_{b \in \mathcal{B}} q_{br} x_{bt} \leq C_{rt}^+, \quad \forall t \in T, r \in R, \quad (2.33)$$

$$x_{bt} \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in T. \quad (2.34)$$

En esta formulación, la ecuación (2.30) maximiza el VAN, considerando la tasa de descuento sobre los flujos de dinero en cada periodo. La ecuación (2.31) establece restricciones de precedencia. La ecuación (2.32) asegura que un bloque solo pueda ser extraído una vez, asignando una variable al periodo específico de extracción. La ecuación (2.33) impone límites de capacidad en el consumo de los recursos operacionales. Finalmente, la ecuación (2.34) define la naturaleza binaria de las variables, donde $x_{bt} = 1$ indica que el bloque b fue extraído exactamente en el periodo t , y 0 en los demás casos.

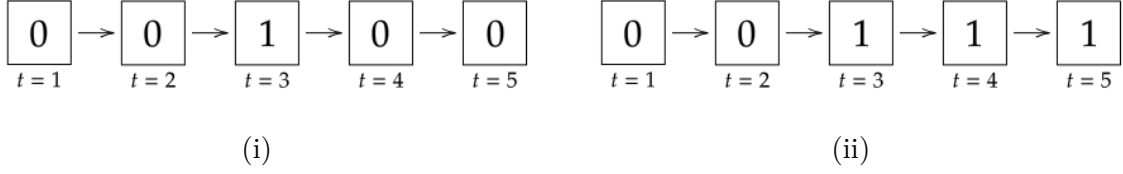


Figura 2.7: Comparación del comportamiento de las variables x_{bt} para un bloque b extraído exactamente en tiempo $t = 3$ dependiendo de la formulación: (i) (CPIT*); (ii) (CPIT).

Esta formulación es ampliamente utilizada en la literatura, como se observa en [Espinoza et al. \(2013\)](#). Sin embargo, en este trabajo se empleará una formulación equivalente que permitirá interpretar los resultados en su versión relajada. La segunda formulación del problema se plantea como sigue:

$$\text{(CPIT)} \quad \max_{x_{bt}} \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{t \in T} v_{bt} \cdot (x_{bt} - x_{bt-1}) \quad (2.35)$$

$$\text{s.a.} \quad x_{bt} \leq x_{b't}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \mathcal{B}_b, t \in T, \quad (2.36)$$

$$x_{bt-1} \leq x_{bt}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in T, \quad (2.37)$$

$$C_{rt}^- \leq \sum_{b \in \mathcal{B}} q_{br}(x_{bt} - x_{bt-1}) \leq C_{rt}^+, \quad \forall t \in T, r \in R, \quad (2.38)$$

$$x_{bt} \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in T. \quad (2.39)$$

En esta formulación, las variables x_{bt} tienen la siguiente interpretación: $x_{bt} = 1$ si el bloque b fue extraído en un periodo menor o igual a t , y es 0 en caso contrario. La restricción (2.37) establece que, si un bloque fue extraído en un periodo anterior, debe mantenerse como extraído en los periodos siguientes. La Figura 2.7 representa el comportamiento de las variables para cada formulación.

Si x_{bt}^* es la solución óptima del problema (CPIT), entonces el período de extracción t_b para cada bloque $b \in \mathcal{B}$ se determina mediante la siguiente expresión:

$$t_b = \min\{t \in T : x_{bt} = 1\}. \quad (2.40)$$

A diferencia del problema (UPIT), este problema es fuertemente NP-difícil, lo que lo hace computacionalmente complejo ([Espinoza et al., 2013](#)). En este contexto, la metodología propuesta por [Chicoisne et al. \(2012\)](#) utiliza la solución relajada del problema de programación lineal, permitiendo resolver el problema en tiempos

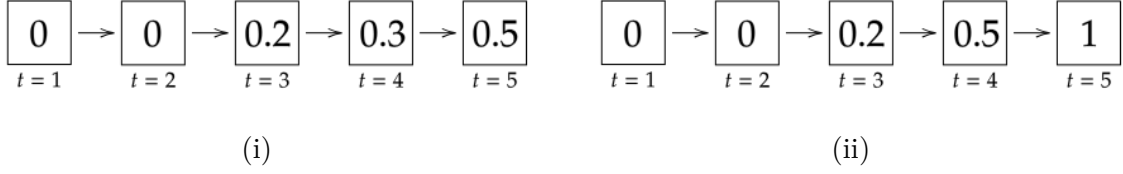


Figura 2.8: Comparación del comportamiento de las variables x_{bt} para un bloque b donde se extrae el 20 % en $t = 3$, 30 % en $t = 4$ y 50 % en $t = 5$, dependiendo de la formulación: (i) una versión relajada de (CPIT*); (ii) (R-CPIT).

computacionales factibles y estimar el tiempo esperado de extracción. El problema relajado puede formularse de la siguiente manera:

$$\text{(R-CPIT)} \quad \max_{x_{bt}} \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{t \in T} v_{bt} \cdot (x_{bt} - x_{bt-1}) \quad (2.41)$$

$$\text{s.a.} \quad x_{bt} \leq x_{b't}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \mathcal{B}_b, t \in T, \quad (2.42)$$

$$x_{bt-1} \leq x_{bt}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in T, \quad (2.43)$$

$$C_{rt}^- \leq \sum_{b \in \mathcal{B}} q_{br} (x_{bt} - x_{bt-1}) \leq C_{rt}^+, \quad \forall t \in T, r \in R, \quad (2.44)$$

$$x_{bt} \in [0, 1], \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in T. \quad (2.45)$$

En esta formulación, las variables x_{bt} se interpretan como los porcentajes acumulados de extracción del bloque b hasta el periodo t , con valores que pueden variar entre 0 y 1. El algoritmo BZ (Bienstock y Zuckerberg, 2009) fue usado para resolver (R-CPIT). Si x_{bt}^* es la solución óptima del problema (R-CPIT), entonces el periodo de extracción esperado ET_b para cada bloque $b \in \mathcal{B}$ está dado por

$$ET_b = \sum_{t=1}^T t \cdot (x_{bt}^* - x_{b,t-1}^*) + (T+1) \cdot (1 - x_{bT}^*), \quad \forall b \in \mathcal{B}. \quad (2.46)$$

The precedence constrained production scheduling problem

El problema de agendamiento de la producción con restricciones de precedencia (precedence constrained production scheduling problem, PCPSP) es una generalización del problema (CPIT) que no solo determina si un bloque debe ser extraído, sino también si, una vez extraído, se enviará a la planta de procesamiento o al vertedero.

En este caso, se agrega una segunda variable, denotada por Y_{bdt} , que representa la cantidad del bloque b enviada al destino d en el período t . Se debe asegurar de que un bloque solo se envíe a una instalación de procesamiento si ha sido extraído. De esta forma, también estamos determinando la ubicación a la que se envían estos bloques. A continuación, se presenta la notación utilizada:

- El conjunto de periodos de tiempo, denotado por T .
- El conjunto de destinos, denotado por D .
- El conjunto de recursos operacionales (por ejemplo, aquellos asociados a la extracción o el procesamiento), denotado por R .
- La tasa de descuento, denotado por α .
- El valor descontado del bloque b si se dirige al destino d en el periodo t , denotado por v_{bdt} , la cual puede obtenerse a partir de la siguiente fórmula:

$$v_{bdt} = v_{bd} \cdot \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^t. \quad (2.47)$$

- Las disponibilidades mínima y máxima del recurso operacional r en el tiempo t , denotadas por C_{rt}^- y C_{rt}^+ , respectivamente.
- La cantidad de recursos operacionales requeridos para extraer el bloque b en el destino d para la operación r , denotada por q_{bdr} .
- Los coeficientes de restricción arbitrarios en las restricciones generales laterales, denotado por A .
- Los límites arbitrarios máximos de restricciones generales laterales, denotados por a^+ y a^- , respectivamente. Posteriormente, se especificará la utilidad de estos parámetros.
- La decisión de extraer el bloque b en periodo t , denotado por x_{bt} .
- La cantidad del bloque b enviado al destino d en periodo t , denotado por y_{bdt} .

De esta forma, el problema puede formularse como:

$$\text{(PCPSP)} \quad \max_{x_{bt}} \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} v_{bdt} \cdot y_{bdt} \quad (2.48)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{\tau \leq t} x_{b\tau} \leq \sum_{\tau \leq t} x_{b'\tau}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \mathcal{B}_b, t \in T, \quad (2.49)$$

$$x_{bt} = \sum_{d \in D} y_{bdt}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in T, \quad (2.50)$$

$$\sum_{t \in T} x_{bt} \leq 1, \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in T, \quad (2.51)$$

$$C_{rt}^- \leq \sum_{b \in \mathcal{B}} q_{br}(x_{bt} - x_{bt-1}) \leq C_{rt}^+, \quad \forall t \in T, r \in R, \quad (2.52)$$

$$a^- \leq Ay \leq a^+, \quad (2.53)$$

$$y_{bdt} \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, d \in D, t \in T, \quad (2.54)$$

$$x_{bt} \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in T. \quad (2.55)$$

La restricción (2.53) permiten modelar situaciones regidas por situaciones técnicas, como por ejemplo, representar una restricción de ley mínima para todos los tipos relevantes de mineral en cada periodo de tiempo. Así, por ejemplo, una planta de procesamiento podría aceptar solo un conjunto de bloques en un periodo de tiempo dado que cumplan con un nivel mínimo de cobre y un nivel máximo de arsénico. Un ejemplo de modelación se presenta en Espinoza et al. (2013).

Para el caso especial en el que eliminamos las restricciones (2.53) y fijamos el destino para cada bloque b , el (PCPSP) se reduce a (CPIT). En otras palabras, en ausencia de esta restricción, el (PCPSP) puede considerarse como una relajación de (CPIT) en la que el destino de cada bloque no está determinado inicialmente.

Capítulo 3

Delimitación y objetivos del problema

La planificación minera a largo plazo es un proceso complejo. Para abordar esta complejidad, comúnmente se descompone el problema en subproblemas que se resuelven de forma independiente, lo que puede llevar a soluciones subóptimas desde una perspectiva global. Este trabajo se enfoca en la etapa de selección y diseño de fases (ii), la cual depende en gran medida de la experiencia del equipo técnico para determinar la secuencia óptima de extracción que maximice el VAN, quienes utilizan una serie de reglas empíricas sobre los pits anidados obtenidos mediante la metodología desarrollada por Lerchs y Grossmann. Según [Meagher et al. \(2014\)](#), los principales problemas identificados que afectan la optimización de esta etapa son:

1. No se consideran los requerimientos de leyes o calidad de los parámetros.
2. No se tiene en cuenta la incertidumbre en las leyes estimadas en el modelo de bloques.
3. El “problema del gap”, que se refiere a grandes variaciones de tamaño en la selección de fases.
4. No se considera la dimensión temporal del problema, lo que no permite considerar la tasa de descuento sobre los flujos de dinero.

Estos problemas surgen en las combinaciones posibles de pushbacks obtenidos a través de la generación de pits intermedios por revenue factor. Las opciones se ven

limitadas al considerar solo una base de pits generada por la metodología de Lerchs y Grossmann.

Es importante destacar que, una vez desarrollada la secuencia de extracción de un proyecto minero, los ajustes posibles son limitados. Esto resalta la relevancia de la etapa de selección de pushbacks en la planificación minera ([Consuegra y Dimitrakopoulos, 2010](#)).

3.1. Hipótesis

Se plantea que la automatización de la selección de fases en la planificación minera, basada en objetivos económicos a partir de la inclusión de la dimensión temporal, mejorará significativamente la calidad de las decisiones durante la etapa de selección de pushbacks. Además, aumentar las posibles fases presentes en la automatización deben reflejarse en un diseño de fases con tonelajes mejor distribuidos, que maximicen el beneficio económico en comparación con los métodos tradicionales, los cuales dependen de la experiencia técnica y la selección manual.

3.2. Objetivos

3.2.1. Objetivo General

Desarrollar una metodología integrada para la selección automática de pushbacks en minería a cielo abierto, que incorpore el valor del dinero en el tiempo y extienda los pits intermedios mediante un modelo de programación lineal entera mixta, con el fin de maximizar el beneficio neto y mejorar la calidad de las decisiones en la planificación minera.

3.2.2. Objetivos específicos

1. Definir criterios geométricos y económicos que permitan la selección automática de pushbacks, validados por un equipo de planificación minera.
2. Desarrollar condiciones necesarias y suficientes para la generación de pits alternativos, utilizando diferentes dimensiones temporales y espaciales, asegurando que cumplan con el principio de anidamiento.

3. Generar una extensión de pits alternativos, combinando familias de pits generadas por distintos criterios geométricos y económicos, para aumentar las posibles soluciones factibles.
4. Desarrollar un modelo de optimización, basado en programación lineal entera mixta, que permita la selección automática de pushbacks, integrando los pits alternativos generados previamente.
5. Validar el modelo integrado utilizando modelos de bloques que representen distintos tipos de yacimientos, y evaluar su rendimiento en términos de factibilidad de la selección de fases, eficiencia económica, y velocidad de cálculo.
6. Comparar los resultados del modelo automatizado con los métodos tradicionales, evaluando la factibilidad operativa de los resultados obtenidos y su potencial para mejorar la toma de decisiones en la planificación minera.

3.2.3. Alcances

1. No se considera la incertidumbre geológica dentro del modelo.
2. No se considera el diseño de rampas para unir los distintos niveles de la mina.
3. No se consideran espacios mínimos operacionales dentro del modelo.
4. No se considera el agendamiento de producción por períodos ni costos de inversión como flota de equipos y recambio por término de vida útil.

Capítulo 4

Revisión de Literatura

4.1. Metodologías para obtención de pits anidados

[Lerchs y Grossmann \(1965\)](#) propusieron el primer enfoque matemático para determinar el límite óptimo de un pit: el método LG. Los principales inconvenientes de este método son su complejidad tanto en la comprensión como en la programación, ya que el proceso de normalización, necesario para resolver el problema de relocalización, consume demasiado tiempo. Además, introdujeron la técnica de parametrización, que consiste en modificar los valores de una determinada variable para generar múltiples pits dentro del mismo pit final. Sin embargo, este enfoque puede presentar el problema de que el tamaño de los pits generados varíe de manera errática, creando grandes diferencias de tamaño entre los pushbacks y volviéndolos poco prácticos, lo que es comúnmente conocido como “gap problem”.

[Pana \(1965\)](#) y [Carlson et al. \(1966\)](#) describen el método del cono flotante. Utilizando esta metodología y parametrizando alguna de las variables del modelo de bloques, es posible obtener un conjunto de pits anidados dentro del pit final. Variaciones de este método han sido propuestas por [Wright \(1999\)](#), [Khalou \(2007\)](#), [Elahi et al. \(2012\)](#) y, más recientemente, por [Ares et al. \(2022\)](#).

[Vallet \(1976\)](#) desarrolla una variante del algoritmo de LG que produce una serie de pits anidados. En cada etapa (o paso), se busca el pit con la mayor relación de beneficio/volumen entre todos los pits factibles en el grafo. Una vez encontrado dicho pit, el paso se completa y el pit se extrae del grafo, logrando así un número finito de pits anidados.

[Seymour \(1995\)](#) modifica el algoritmo de LG incorporando como parámetro el volumen del pit. Esta modificación sigue la misma metodología que el algoritmo de LG,

pero incluye la parametrización. Estos pits pequeños se crean al parametrizar una variable en cada uno de los bloques del modelo económico, lo cual en este caso se logra variando el volumen del pit.

[Dagdelen y François-Bongarçon \(1982\)](#) y [Dagdelen y Johnson \(1986\)](#) propusieron un enfoque diferente, reemplazando los parámetros económicos (precio del metal, costo de extracción, leyes de corte, entre otros) por el contenido de mineral y la cantidad de metal recuperable. Presentaron un algoritmo que genera una serie de pits anidados, parametrizando el contenido total de metal y el volumen del incremento del pit. Un pit pertenece a la parametrización si contiene la mayor cantidad de metal recuperable.

[Wang y Sevim \(1995\)](#) propusieron un algoritmo que produce una serie de pits anidados de manera que el número de bloques entre dos pits consecutivos no exceda un valor fijo. Esto tiene como objetivo superar el “gap problem”, evitando grandes diferencias en los tonelajes a extraer entre pits consecutivos y generando resultados más realistas y aplicables en la práctica.

[Ramazan y Dagdelen \(1998\)](#) desarrollaron el algoritmo de diseño de pushback de relación mínima de extracción. Este algoritmo superpone los pushbacks obtenidos con este nuevo enfoque a los pushbacks obtenidos por métodos convencionales que maximizan el beneficio para un cierto volumen de mineral. Esto permite seleccionar pushbacks con el mayor beneficio económico y la menor relación de extracción.

[Picard \(1976\)](#) demuestra que el problema del pit final es equivalente a un problema de clausura máxima, el cual puede reducirse a su vez a un problema de corte mínimo, permitiendo el uso de algoritmos eficientes para el problema de flujo máximo. [Chandran y Hochbaum \(2009\)](#), [Hochbaum \(2001\)](#), [Hochbaum y Chen \(2000\)](#) y [Hochbaum \(2008\)](#), demuestran que el algoritmo de LG puede usarse como un algoritmo de redes de flujo, generando múltiples pits anidados mediante la repetición del algoritmo de pseudoflow para cada revenue factor, obteniendo resultados más rápidos que el algoritmo de LG.

A lo largo de los años, se han propuesto diversas metodologías para la generación de pits anidados, cada una de ellas se basa en una sola dimensión (una familia de pits), como el revenue factor, el volumen del pit o la parametrización del contenido de metal. Sin embargo, ninguna de estas metodologías propone combinar distintas familias de pits, lo que resulta en una base limitada para el proceso posterior de selección de pushbacks.

[Jélvez et al. \(2020\)](#) propone un nuevo enfoque para generar más de una familia de pits anidados. Además de generar pits utilizando la metodología tradicional con revenue factor, también obtiene otras familias de pits mediante el tiempo de extracción esperado (ET), considerando la tasa de descuento y el impacto económico en el be-

neficio final de cada bloque (VAN). Además, en ambos casos, se consideran distintas profundidades para aumentar aún más la cantidad de pits anidados. Aunque este enfoque aumenta la cantidad de pits generados, se limita al proceso de obtención de pits anidados y no aborda el proceso de selección de pushbacks.

[Morales et al. \(2023\)](#) propone el primer modelo de optimización para la obtención de pits anidados que considera restricciones de espacios mínimos operacionales en los sectores más profundos del pit. A pesar de generar pits factibles operacionalmente, se limita a utilizar la metodología de LG (con una penalización en el modelo para imponer los espacios mínimos operacionales) sin expandirse a otras dimensiones.

4.2. Selección automática de pushbacks

[Jélvez et al. \(2020\)](#) propone un nuevo modelo para selección de pushback utilizando programación lineal de enteros mixta. El modelo selecciona pushbacks a partir de una familia de pits anidados y considera límites de mineral y estéril para garantizar una correcta planificación de producción. Sin embargo, su enfoque se centra únicamente en respetar la relación de extracción de mineral/estéril dentro del programa de producción.

[Bai et al. \(2018\)](#) proponen un enfoque basado en la aplicación iterativa de operadores geométricos para generar pushbacks factibles que respeten los anchos mínimos de banco y de profundidad. Aunque su metodología permite obtener pushbacks operativamente factibles, solo utiliza pits anidados calculados variando el precio del metal, lo que limita la base utilizada para la selección.

[Yarmuch \(2020\)](#) desarrollan un modelo matemático basado en programación de enteros binaria para la generación de pushbacks, considerando restricciones como el ancho mínimo de extracción y los requerimientos de conectividad entre fases. Además, incluyen una rampa para cada pushback que conecta la parte más profunda con la superficie. A pesar de obtener resultados similares a los del método convencional (selección de pushbacks mediante criterio de un ingeniero planificador), su modelo se limita a modelos de bloques de un tamaño reducido y no optimiza simultáneamente los pushbacks y la programación de la mina, por lo que no considera el VAN dentro del modelo.

[Nancel-Penard y Morales \(2021\)](#) presenta un modelo de programación lineal entera para generar el pit final, considerando anchos mínimos para el sector más profundo de la mina. Definen una propiedad de suavizamiento para asegurar que haya suficiente espacio para moverse entre las diferentes zonas profundas del pit. Utiliza su modelo

de programación para una secuencia de pushbacks a través de una modificación de la metodología de LG. Su modelo selecciona pushbacks a partir de pits obtenidos parametrizando el precio del metal, sin considerar otras variables de parametrización que podrían generar un mayor beneficio económico al momento de generar la selección de pushbacks.

4.3. Agendamiento de producción

Una metodología alternativa a la propuesta tradicional de [Lerchs y Grossmann \(1965\)](#) es la presentada por [Johnson \(1968\)](#) y [Johnson \(1969\)](#) conocida como Agendamiento Directo de Bloques (DBS). En este enfoque, también se han desarrollado trabajos que incorporan espacios mínimos operacionales como restricciones dentro de la metodología.

[Cullenbine et al. \(2011\)](#) introducen una variante del modelo DBS, permitiendo la inclusión de espacios operacionales en la parte más profunda de la mina mediante restricciones de precedencia entre bloques adyacentes, que forzan la extracción de al menos un bloque adyacente del bloque extraído en el mismo banco. [Deutsch \(2019\)](#) presenta técnicas basadas en la satisfactibilidad booleana para el agendamiento de producción con restricciones de espacios mínimos operacionales, optimizando el programa de producción al considerar estas restricciones. Sin embargo, la metodología no es aplicable en problemas mineros de gran escala. [Nancel-Penard y Jelvez \(2023\)](#) proponen un modelo de programación lineal entera con una heurística de descomposición para los requerimientos de espacios mínimos operacionales, garantizando la seguridad de las paredes del pit y las restricciones operativas, aunque está limitado por el tamaño de la instancia. [Yarmuch y Sepulveda \(2024\)](#) presenta un enfoque novedoso para abordar el problema de agendamiento de la producción minera a cielo abierto con restricciones de espacios mínimos en el contexto de la planificación a medio plazo.

Además, existen metodologías que incorporan espacios mínimos operacionales para el diseño de pits finales o pushbacks. [Deutsch et al. \(2023\)](#) presentan un algoritmo de programación dinámica para espacios mínimos entre pushbacks, abordando el “gap problem” en el diseño resultante. [Nancel-Penard y Morales \(2021\)](#) amplían un modelo de programación lineal entera para el diseño de pits, incorporando restricciones de ancho mínimo y consiguiendo diseños operativos suavizados. [Yarmuch et al. \(2021\)](#) se enfocan en el ancho mínimo y la continuidad para la generación de pushbacks usando templates rectangulares y restricciones de flujo, mientras que [Yarmuch y Rubinstein \(2023\)](#) proponen un método de agrupación de burbujas de jabón (*soap-bubble*) para

obtener formas eficientes de pushbacks. Sin embargo, estas metodologías no incorporan el agendamiento de producción dentro de su modelo, limitándose al problema de diseño de secuencias mineras.

Una de las ventajas del enfoque DBS es que se basa en modelos de optimización que toman en cuenta el valor del dinero en el tiempo (tasas de descuento), las capacidades de procesamiento y extracción minera, y la optimización de leyes de corte, aspectos relevantes que no fueron considerados en los estudios iniciales de la metodología de LG, pero que sí han ido incorporándose en estudios más recientes como el de [Jélvez et al. \(2020\)](#), donde se limitan las capacidades de mina y planta dentro del modelo. Sin embargo, estas metodologías, a pesar de incorporar restricciones de espacios mínimos operacionales dentro del modelo de agendamiento, resultan en programas imprácticos. Dado que las decisiones del modelo se realizan a partir de un análisis bloque por bloque, la solución tiende a “picotear” la mina, extrayendo bloques de distintas locaciones en períodos diferentes y requiriendo ajustes para generar planes de producción factibles.

Capítulo 5

Metodología

En este capítulo, se establece la metodología para la selección automática de pushbacks. Asumiendo un modelo económico de bloques, los principales pasos se resumen a continuación:

1. *Delimitación del pit final*: Se define la fosa final que será extraída. Este paso dependerá del problema de pit final a resolver, considerando los objetivos y restricciones específicos.
2. *Cálculo de tiempo esperados de extracción*: Un aspecto importante de esta metodología es la incorporación de la dimensión temporal, relevante para estimar el VAN en pasos posteriores.
3. *Generación de pits intermedios*, anidados a partir de distintas familias de pits, tales como las generadas mediante:
 - a) Revenue factors.
 - b) Límites de profundidad (bancos).
 - c) Tiempo de extracción esperado.
 - d) Extensión de pits intermedios a partir de otras familias de pits, utilizando operaciones como la intersección.
4. *Selección automática de pushbacks*, a través de un modelo de programación lineal entera mixta que maximiza el VAN, sujeto a restricciones operacionales.

Es importante destacar que esta metodología es flexible y permite la incorporación de distintos enfoques para abordar cada uno de los pasos mencionados. Esto implica que

se pueden utilizar métodos alternativos a los presentados en cada etapa, lo que podría llevar a resultados variados dependiendo de los parámetros y objetivos establecidos.

5.1. Delimitación del pit final

La metodología requiere, en primer lugar, delimitar la fosa final de extracción, la cual se obtiene resolviendo el problema de pit final en alguna de sus variantes. Por ejemplo, el problema (UPIT) se enfoca en maximizar el beneficio total, sujeto únicamente a restricciones de precedencia. Sin embargo, es posible incorporar otros parámetros y restricciones geotécnicas que influirán en la forma final del pit.

Un ejemplo de este último enfoque se presenta en [Morales et al. \(2023\)](#), donde se introduce el concepto de *precedencia débil*. Este concepto se aplica a bloques cercanos que, aunque no son requeridos para la extracción, al ser removidos, permiten reducir el costo de extracción de un bloque al satisfacer los requisitos de anchos operativos. En lugar de tratarse como una restricción, esta reducción se modela como una penalización que refleja el costo adicional de utilizar equipos más pequeños para excavar en áreas estrechas. Se define Q_b como el conjunto de precedencias débiles del bloque b . El costo adicional se asume como un valor $c_{b,b''} > 0$, para $b'' \in Q_b$. De esta forma, se define el problema (UPIT⁺) que se formula como sigue:

$$\begin{aligned} \text{(UPIT}^+\text{)} \quad & \max_{x_b} \sum_{b \in \mathcal{B}} \left(v_b \cdot x_b - \sum_{b'' \in Q_b} c_{b,b''} y_{b,b''} \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\text{s.a.} \quad x_b \leq x_{b'}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, b' \in \mathcal{B}_b, \quad (5.2)$$

$$x_b - x_{b''} \leq y_{b,b''}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, b'' \in Q_b, \quad (5.3)$$

$$x_b \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (5.4)$$

$$y_{b,b''} \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, b'' \in Q_b. \quad (5.5)$$

A partir de este proceso, se obtendrá el pit final, el cual será denotado como P_F .

5.2. Cálculo de tiempo esperados de extracción

La dimensión temporal en la planificación minera proporciona información crucial para definir la secuencia óptima de extracción. Tradicionalmente, este atributo se incorpora después de la selección de los pushbacks. Sin embargo, en esta metodología

se propone integrar los tiempos de extracción directamente en el proceso de selección de pushbacks, permitiendo una estimación más precisa del VAN.

