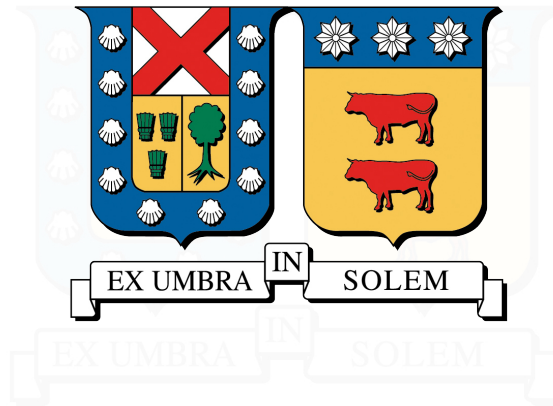


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
VALPARAÍSO - CHILE



ESTUDIO NUMÉRICO DE SISTEMAS DE MICROPROPULSIÓN PARA CONTROL ORBITAL DE CUBESATS

TOMÁS EUGENIO CÁRDENAS MUTIS

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO

PROFESOR GUÍA : DR. RODRIGO CASSINELI PALHARINI
PROFESOR CORREFERENTE : DR. HARVEY ZAMBRANO RODRIGUEZ

DICIEMBRE 2022

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mi madre, quien siempre ha estado a mi lado, apoyándome incondicionalmente en mi desarrollo personal, a mis hermanos, quienes siempre son fuente de inspiración, motivación y entretenimiento, y en especial a mi padre, quien estará siempre en mi memoria.

También quisiera agradecer a mis amigos, con quienes he pasado tantas noches estudiando y festejando. No cabe duda de que sin ustedes mi vida universitaria hubiera sido muy difícil y aburrida.

En particular, quiero agradecer al profesor Cassineli, quien me ha acogido como su estudiante memorista, siendo que yo no pertenezco al Campus San Joaquín, lugar donde él realiza sus labores docentes.

Finalmente, quiero agradecer al Departamento de Ingeniería Mecánica, donde sus profesores, funcionarios e infraestructura me han dado las herramientas para desarrollar mi conocimiento en la linda área de la Ingeniería Mecánica, tanto en el ámbito académico, como el ámbito extracurricular.



RESUMEN EJECUTIVO

En la presente memoria de titulación se realizó un estudio numérico de sistemas de micropropulsión de gas frío para control orbital de CubeSats, con el propósito de establecer geometrías y parámetros óptimos para distintas configuraciones de microtoberas, determinar la influencia del tipo de gas frío (N_2 y Ar) sobre el empuje e impulso específico, y analizar comparativamente la eficiencia del micropropulsor para distintas configuraciones de microtoberas y gas frío a ser utilizado. Para ello, se realiza un análisis computacional de gases enrarecidos sobre arreglos de microtoberas de sección rectangular, utilizando el método Direct Simulation Monte Carlo (DSMC), mediante la herramienta computacional OpenFOAM. A fin de establecer los parámetros geométricos indicados, se realiza una comparación entre una microtobera compuesta por paredes curvas, y una compuesta por paredes rectas. Para lograr un adecuado modelamiento numérico, se hizo un proceso de verificación y validación, donde el primero evalúa si los métodos computacionales son resueltos correctamente, y el segundo verifica si los resultados obtenidos representan correctamente el proceso físico. Luego de este proceso, se realizan 4 simulaciones, utilizando ambas geometrías y gases descritos, independientemente, evaluando los efectos sobre las propiedades macroscópicas del flujo, el número de Knudsen, propiedades de superficie, y los parámetros de desempeño. Los resultados obtenidos indican que el uso de gas nitrógeno conlleva un aumento del impulso específico en aproximadamente un 23 %, a un costo relativamente insignificante de empuje. Por otro lado, el uso de una geometría curva aumenta el impulso específico y empuje generado en un 23 % y 35 %, respectivamente. En resumen, los resultados indican que para micropropulsores de gas frío, el uso de gases más ligeros incrementa la eficiencia del micropropulsor, mientras que las geometrías curvas mejoran considerablemente el desempeño general de estos dispositivos, en contraste con geometrías planas más sencillas.

Palabras Clave. DSMC, OpenFOAM, Micropropulsor, Dinámica de Gases Enrarecidos, Métodos Numéricos.

ABSTRACT

In the present thesis work, a numerical study of cold gas micropropulsion devices for orbital control of CubeSats was carried out, to establish optimal geometries and parameters for different micronozzle configurations, determine the influence of the type of cold gas (N_2 and Ar) on the thrust and specific impulse, and to comparatively analyze the efficiency of the micronozzle for different micronozzle and cold gas configurations to be used. For this, a computational analysis of rarefied gases on arrays of rectangular cross-section micronozzles is performed, using the Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) method, with the help of the OpenFOAM software. To obtain the indicated geometrical parameters, a comparison is made between a micronozzle composed of curved walls and one composed of straight walls. To achieve adequate numerical modeling, a verification and validation process was performed, where the first one evaluates if the computational methods are correctly solved, and the second one verifies if the results obtained correctly represent the physical process. After this process, 4 simulations are performed, using both geometries and gases described, independently, evaluating the effects on the macroscopic flow properties, Knudsen number, surface properties, and performance parameters. The results obtained indicate that the use of nitrogen gas leads to an increase in the specific impulse by approximately 23 %, at a relatively insignificant thrust cost. On the other hand, the use of a curved geometry increases the specific impulse and thrust generated by 23 % and 35 %, respectively. In summary, these results indicate that for cold gas microthrusters, the use of lighter gases increases the microthruster efficiency, while curved geometries greatly improve the overall performance of such devices, in contrast to simpler, flat geometries.

Keywords. DSMC, OpenFOAM, Micronozzle, Rarefied Gas Dynamics, Numerical Methods.

Índice de Contenidos

1. Introducción	1
2. Marco Teórico	3
2.1. Modelación de Flujos	3
2.1.1. Escalas de Flujos	5
2.1.2. Modelos Continuos - Ecuaciones de Navier-Stokes	6
2.1.3. Modelos Continuos - Flujo Isentrópico quasi 1-D	8
2.1.4. Modelos Moleculares - Ecuación de Boltzmann	9
2.2. Método Direct Simulation Monte Carlo (DSMC)	12
2.2.1. Perspectiva General	12
2.2.2. Metodología	12
2.2.3. Colisiones Elásticas Binarias	14
2.2.4. Modelos moleculares	20
2.2.4.1. Modelo de ley de potencia inversa	20
2.2.4.2. Modelo esfera rígida HS	21
2.2.4.3. Modelo esfera rígida variable VHS	22
2.2.4.4. Modelo esfera blanda variable VSS	23
2.2.4.5. Modelo esfera dura generalizado GHS	23
2.2.5. Técnicas de Muestreo de Colisiones	23
2.2.6. Muestreo de Propiedades Macroscópicas	24
3. Procedimiento Computacional	27
3.1. Geometría	27
3.1.1. Microtobera Recta	27
3.1.2. Microtobera Curva	28
3.2. Parámetros computacionales	29
4. Verificación y Validación	32

4.1. Verificación	32
4.1.1. Efectos de la Discretización Espacial	32
4.1.2. Efectos de la Discretización Temporal	37
4.1.3. Efectos del Número de Partículas por Celda	40
4.1.4. Efectos del Número de Iteraciones	42
4.2. Validación	45
5. Resultados	51
5.1. Propiedades macroscópicas del flujo	51
5.1.1. Número de Mach	51
5.1.2. Densidad	59
5.1.3. Presión	67
5.1.4. Temperatura	74
5.1.5. Número de Knudsen	81
5.2. Propiedades aerodinámicas superficiales	86
5.2.1. Coeficiente de Presión	87
5.2.2. Coeficiente de Fricción	89
5.2.3. Coeficiente de Transferencia de Calor	91
5.3. Parámetros de desempeño	92
6. Conclusiones	95
Bibliografía	97

Índice de Tablas

2.1. Diferentes regímenes de número de Knudsen. Fuente: Gad-el Hak (2006)	5
3.1. Parámetros geométricos de la microtobera recta.	28
3.2. Dimensiones generales de la microtobera curva.	29
3.3. Dimensiones específicas de la microtobera curva.	29
3.4. Parámetros moleculares. Fuente: Bird (1994)	30
3.5. Condiciones de flujo.	31
4.1. Diferentes mallados aplicados en el proceso de verificación.	33
4.2. Parámetros moleculares.	46
4.3. Condiciones de flujo.	46
5.1. Parámetros de desempeño.	94