El problema (CPIT) aborda este paso de manera directa, aunque debido a la complejidad computacional involucrada, es posible calcular los tiempos esperados de extracción utilizando la solución del problema (R-CPIT). Alternativamente, se pueden emplear otras metodologías, como considerar problemas más complejos, por ejemplo. (PCPSP) o una versión relajada de este, o bien utilizar modelos más simples para estimar los periodos de extracción, como utilizar el número de bloques presentes en el conjunto de precedencia. En el trabajo de Bai et al. (2018), se propone una secuencia simple basada en la extracción de bloques de niveles superiores a inferiores y de este a oeste, descontando el valor del bloque según una tasa de descuento geológica. Aunque esta estrategia se aplica desde la selección de fases, puede desarrollarse una extensión para integrarla en el proceso completo.

5.3. Generación de pits intermedios

A continuación, se deben generar pits intermedios que servirán como base para el modelo de programación lineal que se definirá posteriormente. En esta sección, se describen algunas estrategias para la generación de estos pits intermedios, los cuales deben estar contenidos dentro del pit final. Estos pits se utilizarán para definir los pushbacks, que luego serán seleccionados en función de criterios técnicos con el objetivo de maximizar el VAN y, al mismo tiempo, reducir las diferencias de tonelaje (minimizando así el problema del gap), lo que permite generar planes de producción factibles. Es importante destacar que, idealmente, se deben mantener los mismos objetivos y restricciones considerados en la Sección 5.1, para asegurar la coherencia entre los pits intermedios y el pit final.

En primer lugar, introduciremos el concepto de anidamiento.

Definición 5.3.1 (Anidamiento de pits). *Se dice que una familia finita de pits $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=0}^N$ es anidada si es creciente en términos de conjuntos, es decir, para cualquier par de índices $i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$ tal que $i < j$, se tiene $P_i \subseteq P_j$.*

5.3.1. Familias de pits intermedios

Pits intermedios por revenue factor

Como se mencionó en la Sección 5.1, es posible generar pits anidados mediante la parametrización del precio del metal en la Ecuación (2.20) para la valorización de bloques. Por ejemplo, para un revenue factor λ , con $0 < \lambda \leq 1$, se resuelve el problema (UPIT $_{\lambda}$), generando así la familia de pits definida por:

$$P_i = \{b \in B : x_b^* = 1, x_b^* \text{ solución de (UPIT}_{\lambda})\}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, N. \quad (5.6)$$

donde $\lambda = \frac{i}{N}$ y donde N es el número de pits anidados a generar. Es importante destacar que el problema a resolver tiene una relación estrecha con el paso anterior, por lo que se debe utilizar el mismo problema presentado previamente. El trabajo de (Morales et al., 2023) también presenta un método para obtener pits intermedios por revenue factors bajo las mismas consideraciones mencionadas previamente.

Pits intermedios por tiempo esperado de extracción

A partir de los tiempos de extracción esperados obtenidos en el paso anterior, una familia de pits es generado como sigue:

$$P_i = \left\{ b \in \mathcal{B} : \text{ET}_b \leq \frac{i \cdot T}{N} \right\}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, N, \quad (5.7)$$

donde N es el número de pits intermedios a generar. Observe que los pits generados por esta metodología son anidados, pues para $i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$ con $i < j$, se tiene

$$\begin{aligned} P_i &= \left\{ b \in \mathcal{B} : \text{ET}_b \leq \frac{i \cdot T}{N} \right\} \\ &\subseteq \left\{ b \in \mathcal{B} : \text{ET}_b \leq \frac{i \cdot T}{N} \right\} \cup \left\{ b \in \mathcal{B} : \frac{i \cdot T}{N} < \text{ET}_b \leq \frac{j \cdot T}{N} \right\} = P_j. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Pits intermedios por profundidad

Es posible generar pits intermedios utilizando la estructura de bancos presentes en el modelo de bloques. Este método puede realizarse de dos formas:

1. *Umbral de profundidad*: Para un limite de profundidad z^* , se define el problema (UPIT $_{z^*}$) de la siguiente forma:

$$\text{(UPIT}_{z^*}\text{)} \quad \max_{x_b} \sum_{b \in \mathcal{B}(z^*)} v_b \cdot x_b \quad (5.9)$$

$$\text{s.a.} \quad x_b \leq x_{b'}, \quad \forall b \in \mathcal{B}(z^*), b' \in \mathcal{B}_b, \quad (5.10)$$

$$x_b \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}(z^*), \quad (5.11)$$

donde $\mathcal{B}(z^*)$ corresponde a los bloques cuya coordenada z es mayor que el umbral de profundidad z^* . De esta manera, los pits intermedios se definen como:

$$P_i = \{b \in B : x_b^* = 1, x_b^* \text{ solución de (UPIT}_{z^*}\text{)}\}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, N, \quad (5.12)$$

donde:

$$z^* = z_{\text{start}} - \frac{i}{N}(z_{\text{start}} - z_{\text{end}}), \quad (5.13)$$

y N es el número de pits intermedios a generar. Los pits intermedios generados de esta forma son anidados. En efecto:

Teorema 5.3.1 (Anidamiento). *Sean z_1^* y z_2^* dos profundidades, con $z_{\max} > z_1^* > z_2^* \geq z_{\min}$, donde $z_{\max}$ es la profundidad más cercana a la superficie. Sea N el tamaño de un modelo de bloques $\mathcal{B}$. Suponga que $\{x_b\}_{b \in \mathcal{B}(z_1^*)}$, $\{x'_b\}_{b \in \mathcal{B}(z_2^*)} \subseteq \{0, 1\}^N$ son soluciones óptimas de (UPIT $_{z_1^*}$) y (UPIT $_{z_2^*}$) respectivamente. Entonces, $\{\bar{x}_b\}_{b \in \mathcal{B}(z_2^*)} \subseteq \{0, 1\}^N$ definido por*

$$\bar{x}_b = \max\{x_b, x'_b\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}(z_2^*), \quad (5.14)$$

también es una solución óptima de (UPIT $_{z_2^*}$)

Demostración. Observe que $B(z_1^*) \subset B(z_2^*)$. Se definen los conjuntos A, A', X, Y, Z definidos en 2.12. Por la construcción de los submodelos de bloques, se tiene $X, Y \subseteq B(z_1^*)$ y $Z \subseteq B(z_2^*)$. Se probará que $X = \emptyset$. Supongamos por contradicción que X es no vacío. Esto implica que extraer los bloques asociados al conjunto X son rentables, es decir,

$$\sum_{b \in X} v_b > 0. \quad (5.15)$$

Si esta suma fuese cero, entonces $\{x_b\}$ no sería una solución óptima de conjunto mínimo, lo que es una contradicción. Luego, se tendría que

$$\sum_{b \in B(z_2^*)} v_b \bar{x}_b = \sum_{b \in X} v_b x_b + \sum_{b \in Y \cup Z} v_b x'_b > \sum_{b \in Y \cup Z} v_b x'_b. \quad (5.16)$$

Esto significaría $\{x'_b\}$ no es una solución óptima de conjunto mínimo para $(\text{UPIT}_{z_2^*})$, lo que contradice el supuesto inicial. Por lo tanto, se concluye que X debe ser un conjunto vacío, lo que implica que $x_b \leq x'_b$ para todo bloque $b \in \mathcal{B}(z_2^*)$. Finalmente, esto demuestra que $\{\bar{x}_b\}_{b \in \mathcal{B}(z_2^*)}$ es una solución óptima de conjunto mínimo para $(\text{UPIT}_{z_2^*})$, de lo que se concluye la anidación de las soluciones. $\square$

2. *Delimitación por bancos del pit final:* Otra forma de generar pits intermedios anidados es limitar el pit final directamente por bancos. En este caso, los pits intermedios se definen como:

$$P_i = \left\{ b \in P_F : z_b \geq z_{\text{start}} - i \cdot \left(\frac{z_{\text{end}} - z_{\text{start}}}{N} \right) \right\}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, N. \quad (5.17)$$

donde N es el número de pits anidados a generar. El anidamiento se puede verificar utilizando el mismo procedimiento que se aplica para los pits intermedios por tiempo esperado de extracción.

Es importante señalar que, en ambos casos, es posible agrupar bancos para reducir el número de pits intermedios generados, si es necesario.

5.3.2. Extensión de pits intermedios

La metodología tradicional se basa únicamente en la propuesta de Lerchs y Grossmann, obteniendo los pits intermedios mediante revenue factor. Este enfoque tiene desventajas significativas, principalmente por la presencia del problema del gap. El objetivo de la metodología presentada en este trabajo es ampliar la cantidad de pits intermedios generados, utilizando distintas familias de pits construidas bajo variados criterios. Esto permite aumentar el conjunto factible del modelo de programación lineal que se utiliza posteriormente.

Primero, es necesario introducir algunos conceptos clave. Una familia que depende de múltiples parámetros se denomina *familia de pits multi-indexada*. Para estas familias,

redefinimos el concepto de anidamiento y establecemos un orden parcial sobre los índices. Se usará la siguiente notación:

$$\prod_{k=1}^D \{0, 1, \dots, N_k\} = \{0, 1, \dots, N_1\} \times \{0, 1, \dots, N_2\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_D\} \quad (5.18)$$

Definición 5.3.2 (Orden parcial para multi-índices). *Se define el orden parcial sobre los índices $(i_1, i_2, \dots, i_D) \in \prod_{k=1}^D \{0, \dots, N_k\}$ si existe un incremento en al menos una de sus coordenadas. Es decir,*

$$(j_1, j_2, \dots, j_D) \prec (i_1, i_2, \dots, i_D) \iff \begin{cases} j_k \leq i_k, \forall k = 1, \dots, D, \\ \sum_{k=1}^D (i_k - j_k) > 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Definición 5.3.3. (*Anidamiento de familias de pits multi-indexadas*) *Se dirá que una familia de pits multi-indexada es anidada si, para todos los índices $(i_1, i_2, \dots, i_D)$ y $(j_1, j_2, \dots, j_D)$ en $\prod_{k=1}^D \{0, \dots, N_k\}$, se cumple que:*

$$(j_1, j_2, \dots, j_D) \prec (i_1, i_2, \dots, i_D) \implies P_{j_1 j_2 \dots j_D} \subseteq P_{i_1 i_2 \dots i_D}. \quad (5.20)$$

A continuación, se presentarán dos metodologías para extender los criterios:

1. Formular y resolver un problema que integre múltiples criterios simultáneamente. Como ejemplo, se mencionan algunos modelos descritos por [Jélvez et al. \(2020\)](#) basados en esta idea.
2. Generar familias de pits anidados utilizando operaciones de conjuntos entre diferentes familias de pits.

Esta metodología asume que todas las familias de pits coinciden en el pit final y que cada una de ellas es anidada. En algunos casos, será necesario realizar modificaciones a los pits generados para preservar esta suposición. En la Sección 5.3.3, se describen algunas operaciones que permiten resolver estos problemas.

Pits intermedios mediante revenue factors y limite de profundidad

Para generar nuevos pits intermedios, se considera el valor económico del bloque escalado por el revenue factor λ , con $0 < \lambda \leq 1$, y se imponen restricciones sobre

los bloques que se encuentran por debajo del umbral de profundidad z . Para esto, se resuelve el problema:

$$(\text{UPIT}_{z^*}^\lambda) \quad \max_{x_b} \sum_{b \in \mathcal{B}(z^*)} v_b^\lambda \cdot x_b \quad (5.21)$$

$$\text{s.a.} \quad x_b \leq x_{b'}, \quad \forall b \in \mathcal{B}(z^*), b' \in \mathcal{B}_b, \quad (5.22)$$

$$x_b \in \{0, 1\}, \quad \forall b \in \mathcal{B}(z^*), \quad (5.23)$$

donde $\mathcal{B}(z^*)$ corresponde a los bloques cuya coordenada z es mayor que el umbral de profundidad z^* , y v_b^λ es el valor económico del bloque b cuando el precio del metal es escalado por el revenue factor λ .

De esta manera, los pits intermedios se definen como el conjunto de bloques cuya extracción es viable según la solución óptima del problema planteado:

$$P_{i,j} = \{b \in \mathcal{B}(z^*) : x_b = 1, x_b \text{ es solución de } (\text{UPIT}_{z^*}^\lambda)\}, \quad (5.24)$$

donde:

$$\lambda = \frac{i}{N}, \quad z^* = z_{\text{sup}} - \frac{j}{M}(z_{\text{sup}} - z_{\text{inf}}), \quad (5.25)$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ y $j \in \{0, 1, \dots, M\}$. Además, N y M indicarán el número de criterios utilizados para revenue factor y profundidad, respectivamente.

Pits intermedios mediante tiempos esperados de extracción y limite de profundidad

Para generar nuevos pits intermedios, se considera un horizonte de planificación T , una tasa de descuento α , y se imponen restricciones sobre los bloques que se encuentran por debajo del umbral de profundidad z y de limites de recurso por período. Para esto, se resuelve el problema:

$$(\text{R-CPIT}_{z^*}) \quad \max_{x_{bt}} \sum_{b \in \mathcal{B}(z^*)} \sum_{t \in T} v_{bt} \cdot (x_{bt} - x_{bt-1}) \quad (5.26)$$

$$\text{s.a.} \quad x_{bt} \leq x_{b't}, \quad \forall b \in \mathcal{B}(z^*), b' \in \mathcal{B}_b, t \in T, \quad (5.27)$$

$$x_{bt-1} \leq x_{bt}, \quad \forall b \in \mathcal{B}(z^*), t \in T, \quad (5.28)$$

$$C_{rt}^- \leq \sum_{b \in \mathcal{B}(z^*)} q_{br}(x_{bt} - x_{bt-1}) \leq C_{rt}^+, \quad \forall t \in T, r \in R, \quad (5.29)$$

$$x_{bt} \in [0, 1], \quad \forall b \in \mathcal{B}(z^*), t \in T. \quad (5.30)$$

donde se siguen la definición de los parámetros del problema (R-CPIT).

El tiempo esperado de extracción para cada bloque se calcula a partir de la solución óptima del problema. Si x_{bt}^* es la solución óptima de (R-CPIT $_{z^*}$), entonces el tiempo esperado por periodo $ET_b^{z^*}$ para cada bloque $b \in \mathcal{B}$ se define como:

$$ET_b^{z^*} = \sum_{t=1}^T t \cdot (x_{bt}^* - x_{bt-1}^*) + (T+1) \cdot (1 - x_{bt}^*) \quad (5.31)$$

De esta forma, los pits intermedios se definen por:

$$P_{i,j} = \left\{ b \in \mathcal{B}(z^*) : ET_b^{z^*} \leq \frac{i \cdot T}{N} \right\}, \quad (5.32)$$

donde:

$$z^* = z_{\text{sup}} - \frac{j}{M}(z_{\text{sup}} - z_{\text{inf}}), \quad (5.33)$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ y $j \in \{0, 1, \dots, M\}$. Además, N y M indican el número de criterios utilizados para tiempos de extracción esperados y profundidad, respectivamente.

Es importante señalar que, a diferencia del método anterior, este enfoque no garantiza la generación de pits anidados. Por lo tanto, será necesario realizar ajustes adicionales, como se detalla en la Sección 5.3.3, para asegurar que los pits generados cumplan con las propiedades de anidamiento.

Intersección de familias de pits

Otra metodología que puede ser utilizada para la selección de pushbacks es considerar la intersección de distintas familias de pits anidados, obtenidos a partir de diversos criterios. Supongamos que se tienen D familias de pits anidados, representadas como:

$$\mathcal{P}_k = \{P_i^k : i = 0, 1, \dots, N_k\}, \quad \forall k = 1, \dots, D. \quad (5.34)$$

En este caso, cada familia $\mathcal{P}_k$ se compone de N_k pits.

El siguiente teorema establece que la intersección de estas familias de pits también es una nueva familia de pits anidados:

Teorema 5.3.2 (Anidamiento de intersecciones de familias de pits). Sean $\mathcal{P}_k = \{P_{i_k}^k\}_{i_k=0}^{N_k}$ familias de pits anidados, para $k = 1, 2, \dots, D$. Definimos la familia $\mathcal{P}$ como todas las posibles intersecciones entre conjuntos de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_D$:

$$\mathcal{F} = \{P_{i_1, i_2, \dots, i_D} = P_{i_1}^1 \cap P_{i_2}^2 \cap \dots \cap P_{i_D}^D : P_{i_k}^k \in \mathcal{F}_k \text{ para todo } k\} \quad (5.35)$$

Entonces, $\mathcal{P}$ es una familia de pits multi-indexada anidada.

Demostración. Dado que cada F_k es una familia de pits anidada, para cada k , y $(j_1, j_2, \dots, j_D) \prec (i_1, i_2, \dots, i_D)$ con $j_k \leq i_k$ se tiene

$$P_{j_k}^k \subseteq P_{i_k}^k, \quad \forall k = 1, \dots, D. \quad (5.36)$$

Por tanto,

$$P_{j_1, j_2, \dots, j_D} = \bigcap_{k=1}^D P_{j_k}^k \subseteq \bigcap_{k=1}^D P_{i_k}^k = P_{i_1, i_2, \dots, i_D}. \quad (5.37)$$

□

A través de esta metodología, se obtienen

$$N = \prod_{i=1}^D (N_i + 1) \text{ pits.} \quad (5.38)$$

5.3.3. Consideraciones para la extensión de familias de pits intermedios

Considere $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=0}^N$ como una familia de pits. En algunos casos, la generación de pits intermedios no satisface las suposiciones establecidas al inicio. Por ejemplo, la familia de pits intermedios puede no estar anidada, o el recubrimiento de esta no coincide con el pit final P_F . Se estudiarán algunos procedimientos para resolver estos problemas, considerando que la elección correcta de estos dependerá de la naturaleza de las familias y los criterios con los cuales fueron generadas.

Estos procedimientos se presentan para familias de pits generadas bajo un solo criterio, pero también pueden extenderse a familias de pits multi-indexadas.

Uniones progresivas

Si la familia no es anidada, se puede considerar el siguiente procedimiento para obtener una familia de pits anidada:

$$P_i^* = \bigcup_{j=0}^i P_j, \quad \forall i \in 0, 1, \dots, N. \quad (5.39)$$

Este procedimiento generará pits anidados, pues para $i, k \in \{0, 1, \dots, N\}$ tal que $i < k$, se tiene:

$$P_i^* = \bigcup_{j=0}^i P_j \subseteq \bigcup_{j=0}^i P_j \cup \bigcup_{j=i+1}^k P_j = \bigcup_{j=0}^k P_j = P_k^*. \quad (5.40)$$

Intersecciones regresivas

Similarmente al caso anterior, si la familia no es anidada, se puede considerar el siguiente procedimiento para obtener una familia de pits anidada:

$$P_i^* = \bigcap_{j=i}^N P_j, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (5.41)$$

Este procedimiento generará pits anidados, pues para $i, k \in \{0, 1, \dots, N\}$ tal que $i < k$, se tiene:

$$P_i^* = \bigcap_{j=i}^N P_j = \bigcap_{j=i}^{k-1} P_j \cap \bigcap_{j=k}^N P_j \subseteq \bigcap_{j=k}^N P_j = P_k^*, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (5.42)$$

Asegurar cobertura completa del pit final

Si algunos pits de la familia están estrictamente contenidas dentro del pit final, se puede generar una nueva familia de pits mediante la intersección de cada pit intermedio con el pit final:

$$P_i^* = P_i \cap P_F, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (5.43)$$

Esto garantiza que cada pit intermedio esté contenido dentro del pit final, asegurando así una cobertura completa.

Por otro lado, para garantizar que las familias de pits intermedios cubran completamente el pit final, se puede añadir un nuevo pit correspondiente al pit final. Es decir:

$$P_i^* = \begin{cases} P_i, & i \in \{0, 1, \dots, N\}, \\ P_F, & i = N + 1, \end{cases}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N, N + 1\}. \quad (5.44)$$

De este modo, se asegura que el pit final esté incluido en la familia de pits intermedios, garantizando una cobertura total.

5.4. Modelo de selección automática de pushbacks

Una vez que se establece la familia de pits anidados, el siguiente paso es el siguiente paso es seleccionar pushbacks o fases. Para esto, es recomendable simplificar el manejo de los índices multidimensionales de los pits anidados generados por distintas metodologías. Se convierte cada índice multidimensional en un índice unidimensional.

5.4.1. Simplificación de índices para pits intermedios

Supongamos que tenemos una familia de pits anidados por D criterios. Sea N el número de pits anidados. Para un manejo simplificado de los índices multidimensionales $(i_1, i_2, \dots, i_D)$ correspondientes a cada pit generado por la intersección de estas familias, se transforma este conjunto de índices en un único índice lineal i .

Para esto, se define la función de transformación $\Phi : \prod_{k=1}^D \{0, \dots, N_k\} \rightarrow \{0, \dots, N\}$ dada por

$$\Phi(i_1, i_2, \dots, i_D) = \sum_{d=1}^D i_d \prod_{k=1}^{d-1} (N_k + 1) \quad (5.45)$$

Por ejemplo, para $D = 3$, se tiene

$$(i_1, i_2, i_3) = i_1 + i_2(N_1 + 1) + i_3(N_1 + 1)(N_2 + 1) \quad (5.46)$$

Observe que esta función es biyectiva, por lo que existirá la función inversa $\Phi^{-1} : \{0, \dots, N\} \rightarrow \prod_{k=1}^D \{0, 1, \dots, N_k\}$. Para obtener el valor inverso en varias coordenadas, se puede proceder de la siguiente manera: dado un índice unidimensional i , se puede obtener el conjunto de índices multidimensionales $(i_1, i_2, \dots, i_D)$ realizando divisiones sucesivas y obteniendo los residuos. El procedimiento es el siguiente:

Algoritmo 1: Función Inversa de Transformación Unidimensional a Multidimensional

Requiere: $i, N_1, N_2, \dots, N_D$

Asegura : $i_1, i_2, \dots, i_D$

```

1 para  $d = 1$  a  $D$  hacer
2    $i_d \leftarrow i \bmod (N_d + 1);$ 
3    $i \leftarrow \lfloor i / (N_d + 1) \rfloor;$ 
```

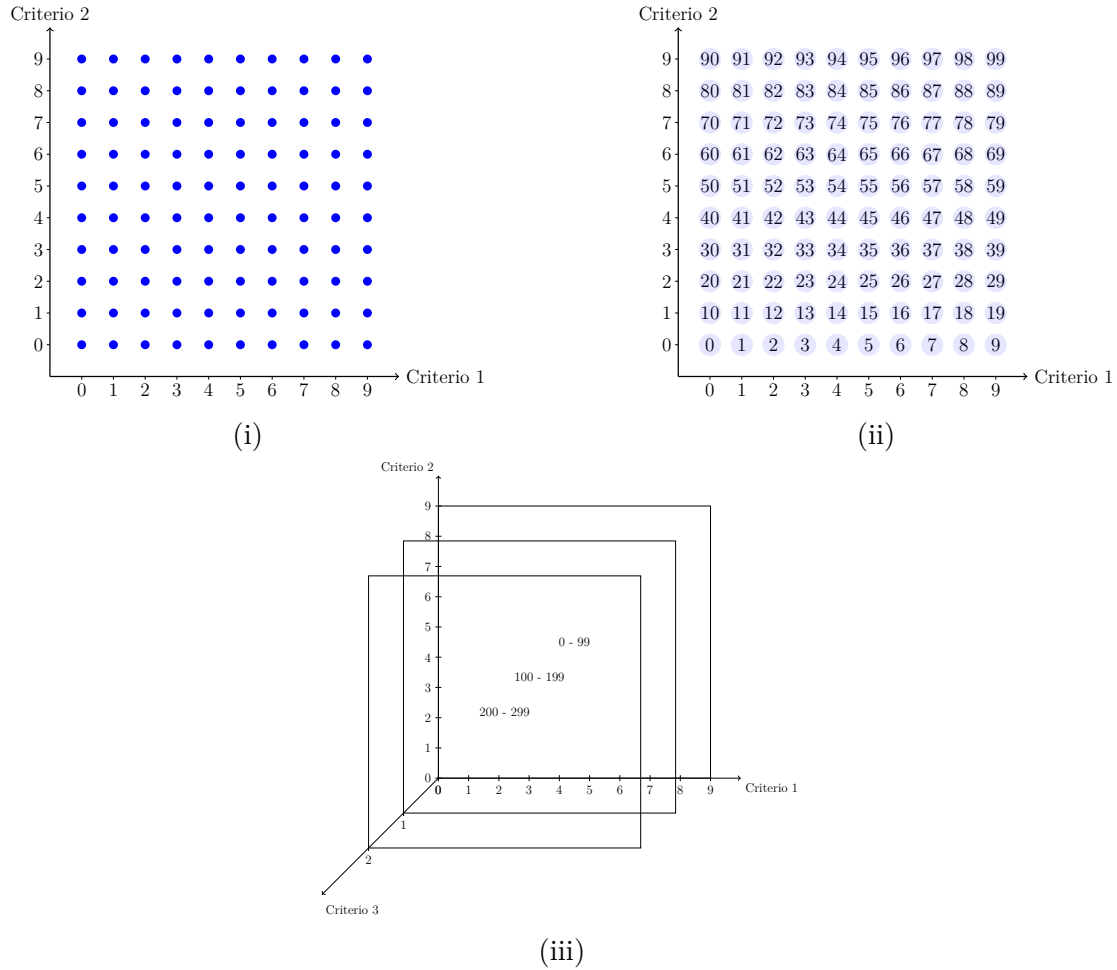


Figura 5.1: Transformación de puntos multidimensionales a valores unidimensionales. (i) Distribución de índices como puntos para dos criterios; (ii) Enumeración de índices como puntos al aplicar función de transformación; (iii) Extensión de planos de enumeración para un tercer criterio.

De esta forma, sea P_i el i -ésimo pit al convertir los índices multidimensional al índice lineal i , con $i \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Para la posterior generación de pushbacks, se requiere de un *cambio de soporte*, recopilando la información de los bloques en atributos de pits con estadísticos adecuados. De esta forma, para cada pit, se consideran los siguientes parámetros:

- VD_i : el valor descontado para el pit P_i :

$$VD_i = \sum_{b \in \mathcal{B}} v_b \cdot \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{ET_b}. \quad (5.47)$$

- $rton_i$: el tonelaje total de cada pit P_i :

$$rton_i = \sum_{b \in \mathcal{B}} rton_b. \quad (5.48)$$

- $oton_i$: el tonelaje de mineral de cada pushback P_i .

$$oton_i = \sum_{b \in \mathcal{B}} oton_b. \quad (5.49)$$

- rem_i : la razón lastre-mineral del pit P_i , la cual se obtiene como:

$$rem_i = \frac{\sum_{b \in P_i} (rton_b - oton_b)}{\sum_{b \in P_i} oton_b} \quad (5.50)$$

- ET_i : el tiempo esperado promedio de extracción del pit P_i , la cual se obtiene como un promedio ponderado entre los bloques dentro del pit:

$$ET_i = \begin{cases} \frac{\sum_{b \in P_i} ET_b \cdot rton_b}{\sum_{b \in P_i} rton_b}, & \text{si } \sum_{b \in \mathcal{B}} rton_b > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.51)$$

5.4.2. Definición de pushbacks y conjuntos

Para automatizar la selección de pushbacks, es fundamental caracterizar la familia de posibles pushbacks. Definimos el conjunto de índices factibles $\mathcal{I}$ como

$$\mathcal{I} = \{(i, j) \in \{0, 1, \dots, N\}^2 : \Phi^{-1}(j) \prec \Phi^{-1}(i)\}. \quad (5.52)$$

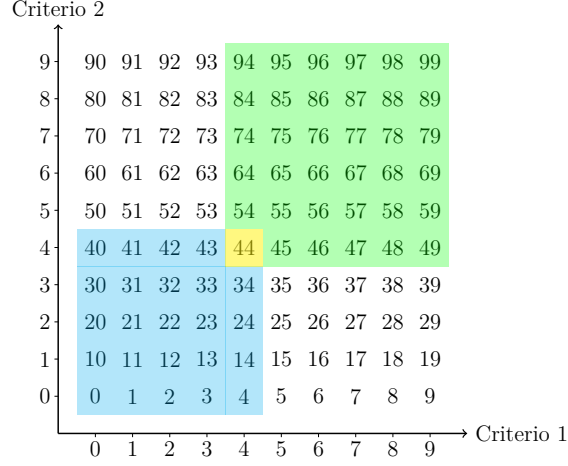


Figura 5.2: Vista de pits precedentes (en celeste) y sucesores (en verde) para el pit 44, en el caso de dos criterios.

Este término se extenderá para establecer todos los pits que definen una precedencia en términos de pits. A partir de los índices $\mathcal{I}$, podemos definir el conjunto de pushbacks factibles $\mathcal{F}$ como

$$\mathcal{F} = \{F_{ij} = P_i \setminus P_j : (i, j) \in \mathcal{I}\}. \quad (5.53)$$

Se puede obtener el número de pushbacks factibles generados por la siguiente fórmula:

$$\prod_{k=1}^D \frac{N_k(N_k + 1)}{2}. \quad (5.54)$$

En [Anexo B](#), se desarrolla el cálculo de la ecuación (5.54). Observe que la fórmula anterior es de orden $O\left(\prod_{k=1}^D N_k^2\right)$. El conjunto de predecesores (PREC) y sucesores (SUC) para cada pushback se definen como:

$$\text{PREC}_{ij} = \{F_{i_0j_0} \in \mathcal{F} : i_0 = j\}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}, \quad (5.55)$$

$$\text{SUC}_{ij} = \{F_{i_0j_0} \in \mathcal{F} : j_0 = i\}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}. \quad (5.56)$$

Para la selección automática de pushbacks, se requiere nuevamente de un cambio de soporte. En este caso, se deben generar los atributos por pushbacks a partir de la información de los pits asociados. De esta forma, para cada pushback, se consideran los siguientes parámetros:

- VD_{ij} : el valor descontado para el pushback F_{ij} , dado por:

$$VD_{ij} = VD_i - VD_j. \quad (5.57)$$

- $rton_{ij}$: el tonelaje total de cada pushback F_{ij} , dado por:

$$rton_{ij} = rton_i - rton_j. \quad (5.58)$$

- $oton_{ij}$: el tonelaje de mineral de cada pushback F_{ij} , dado por:

$$oton_{ij} = oton_i - oton_j. \quad (5.59)$$

- rem_{ij} : la razón lastre-mineral de cada pushback F_{ij} , dado por:

$$rem_{ij} = \begin{cases} \frac{rem_i \cdot rton_i + rem_j \cdot rton_j}{rton_i + rton_j}, & \text{si } rton_i + rton_j > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.60)$$

- ET_{ij} : el tiempo esperado promedio de extracción del pushback F_{ij} , la cual se obtiene como un promedio ponderado entre los pits asociados:

$$ET_{ij} = \begin{cases} \frac{ET_i \cdot rton_i + ET_j \cdot rton_j}{rton_i + rton_j}, & \text{si } rton_i + rton_j > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.61)$$

5.4.3. Variables

Las variables relacionadas a la decisión de seleccionar o no un pushback dado son:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el pushback } F_{ij} \text{ es seleccionado,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.62)$$

5.4.4. Función Objetivo

El objetivo final de la planificación minera es maximizar el VAN, lo cual se logra al optimizar la secuencia y el momento de la extracción de los bloques de mineral. Para estimar adecuadamente el valor económico a lo largo del tiempo, es necesario ajustar

la tasa de descuento por periodos a una aplicable a fases de extracción. Para esto, se obtiene la *tasa de descuento por pushbacks* resolviendo esta ecuación:

$$\left(\frac{1}{1 + \alpha_{pb}}\right)^{n_{pb}} = \left(\frac{1}{1 + \alpha}\right)^T, \quad (5.63)$$

donde α_{pb} es el número de pushbacks a seleccionar, T es el horizonte de planificación y α es la tasa de descuento por periodos. Estos dos últimas deben coincidir con los utilizados en el cálculo de tiempo esperado de extracción por bloques.

De esta forma, se considera la siguiente función objetivo para el modelo de programación lineal entera mixta:

$$\max_{x_{ij}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}} x_{ij} \left(VD_{ij} \left(\frac{1}{1 + \alpha_{pb}} \right)^{ET_{ij}} \right). \quad (5.64)$$

5.4.5. Restricciones

1. *Estructurales*: la selección de pushbacks debe ser una partición del pit final. Por tanto, se deben imponer las restricciones:

- a) *Pushbacks iniciales y finales*: la selección de pushback debe considerar un pushback inicial de la forma F_{i0} y un pushback final de la forma F_{Nj} en la partición. Luego,

$$\sum_{i=1}^N x_{i0} = 1 \quad (5.65)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} x_{Nj} = 1 \quad (5.66)$$

- b) *Relación con pushbacks predecesores*: para seleccionar el pushback F_{ij} , se debe haber seleccionado también uno y sólo uno de sus pushbacks predecesores $F_{i_0j_0} \in \text{PREC}_{ij}$.

$$x_{ij} \leq \sum_{F_{i_0j_0} \in \text{PREC}_{ij}} x_{i_0j_0} \leq 1, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \setminus \{j \neq 0\} \quad (5.67)$$

- c) *Relación con pushbacks sucesores*: para seleccionar el pushback F_{ij} , se debe haber seleccionado también uno y sólo uno de sus pushbacks sucesores

$$F_{i_0j_0} \in \text{SUC}_{ij}.$$

$$x_{ij} \leq \sum_{F_{i_0j_0} \in \text{SUC}_{ij}} x_{i_0j_0} \leq 1, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \setminus \{i \neq N\} \quad (5.68)$$

2. *Especiales*: son restricciones opcionales que afectan algunos atributos, tales como:

a) *Número predefinido de pushbacks*: este parámetro, definido previamente en el modelo como n_{pb} , se asocia con la siguiente restricción:

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{I}} x_{ij} = n_{pb}. \quad (5.69)$$

Esta restricción puede generalizarse estableciendo un intervalo para el número de pushbacks:

$$n_{pb}^- \leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}} x_{ij} \leq n_{pb}^+. \quad (5.70)$$

donde n_{pb}^- y n_{pb}^+ representan los límites inferior y superior para el número de pushbacks seleccionados. En este último caso, es recomendable utilizar el valor n_{pb}^+ en la ecuación (5.63).

b) *Tonelajes de pushbacks*: es necesario limitar la cantidad de roca y mineral para reducir el gap problem. Para esto, se consideran las siguientes restricciones:

$$\text{OT}_{ij}^- \cdot x_{ij} \leq \text{oton}_{ij} \cdot x_{ij} \leq \text{OT}_{ij}^+, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}, \quad (5.71)$$

$$\text{RT}_{ij}^- \cdot x_{ij} \leq \text{rton}_{ij} \cdot x_{ij} \leq \text{RT}_{ij}^+, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}, \quad (5.72)$$

donde OT_{ij}^- , OT_{ij}^+ corresponden a los límites inferior y superior de tonelaje de mineral, y RT_{ij}^- , RT_{ij}^+ a los límites inferior y superior de tonelaje total de cada pushback F_{ij} , respectivamente.

Determinar los límites adecuados para los máximos y mínimos de tonelaje total y mineral dependerá de la distribución geológica del yacimiento. En este caso, una estimación inicial se realizan de la siguiente manera:

1) El tonelaje total y el tonelaje de mineral del pit final se dividen en n_{pb} pushbacks.

- 2) Se consideran márgenes m_{RT} y m_{OT} para cada tonelaje, añadiendo cierta holgura a los intervalos de tonelaje total y de mineral, respectivamente. Esto se expresa como:

$$RT_{ij}^- = \frac{rton_{N0}}{n_{pb}} - m_{RT} \quad , \quad RT_{ij}^+ = \frac{rton_{N0}}{n_{pb}} + m_{RT}, \quad (5.73)$$

$$OT_{ij}^- = \frac{oton_{N0}}{n_{pb}} - m_{OT} \quad , \quad OT_{ij}^+ = \frac{oton_{N0}}{n_{pb}} + m_{OT}, \quad (5.74)$$

Además, como el último pushback debe finalizar en el pit final, no se le asigna un límite mínimo, ya que debe alcanzar el máximo extraíble del yacimiento. Esto es:

$$RT_{ij}^- = \begin{cases} \overline{RT}_{ij}^-, & \text{si } i \neq N, \\ 0, & \text{si } i = N, \end{cases} \quad (5.75)$$

- c) *Pushbacks con pérdidas*: si el pushback no genera ingresos, entonces seleccionar implicaría tener pérdidas durante un periodo, lo que no es viable económicamente. Para esto, se formula la siguiente restricción:

$$VD_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}. \quad (5.76)$$

Esta restricción puede generalizar al establecer un umbral mínimo de beneficios por fase de extracción, denotado por V_{ij}^- :

$$VD_{ij} \cdot x_{ij} \geq V_{ij}^-, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}. \quad (5.77)$$

- d) *Relación esteril-mineral*: la relación esteril-mineral puede ser limitada para obtener un retorno rápido de la inversión y tener valores positivos en los flujos de caja. Esta restricción puede formularse como:

$$REM_{ij}^- \leq rem_{ij} \cdot x_{ij} \leq REM_{ij}^+, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}, \quad (5.78)$$

donde REM_{ij}^- , REM_{ij}^+ corresponden a los límites inferior y superior de la razón lastre mineral.

3. *Simplificadoras*: estas restricciones tienen como objetivo fijar variables para reducir el espacio de búsqueda de las soluciones factibles.

- a) *Fijar pushbacks vacíos I:* si los primeros $K^- < N$ pits anidados por revenue factors corresponden a pits vacíos, entonces es posible fijar las variables de decisión asociadas a aquellos pushbacks en cero. Esto es:

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} : \lambda(i) \leq K^-, \quad (5.79)$$

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} : \lambda(j) \leq K^-, j \neq 0, \quad (5.80)$$

donde la función λ es la proyección de Φ^{-1} en la coordenada que representa el criterio de revenue factor.

- b) *Fijar pushbacks vacíos II:* De manera similar, si a partir del pit $K^+ < N$ en adelante se coincide con el pit final, es posible fijar en cero las variables de decisión asociadas a esos pushbacks. Esto se expresa como:

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} : \lambda(i) \geq K^+, i \neq 0, \quad (5.81)$$

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} : \lambda(j) \geq K^+, \quad (5.82)$$

donde la función λ es la proyección de Φ^{-1} en la coordenada que representa el criterio de revenue factor.

Estas restricciones pueden aplicarse a cada una de las familias de pits consideradas; sin embargo, generalmente solo es necesario formularlas sobre la familia de pits generada por el revenue factor.

5.4.6. Ejemplo de modelo de programación lineal

A continuación, se presenta un modelo de programación lineal basado en las secciones anteriores. Este ejemplo se utilizará más adelante para implementar la metodología

propuesta.

$$(PS) \quad \max_{x_{ij}} \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}} x_{ij} \left(VD_{ij} \left(\frac{1}{1 + \alpha_{pb}} \right)^{ET_{ij}} \right) \quad (5.83)$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^N x_{i0} = 1, \quad (5.84)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} x_{Nj} = 1, \quad (5.85)$$

$$x_{ij} \leq \sum_{F_{i_0j_0} \in \text{PREC}_{ij}} x_{i_0j_0} \leq 1, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \setminus \{j \neq 0\}, \quad (5.86)$$

$$x_{ij} \leq \sum_{F_{i_0j_0} \in \text{SUC}_{ij}} x_{i_0j_0} \leq 1, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \setminus \{i \neq N\}, \quad (5.87)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{I}} x_{ij} = 5, \quad (5.88)$$

$$OT_{ij}^- \cdot x_{ij} \leq \text{oton}_{ij} \cdot x_{ij} \leq OT_{ij}^+, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}, \quad (5.89)$$

$$RT_{ij}^- \cdot x_{ij} \leq \text{rton}_{ij} \cdot x_{ij} \leq RT_{ij}^+, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}, \quad (5.90)$$

$$VD_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}, \quad (5.91)$$

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} : \lambda(i) \leq K^-, \quad (5.92)$$

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} : \lambda(j) \leq K^-, j \neq 0, \quad (5.93)$$

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} : \lambda(i) \geq K^+, i \neq 0, \quad (5.94)$$

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} : \lambda(j) \geq K^+, \quad (5.95)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in \mathcal{I}. \quad (5.96)$$

Los parámetros OT^- , OT^+ , RT^- y RT^+ se asignarán en etapas posteriores durante la implementación, pues dependerá de cada caso de estudio. Sin embargo, se aplicará el método presentado en (5.75) para evitar imponer restricciones de capacidad mínimas al último pushback seleccionado.

Capítulo 6

Implementación y resultados

Se utiliza la biblioteca Minelink 3.0 desarrollada en el Laboratorio Delphos de la Universidad de Chile, la cual implementa estructuras de datos para almacenar el modelo de bloques, los arcos de precedencia y luego generar pits anidados. La biblioteca está escrita en C++, pero también existe un wrapper para usarla desde Python 3.7.8. El modelo se implementa dentro de la biblioteca Pyomo 6.6.2. Se utiliza GUROBI como solver, versión 9.1.2 para la programación lineal entera mixta. La ejecución del código se realizó en una máquina con procesador Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2680 v3 @ 2.50GHz y 64 GB de RAM, ejecutando Linux versión 4.15.0-213-generic. La visualización se realiza mediante Minelink.

6.1. Casos de Estudio

Para la aplicación de la metodología propuesta, se utilizarán dos casos de estudio. Los datos (a excepción del tercer caso de estudio) fueron obtenidos de Minelib ([Espinoza et al., 2013](#)), una librería pública de bases de datos de minería a cielo abierto, cuyos datasets están disponibles en su [página web](#).

1. *Depósito de cobre de Arizona* (abreviado KD), compuesto de 14.153 bloques. La ley del cobre se expresa en porcentaje (%).
2. *Depósito de oro McLaughlin* (abreviado MCL), compuesto de 112.687 bloques. El modelo de bloques extendido contiene 2.140.342, pero para efectos del modelamiento se utilizará una versión reducida que incluye solo el pit final. La ley del oro se expresa en onzas por tonelada (oz/ton).

3. *Déposito de pórfido de cobre BMT*. Debido a consideraciones de confidencialidad no se pueden proporcionar más detalles. El modelo de bloques contiene cerca de 400.000 bloques. La ley del cobre se expresa en porcentaje (%).

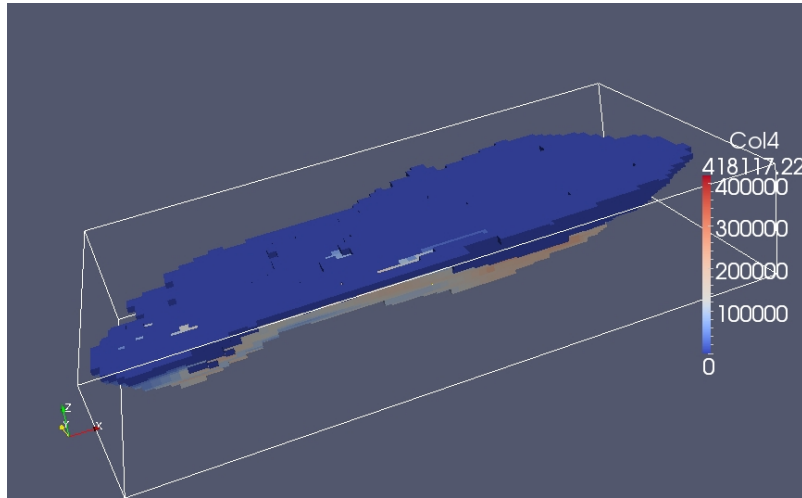


Figura 6.1: Visualización del modelo de bloques KD. Fuente: [Espinoza et al. \(2013\)](#).

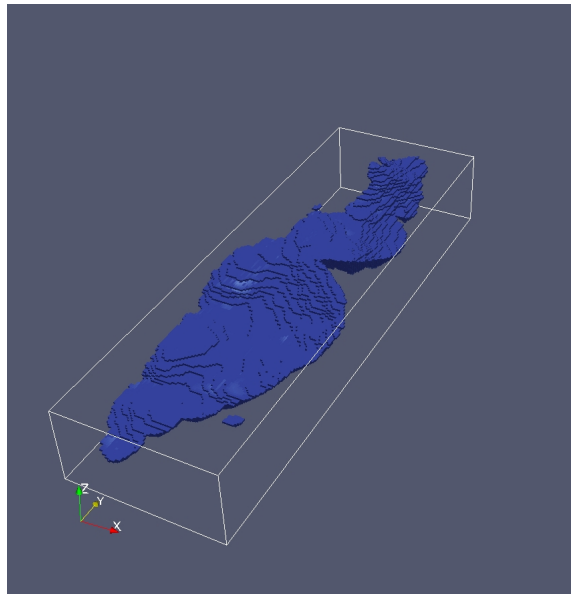


Figura 6.2: Visualización del modelo de bloques MCL. Fuente: [Espinoza et al. \(2013\)](#).

Los modelos de bloques incluyen atributos como tonelaje de roca y mineral, y leyes de mineral. En todos los casos, las restricciones geotécnicas, tales como las pendientes de las paredes del pit, se establecen con un ángulo total de 45° y 7 bancos de altura (cono de precedencia).

La Tabla 6.1 muestra los parámetros económicos y técnicos utilizados para la evaluación económica de cada uno de los modelos de bloques en la Ecuación (2.4).

Parámetro	Mina KD	Mina MCL	Mina BMT
Precio del Metal (P)	2.4 (\$/lb)	1100 (\$/oz)	2.5 (\$/lb)
Costo de Venta (C_v)	0.6 (\$/lb)	100 (\$/oz)	0.4 (\$/lb)
Costo de Mina (C_m)	4.0 (\$/ton)	1.5 (\$/ton)	3.2 (\$/ton)
Costo de Procesamiento (C_p)	9.0 (\$/ton)	8.2 (\$/ton)	9.0 (\$/ton)
Recuperación Metalúrgica (R)	90 %	76 %	90 %
Factor de Conversión (f)	22.0462 ($\frac{\text{ton}}{(\% \cdot \text{lb})}$)	-	22.0462 ($\frac{\text{ton}}{(\% \cdot \text{lb})}$)

Tabla 6.1: Parámetros técnicos y económicos para la evaluación económica de los modelos.

6.2. Delimitación del pit final

Para delimitar el pit final de los modelos de bloques, se resuelve el problema (UPIT) utilizando el algoritmo de pseudo-flow. La Tabla 6.2 muestra resultados del número de bloques presentes en el pit final, junto con el tiempo de cómputo para resolver el problema. Las Figuras 6.3, 6.4 y 6.5 presentan la delimitación del pit final sobre los modelos KD, MCL y BMT, respectivamente.

Modelo de Bloques	# bloques en pit final	Tiempo de cómputo
KD	11,266	54ms
MCL	112,687	1s, 369ms
BMT	116,253	1s, 691ms

Tabla 6.2: Resultados de la delimitación del pit final, desglosado por modelo de bloques.

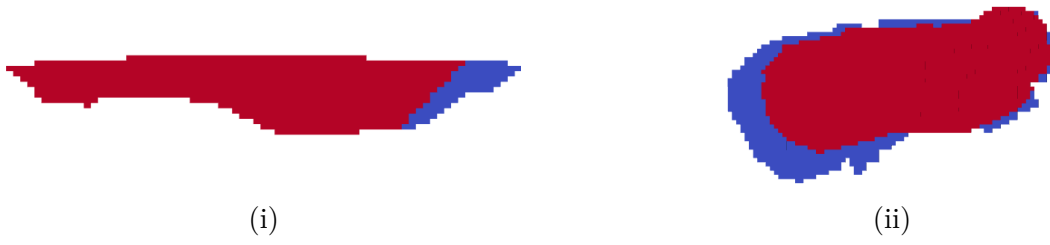


Figura 6.3: Vista del pit final en el modelo de bloques KD. (i) Vista en sección $Y = 880$; (ii) Vista aérea.

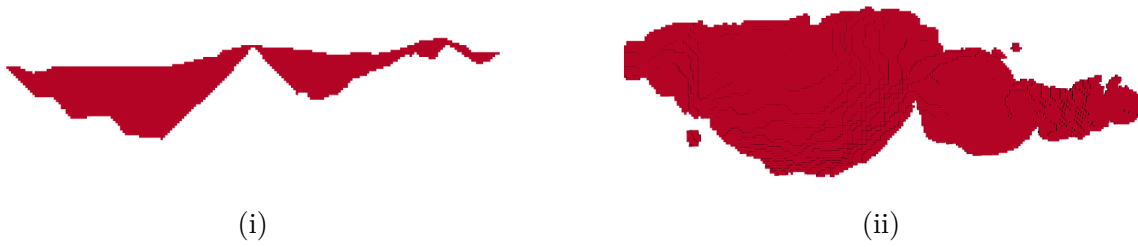


Figura 6.4: Vista del pit final en el modelo de bloques MCL. (i) Vista en sección $X = 40$; (ii) Vista aérea.



Figura 6.5: Vista del pit final en el modelo de bloques BMT. (i) Vista en sección $X = 10735$; (ii) Vista aérea.

6.3. Cálculo de tiempos de extracción esperados

Para estimar los tiempos de extracción, se resuelve el problema (R-CPIT) utilizando el algoritmo BZ implementado en MineLink. Luego, se calcula el tiempo esperado de extracción mediante la Ecuación (2.46). En la Tabla 6.3 se presentan los parámetros empleados para ambos modelos de bloques. En la Tabla 6.4 se presentan los tiempos de cómputo para resolver este problema para cada modelo de bloques.

Parámetro	KD	MCL	BMT
Horizonte de planificación (T) [años]	12	12	12
Tasa de descuento (α)	10 %	10 %	10 %
Capacidad de extracción (mín / máx) ($C_{\min,t}^-, C_{\min,t}^+$) [MTon]	0.0 / 20.0	0.0 / 20.0	0.0 / 25.0
Capacidad de procesamiento (mín / máx) ($C_{\text{proc},t}^-, C_{\text{proc},t}^+$) [MTon]	0.0 / 10.0	0.0 / 10.0	0.0 / 17.5

Tabla 6.3: Parámetros técnicos para el cálculo de tiempos de extracción esperados por bloque.

Modelo de Bloques	Tiempo de cómputo
KD	33s, 957ms
MCL	6min, 15s, 980ms
BMT	13min, 59 s, 447ms

Tabla 6.4: Tiempo de cómputo para obtener los tiempos esperados de extracción.

6.4. Generación de pits intermedios

Para ambos modelos, se generan pits intermedios utilizando el factor de revenue, el tiempo esperado de extracción, y limitando la profundidad del pit final. Luego, se extiende el análisis combinando las familias de pits obtenidas mediante la intersección de estos.

Pits intermedios por revenue factor

Para cada modelo de bloques, se generan 50 pits intermedios aplicando la metodología LG, detallada en la sección 5.3.1. La Figura 6.9 presenta la curva de tonelaje por pit para ambos modelos, mientras que las Figuras 6.6, 6.7 y 6.8 muestran la visualización de los pits anidados sobre los modelos de bloques KD, MCL y BMT, respectivamente.

Modelo de Bloques	Tiempo de cómputo
KD	0, 969ms
MCL	41s, 959ms
BMT	39s, 774ms

Tabla 6.5: Tiempo de cómputo para obtener los tiempos esperados de extracción.

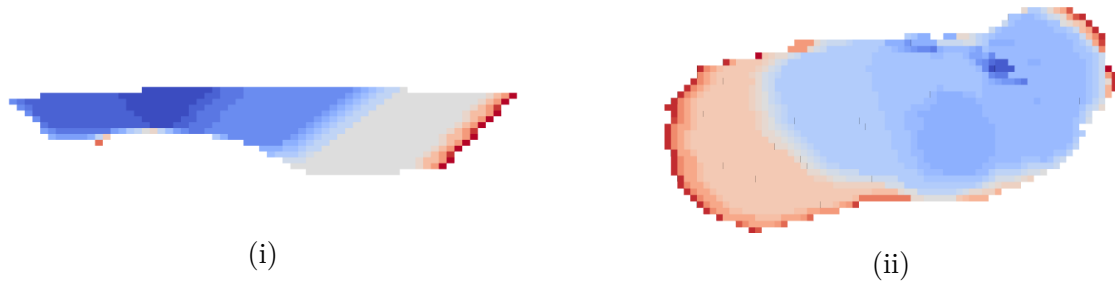


Figura 6.6: Vista de los pits anidados por revenue factor en el modelo de bloques KD. (i) Vista en sección $Y = 880$; (ii) Vista aérea.

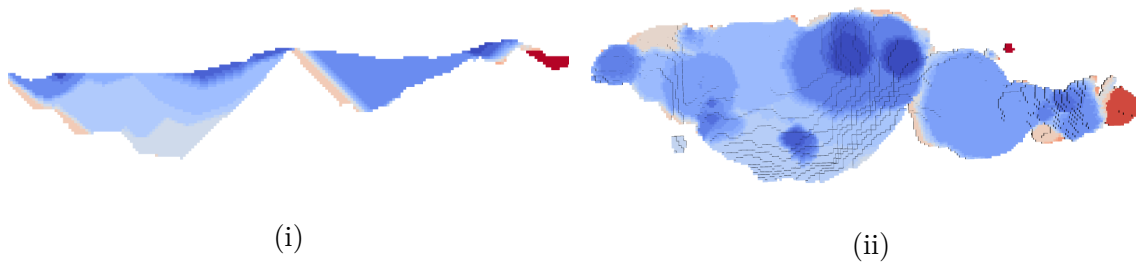


Figura 6.7: Vista de los pits anidados por revenue factor en el modelo de bloques MCL. (i) Vista en sección $X = 40$; (ii) Vista aérea.