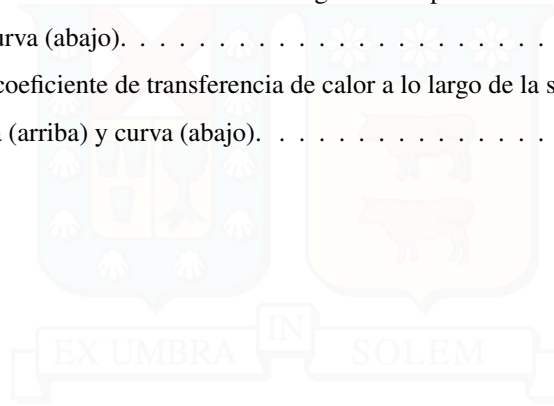
Índice de Figuras

1.1. Familia de CubeSats. Fuente: The CubeSat Program (2022)	1
2.1. Modelos de flujos moleculares y continuos. Fuente: Adaptado de Gad-el Hak (2006)	3
2.2. Límites para el número de Knudsen sobre los modelos matemáticos. Fuente: Adaptado de Bird (1994)	5
2.3. Límites efectivos de diferentes modelos. Fuente: Adaptado de Bird (1994)	10
2.5. Distintos marcos de referencia para el análisis de colisiones binarias. (a) Marco de referencia respecto al laboratorio. (b) Marco de referencia respecto al centro de masa. (c) Interacción de la partícula de masa reducida con un centro de dispersión fijo. Fuente: Adaptado de Bird (1994)	17
2.6. Parámetros de impacto. Fuente: Adaptado de Bird (1994)	18
2.7. Campo de fuerza intermolecular típico. Fuente: Adaptado de Bird (1994)	20
2.8. Geometría de colisión entre moléculas HS. Fuente: Adaptado de Bird (1994)	22
3.1. Arreglo de microtoberas. Fuente: Horisawa et al. (2009)	27
3.2. Vista en corte de un arreglo de microtoberas.	27
3.3. Esquema geométrico de la tobera recta.	28
3.4. Esquema geométrico de la tobera curva.	29
3.5. Esquema del dominio computacional y condiciones de borde de la tobera recta (a) y la tobera curva (b).	30
4.1. Influencia de variar el tamaño de celdas en la dirección x (arriba) y en la dirección y (abajo) sobre el número de Mach.	34
4.2. Influencia de variar el tamaño de celdas en la dirección x (arriba) y en la dirección y (abajo) sobre la presión.	35
4.3. Influencia de variar el tamaño de celdas en la dirección x (arriba) y en la dirección y (abajo) sobre la temperatura.	36
4.4. Influencia de variar el tamaño de celdas en la dirección x (arriba) y en la dirección y (abajo) sobre la densidad.	37
4.5. Influencia de variar el intervalo temporal sobre el número de Mach (arriba) y la presión (abajo).	39

4.6. Influencia de variar el intervalo temporal sobre la temperatura (arriba) y la densidad (abajo).	40
4.7. Influencia de variar el número de partículas por celda sobre el número de Mach (arriba) y la presión (abajo).	41
4.8. Influencia de variar el número de partículas por celda sobre la temperatura (arriba) y la densidad (abajo).	42
4.9. Avance de la energía cinética lineal promedio a lo largo de la simulación.	43
4.10. Influencia de variar el número de iteraciones sobre el número de Mach (arriba) y la presión (abajo).	44
4.11. Influencia de variar el número de iteraciones sobre la temperatura (arriba) y la densidad (abajo).	45
4.12. Distribución del número de Mach (arriba) y presión (abajo) a lo largo de la tobera para diferentes presiones externas.	47
4.13. Distribución de la temperatura (arriba) y densidad (abajo) a lo largo de la tobera para diferentes presiones externas.	48
4.14. Comparación entre resultados experimentales y numéricos para el flujo másico.	49
4.15. Comparación entre la distribución del número de Mach a lo largo de la línea central para simulaciones isentrópicas, Navier-Stokes y DSMC a presión externa de 10 kPa, con respecto a el estudio presente.	49
5.1. Comparación entre la distribución del número de Mach a lo largo de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	53
5.2. Comparación entre la distribución del número de Mach a lo largo de las microtoberas utilizando nitrógeno (arriba) y argón (abajo).	54
5.3. Comparación entre los perfiles del número de Mach en la entrada de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	55
5.4. Comparación entre los perfiles del número de Mach en la garganta de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	56
5.5. Comparación entre los perfiles del número de Mach en la salida de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	57
5.6. Contornos de número de Mach.	58
5.7. Distribución de las líneas de flujo a lo largo de las toberas.	59
5.8. Comparación entre la distribución de la densidad a lo largo de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	61
5.9. Comparación entre la distribución de la densidad a lo largo de las microtoberas utilizando nitrógeno (arriba) y argón (abajo).	62
5.10. Comparación entre los perfiles de la densidad en la entrada de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	63