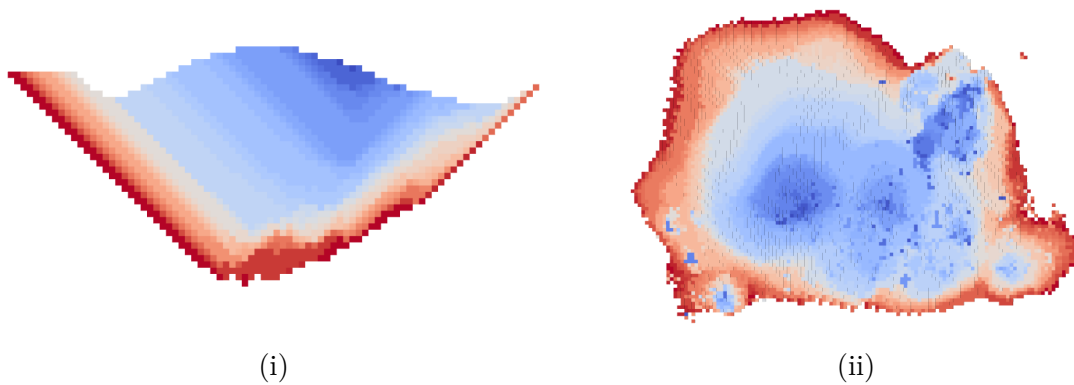


Figura 6.8: Vista de los pits anidados por revenue factor en el modelo de bloques BMT. (i) Vista en sección $X = 10735$; (ii) Vista aérea.

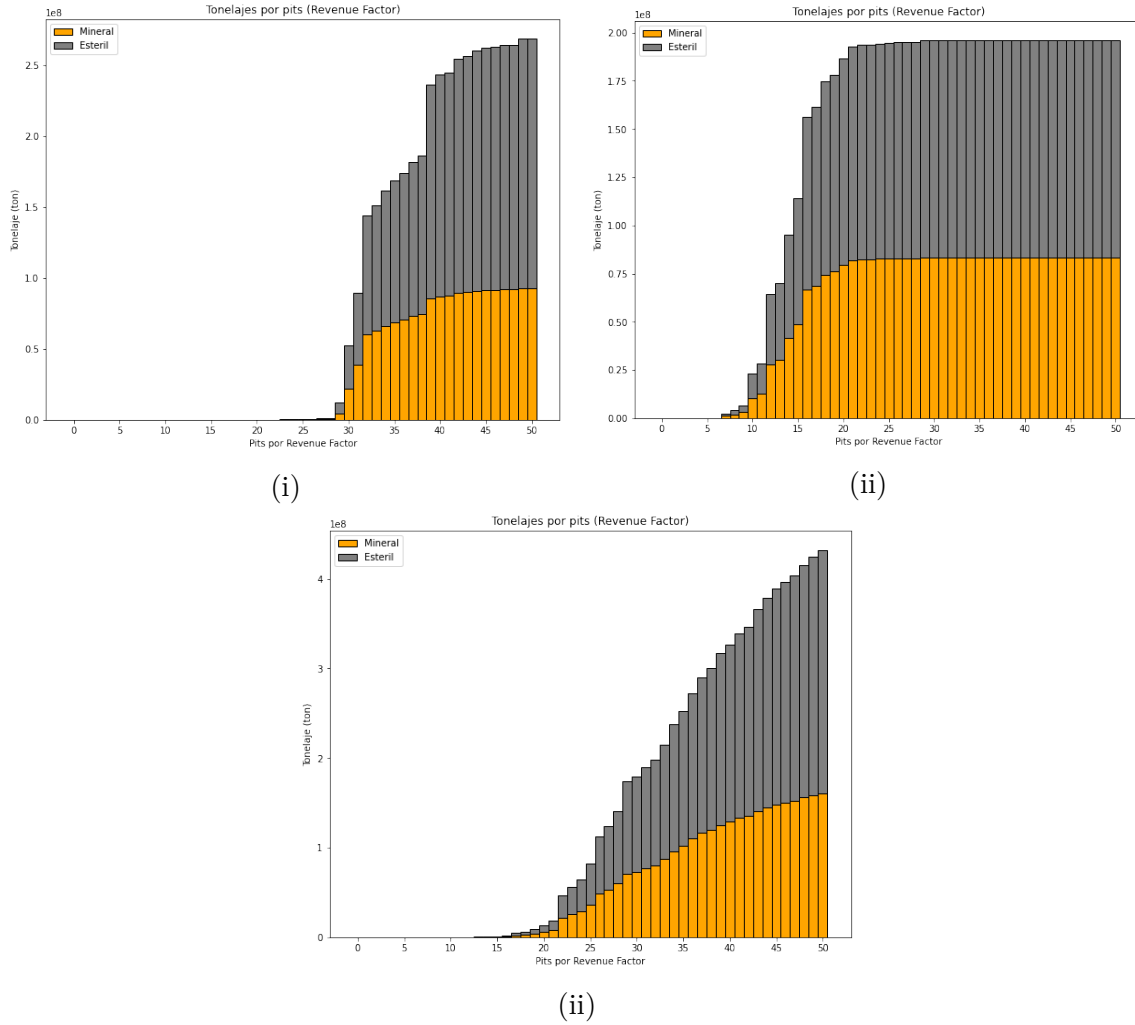


Figura 6.9: Distribución de tonelajes de pits generados por el criterio de revenue factors. (i) Modelo KD; (ii) Modelo MCL; (iii) Modelo BMT.

Pits intermedios por tiempo esperado

Para cada modelo de bloques, se considera el atributo obtenido en la Sección 6.3. De esta forma se generan 12 pits intermedios a través de la metodología detallada en la Sección 5.3.1. La Figura 6.13 presenta la curva de tonelaje por pit para ambos modelos, mientras que las Figuras 6.10, 6.11 y 6.12 muestran la visualización de los pits anidados sobre los modelos de bloques KD, MCL y BMT respectivamente.

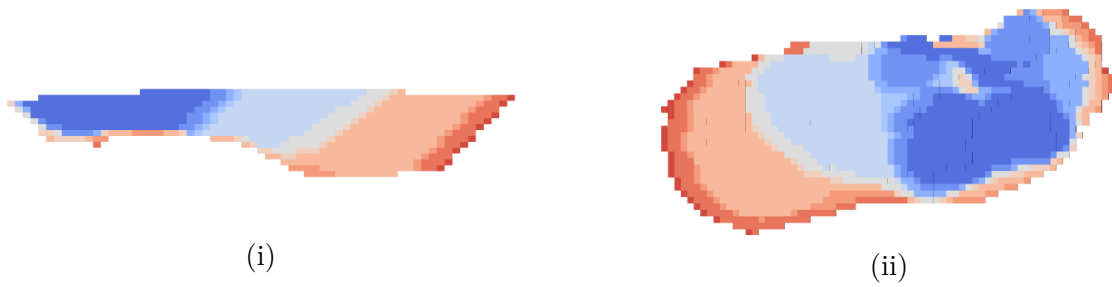


Figura 6.10: Vista de los pits anidados por tiempo esperado en el modelo de bloques KD. (i) Vista en sección $Y = 880$; (ii) Vista aérea.

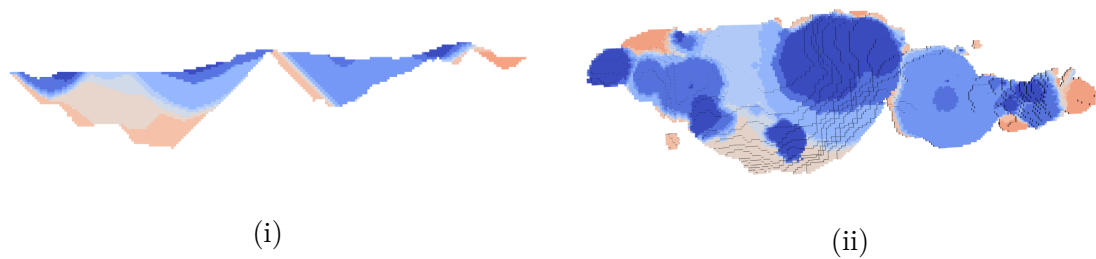


Figura 6.11: Vista de los pits anidados por tiempo esperado en el modelo de bloques MCL. (i) Vista en sección $X = 40$; (ii) Vista aérea.

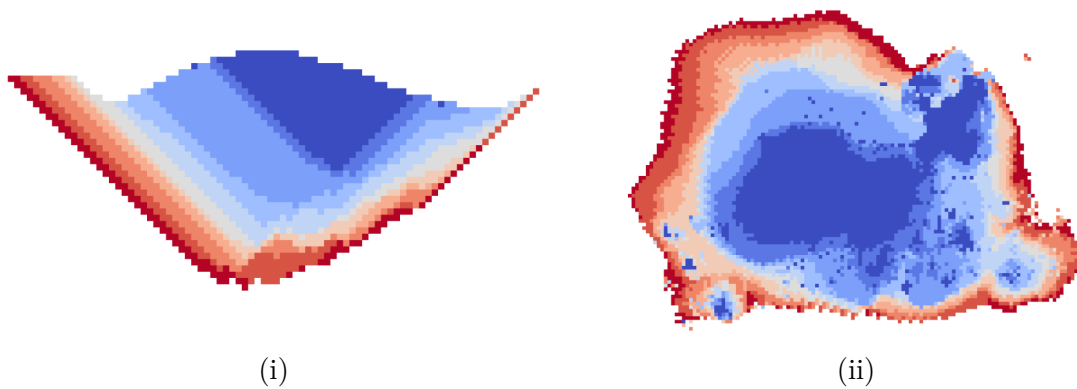


Figura 6.12: Vista de los pits anidados por tiempo esperado en el modelo de bloques BMT. (i) Vista en sección $X = 10735$; (ii) Vista aérea.

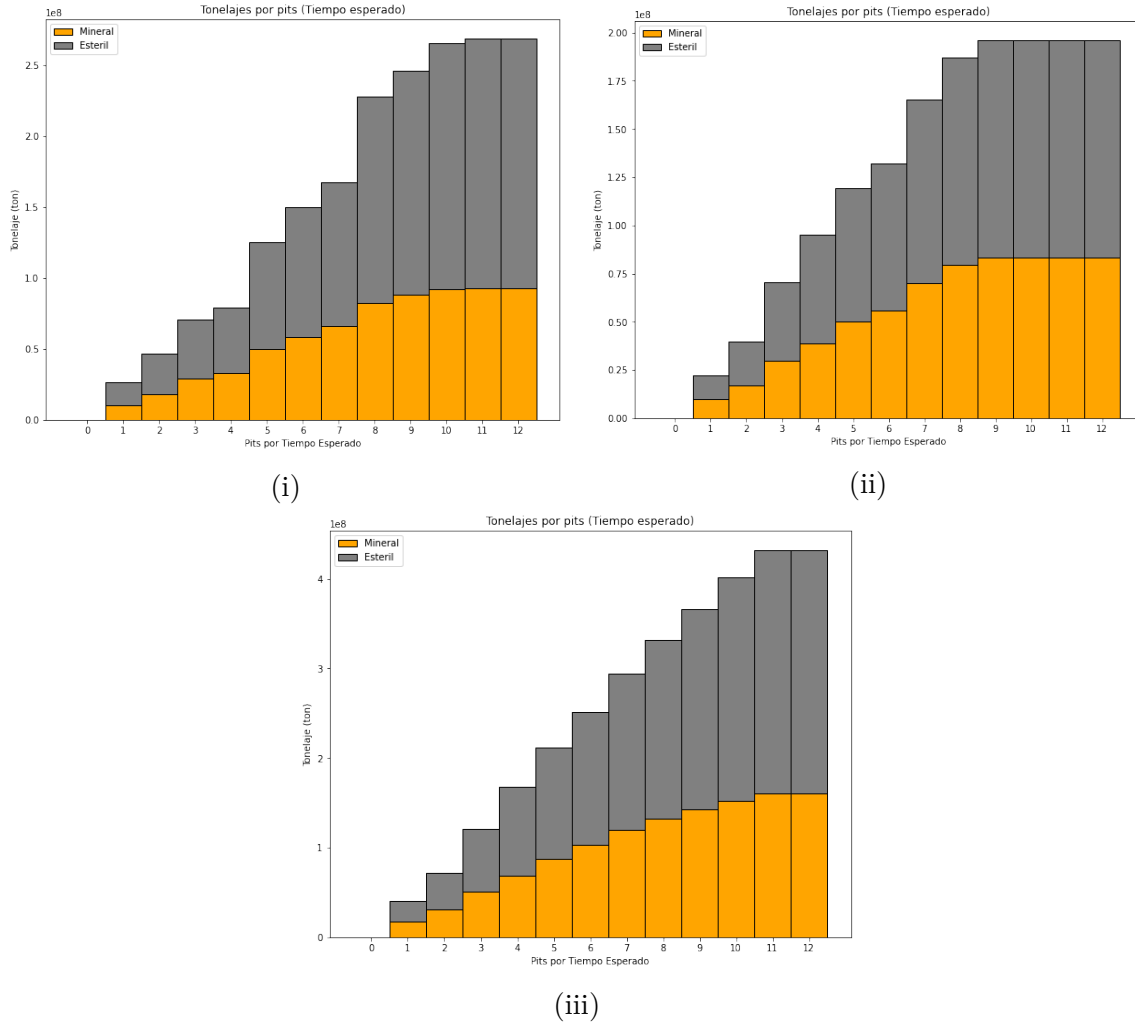


Figura 6.13: Distribución de tonelajes de pits generados por el criterio de tiempo esperado. (i) Modelo KD; (ii) Modelo MCL; (iii) Modelo BMT.

Pits intermedios por profundidad

Para cada modelo de bloques, se generan pits intermedios utilizando la metodología descrita en la Sección 5.3.1, aplicando la segunda propuesta que limita el pit final directamente por grupos de bancos. En el modelo KD, se generan 19 pits intermedios, correspondientes a cada banco presente en el modelo. Para el modelo MCL, se generan 15 pits intermedios, agrupando los bancos en conjuntos de tres. Para el modelo BMT, se generan 16 pits intermedios, agrupando los bancos en conjuntos de tres y añadiendo

un banco vacío sobre el modelo de bloques, para obtener una división entera. La Figura 6.17 presenta la curva de tonelaje por pit para ambos modelos, mientras que las Figuras 6.14, 6.15 y 6.16 muestran la visualización de los pits anidados sobre los modelos de bloques KD, MCL y BMT, respectivamente.

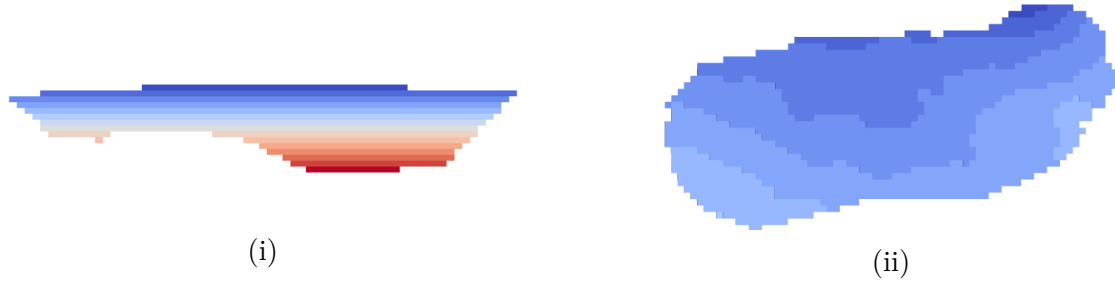


Figura 6.14: Vista de los pits anidados por tiempo esperado en el modelo de bloques KD. (i) Vista en sección $Y = 880$; (ii) Vista aérea.

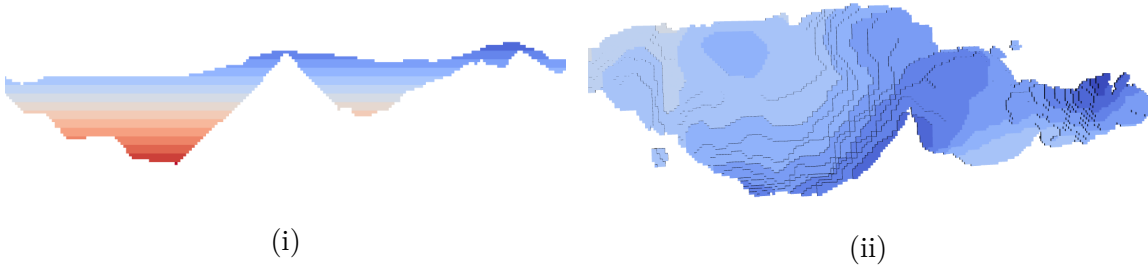


Figura 6.15: Vista de los pits anidados por profundidad en el modelo de bloques MCL. (i) Vista en sección $X = 40$; (ii) Vista aérea.

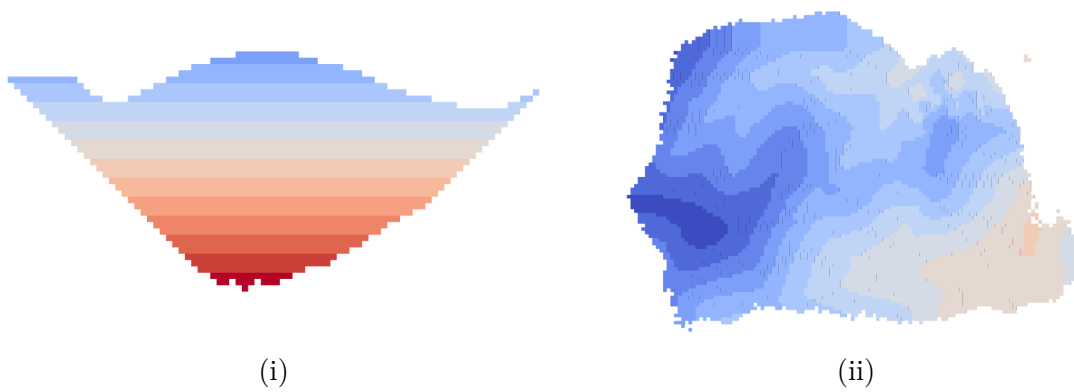


Figura 6.16: Vista de los pits anidados por profundidad en el modelo de bloques BMT. (i) Vista en sección $X = 10735$; (ii) Vista aérea.

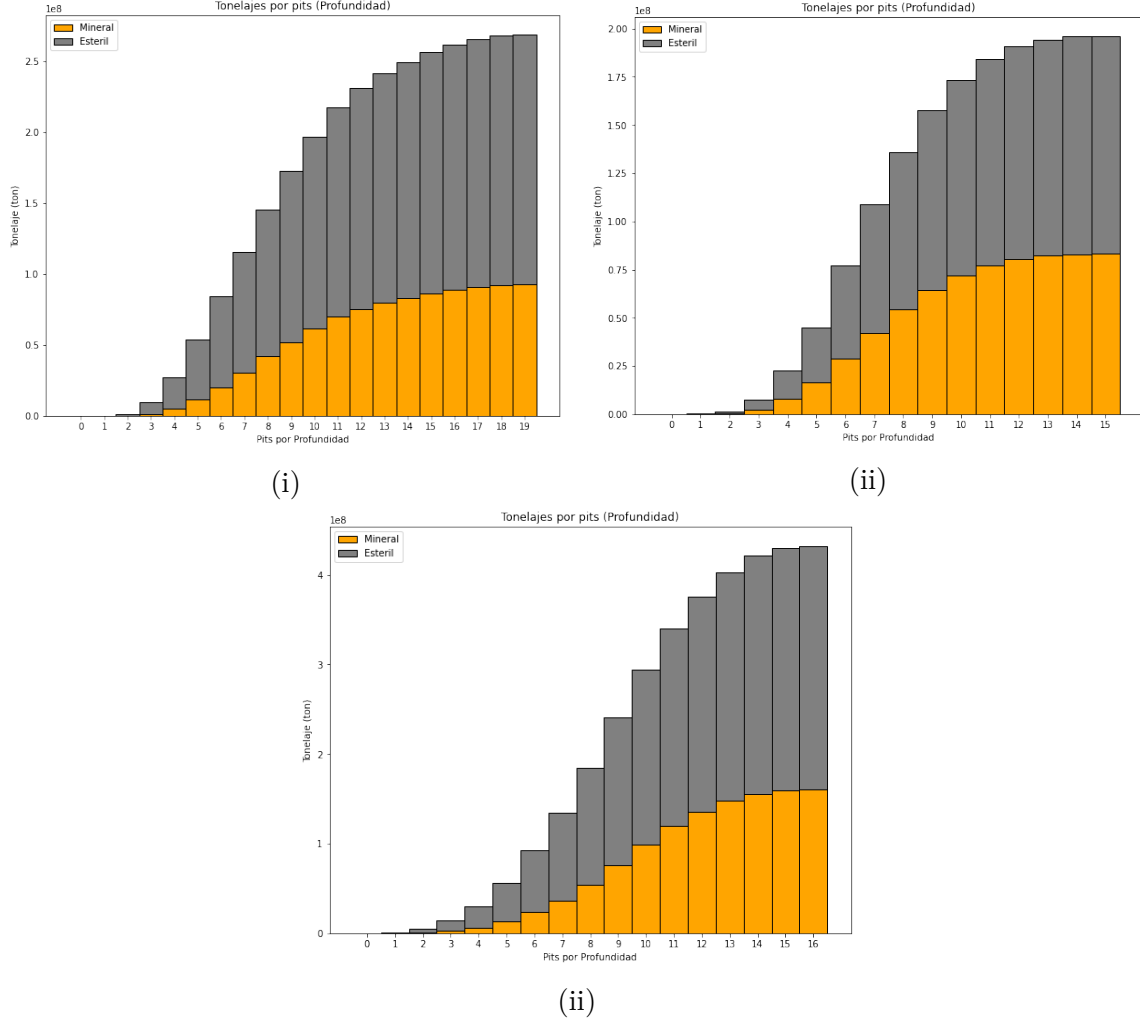


Figura 6.17: Distribución de tonelajes de pits generados por el criterio de profundidad. (i) Modelo KD; (ii) Modelo MCL; (iii) Modelo BMT.

Intersección de familias de pits anidados

Para la implementación, se sigue el método presentado en la Sección 5.3.2: consideramos una familia de pits multi-indexada, generada por las intersecciones de los pits de la siguiente manera:

$$P_{i_1, i_2, i_3} = P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap P_{i_3}, \quad (6.1)$$

donde:

- P_{i_1} : conjunto de pits obtenidos por la metodología tradicional de Lerchs-Grossmann, considerando revenue factor.
- P_{i_2} : conjunto de pits obtenidos por la metodología de tiempo extracción esperado.
- P_{i_3} : conjunto de pits obtenidos por la metodología de límites de profundidad.

La Tabla 6.6 muestra la cantidad de pits intermedios obtenidos en esta sección de la metodología.

Número de pits	KD	MCL	BMT
Revenue Factor	50	50	50
Tiempo Esperado	12	12	12
Profundidad	19	15	16
Intersección	13.260	10.608	11.271

Tabla 6.6: Número de pits anidados por cada método y modelo de bloques.

Esta metodología aumenta significativamente el número de pits en comparación con la metodología LG, ampliando el conjunto factible del modelo de selección de pushbacks. Esto puede conducir a una solución con una menor variabilidad en los tonelajes entre pushbacks consecutivos y a un mayor VAN durante la selección de pushbacks. La Tabla 6.7 presenta los tiempos de cálculo obtenidos para intersectar entre las familias de pits generadas previamente. Las Figuras 6.18, 6.19 y 6.20 muestran ejemplos de pits obtenidos mediante este método. Las Figuras 6.22, 6.21 y 6.23 muestran la curva de tonelajes en 2D al considerar dos criterios, manteniendo otro fijo.

Modelo de Bloques	Tiempo de cómputo
KD	5min, 17s, 134ms
MCL	25min, 56s, 754ms
BMT	32min, 25s, 767ms

Tabla 6.7: Tiempo de cómputo para la generación de pits intermedios mediante la intersección de familias de pits.

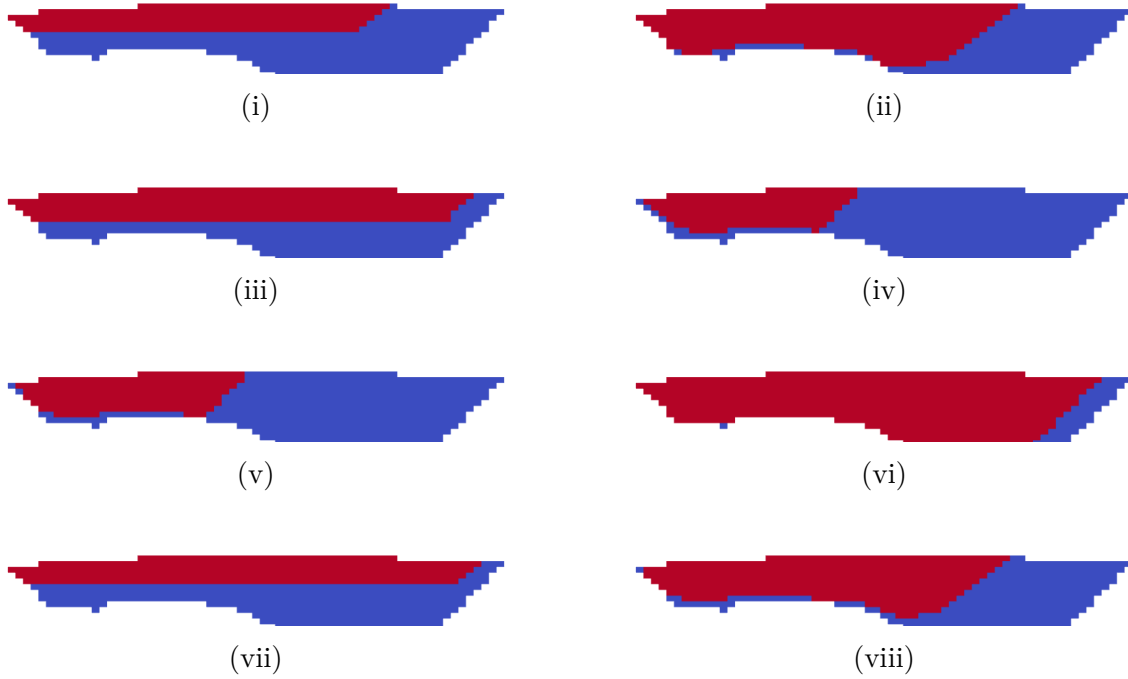


Figura 6.18: Vista del modelo KD en $Y = 880$ de distintos pits de la familia anidados generada por la intersección de familias, sobre el pit final. (i) $RF = 0.8$, $ET = 7$, Profundidad = 665; (ii) $RF = 0.8$, $ET = 7$, Profundidad = 545; (iii) $RF = 0.85$, $ET = 9$, Profundidad = 650; (iv) $RF = 0.85$, $ET = 3$, Profundidad = 500; (v) $RF = 0.9$, $ET = 4$, Profundidad = 620; (vi) $RF = 0.9$, $ET = 9$, Profundidad = 500; (vii) $RF = 0.8$, $ET = 11$, Profundidad = 665; (viii) $RF = 0.85$, $ET = 6$, Profundidad = 500.

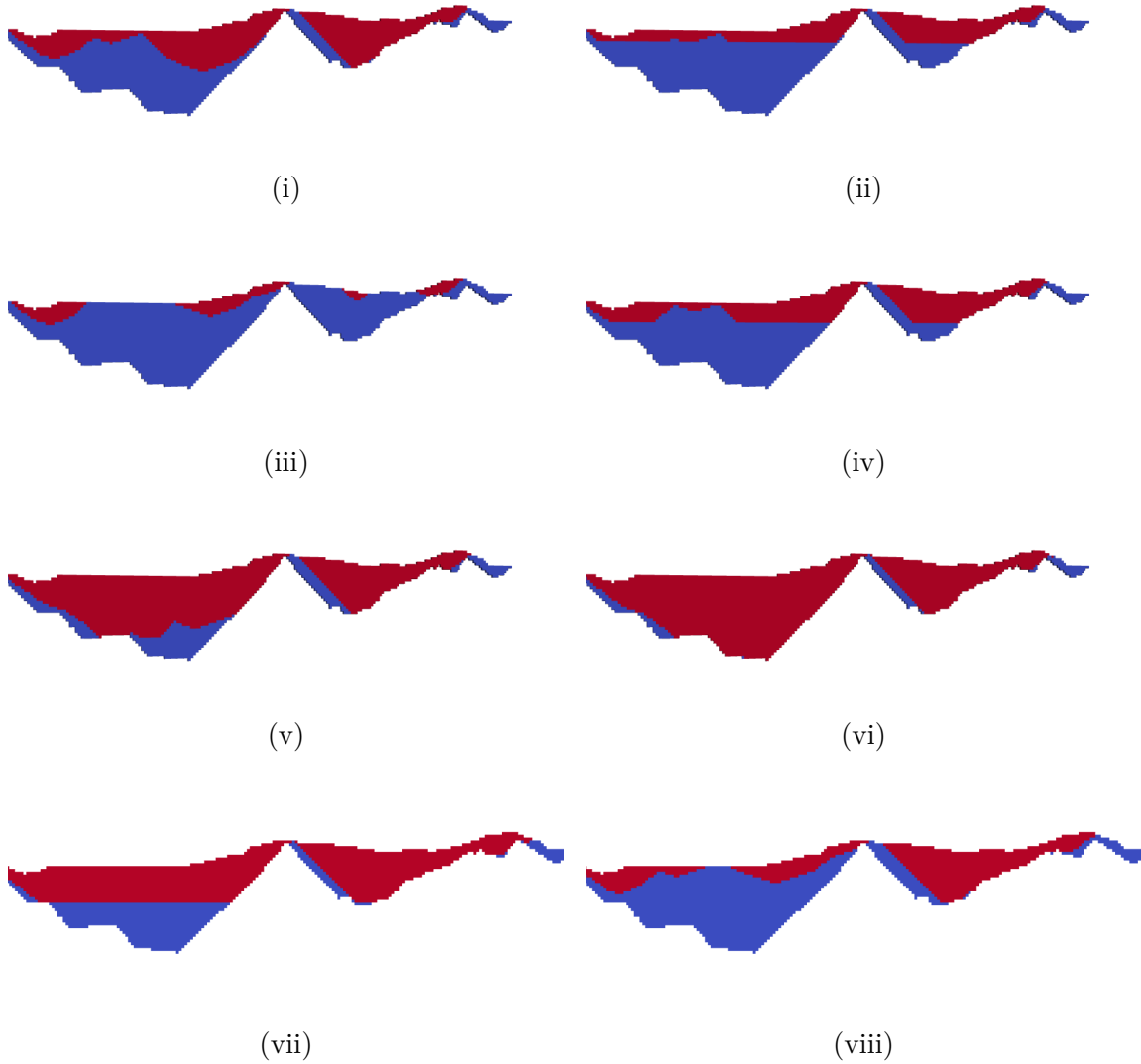


Figura 6.19: Vista del modelo MCL en $X = 40$ de distintos pits de la familia anidados generada por la intersección de familias, sobre el pit final. (i) $RF = 0.3$, $ET = 7$, Profundidad = 12; (ii) $RF = 0.3$, $ET = 7$, Profundidad = 18; (iii) $RF = 0.34$, $ET = 2$, Profundidad = 9; (iv) $RF = 0.34$, $ET = 5$, Profundidad = 24; (v) $RF = 0.34$, $ET = 10$, Profundidad = 9; (vi) $RF = 0.38$, $ET = 12$, Profundidad = 0; (vii) $RF = 0.40$, $ET = 9$, Profundidad = 18; (viii) $RF = 0.28$, $ET = 9$, Profundidad = 18.

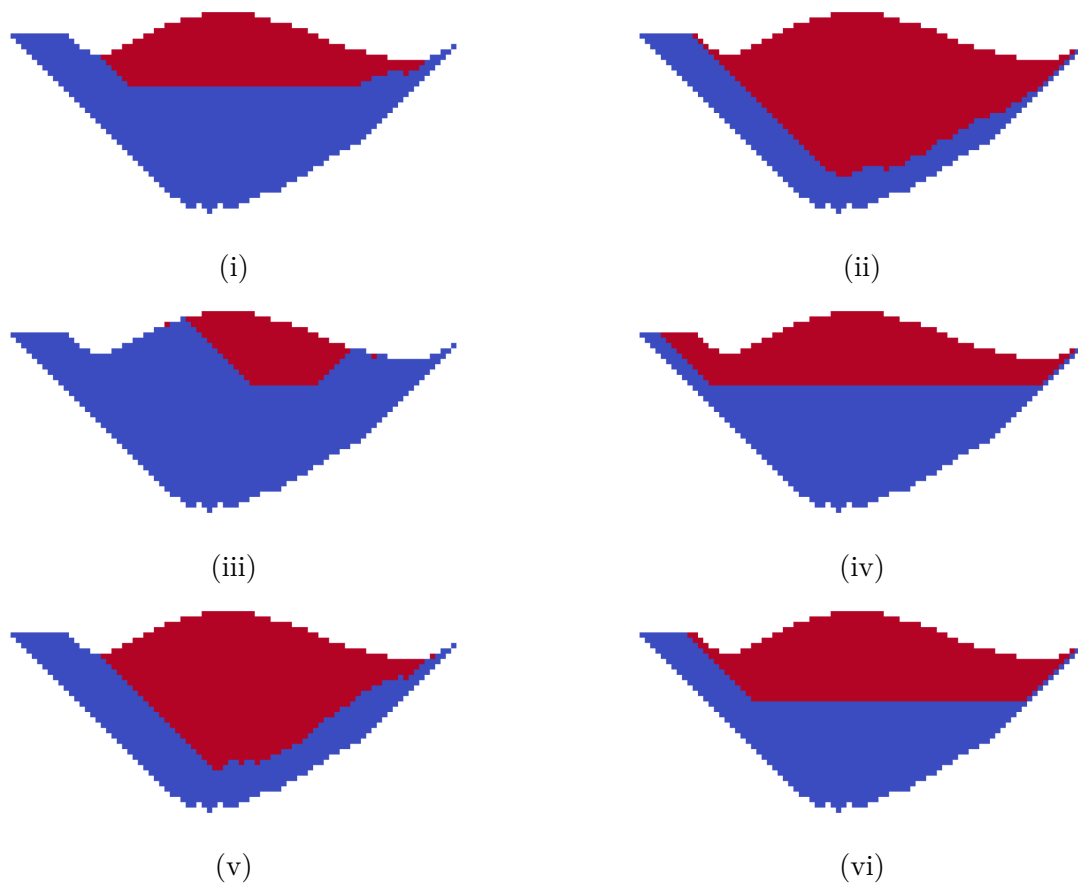
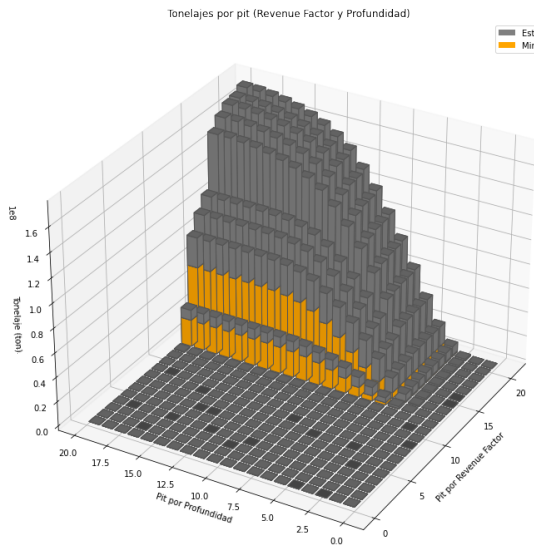
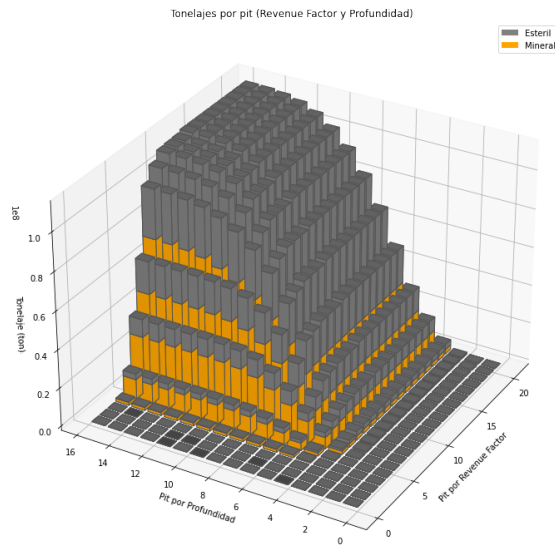


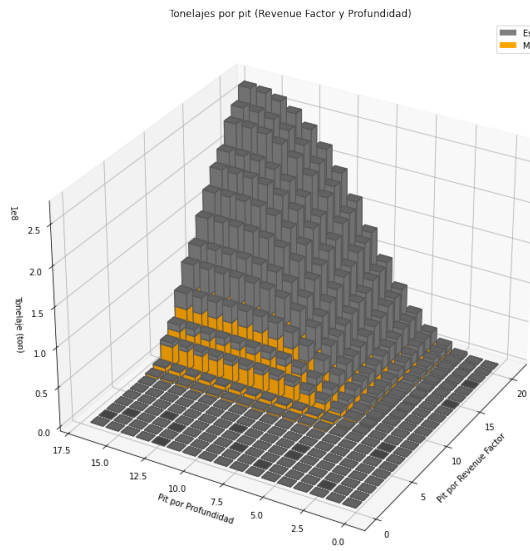
Figura 6.20: Vista del modelo BMT en $X = 10735$ de distintos pits de la familia anidados generada por la intersección de familias, sobre el pit final. (i) $RF = 0.58$, $ET = 6$, Profundidad = 2045; (ii) $RF = 0.88$, $ET = 6$, Profundidad = 1865; (iii) $RF = 0.84$, $ET = 1$, Profundidad = 2045; (iv) $RF = 0.84$, $ET = 12$, Profundidad = 2045; (v) $RF = 0.64$, $ET = 12$, Profundidad = 1805; (vi) $RF = 0.98$, $ET = 7$, Profundidad = 2015.



(i)

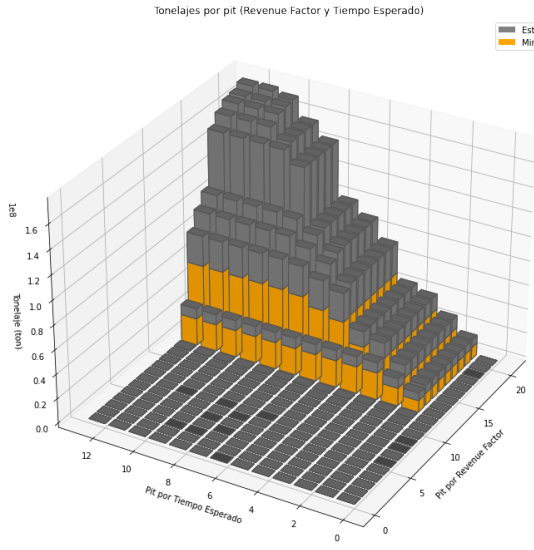


(ii)

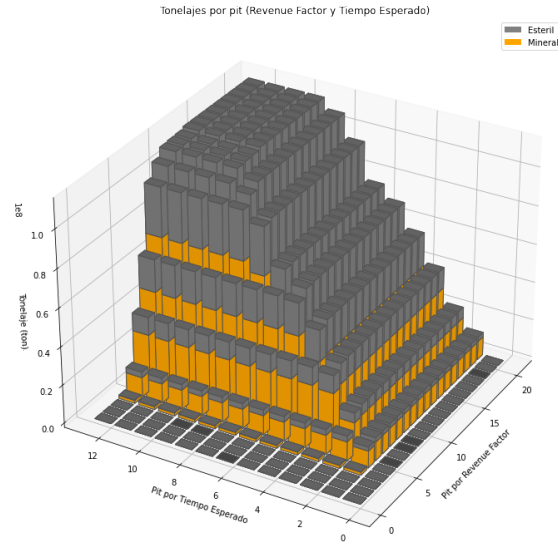


(iii)

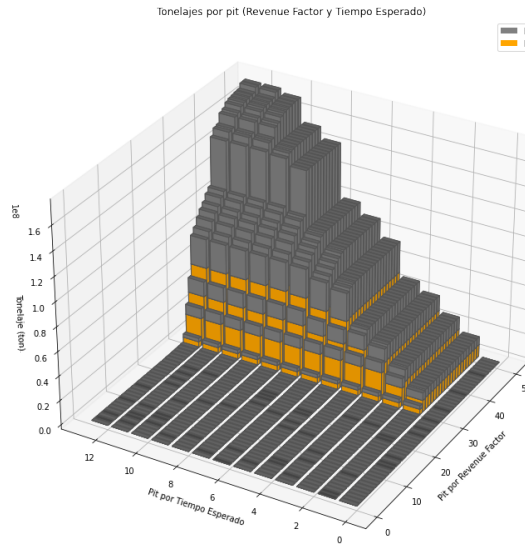
Figura 6.21: Distribución de tonelajes por pits generados por la intersección de criterios, para un tiempo esperado máximo. (i) Modelo KD; (ii) Modelo MCL; (iii) Modelo BMT.



(i)

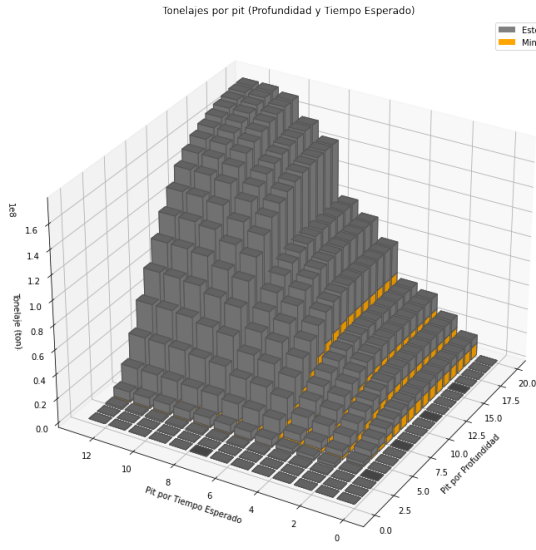


(ii)

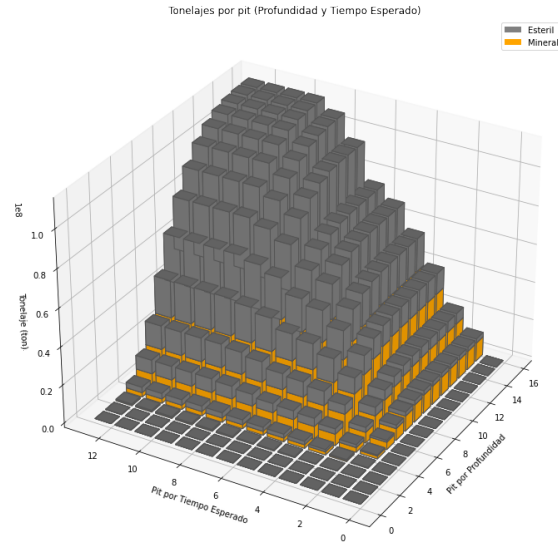


(iii)

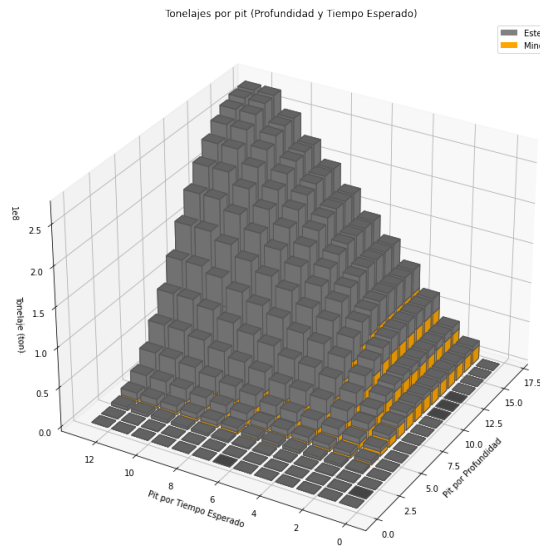
Figura 6.22: Distribución de toneladas por pits generados por la intersección de criterios, para una profundidad máxima. (i) Modelo KD; (ii) Modelo MCL; (iii) Modelo BMT.



(i)



(ii)



(iii)

Figura 6.23: Distribución de toneladas por pits generados por la intersección de criterios, para una profundidad máxima. (i) Modelo KD; (ii) Modelo MCL; (iii) Modelo BMT.

6.5. Modelo de selección automática de pushbacks

Para realizar la selección automática de pushbacks, se resuelve el problema (PS) utilizando los pits intermedios obtenidos en el paso anterior. Para comparar los resultados con el método convencional, primero se aplicará sobre los pits intermedios generados mediante la metodología LG, y luego se calculará utilizando la extensión de los pits intermedios a través de la intersección de familias de pits.

Se considerará una selección de 5 pushbacks, para lo cual, a partir de la Ecuación (5.63), se calcula una tasa de descuento por pushbacks de 0.2570. Esta tasa será aplica a todas las instancias y a todos los modelos.

6.5.1. Pits intermedios por revenue factor

En esta metodología, a partir de la familia de pits intermedios por revenue factor, se resuelve el modelo de programación lineal considerando solo valores máximos. En todos los casos, se emplean 50 pits intermedios según el criterio de revenue factor, lo que genera 1275 pushbacks a partir de todas las combinaciones posibles. En esta instancia, solo se calculan las capacidades máximas de tonelaje, ya que utilizar un conjunto reducido de pushbacks podría llevar a la infactibilidad del modelo.

Instancia RF	KD	MCL	BMT
Tonelaje total (MTon) (min / max)	0.0 / 53.0	0.0 / 26.0	0.0 / 62.0
Tonelaje de mineral (MTon) (min / max)	0.0 / 24.5	0.0 / 20.0	0.0 / 38.0

Tabla 6.8: Valores de restricciones de movimiento de mineral y movimiento de mina por pushbacks para la Instancia RF.

Para la mina KD, al dividir el tonelaje total de mineral y el tonelaje total del modelo de bloques entre 5 pushbacks, con un margen del 50 %, se establece un máximo de 53 MTon para el movimiento de mina y 25 MTon para el mineral, lo que permite encontrar una solución factible. El tiempo de cómputo para este modelo de optimización fue de 1 segundo. Sin embargo, aunque el modelo generó 5 pushbacks dentro de los límites establecidos, se observó una gran diferencia en los tonelajes entre los pushbacks 3, 4 y 5, sin lograr superar el gap problem debido a la base limitada de pits disponibles para la selección. La Tabla 6.9 resume la información obtenida por tonelaje y la Figura 6.24 presenta los gráficos obtenidos en esta instancia para el modelo KD.

En el caso de la mina MCL, se consideran 5 pushbacks con un margen del 15 %, estableciendo un máximo de 26 MTon para el movimiento de mina y 20 MTon para el mineral, logrando así una solución factible. El tiempo de cómputo para este modelo de optimización fue de 5 segundos. En este caso, el modelo logra capturar una solución factible, distribuyendo los tonelajes de mineral de manera equilibrada entre las últimas 4 fases seleccionadas. La Tabla 6.10 resume la información obtenida por tonelaje y la Figura 6.25 presenta los gráficos obtenidos en esta instancia para el modelo MCL.

Para el caso de mina BMT, se consideran 5 pushbacks, estableciendo un máximo de 60 MTon para el movimiento de mina y 30 MTon para el mineral, que corresponden al primer grupo de restricciones que permiten una solución factible. En este caso, se observa una desviación entre los tonelajes del 25 %, no logrando superar el gap problem. La Tabla 6.11 resume la información obtenida por tonelaje y la Figura 6.26 presenta los gráficos obtenidos en esta instancia para el modelo BMT.

N°	Pits seleccionados (i, j)	Valor descontado (\$MUSD)	Tonelaje de mina (MTon)	Tonelaje de mineral (MTon)
1	(30,0)	\$337,97	30,5	22,2
2	(31,30)	\$170,83	20,4	16,6
3	(34,31)	\$235,70	44,1	27,7
4	(39,34)	\$94,33	56,1	19,1
5	(50, 39)	\$17,20	25,3	7,2

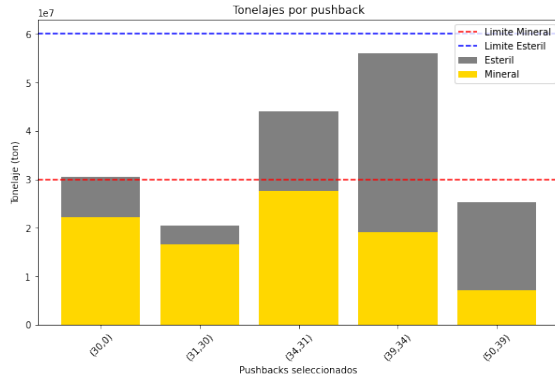
Tabla 6.9: Resumen de tonelajes y valor descontado por pushbacks seleccionados para la Instancia RF del modelo KD.

N°	Pits seleccionados (i, j)	Valor descontado (\$MUSD)	Tonelaje de mina (MTon)	Tonelaje de mineral (MTon)
1	(11,0)	\$731,57	15,9	12,5
2	(13, 11)	\$525,10	24,0	17,7
3	(15, 13)	\$350,47	25,5	18,3
4	(16, 15)	\$228,26	24,1	18,1
5	(50, 16)	\$148,00	23,5	16,6

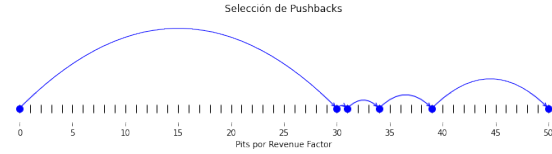
Tabla 6.10: Resumen de tonelajes y valor descontado por pushbacks seleccionados para la Instancia RF del modelo MCL.

N°	Pits seleccionados (i, j)	Valor descontado (\$MUSD)	Tonelaje de mina (MTon)	Tonelaje de mineral (MTon)
1	(25,0)	\$828,02	45,2	36,7
2	(29, 25)	\$413,82	58,0	33,9
3	(35, 29)	\$183,17	47,6	31,3
4	(42, 35)	\$104,60	59,6	33,7
5	(50, 42)	\$24,21	61,6	24,8

Tabla 6.11: Resumen de tonelajes y valor descontado por pushbacks seleccionados para la Instancia RF del modelo BMT.



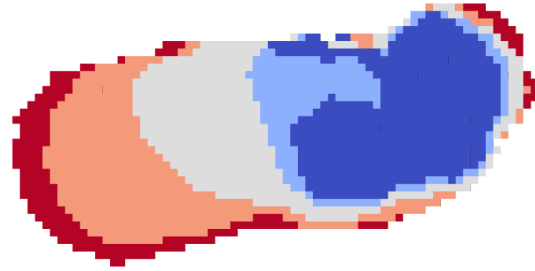
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Figura 6.24: Resultados de la Instancia RF para el modelo KD: (i) Tonelaje pushback a pushback; (ii) Vista en tres dimensiones de la selección de pushbacks; (iii) Visualización en sección $Y = 880$ de pushback seleccionados; (iv) Visualización en sección Z de pushback seleccionados. Se consideran como pushbacks los pits $RF=0.60$, $RF = 0.62$, $RF = 0.68$, $RF = 0.78$, $RF = 1.0$.

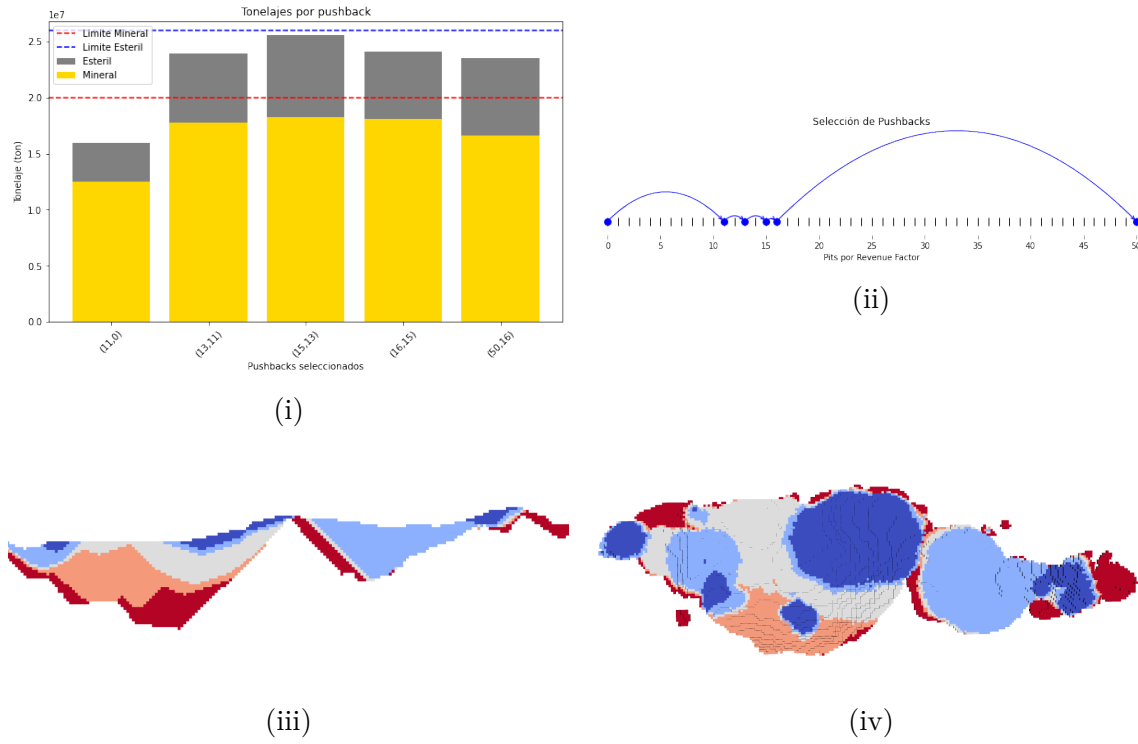
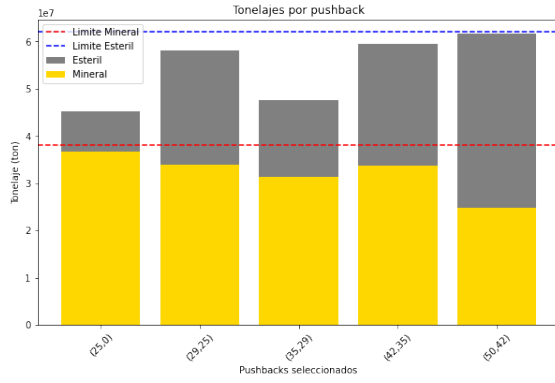
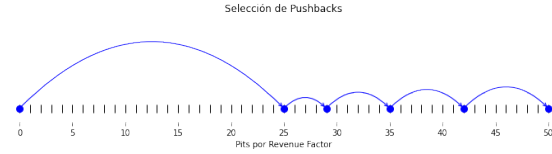


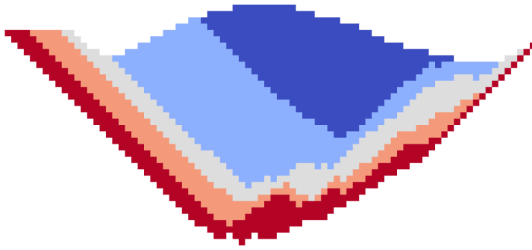
Figura 6.25: Resultados de la Instancia RF para el modelo MCL: (i) Tonelaje push-back a pushback; (ii) Vista en tres dimensiones de la selección de pushbacks; (iii) Visualización en sección $Y = 880$ de pushback seleccionados; (iv) Visualización en sección Z de pushback seleccionados. Se consideran como pushbacks los pits $RF = 0.22$, $RF = 0.26$, $RF = 0.30$, $RF = 0.30$, $RF = 0.32$, $RF = 1.0$.