5.11. Comparación entre los perfiles de la densidad en la garganta de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	64
5.12. Comparación entre los perfiles de la densidad en la salida de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	65
5.13. Contornos de densidad.	66
5.14. Comparación entre la distribución de la presión a lo largo de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	68
5.15. Comparación entre la distribución de la presión a lo largo de las microtoberas utilizando nitrógeno (arriba) y argón (abajo).	69
5.16. Comparación entre los perfiles de la presión en la entrada de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	70
5.17. Comparación entre los perfiles de la presión en la garganta de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	71
5.18. Comparación entre los perfiles de la presión en la salida de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	72
5.19. Contornos de presión.	73
5.20. Comparación entre la distribución de la temperatura a lo largo de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	75
5.21. Comparación entre la distribución de la temperatura a lo largo de las microtoberas utilizando nitrógeno (arriba) y argón (abajo).	76
5.22. Comparación entre los perfiles de la temperatura en la entrada de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	77
5.23. Comparación entre los perfiles de la temperatura en la garganta de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	78
5.24. Comparación entre los perfiles de la temperatura en la salida de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	79
5.25. Contornos de temperatura.	80
5.26. Comparación entre la distribución del número de Knudsen a lo largo de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	82
5.27. Comparación entre la distribución del número de Knudsen a lo largo de las microtoberas utilizando nitrógeno (arriba) y argón (abajo).	83
5.28. Comparación entre los perfiles del número de Knudsen en la entrada de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	84
5.29. Comparación entre los perfiles del número de Knudsen en la garganta de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	85

5.30. Comparación entre los perfiles del número de Knudsen en la salida de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	86
5.31. Distribución del coeficiente de presión a lo largo de la superficie interna de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	88
5.32. Distribución del coeficiente de fricción a lo largo de la superficie interna de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	90
5.33. Distribución del coeficiente de transferencia de calor a lo largo de la superficie interna de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).	92



1 | Introducción

En los últimos años, ha existido una demanda creciente de sistemas de propulsión en el espacio que permitan a los satélites pequeños lograr el control de orientación y órbita, las transferencias orbitales y la salida de órbita al final de su vida útil. Esto es particularmente importante para la gran cantidad de constelaciones LEO y MEO que se están desarrollando actualmente, ya que el control de la constelación será un factor importante en el éxito de estas empresas ([Airbus, 2023](#)). Durante la última década, ha habido una explosión de actividad en el mundo de la propulsión de satélites pequeños, impulsada por los avances tecnológicos, la comercialización de la industria y la inversión privada ([Venkatesan et al., 2020](#)).

Generalmente, se conoce como 'satélite pequeño' a cualquier vehículo espacial los cuales posean una masa en órbita de menos de 300 kg ([NASA CubeSat Launch Initiative, 2017](#)). El uso de este tipo de satélites tiene múltiples ventajas: volúmenes y masas reducidas, bajo consumos de potencia, y más importante, un pequeño tiempo y costo de desarrollo. Dentro de esta clasificación, uno de los modelos más versátiles a utilizar son los llamados *CubeSats*. Los CubeSats son una familia de satélites que adoptan un tamaño y forma estándar, donde cada unidad está definida como 'U', donde un CubeSat de 1U es un cubo de 10 cm con una masa no superior a 2 kg ([The CubeSat Program, 2022](#)). La Figura 1.1 muestra una familia de diferentes configuraciones de CubeSats.