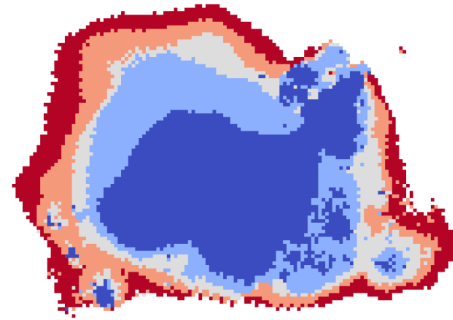
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Figura 6.26: Resultados de la Instancia RF para el modelo BMT: (i) Tonelaje pushback a pushback; (ii) Vista en tres dimensiones de la selección de pushbacks; (iii) Visualización en sección $Y = 880$ de pushback seleccionados; (iv) Visualización en sección Z de pushback seleccionados. Se consideran como pushbacks los pits $RF=0.5$, $RF = 0.58$, $RF = 0.58$, $RF = 0.7$, $RF = 0.84$, $RF = 1.0$.

Modelo	Resultado	Instancia RF
KD	N° Pushbacks factibles	156
	Tiempo de Cómputo	127ms
	Valor Objetivo (\$MUSD)	\$707,16
MCL	N° Pushbacks factibles	157
	Tiempo de Cómputo	215ms
	Valor Objetivo (\$MUSD)	\$1.608,73
BMT	N° Pushbacks factibles	271
	Tiempo de Cómputo	2s, 909ms
	Valor Objetivo (\$MUSD)	\$1.320,00

Tabla 6.12: Comparación de resultados para las instancias según el modelo de bloques.

6.5.2. Pits intermedios por intersección de criterios

En esta metodología, se consideran los pits anidados generados a partir de la intersección entre pits anidados por factor de revenue, tiempo esperado y profundidad, para seleccionar los pushbacks que maximizarán el VAN utilizando el modelo de programación lineal propuesto. Se analizarán dos instancias para cada modelo de bloques en la selección de pushbacks, ajustando las restricciones de capacidad.

A diferencia de la sección anterior, reducir el conjunto de búsqueda en función de las restricciones de tonelaje produce mejores resultados. Esto se debe a que al incluir más pits intermedios basados en diferentes criterios, se logra reducir el problema del gap.

Modelo de bloques	Número de pushbacks
KD	25.326.600
MCL	16.399.968
BMT	18.450.627

Tabla 6.13: Valores de restricciones de movimiento de mineral y movimiento de mina por pushbacks para la Instancia N° 1

Instancia 1

Para esta instancia, se estudiará la inclusión de restricciones de capacidad máximas, no incluyendo restricciones mínimas. En este caso, la Tabla 6.18 indica estos valores

para cada modelo de bloques.

Instancia N° 1	KD	MCL	BMT
Tonelaje total (MTon) (min / max)	0.0 / 39.0	0.0 / 25.0	0.0 / 59.0
Tonelaje de mineral (MTon) (min / max)	0.0 / 24.5	0.0 / 20.0	0.0 / 40.0

Tabla 6.14: Valores de restricciones de movimiento de mineral y movimiento de mina por pushbacks para la Instancia N° 1

Para la mina KD, el modelo logra una solución seleccionando 5 pushbacks con fases casi constantes en términos de tonelaje de mineral y movimiento de mina en general. El modelo de optimización tardó 45 minutos en encontrar una solución factible. En los cuatro primeros pushbacks, la desviación en los tonelajes de movimiento de mina fue inferior al 7 %. Para el movimiento de mineral, la desviación fue menor al 3 % en los tres primeros pushbacks, lo que resultó en un plan con una distribución equilibrada de tonelajes entre las fases. Sin embargo, en el pushback N° 4, la cantidad de mineral disminuyó debido a la necesidad de extraer estéril para liberar zonas mineralizadas.

En el caso de la mina MCL, el modelo obtuvo una solución en menos de 90 minutos, seleccionando 5 pushbacks con una distribución de tonelajes entre las fases, con diferencias menores al 7 %, al igual que en el caso anterior. Similarmente, para la mina BMT, bajo el mismo tiempo de cómputo se presentan distribuciones comparables entre el segundo y cuarto pushback con una desviación del 2 %, aunque con niveles de mineral por pushback considerablemente variables, con una desviación del 25 % en el contenido de mineral.

N°	Pits seleccionados (i, j)	Valor descontado (\$MUSD)	Tonelaje de mina (MTon)	Tonelaje de mineral (MTon)
1	(8129,0)	\$334,06	34,8	23,7
2	(8431, 8129)	\$259,13	36,2	24,3
3	(9795, 8431)	\$183,59	36,5	24,4
4	(12139, 9795)	\$464,56	37,4	9,6
5	(13259, 12139)	\$316,25	31,7	11,4

Tabla 6.15: Resumen de tonelajes y valor descontado por pushbacks seleccionados para la Instancia 1 del modelo KD.

N°	Pits seleccionados (i, j)	Valor descontado (\$MUSD)	Tonelaje de mina (MTon)	Tonelaje de mineral (MTon)
1	(2332,0)	\$701,29	15,9	12,5
2	(2975, 2332)	\$456,72	24,0	17,2
3	(3215, 2975)	\$256,88	24,8	18,2
4	(3455, 3215)	\$133,44	24,4	18,4
5	(10607, 3455)	\$61,78	23,8	16,9

Tabla 6.16: Resumen de tonelajes y valor descontado por pushbacks seleccionados para la Instancia 1 del modelo MCL.

N°	Pits seleccionados (i, j)	Valor descontado (\$MUSD)	Tonelaje de mina (MTon)	Tonelaje de mineral (MTon)
1	(5589,0)	\$827,65	45,1	36,6
2	(6542, 5589)	\$414,20	58,0	33,9
3	(8089, 6542)	\$213,20	58,3	39,2
4	(9891, 8089)	\$77,81	57,4	30,2
5	(11270, 9891)	\$20,96	53,1	20,6

Tabla 6.17: Resumen de tonelajes y valor descontado por pushbacks seleccionados para la Instancia 1 del modelo BMT.

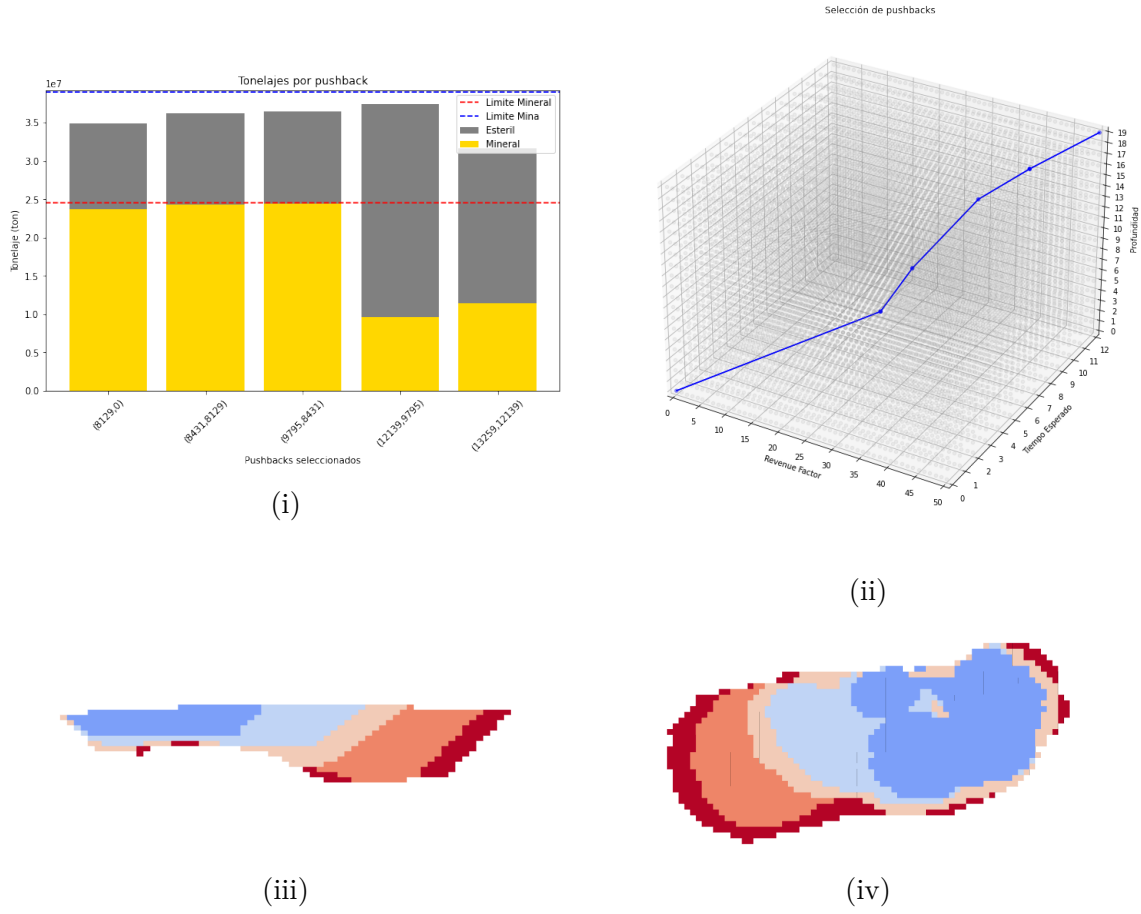


Figura 6.27: Resultados de la Instancia 1 para el modelo KD: (i) Tonelaje pushback a pushback; (ii) Vista en tres dimensiones de la selección de pushbacks; (iii) Visualización en sección $Y = 880$ de pushback seleccionados; (iv) Visualización en sección Z de pushback seleccionados. Se consideran como pushbacks los pits $RF=0.62$, $ET=3$, $PROF=650$; $RF=0.64$, $ET=5$, $PROF=620$; $RF=0.74$, $ET=8$, $PROF=560$; $RF=0.92$, $ET=8$, $PROF=500$; $RF=1.00$, $ET=12$, $PROF=500$.

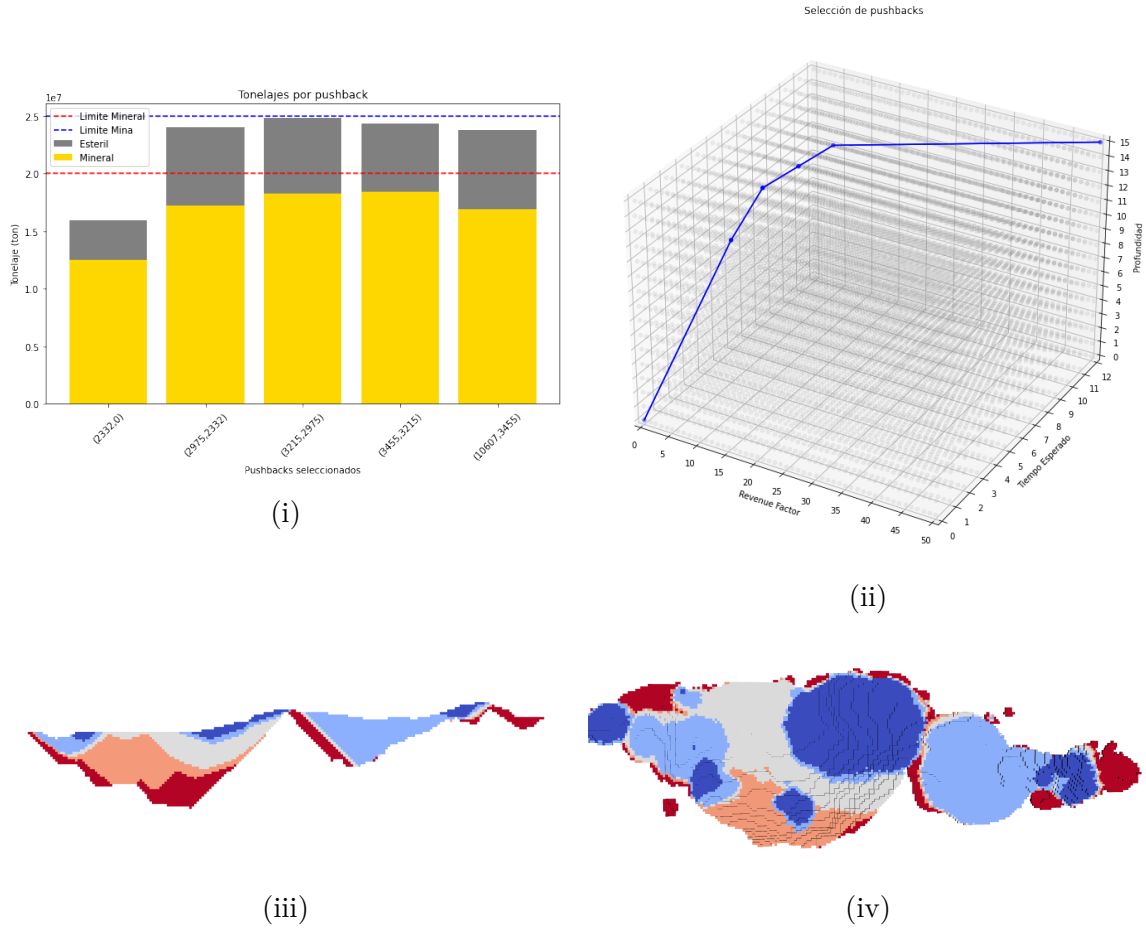


Figura 6.28: Resultados de la Instancia 1 para el modelo MCL: (i) Tonelaje pushback a pushback; (ii) Vista en tres dimensiones de la selección de pushbacks; (iii) Visualización en sección $X = 40$ de pushback seleccionados; (iv) Visualización en sección Z de pushback seleccionados. Se consideran como pushbacks los pits $RF=0.22$, $ET=2$, $PROF=9$; $RF=0.28$, $ET=3$, $PROF=0$; $RF=0.3$, $ET=5$, $PROF=0$; $RF=0.32$, $ET=7$, $PROF=0$; $RF=1.0$, $ET=12$, $PROF=0$.

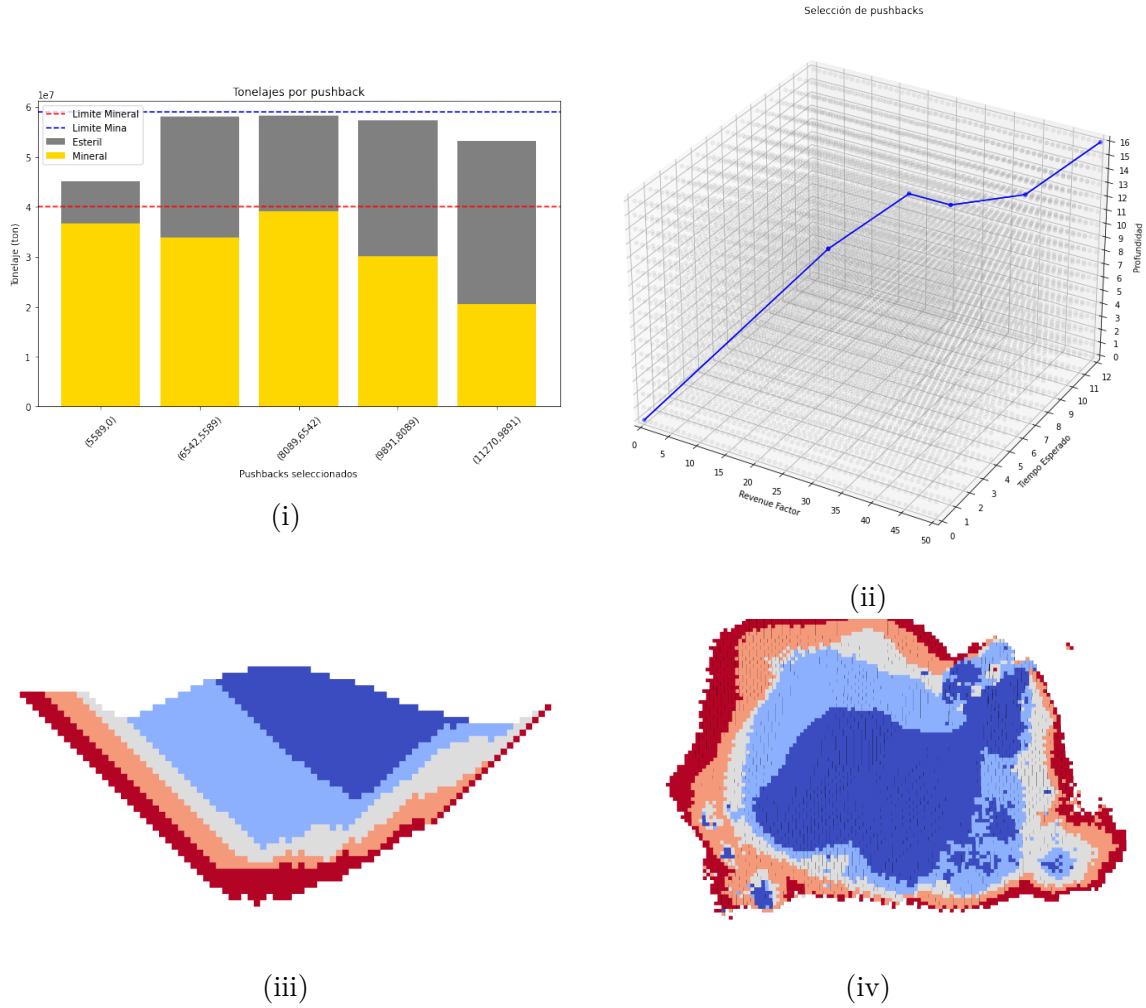


Figura 6.29: Resultados de la Instancia 1 para BMT: (i) Tonelaje pushback a pushback; (ii) Vista en tres dimensiones de la selección de pushbacks; (iii) Visualización en sección $X = 10735$ de pushback seleccionados; (iv) Visualización en sección Z de pushback seleccionados. Se consideran como pushbacks los pits $RF=0.5$, $ET=3$, $PROF=1895$; $RF=0.58$, $ET=7$, $PROF=1865$; $RF=0.72$, $ET=7$, $PROF=1865$; $RF=0.88$, $ET=9$, $PROF=1865$; $RF=1.0$, $ET=12$, $PROF=1805$.

Instancia 2

Para esta instancia, se estudiará la inclusión de restricciones de capacidad mínimas. En este caso, la Tabla 6.18 indica estos valores para cada modelo de bloques. Es

importante destacar que no se aplicaron en la selección del último pushback, ya que se alcanzaría la vida útil de la mina.

Instancia N° 1	KD	MCL	BMT
Tonelaje total (MTon) (min / max)	35.0 / 39.0	20.0 / 25.0	55.0 / 59.0
Tonelaje de mineral (MTon) (min / max)	10.0 / 24.5	17.0 / 20.0	30.0 / 40.0

Tabla 6.18: Valores de restricciones de movimiento de mineral y movimiento de mina por pushbacks para la Instancia N° 1

Al incorporar un mínimo de extracción de mineral y movimiento de mina dentro del modelo, se redujo la cantidad de pushbacks factibles en un 96 % para el modelo KD, en un 97 % para el modelo MCL y en un 97 % para el modelo BMT, lo que a su vez disminuyó el tiempo de cómputo necesario para la selección.

En el caso del modelo KD, el modelo de programación lineal tardó menos de 4 segundos en encontrar una solución factible, con fases casi constantes en términos de tonelaje de mineral y movimiento de mina en general, y con una reducción mínima del VAN de solo un 0.6 %. Para los cuatro primeros pushbacks, la desviación en los tonelajes de movimiento de mina fue inferior al 7 %, mientras que la desviación en el movimiento de mineral fue menor al 1 % en los tres primeros pushbacks. Los resultados fueron casi idénticos al caso anterior, logrando una selección factible con una reducción del 99 % en el tiempo necesario para la selección. Sin embargo, en el pushback N°4, la cantidad de mineral disminuye debido a la necesidad de extraer estéril para liberar zonas mineralizadas, aunque el tonelaje total de la fase presentó una desviación menor al 7 % respecto a la fase anterior. El resumen de los tonelajes por cada fase se presenta en la Tabla 6.19.

En el modelo MCL, el modelo de programación tardó menos de 3 segundos en encontrar una solución factible, con una distribución equilibrada de tonelajes entre las fases seleccionadas. En el último pushback, los tonelajes disminuyen al alcanzar la vida útil del yacimiento. Para los cuatro primeros pushbacks, las desviaciones en los tonelajes no superaron el 12 %. La inclusión de mínimos de tonelaje para las fases permitió una reducción del 99 % en el tiempo necesario para la selección, aunque con una disminución del 8 % en el VAN. El resumen de los tonelajes por cada fase se presenta en la Tabla 6.20.

Similarmente, en el modelo BMT, también hubo una reducción del tiempo de cómputo con una desviación del tonelaje del 5 % entre los primeros 4 pushbacks seleccionados, alcanzando además las capacidades máximas de procesamiento en planta durante las primeras fases. El VAN se redujo cerca de un 8 % respecto a la Instancia 1. El

resumen de los tonelajes por cada fase se presenta en la Tabla 6.21.

N°	Pits seleccionados (i, j)	Valor descontado (\$MUSD)	Tonelaje de mina (MTon)	Tonelaje de mineral (MTon)
1	(8389,0)	\$341,26	36,3	24,2
2	(8691, 8389)	\$259,52	36,6	24,4
3	(10056, 8691)	\$180,82	36,5	24,4
4	(10336, 10056)	\$37,41	38,9	10,6
5	(13259, 10336)	\$36,86	28,3	9,9

Tabla 6.19: Resumen de tonelajes y valor descontado por pushbacks seleccionados para la Instancia 2 del modelo KD.

N°	Pits seleccionados (i, j)	Valor descontado (\$MUSD)	Tonelaje de mina (MTon)	Tonelaje de mineral (MTon)
1	(2758,0)	\$576,84	24,6	17,2
2	(3000, 2758)	\$519,35	23,6	19,3
3	(3435, 3000)	\$456,04	24,8	17,1
4	(3900, 3435)	\$349,76	24,9	18,3
5	(10607, 3900)	\$110,45	15,1	11,2

Tabla 6.20: Resumen de tonelajes y valor descontado por pushbacks seleccionados para la Instancia 2 del modelo MCL.

N°	Pits seleccionados (i, j)	Valor descontado (\$MUSD)	Tonelaje de mina (MTon)	Tonelaje de mineral (MTon)
1	(6264,0)	\$697,45	58,0	37,5
2	(7202, 6264)	\$543,76	55,1	38,1
3	(9208, 7202)	\$117,81	57,9	30,8
4	(9924, 9208)	\$161,10	55,0	31,9
5	(11270, 9924)	\$33,70	46,0	22,1

Tabla 6.21: Resumen de tonelajes y valor descontado por pushbacks seleccionados para la Instancia 2 del modelo BMT.

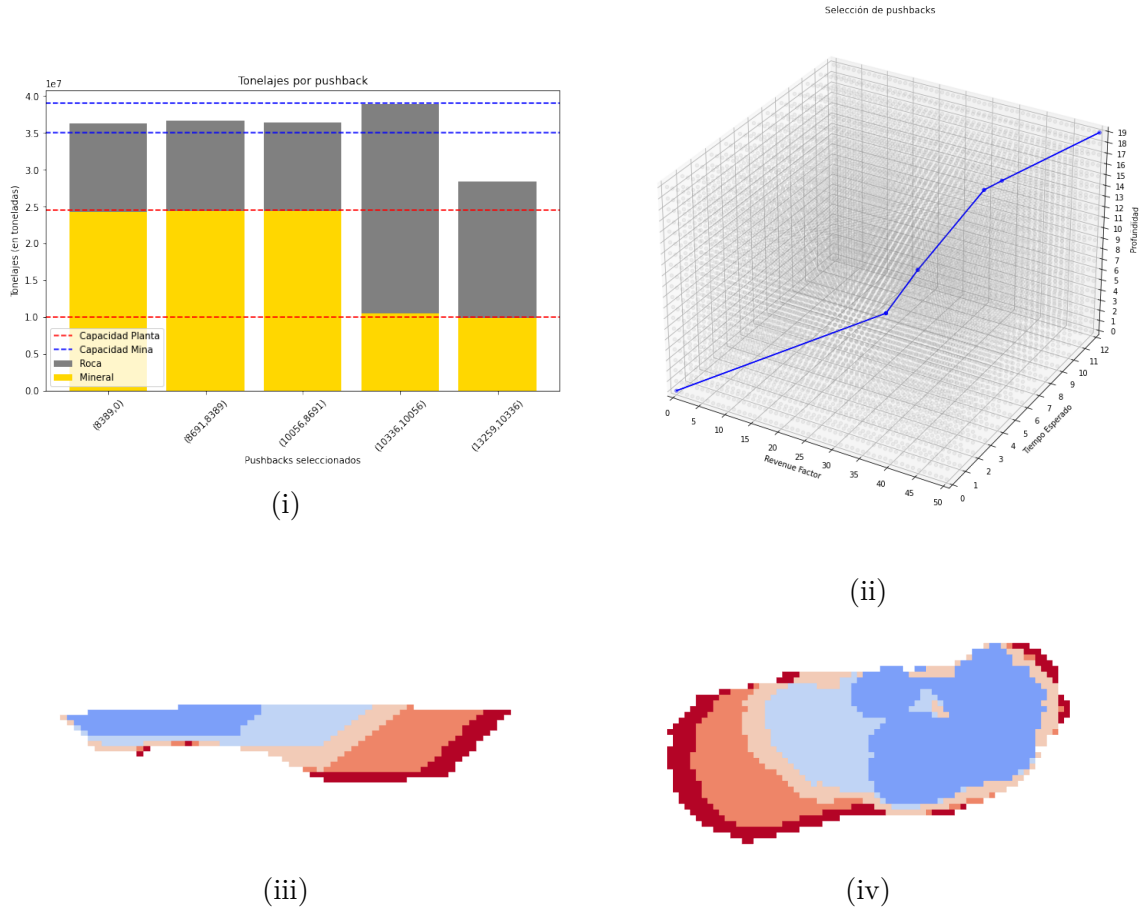


Figura 6.30: Resultados de la Instancia 2 para KD: (i) Tonelaje pushback a pushback; (ii) Vista en tres dimensiones de la selección de pushbacks; (iii) Visualización en sección $Y = 880$ de pushback seleccionados; (iv) Visualización en sección Z de pushback seleccionados. Se consideran como pushbacks los pits $RF=0.64$, $ET=3$, $PROF=650$; $RF=0.66$, $ET=5$, $PROF=620$; $RF=0.76$, $ET=8$, $PROF=545$; $RF=0.78$, $ET=9$, $PROF=545$; $RF=1.0$, $ET=12$, $PROF=500$.

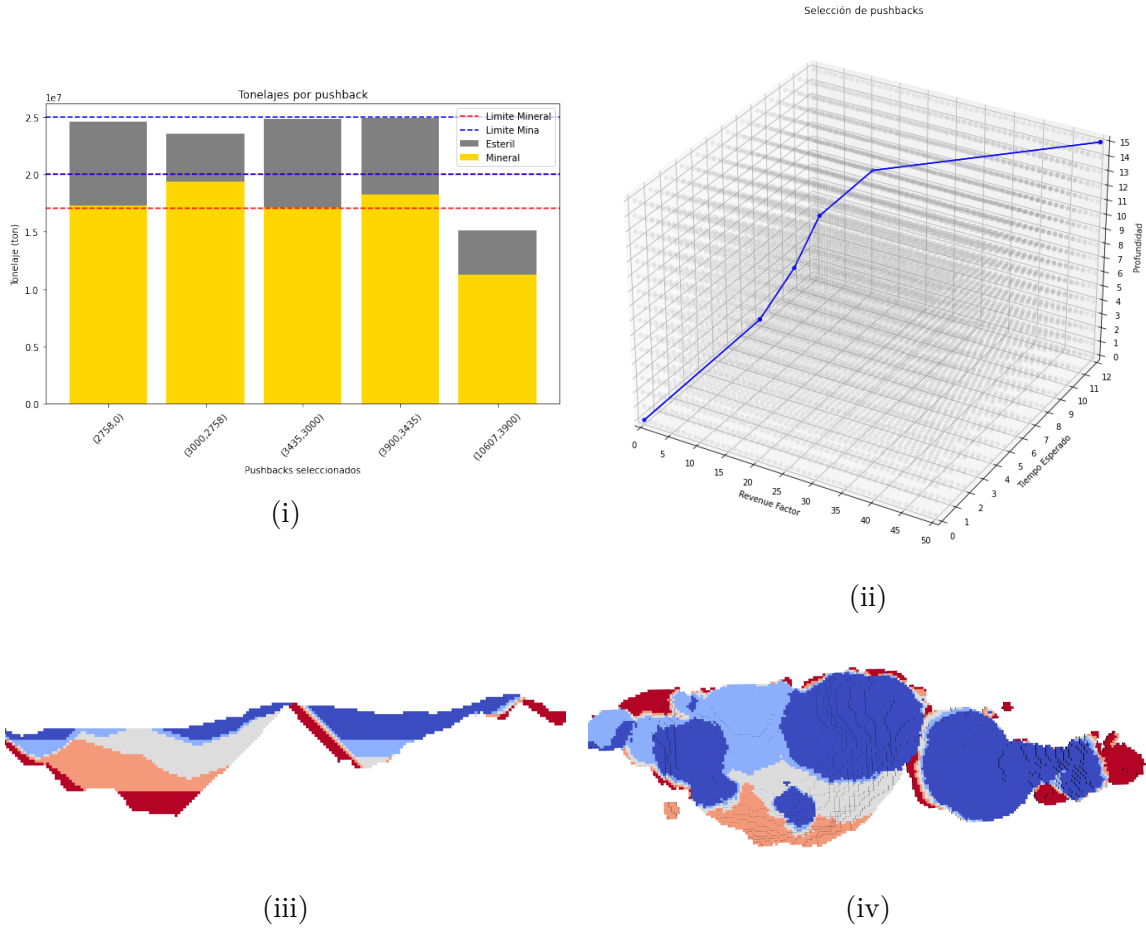


Figura 6.31: Resultados de la Instancia 2 para MCL: (i) Tonelaje pushback a pushback; (ii) Vista en tres dimensiones de la selección de pushbacks; (iii) Visualización en sección $X = 40$ de pushback seleccionados; (iv) Visualización en sección Z de pushback seleccionados. Se consideran como pushbacks los pits $RF=0.26$, $ET=3$, $PROF=27$; $RF=0.28$, $ET=5$, $PROF=21$; $RF=0.32$, $ET=6$, $PROF=12$; $RF=0.36$, $ET=9$, $PROF=9$; $RF=1.0$, $ET=12$, $PROF=0$.

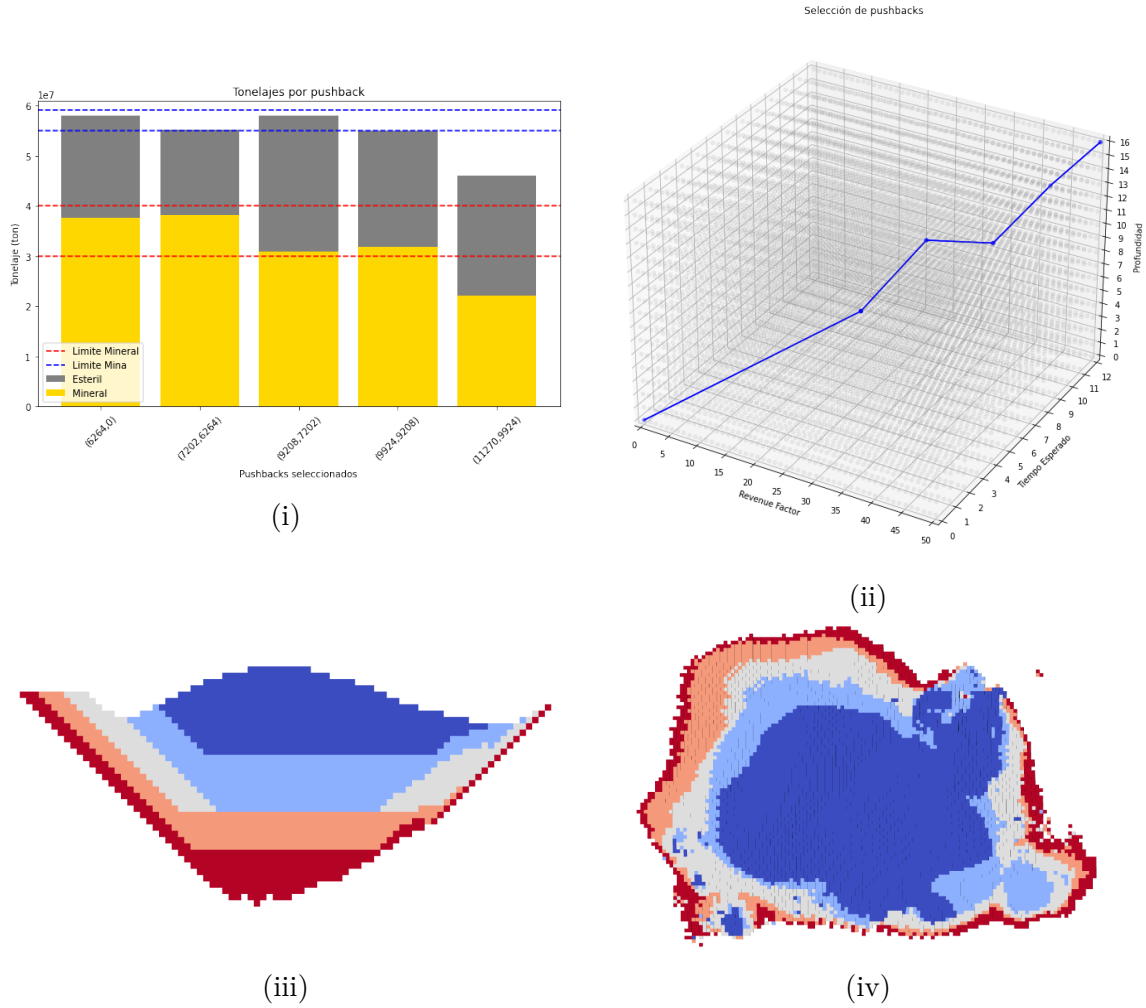


Figura 6.32: Resultados de la Instancia 2 para BMT: (i) Tonelaje pushback a pushback; (ii) Vista en tres dimensiones de la selección de pushbacks; (iii) Visualización en sección $X = 10735$ de pushback seleccionados; (iv) Visualización en sección Z de pushback seleccionados. Se consideran como pushbacks los pits $RF=0.56$, $ET=4$, $PROF=2045$; $RF=0.64$, $ET=7$, $PROF=1955$; $RF=0.82$, $ET=8$, $PROF=1955$; $RF=0.88$, $ET=11$, $PROF=1895$; $RF=1.0$, $ET=12$, $PROF=1805$.

Finalmente, se presenta una comparativa entre ambas instancias en la Tabla 6.22 para ambos modelos de bloques.

Modelo	Resultado	Instancia 1	Instancia 2
KD	N° Pushbacks factibles	1.148.530	54.941
	Tiempo de Cómputo	45m, 14s, 631ms	3s, 919ms
	Valor Objetivo (\$MUSD)	\$696,42	\$693,41
MCL	N° Pushbacks factibles	571.108	17.295
	Tiempo de Cómputo	1h, 26m, 38s, 854ms	2s, 815ms
	Valor Objetivo (\$MUSD)	\$1.610,12	\$1.480,90
BMT	N° Pushbacks factibles	1.779.008	42.786
	Tiempo de Cómputo	1h, 38m, 59s, 360ms	4s, 524ms
	Valor Objetivo (\$MUSD)	\$1.318,48	\$1.232,92

Tabla 6.22: Comparación de resultados para las instancias según el modelo de bloques.

Capítulo 7

Conclusiones

El trabajo realizado y presentado en las secciones previas demostró cumplir con cada uno de los objetivos propuestos. En primer lugar, se logra generar una extensión para la generación de nuevos pits anidados distintos a los obtenidos por la metodología tradicional a partir de tres ideas:

1. nuevas familias de pits anidados parametrizando por límite de profundidad,
2. incorporación de la dimensión tiempo para generar nuevas familias de pits; y
3. intersección entre familias de pits anidados basados en la metodología tradicional de Lerchs-Grossman con estos pits extendidos para ampliar aún más el conjunto factible para la selección de pushbacks.

A partir de esta metodología extendida, se logró aumentar en más de 200 veces la cantidad de pits obtenidos por el método convencional. Esto permite entregar más alternativas para la selección de fases para guiar la secuencia de extracción en la planificación a largo plazo de la producción en la minería a cielo abierto.

Además, considerando este aumento de pits para la selección de pushbacks, se desarrolló un modelo de selección automática basado en la maximización del VAN, con el objetivo de apoyar a los ingenieros planificadores en la elaboración de mejores planes de producción. El modelo encontró distintas soluciones para la selección de pushbacks, logrando desviaciones mínimas de tonelajes entre pushbacks consecutivos, generando resultados factibles operacionalmente y capaces de llevarse a la práctica. Las desviaciones no superaron el 12 % entre pushbacks consecutivos, siendo un resultado práctico para las etapas posteriores de agendamiento de producción y diseño de flota de equipos. Además, se desarrolló un modelo que no requiere grandes

capacidades de memoria computacional, permitiendo obtener resultados en tiempos factibles y, por lo tanto, aplicable a modelos de bloques de distintos tamaños. La incorporación de capacidades mínimas de tonelaje redujo considerablemente el número de pushbacks factibles, optimizando los tiempos de cálculo para la selección automática.

Para trabajos futuro, algunos desafíos que se deberían abordar incluyen:

1. Incorporación de la incertidumbre geológica para evaluar distintos escenarios de acuerdo con posibles cambios en leyes de los modelos de bloques.
2. Consideración de criterios dentro de las restricciones del modelo, tales como espacios mínimos operacionales para garantizar suficiente espacio para el movimiento de los equipos dentro de la mina, o bien conectividad de los pushbacks seleccionados para evitar el traslado de la maquinaria durante las fases de extracción.
3. Agendamiento por períodos basándose en secuencias de extracción.
4. Estudio y/o desarrollo un algoritmo para resolver el problema de selección de pushbacks.

Apéndice A

Algoritmos

En este apéndice se profundiza en los métodos de resolución del problema del pit final.

A.1. Problemas asociados en teoría de grafos

En primer lugar, se introducen los problemas asociados en su formulación general junto con las propiedades que los relacionan entre sí.

A.1.1. Problema de Flujo Máximo

Considere un grafo dirigido $G = (V, A)$, tal que:

1. Posee un nodo *fuelle* $s \in V$, y un nodo *sumidero* $t \in V$. En el contexto de flujos en grafos, un nodo fuente es aquel donde se origina el flujo, mientras que un nodo sumidero es donde el flujo llega a su destino.
2. Existe una función de *capacidad*, definida como un mapeo $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, que asigna a cada arco $(u, v) \in A$ un valor c_{uv} , representando la cantidad máxima de flujo que puede atravesar ese arco.

Un grafo con estas características se denomina *red*.

El *flujo* en un grafo dirigido es la cantidad de “material” que se mueve a través de los arcos. Este flujo se modela mediante un mapeo $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, que asigna a cada arco $(u, v) \in A$ un valor f_{uv} , sujeto a las siguientes restricciones:

1. *Restricción de capacidad:* Para cada arco (u, v) , se debe cumplir:

$$0 \leq f_{uv} \leq c_{uv}, \quad (\text{A.1})$$

donde c_{uv} es la capacidad del arco.

2. *Conservación de flujos:* Para cualquier nodo v , que no sea la fuente o el sumidero, la suma del flujo entrante debe ser igual a la suma del flujo saliente:

$$\sum_{(u,v) \in A} f_{uv} = \sum_{(v,w) \in A} f_{vw}. \quad (\text{A.2})$$

En el *problema de flujo máximo*, el objetivo es maximizar el flujo total de la red que puede entrar a través de la fuente, o, debido a la conservación de flujos, la cantidad que puede salir a través del sumidero. El problema se puede formular como:

$$(\text{Max-Flow}) \quad \max_{f_{sv}} |f| = \sum_{(s,v) \in A} f_{sv} = \sum_{(v,t) \in A} f_{vt} \quad (\text{A.3})$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{(u,v) \in A} f_{uv} = \sum_{(v,w) \in A} f_{vw}, \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}, \quad (\text{A.4})$$

$$0 \leq f_{uv} \leq c_{uv}, \quad \forall (u, v) \in A. \quad (\text{A.5})$$

Este problema puede formularse y extenderse de diversas maneras. En [Wolsey \(2020\)](#), se presenta el problema de flujo mínimo como un problema de programación lineal, extendiendo la restricción (A.4) mediante la inclusión de un vector de demandas de flujo, lo que permite manejar un mayor número de nodos y fuentes. La matriz de restricciones del problema (Max-Flow) es totalmente unimodular.

Los algoritmos para resolver este problema se pueden clasificar en dos categorías: algoritmos de flujo factible y algoritmos de pre-flujos. En el contexto de este trabajo, nos interesa estudiar la segunda categoría. Un *pre-flujo* es un flujo que no satisface la restricción (A.5) de conservación de flujo, permitiendo únicamente excesos.

A.1.2. Problema de Corte Mínimo

Considere una red $G = (V, A)$. Un *corte* en G , denotado por (P, Q) , es una partición de V en dos subconjuntos no vacíos, donde $P \subset V$ y $Q = V - P$.

El conjunto de arcos que van desde P a Q se denota por

$$(P, Q) = \{(u, v) \in A : u \in P, v \in Q\}. \quad (\text{A.6})$$

La capacidad de un corte $P - Q$ es la suma de las capacidades de los arcos en el conjunto de corte,

$$C(P, Q) = \sum_{(u,v) \in (P,Q)} c_{uv} = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} d_{ij}, \quad (\text{A.7})$$

donde d_{ij} es una función indicatriz definida como:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in P \text{ y } j \in Q, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

El tamaño del corte corresponde al número de arcos en A que cruzan entre los conjuntos; o bien, si G tiene pesos en sus aristas, el tamaño del corte es la suma de los pesos de las aristas que cruzan el corte ([Chakrabarti, 2005](#)).

El *problema de corte mínimo* busca encontrar una partición del grafo en dos subconjuntos tal que la capacidad del conjunto de corte sea mínima. Esto se puede formular como:

$$\begin{aligned} (\text{Min-Cut}) \quad & \min_{P,Q} C(P, Q) = \sum_{(u,v) \in (P,Q)} c_{uv} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{s.a.} \quad P, Q \neq \emptyset, \quad P \cup Q = V, \quad P \cap Q = \emptyset, \quad (\text{A.10})$$

$$c_{uv} \geq 0, \quad \forall (u, v) \in A. \quad (\text{A.11})$$

Este problema puede extenderse a grafos no dirigidos, pero para el contexto de este trabajo, se estudiará en el ámbito de redes dirigidas. En este escenario, y comparando ambos problemas, se puede demostrar que el flujo máximo que se puede enviar desde un nodo fuente s hasta un nodo sumidero t es igual a la suma de las capacidades de las aristas de un corte mínimo $P - Q$, de modo que $s \in P$ y $t \in Q$.

Teorema A.1.1 (Teorema de flujo máximo - corte mínimo). *El valor máximo de un flujo de s a t en una red de flujo es igual a la capacidad mínima de un corte PQ en dicha red.*

Demostración. La demostración se puede encontrar en [Ford Jr. y Fulkerson \(1962\)](#). □

Además, el flujo total en un corte (P, Q) de un flujo f se define como:

$$f(P, Q) = \sum_{u,v \in (P, Q)} f_{uv} \quad (\text{A.12})$$

A.1.3. Problema de Clausura Máxima

Una *clausura* (o *cierre*) en un grafo dirigido $G = (V, A)$ es un subconjunto de nodos que no tiene ningún arco saliente. Es decir, un subconjunto $X \subseteq V$ cumple con la propiedad de que, si i pertenece a X y $(i, j) \in A$, entonces j también pertenece a X . Suponga que a cada nodo $i \in G$ se le asocia un peso w_i .

El problema de clausura máxima consiste en encontrar un cierre X en G que maximice la suma de los pesos $w(X)$, donde $w(X) = \sum_{i \in X} w_i$ (Ahuja et al., 1993). Este problema se puede formular de la siguiente manera:

$$(\text{Max-Closure}) \quad \max_{X \subseteq V} \sum_{i \in X} w_i, \quad (\text{A.13})$$

$$\text{s.a.} \quad X \neq \emptyset, \quad \bar{X} \neq \emptyset, \quad X \cup \bar{X} = V, \quad X \cap \bar{X} = \emptyset, \quad (\text{A.14})$$

$$w_{uv} \geq 0, \quad \forall (u, v) \in E. \quad (\text{A.15})$$

Picard (1976) demostró que el problema de clausura máxima se puede transformar en un problema de flujo máximo. Para ello, se construye una red equivalente añadiendo un nodo fuente s y un nodo sumidero t al grafo original. Sea

$$S = \{i \in V \mid w_i > 0\} \text{ y } T = \{i \in V \mid w_i < 0\}. \quad (\text{A.16})$$

Para cada $v \in S$, se conecta un arco desde s con capacidad $c_{sv} = +w_i$. Similarmente, para $v \in T$, se conecta un arco hasta t con capacidad $c_{vt} = -w_i$. Se tendrá que $C = (S, T)$ es un corte. Además, se asigna una capacidad infinita a los arcos del grafo original para asegurar que los cortes mínimos correspondan a las clausuras máximas. De este modo, encontrar una clausura máxima en el grafo original se reduce a resolver un problema de flujo máximo en la red modificada, utilizando el Teorema A.1.1.

A.1.4. Problema de Clausura de Bloqueo Máximo

El problema de *clausura de bloque máximo* (del inglés, *maximum blocking cut*) es una extensión del problema de clausura máxima, pues considera grafos dirigidos con pesos, tanto en los nodos como en las aristas. Para esto, se define el *superávit*.

Definición A.1.1. *El superávit de $S \subseteq V$ en el grafo G es*

$$\text{surplus}(S) = \sum_{i \in S} w_i - \sum_{i \in S, j \in S} C_{ij}. \quad (\text{A.17})$$

El problema de clausura de bloque máximo se define como:

$$(\text{Max-Block-Cut}) \quad \max_{S \subseteq V} \text{surplus}(S) = \sum_{i \in S} w_i - \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} c_{ij}, \quad (\text{A.18})$$

$$\text{s.a.} \quad S \neq \emptyset, \quad \bar{S} \neq \emptyset, \quad S \cup \bar{S} = V, \quad S \cap \bar{S} = \emptyset, \quad (\text{A.19})$$

$$w_i \in \mathbb{R}, \quad c_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in V, (i, j) \in A. \quad (\text{A.20})$$

Posteriormente, se mostrará la relación de un corte mínimo y un corte de bloqueo máximo.

A.2. Algoritmos para el problema de pit final

A.2.1. Representación de grafos

En esta sección, se considerará un grafo dirigido $G = (V, A)$, donde cada nodo $i \in V$ tiene un peso asociado c_i y cada arco $(i, j) \in A$ posee una capacidad c_{ij} . Además, se definen las siguientes representaciones:

1. G_{st} : El grafo G se puede transformar en un grafo $s - t$ al agregar dos nodos, un nodo fuente s y un nodo sumidero t , conectándolos a los nodos del grafo original mediante arcos con capacidades correspondientes a los pesos positivos o negativos, respectivamente. Es decir:

$$G_{st} = (V \cup \{s, t\}, A \cup A(s) \cup A(t)) \quad (\text{A.21})$$

2. G^{ext} : A partir del grafo G_{st} , se puede construir una red extendido G^{ext} , que incluye arcos adicionales de capacidad infinita, conectando nodos al nodo raíz r , creado al combinar s y t . Es decir,

$$G^{\text{ext}} = (V \cup \{r\}, A^{\text{ext}}), \text{ donde } A^{\text{ext}} = A \cup A(s) \cup A(t) \cup A_\infty \quad (\text{A.22})$$

En [Hochbaum \(2008\)](#) se presenta el mapeo inverso desde el grafo G_{st} al grafo original G .

Árbol Normalizado

Un *árbol* es un grafo dirigido conectado y acíclico. Un *árbol enraizado* o *árbol con raíz* es un tipo especial de árbol que cuenta con un nodo designado como la raíz, generalmente denotado por r , desde el cual todos los demás nodos se organizan jerárquicamente en una estructura descendente.

Un *árbol normalizado* es una variante particular de árbol enraizado que se organiza de manera que cumple con ciertas propiedades específicas. Este concepto fue introducido inicialmente en el algoritmo de [Lerchs y Grossmann \(1965\)](#), y más tarde fue utilizado y extendido en el trabajo de [Hochbaum \(2008\)](#) para el algoritmo de pseudoflujo.

A.2.2. Algoritmo de Lerchs y Grossmann

El algoritmo de [Lerchs y Grossmann \(1965\)](#) es un método fundamental en la optimización del diseño de minas a cielo abierto. Este algoritmo se basa en la teoría de grafos para determinar el contorno óptimo de una mina, maximizando el beneficio económico mientras se respetan las restricciones geotécnicas. Existen dos versiones principales del algoritmo: una en dos dimensiones (2D) y otra en tres dimensiones (3D).

Dos dimensiones

En el contexto bidimensional, el algoritmo de Lerchs y Grossmann se aplica a una cuadrícula que representa una sección vertical de la mina. Cada bloque en la cuadrícula tiene un valor asociado, que es la diferencia entre el valor del mineral y el costo de extracción. El objetivo es encontrar el contorno óptimo de la mina, es decir, la frontera que maximiza la ganancia neta.

Algoritmo 2: Algoritmo LG para Pit Bidimensional

Entrada: Rectángulo de unidades (i, j) , valores de extracción v_{ij} , costos de extracción c_{ij}

Salida : Contorno óptimo del pit

```
1 para cada rectángulo  $(i, j)$  hacer
2    $m_{ij} \leftarrow v_{ij} - c_{ij};$ 
3 para cada columna  $j$  hacer
4   para cada fila  $i$  hacer
5      $M_{ij} \leftarrow \sum_{k=i}^i m_{kj};$ 
6 Agregar fila cero con  $P_{0j} = 0;$ 
7 para cada columna  $j$  empezando en 1 hacer
8   para cada fila  $i$  hacer
9      $P_{ij} \leftarrow M_{ij} + \text{máx}(P_{i-1,j-1}, P_{i,j-1}, P_{i+1,j-1});$ 
10 Trazar flechas desde  $(i, j)$  hasta  $(i + k, j - 1)$  donde  $k \in \{-1, 0, 1\};$ 
11 Encontrar el máximo en la primera fila  $\text{máx}(P_{ij});$ 
12 mientras no se llega a la primera columna hacer
13   Seguir la flecha trazada hasta la columna anterior;
14   Marcar el camino;
```

Salida : El camino trazado representa el contorno óptimo del pit

Primero, se calcula el valor neto para cada bloque (m_{ij}) de la malla bidimensional. Luego, se construye una tabla acumulativa (M_{ij}) que representa, para cada bloque (i, j) , el beneficio obtenido al extraer la columna de bloques que está sobre él. Posteriormente, se calcula una nueva tabla acumulativa (P_{ij}) , que considera el beneficio de la unidad más el valor máximo de los posibles bloques adyacentes de la columna anterior. Finalmente, se traza el contorno óptimo dibujando flechas desde cada unidad (i, j) hacia una de las unidades $(i - 1, j - 1)$, $(i, j - 1)$, o $(i + 1, j - 1)$, dependiendo de cuál tiene el mayor beneficio económico. El contorno óptimo se obtiene siguiendo estas flechas desde la unidad con la mayor ganancia acumulada en la primera fila hasta la primera columna, marcando el camino recorrido.

Tres dimensiones

Cuando el algoritmo se extiende a tres dimensiones, surgen desafíos adicionales debido a la complejidad geométrica del modelo. En este caso, el problema del pit final se presenta como un problema de clausura máxima, cuyo objetivo es maximizar el

valor neto, ya que cualquier contorno factible del pit estará representado como una clausura en el grafo G . En este modelo, el conjunto de bloques se representa como un grafo dirigido $G = (V, A)$, donde:

1. Los bloques se representan como vértices en V .
2. La valorización de cada bloque corresponde a los pesos w_i de cada vértice.
3. Las precedencias se representan como arcos en A .

El procedimiento utilizado en 2D se vuelve impráctico en 3D debido a la complejidad de combinar diferentes secciones transversales y considerar el valor del ángulo final del pit. Este enfoque asegura que se tenga en cuenta la interacción entre los bloques en las tres dimensiones (Miranda, 2023).

El algoritmo de LG utiliza un proceso iterativo de construcción y transformación de árboles para encontrar esta clausura máxima. En este contexto, un arco se considerará *fuerte* si soporta una “masa” que es estrictamente positiva para un arco positivo, o una masa nula o negativa en el caso de un arco negativo. Un vértice se denomina *fuerte* si está conectado a la raíz del árbol por al menos un arco fuerte.

Algoritmo 3: Algoritmo LG para Pit Tridimensional

Entrada: Grafo dirigido $G = (X, A)$ con masas m_i asociadas a los vértices x_i .