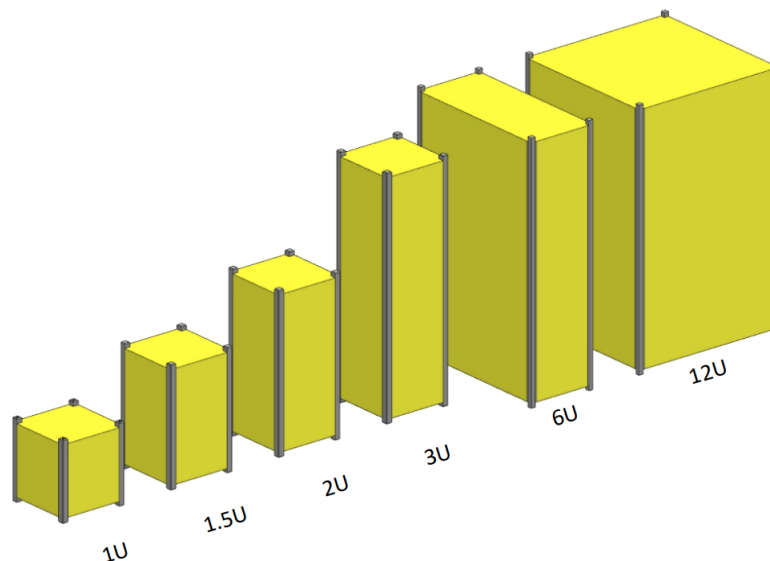


Figura 1.1: Familia de CubeSats.

Fuente: [The CubeSat Program \(2022\)](#)

Los CubeSats, de igual forma que los satélites convencionales, requieren de mecanismos para controlar su orientación y órbita, además de permitir un reingreso a la tierra luego que su vida útil termine, para evitar el siempre creciente problema de la basura espacial. Un claro problema de los satélites pequeños es donde ubicar un propulsor en el confinado espacio de ellos. A esto entra el desarrollo de los micropropulsores. Estos dispositivos, los cuales caben dentro de la categoría de los sistemas microelectromecánicos o MEMS ([Gad-el Hak, 2006](#)), por sus siglas en inglés, generalmente tienen dimensiones características del orden 100 micrómetros, y tienen como propósito generar eficientemente el empuje necesario para realizar las maniobras orbitales que requieran estos vehículos espaciales.

Esta memoria de titulación tiene como principal objetivo investigar numéricamente sistemas de micropropulsión de gas frío para control orbital de CubeSats. Para ello, se utilizó el método Direct Simulation Monte Carlo, el cual tiene su origen en la teoría molecular de [Bird \(1963\)](#), mediante el solver dsmcFoamPlus, del software Open-Source OpenFOAM. Las simulaciones son realizadas utilizando dos especies distintas de gases fríos, nitrógeno y argón, y dos tipos de geometría de microtobera convergente-divergente, una compuesta de secciones curvas, y otra compuesta de secciones rectas. Luego se analiza comparativamente la eficiencia de las 4 configuraciones propuestas (2 gases y 2 geometrías), y los efectos sobre el campo de flujo, coeficientes adimensionales y parámetros de desempeño, con el fin de determinar cuál configuración entrega mejores resultados.

2 | Marco Teórico

2.1. Modelación de Flujos

Existen dos maneras en las cuales se puede modelar un flujo. Se puede representar el fluido tal como es en realidad, compuesto por un conjunto de moléculas, o como un continuo donde se asume que la materia que lo compone es infinitesimalmente divisible. El primer método se subdivide en métodos determinísticos y probabilísticos, mientras que en el segundo método las propiedades macroscópicas como velocidad, presión, temperatura, etc., son definidas para cada punto en el espacio y tiempo, y la conservación de masa y energía llevan a un set de ecuaciones diferenciales parciales no lineales: Euler; Navier-Stokes; Burnett, etc. (Gad-el Hak, 2006). Esta clasificación se aprecia en la Figura 2.1.

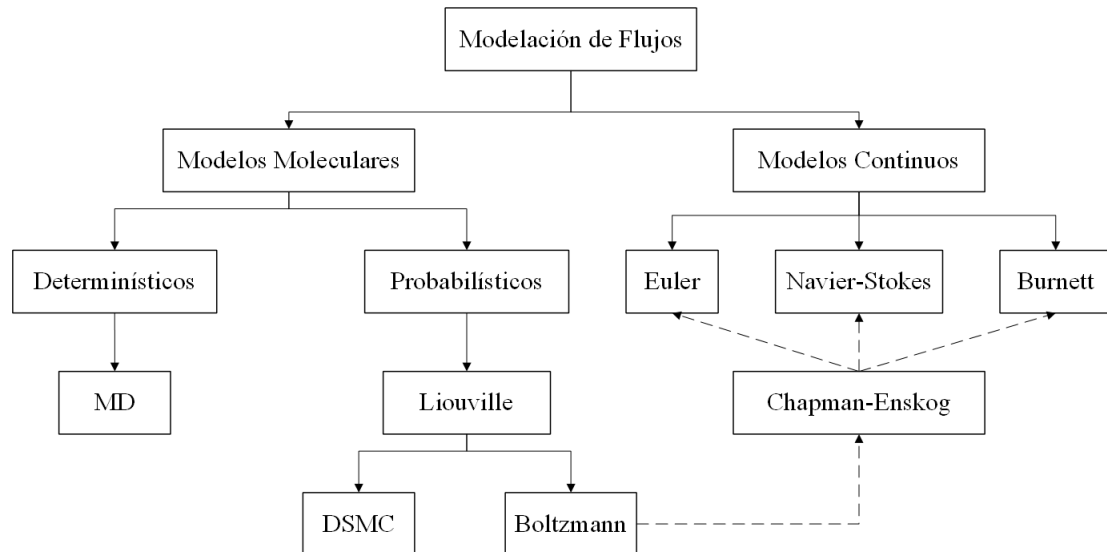


Figura 2.1: Modelos de flujos moleculares y continuos.

Fuente: Adaptado de Gad-el Hak (2006)

El modelo del continuo, representado por las ecuaciones de Navier-Stokes, ignora la naturaleza molecular de los fluidos, y lo considera como un medio continuo descrito por las variaciones espaciales y temporales de las propiedades macroscópicas. Este modelo es matemáticamente más fácil de manejar y es más conocido que los modelos moleculares, por lo que es recomendable utilizarlo siempre que sea válido

(Gad-el Hak, 2006). Por ende, se requiere de criterios sólidos sobre las condiciones de aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes predicen resultados coherentes con la realidad siempre y cuando las propiedades locales puedan ser definidas como promedios sobre elementos suficientemente grandes respecto a la estructura microscópica del flujo, y suficientemente pequeñas respecto a los fenómenos macroscópicos para poder utilizar las herramientas del cálculo diferencial. Adicionalmente, el flujo debe encontrarse cercano al equilibrio termodinámico. Las ecuaciones de flujo continuo no forman un set determinado, y los flujos de calor y esfuerzos de corte deben ser expresados en términos de cantidades macroscópicas de orden bajo, donde los supuestos lineales son válidos solo para dicho equilibrio termodinámico (Gad-el Hak, 2006).

Una dimensión característica del comportamiento molecular de los gases es el camino libre medio λ , el cual se define como la distancia promedio recorrida por las moléculas antes de colisionar con otra. Para un gas ideal modelado como esferas rígidas, λ está relacionado con la temperatura T y la presión p como

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n d^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} p d^2} \quad (2.1)$$

donde n es la densidad molecular, d es el diámetro molecular, y k_B es la constante de Boltzmann.

El modelo continuo de Navier-Stokes es válido cuando λ es mucho menor a una dimensión característica L . El valor de este parámetro puede ser una longitud del flujo, como por ejemplo el diámetro de una tubería, pero una definición más precisa se obtiene a través de la escala del gradiente de alguna cantidad macroscópica ϕ ,

$$L = \frac{\phi}{|\nabla \phi|}. \quad (2.2)$$

La razón entre el camino libre medio y la longitud característica se conoce como el número de Knudsen

$$Kn = \frac{\lambda}{L}. \quad (2.3)$$

Otros números adimensionales relevantes en el estudio de flujos en microcanales son el número de Reynolds Re y Mach M , definidos por

$$Re = \frac{v_o L}{\nu} \quad (2.4)$$

$$M = \frac{v_o}{a_o} \quad (2.5)$$

donde v_o es una velocidad característica del flujo, ν es la viscosidad cinemática del fluido, y a_o es la velocidad del sonido en el medio.