Salida : Cierre máximo Y de G .

- 1 Construir árbol inicial normalizado T^0 en G ;
 - 2 $t \leftarrow 0$;
 - 3 **mientras** *existe* $(x_k, x_l) \in A$ tal que $x_k \in Y^t$ y $x_l \notin Y^t$ **hacer**
 - 4 Determinar x_r , la raíz de la rama fuerte que contiene a x_k ;
 - 5 Reemplazar arco (x_s, x_r) en T^t con (x_k, x_l) ;
 - 6 Normalizar T^{t+1} moviendo los arcos fuertes hacia el nodo raíz x_0 ;
 - 7 $t \leftarrow t + 1$;
 - 8 $Y \leftarrow$ conjunto de vértices fuertes en T^{t+1} ;
 - 9 **devolver** Y ;
-

El algoritmo comienza con la construcción de un árbol inicial T^0 (usualmente incluyendo solo el nodo raíz). Este árbol se obtiene añadiendo un nodo ficticio x_0 con aristas ficticias que conectan x_0 a cada vértice del grafo original. El proceso incluye los siguientes pasos:

1. *Selección de Arcos:* Si existe un arco $(x_k, x_l) \in A$ tal que $x_k \in Y$ (conjunto de

vértices fuertes en T_t) y $x_l \in Y_t$, entonces el árbol se transforma reemplazando el arco (x_s, x_r) en T^t con el arco (x_k, x_l) .

2. *Normalización*: Se normaliza el árbol resultante T^{t+1} asegurando que todos los arcos fuertes se encuentren en la misma rama del árbol y que dicha rama esté conectada directamente al nodo ficticio x_0 . Este proceso de normalización implica mover los arcos fuertes hacia el nodo raíz y ajustar las masas en consecuencia.

Se repiten los pasos 1 y 2 hasta que no sea posible encontrar un arco (x_k, x_l) que cumpla las condiciones descritas. En ese momento, el árbol T^{t+1} es el árbol final, y su conjunto de vértices fuertes Y^{t+1} corresponde al cierre máximo del grafo G .

A.2.3. Algoritmo de Pseudoflujo

Un pseudoflujo en una red es una asignación de valores reales a los arcos del grafo donde no se considera la restricción (A.4) de la conservación de flujos, permitiendo tanto excesos como déficits en los vértices. Para cada arco $(u, v) \in A$, el pseudoflujo asigna un valor f_{uv} tal que $0 \leq f_{uv} \leq c_{uv}$. El exceso de un nodo v se define como

$$\text{excess}(v) = \sum_{(u,v) \in A} f_{uv} - \sum_{(v,w) \in A} f_{vw}, \quad (\text{A.23})$$

donde $\text{excess}(v) > 0$ indica un *exceso* y $\text{excess}(v) < 0$ indica un *déficit*.

El *algoritmo de pseudoflow* se centra en la resolución del problema de corte bloqueador, el cual se presentará equivalente a un problema de flujo máximo. Se define sobre G_{st} , donde se añaden capacidades infinitos a los arcos desde el sumidero t a la fuente s para transformar el problema en uno de circulación.

Teorema A.2.1. *Para $S \subseteq V$, $\{s\} \cup S$ es el conjunto fuente de un corte mínimo en G_{st} si y solo si $(S, \bar{S})$ es un corte de bloqueo máximo en el grafo G .*

Teorema A.2.2. *Para un pseudoflow en G_{st} , existirá un flujo factible en el grafo G^{ext} .*

Las demostraciones pueden ser revisadas en [Hochbaum \(2008\)](#).

En este algoritmo, se hace uso de árboles de expansión y árboles normalizados para gestionar el pseudoflujo. Un *árbol de expansión* (del inglés, spanning tree) en el grafo extendido G^{ext} es un subgrafo acíclico que conecta todos los vértices del grafo con una raíz designada r .

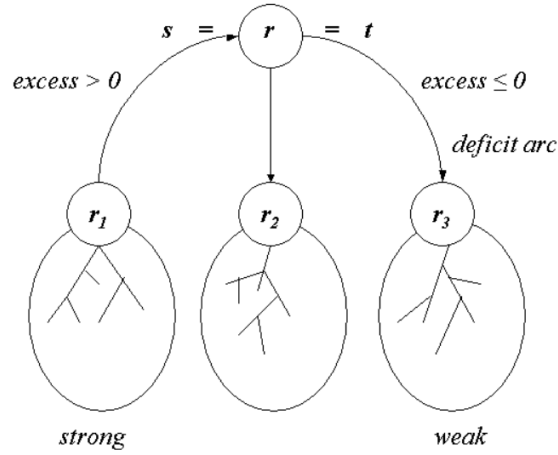


Figura A.1: Descripción de un árbol normalizado. Cada r_i es una raíz de la rama. Fuente: [Hochbaum \(2008\)](#).

Un *árbol normalizado* T , es una estructura jerárquica que se mantiene desde el algoritmo LG, derivada de un árbol de expansión en G^{ext} . Se caracteriza por organizar las ramas del árbol según el flujo asociado a cada vértice. En un árbol normalizado, las ramas pueden clasificarse en *fuertes* o *débiles* dependiendo del valor del flujo en ellas. Específicamente, una rama T_{r_i} se considera *fuerte* si el exceso de flujo asociado a su raíz, $\text{excess}(T_{r_i})$, es mayor que cero, indicando que hay más flujo entrando a la rama de lo que sale. En caso contrario, la rama se considera *débil*.

Un árbol de expansión T en G^{ext} con un pseudoflujo f en G_{st} se llamará *normalizado* si satisface las siguientes propiedades:

1. El pseudoflujo f satura todos los arcos adyacentes a la fuente s y al sumidero t .
2. El pseudoflujo f en los arcos fuera del árbol es igual a las capacidades límite (inferior o superior) de los arcos.
3. En cada rama del árbol, todas las capacidades residuales hacia abajo son estrictamente positivas.
4. Los únicos nodos que pueden violar las restricciones de balance de flujo en G_{st} son las raíces de sus respectivas ramas.

Estas propiedades aseguran que el conjunto de nodos fuertes en un árbol normalizado es una solución superóptima al problema de corte bloqueante. En el trabajo

de [Hochbaum \(2008\)](#), se presentan multiples resultados junto con sus respectivas demostraciones.

El proceso del pseudoflujo incluye los siguientes pasos:

1. *Inicialización:* Se comienza con un árbol normalizado simple donde cada nodo es su propia rama (singleton).
2. *Selección de arco:* Se elige un arco de fusión que conecta un nodo fuerte con un nodo débil.
3. *Fusión de ramas:* Las ramas correspondientes se fusionan, empujando el exceso a lo largo del camino resultante. Durante este proceso, si un arco no posee suficiente capacidad, se divide.
4. *Normalización:* Después de cada fusión y empuje de flujo, se asegura que el árbol resultante siga siendo normalizado.
5. *Iteración:* Se repite el proceso hasta que no existan arcos residuales entre nodos fuertes y débiles, lo que indica que se ha alcanzado la optimalidad.

A continuación, se presenta el algoritmo de pseudoflujo:

Algoritmo 4: Algoritmo de Pseudoflujo

Entrada: Grafo $G_{st} = (V_{st}, A_{st})$, pseudoflujo f , árbol normalizado T , conjuntos de nodos fuertes S y débiles W .

Salida : Corte máximo bloqueante y flujo máximo.

```
1 mientras  $(S, W) \cap A_f \neq \emptyset$  hacer
2   Seleccionar arco de fusión  $(s', w) \in (S, W)$ ;
3    $r_{s'} \leftarrow$  raíz de la rama fuerte que contiene  $s'$ ;
4    $r_w \leftarrow$  raíz de la rama débil que contiene  $w$ ;
5    $\delta \leftarrow \text{exceso}(r_{s'})$ ;
6    $T \leftarrow T \setminus [r, r_{s'}] \cup (s', w)$ ;
7    $i \leftarrow 1$ ;
8   mientras  $v_{i+1} \neq r$  hacer
9     Sea  $[v_i, v_{i+1}]$  la  $i$ -ésima arista en el camino;
10    si  $c_{v_i, v_{i+1}}^f \geq \delta$  entonces
11      Aumentar el flujo en  $\delta$ ;
12       $f_{v_i, v_{i+1}} \leftarrow f_{v_i, v_{i+1}} + \delta$ ;
13    en otro caso
14      Llamar al procedimiento split con parámetros
         $(v_i, v_{i+1}), \delta - c_{v_i, v_{i+1}}^f$ ;
15       $\delta \leftarrow c_{v_i, v_{i+1}}^f$ ;
16       $f_{v_i, v_{i+1}} \leftarrow c_{v_i, v_{i+1}}$ ;
17     $i \leftarrow i + 1$ ;
18 devolver Corte máximo bloqueante y flujo máximo;
```

El procedimiento de división (split) es esencial para manejar los casos en los que un arco no puede soportar el flujo completo que se intenta empujar. Este procedimiento se detalla a continuación:

Algoritmo 5: Procedimiento de División (Split)

Entrada: Arco (a, b) , flujo a empujar M .

Salida : Árbol normalizado actualizado.

```
1  $T \leftarrow T \setminus (a, b) \cup (a, r)$ ;
2  $\text{excess}(a) \leftarrow M$ ;
3  $f_{ar} \leftarrow M$ ;
4  $a$  se convierte en la raíz de una nueva rama fuerte;
5  $A_f \leftarrow A_f \cup \{(b, a)\} \setminus \{(a, b)\}$ ;
6 devolver Árbol normalizado actualizado;
```

Al final del proceso, el conjunto de nodos fuertes S obtenido representa el corte bloqueador máximo en el grafo original G , y el flujo máximo se puede derivar como un subproducto del algoritmo. El algoritmo de pseudoflow demuestra ser más rápido que el algoritmo LG, obteniendo una complejidad del orden $O(mn \log n)$, donde m corresponde al número de arcos y n corresponde al número de nodos.

Apéndice B

Resultados

B.1. Número de pushbacks factibles

Sea $\mathcal{P}$ una familia de pits multi-indexada por D criterios, es decir,

$$\mathcal{P} = \{P_{i_1, i_2, \dots, i_D} : i_k \in \{0, 1, \dots, N_k\} \quad \forall k = 1, \dots, D.\} \quad (\text{B.1})$$

La familia se compone de N pits. El número de pushbacks factibles se calcula a través de la siguiente fórmula:

$$\#\mathcal{F} = \prod_{k=1}^D \frac{N_k(N_k + 1)}{2}. \quad (\text{B.2})$$

Este cálculo proviene de la suma del conjunto de pits predecesores, para cada pit en $\mathcal{P}$:

$$\#\mathcal{F} = \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \dots \sum_{i_D=0}^{N_D} \#\text{PREC}_{\Phi(i_1, i_2, \dots, i_D)} \quad (\text{B.3})$$

La cardinalidad de este conjunto corresponde al “hipercubo” generado entre el pit inicial y el pit considerado. En la Figura [B.1](#) se muestra un ejemplo en dos dimensiones: dado un pit fijo, los pits predecesores forman un rectángulo junto con el pit considerado, por lo que el número de puntos se calcula como el área de dicho rectángulo. Para el caso (i), el rectángulo tiene un ancho de 4 y una altura de 8; restando el pit fijo, se obtiene $4 \cdot 8 - 1 = 31$. De manera similar, para el caso (ii), el rectángulo tiene un ancho de 7 y una altura de 6; restando el pit fijo, se obtiene $7 \cdot 6 - 1 = 41$.

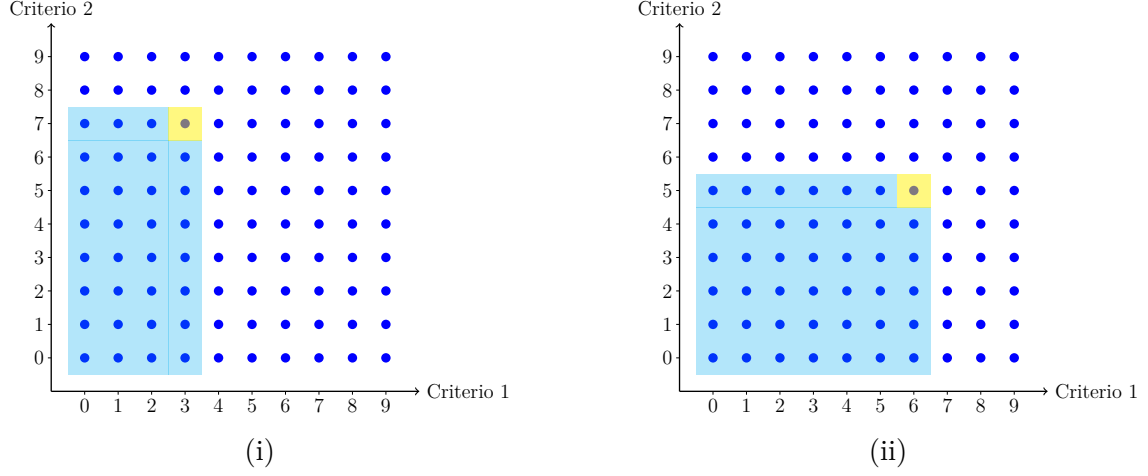


Figura B.1: Vista de pits predecesores (en azul) en una familia de pits en dos dimensiones para (i) pit con índices (3,7) (en amarillo) sumando 31; (ii) pit con índices (6,5) (en amarillo) sumando 41.

De esta forma, para cada pit, el número de posibles pits predecesores es:

$$\# \text{PREC}_{\Phi(i_1, i_2, \dots, i_D)} = (i_1 + 1) \cdot (i_2 + 1) \cdot \dots \cdot (i_D + 1) - 1 = \prod_{k=1}^D (i_k + 1) - 1 \quad (\text{B.4})$$

Luego, a partir de las ecuaciones (B.3) y (B.4), se tiene

$$\# \mathcal{F} = \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \dots \sum_{i_D=0}^{N_D} \left(\prod_{k=1}^D (i_k + 1) - 1 \right) \quad (\text{B.5})$$

Recordando que, como N es la cantidad de pits totales de $\mathcal{P}$:

$$N = \prod_{k=1}^D (N_k + 1) = \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \dots \sum_{i_D=0}^{N_D} 1. \quad (\text{B.6})$$

Entonces,

$$\#\mathcal{F} = \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \dots \sum_{i_D=0}^{N_D} \left(\prod_{k=1}^D (i_k + 1) - 1 \right) \quad (\text{B.7})$$

$$= \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \dots \sum_{i_D=0}^{N_D} \left(\prod_{k=1}^D (i_k + 1) \right) - \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \dots \sum_{i_D=0}^{N_D} 1 \quad (\text{B.8})$$

$$= \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \dots \sum_{i_D=0}^{N_D} \left(\prod_{k=1}^D (i_k + 1) \right) - \prod_{k=1}^D (N_k + 1) \quad (\text{B.9})$$

$$= \sum_{i_1=0}^{N_1} (i_1 + 1) \cdot \sum_{i_2=0}^{N_2} (i_2 + 1) \cdot \dots \cdot \sum_{i_D=0}^{N_D} (i_D + 1) - \prod_{k=1}^D (N_k + 1) \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{(N_1 + 1)(N_1 + 2)}{2} \cdot \frac{(N_2 + 1)(N_2 + 2)}{2} \cdot \dots \cdot \frac{(N_D + 1)(N_D + 2)}{2} - \prod_{k=1}^D (N_k + 1) \quad (\text{B.11})$$

$$= \prod_{k=1}^D \frac{(N_k + 1)(N_k + 2)}{2} - \prod_{k=1}^D (N_k + 1) \quad (\text{B.12})$$

$$= \prod_{k=1}^D (N_k + 1) \left(\frac{(N_k + 2)}{2} - 1 \right) \quad (\text{B.13})$$

$$= \prod_{k=1}^D (N_k + 1) \left(\frac{(N_k + 2)}{2} - \frac{2}{2} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$= \prod_{k=1}^D (N_k + 1) \left(\frac{N_k}{2} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$= \prod_{k=1}^D \frac{N_k(N_k + 1)}{2}. \quad (\text{B.16})$$

En la Ecuación (B.8) se descompone la suma. En (B.9) se reescribe el último término a partir de la ecuación (B.6). En (B.10) se factorizan los términos según cada índice, permitiendo intercambiar la productoria con la sumatoria. En (B.11) y (B.12) se aplica la propiedad de la suma de una serie aritmética. En (B.13) se factoriza por cada k desde 1 hasta D . En (B.14), (B.15) y (B.16) se desarrollan los pasos algebraicos finales para obtener la fórmula deseada.

Se puede ver que (B.16) es del orden $O\left(\prod_{k=1}^D N_k^2\right)$

Bibliografía

- Ahuja, Ravindra K., Magnanti, Thomas L. y Orlin, James B. (1993). “Maximum weight closure of a graph”. En: *Network flows*. MR 1205775. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall Inc. Cap. 19.2, págs. 719-724. ISBN: 0-13-617549-X.
- Ares, Gonzalo et al. (2022). “Open Pit Optimization Using the Floating Cone Method: A New Algorithm”. En: *Minerals* 12.4, pág. 495. DOI: [10.3390/min12040495](https://doi.org/10.3390/min12040495).
- Bai, X. et al. (2018). “Automatic generation of feasible mining pushbacks for open pit strategic planning”. En: *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy* 118.5, págs. 515-530. DOI: [10.17159/2411-9717/2018/v118n5a8](https://doi.org/10.17159/2411-9717/2018/v118n5a8).
- Bienstock, Daniel y Zuckerberg, Mark (2009). “A New LP Algorithm for Precedence Constrained Production Scheduling”. En: URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:3507276>.
- Carlson, T.R. et al. (1966). “Computer techniques in mine planning”. En: *Mining Engineering* 18, págs. 53-56.
- Chakrabarti, Amit (2005). *Lecture 3: Min-Cut Algorithms*. Computer Science 105, Algorithms (Graduate Level), Dartmouth College. Curso impartido en el Winter 2005. URL: <http://www.cs.dartmouth.edu/~ac/Teach/CS105-Winter05/Notes/loomis-scribe.ps>.
- Chandran, B.G. y Hochbaum, D.S. (2009). “A computational study of the pseudoflow and push-relabel algorithms for the maximum flow problem”. En: *Operations Research* 57.2, págs. 358-376.
- Chicoisne, Renaud et al. (2012). “A new algorithm for the open-pit mine production scheduling problem”. En: *Operations research* 60.3, págs. 517-528.
- Consuegra, F. R. Albor y Dimitrakopoulos, R. (2010). “Algorithmic approach to pushback design based on stochastic programming: Method, application and comparisons”. En: *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology* 119.2, págs. 88-101. DOI: [10.1179/037178410X12780655704761](https://doi.org/10.1179/037178410X12780655704761).
- Cullenbine, Christopher, Wood, R. y Newman, Alexandra (ago. de 2011). “A sliding time window heuristic for open pit mine block sequencing”. En: *Optimization Letters* 5, págs. 365-377. DOI: [10.1007/s11590-011-0306-2](https://doi.org/10.1007/s11590-011-0306-2).

- Dagdelen, K. y François-Bongarçon, D. (1982). “Towards the complete double parameterization of recovered reserves in open pit mining”. En: *Proceedings of 17th International APCOM Symposium*, págs. 288-296.
- Dagdelen, K. y Johnson, T.B. (1986). “Optimum open pit mine production scheduling by Lagrangian parameterization”. En: *Proceedings of the 19th APCOM Symposium of the Society of Mining Engineers, AIME*. New York, págs. 127-141.
- David, M., Dowd, P.A. y Korobov, S. (1974). “Forecasting departure from planning in open pit design and grade control”. En: *Proceedings of the 12th Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industries (APCOM)*. Boulder, CO, USA, F131-F142.
- Delgado, José (s.f.). *Apuntes del curso de planificación de minas*. Curso impartido en la Universidad de Antofagasta. Material del curso sin fecha establecida.
- Deutsch, M. (2019). “Open-Pit Mine Optimization with Maximum Satisfiability”. En: *Mining, Metallurgy & Exploration* 36, págs. 757-764. DOI: [10.1007/s42461-019-0062-x](https://doi.org/10.1007/s42461-019-0062-x).
- Deutsch, M., Dagdelen, K. y Johnson, T. (2023). “A Dynamic Programming Algorithm for Selecting Evenly Spaced Pushbacks from Nested Pits”. En: *Proceedings of the 41st Applied Computational Operations Research in the Mineral Industries (APCOM) Symposium*.
- Dowd, P.A. y Onur, A.H. (1993). “Open-pit optimization. 1. Optimal open-pit design”. En: *Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy* 102, A95-A104.
- Elahi, E., Kakaie, R. y Yusefi, A. (2012). “A new algorithm for optimum open pit design: Floating cone method III”. En: *Journal of Mining and Environment* 2, págs. 118-125.
- Espinoza, Daniel et al. (2013). “MineLib: a library of open pit mining problems”. En: *Annals of Operations Research* 206.1, págs. 93-114. ISSN: 1572-9338. DOI: [10.1007/s10479-012-1258-3](https://doi.org/10.1007/s10479-012-1258-3).
- Ford Jr., L. R. y Fulkerson, D. R. (1962). *Flows in Networks*. MR0159700. Princeton University Press, pág. 1.
- Hochbaum, Dorit (2001). “A New-Old Algorithm for Minimum-cut and Maximum-flow in Closure Graphs”. En: *Operations Research* 37.4, págs. 171-193.
- Hochbaum, D.S. (2008). “The pseudoflow algorithm: a new algorithm for the maximum-flow problem”. En: *Operations Research* 56.4, págs. 992-1009.
- Hochbaum, D.S. y Chen, A. (2000). “Performance analysis and best implementations of old and new algorithms for the open-pit mining problem”. En: *Operations Research* 48.6, págs. 894-914.

- Jélvez, Enrique (2017). “Metodología multietapa para la planificación de la producción de largo plazo en minas a rajo abierto bajo incertidumbre geológica”. En: *Santiago de Chile: Repositorio Universidad de Chile*.
- Jélvez, Enrique, Morales, Nelson y Askari-Nasab, Hooman (2020). “A new model for automated pushback selection”. En: *Computers & Operations Research* 115, pág. 104456.
- Johnson, T.B. (1968). “Optimum open-pit mine production scheduling”. Corpus ID: 109011361. Tesis doct. University of California, Berkeley. DOI: [10.21236/ad0672094](https://doi.org/10.21236/ad0672094).
- Johnson, T.B. (1969). “Optimum Production Scheduling”. En: *Proceedings of the 8th International Symposium on Computers and Operations Research*. Salt Lake City, págs. 539-562.
- Jélvez, Enrique et al. (2020). “A comparison between conventional nested pits based on LG and an extended approach for generating nested pits in open-pit mine production”. En: *8th International Conference & Exhibition on Mass Mining (MASSMIN 2020)*. Santiago, Chile. DOI: [10.36487/acg_repo/2063_108](https://doi.org/10.36487/acg_repo/2063_108). URL: https://delphoslab.cl/Publicaciones/2020/MRN_massmin2020.pdf.
- Khalou, K.R. (2007). “Optimum Open Pit Design with Modified Moving Cone II Methods”. En: *Journal of Faculty of Engineering* 41, págs. 297-307.
- Kržanović, Daniel, Vušović, Nenad y Ljubojev, Milenko (2018). “Selection of the optimum pushbacks in a long-term planning process of the open pit: A condition for maximization the net present value: Case study: The open pit Veliki Krivelj, Serbia”. En: *Mining and Metallurgy Engineering Bor* 1-2, págs. 37-44.
- Lerchs, Helmut y Grossmann, Ingo (1965). “Optimum design of open-pit mines”. En: *CIM bulletin* 58.633, págs. 47-54.
- Meagher, C, Dimitrakopoulos, R y Avis, D (2014). “Optimized open pit mine design, pushbacks and the gap problema review”. En: *Journal of Mining Science* 50, págs. 508-526.
- Miranda, Javiera (2023). “Evaluación de un modelo de optimización para la generación automática de pushbacks en minería a cielo abierto”. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Morales, Nelson, Nelis, Gonzalo y Amaya, Jorge (2023). “An efficient method for optimizing nested open pits with operational bottom space”. En: *Int. Trans. Oper. Res.* 31, págs. 1609-1630. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:264333328>.
- Nancel-Penard, Pierre y Jelvez, Eduardo (2023). “A direct block scheduling model considering operational space requirement for strategic open-pit mine production

- planning”. En: *Optimization and Engineering*. DOI: [10.1007/s11081-023-09875-z](https://doi.org/10.1007/s11081-023-09875-z).
- Nancel-Penard, Pierre y Morales, Nelson (2021). “Optimizing pushback design considering minimum mining width for open pit strategic planning”. En: *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, págs. 1494-1508. DOI: [10.1080/0305215X.2021.1941919](https://doi.org/10.1080/0305215X.2021.1941919).
- Pana, M.T. (1965). “The simulation approach to open pit design”. En: *Proceedings of the 5th Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industries (APCOM)*. Tucson, Arizona, USA, ZZ1-ZZ24.
- Picard, Jean-Claude (1976). “Maximal closure of a graph and applications to combinatorial problems”. En: *Management science* 22.11, págs. 1268-1272.
- Ramazan, S. y Dagdelen, K. (1998). “A new push back design algorithm in open pit mining”. En: *Proceedings of the 17th MPES conference*. Calgary, Canada, págs. 119-124.
- Seymour, F. (1995). “Pit limit parameterization from modified 3D Lerchs-Grossmann algorithm”. En: *Proceedings of the SME*. Preprint Number:95-96.
- Vallet, R. (1976). “Optimisation mathématique de l’exploitation d’une mine a ciel ouvert ou le problem de l’enveloppe”. En: *Annales des Mine de Belgique*, págs. 113-135.
- Wang, Q. y Sevim, H. (1995). “Alternative to parameterization in finding a series of maximum-metal pits for production planning”. En: *Mining Engineering* 47.2, págs. 178-182.
- Wolsey, Laurence A. (2020). *Integer Programming*. John Wiley & Sons. ISBN: 9781119606536. DOI: [10.1002/9781119606475](https://doi.org/10.1002/9781119606475).
- Wright, A. (1999). “MOVING CONE II-A simple algorithm for optimum pit limits design”. En: *Proceedings of the 28th Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industries (APCOM)*. Golden, CO, USA, págs. 367-374.
- Yarmuch, J. et al. (2021). “A mathematical model for mineable pushback designs”. En: *International Journal of Mining, Reclamation and Environment* 35.7, págs. 523-539. DOI: [10.1080/17480930.2021.1885582](https://doi.org/10.1080/17480930.2021.1885582).
- Yarmuch, J. L. y Rubinstein, H. (2023). “Developing and Testing an Optimization Algorithm for Practical Open-Pit Pushback Design”. En: *Proceedings of the 41st Applied Computational Operations Research in the Mineral Industries (APCOM) Symposium*.
- Yarmuch, Juan L (2020). “Optimisation in open-pit mine planning.” Tesis doct. University of Melbourne, Victoria, Australia.
- Yarmuch, Juan L. y Sepulveda, Gonzalo (2024). “Application of Mining Width-Constrained Open Pit Mine Production Scheduling Problem to the Medium-Term

Planning of Radomiro Tomic Mine: A Case Study”. En: *Mining, Metallurgy & Exploration* 41.2, págs. 681-693.