El número de Reynolds puede definirse como la razón entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas, y tiene la utilidad de cuantificar el nivel de turbulencia del flujo. Por otro lado, el número de Mach se define como la razón entre las fuerzas inerciales y las fuerzas elásticas, y es una medida dinámica del nivel de compresibilidad. El número de Knudsen puede expresarse en función de estos dos parámetros adimensionales

como

$$Kn = \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}} \frac{M}{Re}, \quad (2.6)$$

donde γ es la razón de calores específicos (Gad-el Hak, 2006).

2.1.1. Escalas de Flujos

Los flujos de gases enrarecidos se encuentran generalmente en flujos sobre geometrías pequeñas, como por ejemplo en dispositivos MEMS, y en aplicaciones de baja presión como a grandes altitudes. El número de Knudsen local para un flujo en particular determina el grado de enrarecimiento y el método por el cual modelar dicho flujo. Para el límite cuando Knudsen tiende a 0, los términos de transporte en las ecuaciones de momentum y energía se vuelven insignificantes y las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a la ecuación invísida de Euler. A medida que aumenta Kn , los efectos de enrarecimiento aumentan, y los modelos continuos pierden validez, por lo cual se requiere de un enfoque molecular ([Gad-el Hak, 2006](#)). Los diferentes regímenes de Knudsen se muestran en la Figura 2.2, y la Tabla 2.1.

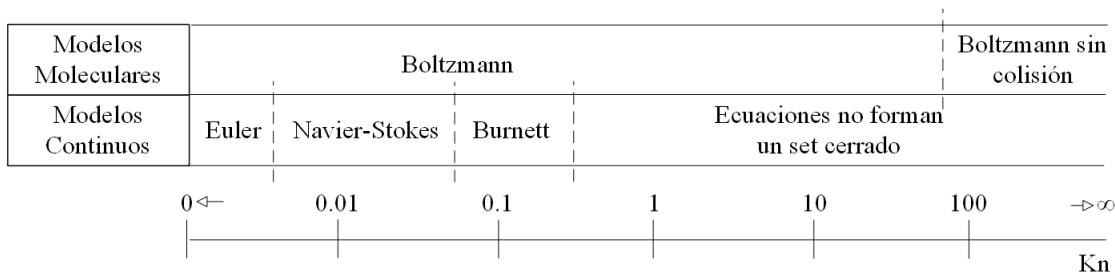


Figura 2.2: Límites para el número de Knudsen sobre los modelos matemáticos.

Fuente: Adaptado de Bird (1994)

Tabla 2.1: Diferentes regímenes de número de Knudsen.

Fuente: Gad-el Hak (2006)

Régimen de flujo	Rango
Ecuaciones de Euler	$Kn \rightarrow 0$
Navier-Stokes con no-deslizamiento	$Kn < 10^{-3}$
Navier-Stokes con deslizamiento	$10^{-3} \leq Kn < 10^{-1}$
Transición	$10^{-1} \leq Kn < 10$
Libre molecular	$Kn \geq 10$

Consideremos un microcanal largo donde la entrada se encuentra a presión atmosférica y la salida en una condición cercana al vacío. A medida que el aire entra al ducto, la presión y la densidad disminuyen mientras que la velocidad, número de Knudsen y Mach aumentan. Entonces, dentro de esta configuración es completamente posible encontrarnos con un caso donde todos los regímenes de flujo mencionados anteriormente ocurran en el mismo canal.

Por esta razón, en el estudio de micropropulsores y microcanales en general es de gran importancia seleccionar un modelo que logre representar correctamente todas las escalas de flujo presentes.

2.1.2. Modelos Continuos - Ecuaciones de Navier-Stokes

En esta sección se presentarán los principales modelos continuos utilizados en el análisis de micropropulsores y propulsores en general.

Como mencionado anteriormente, un fluido continuo implica que las propiedades locales, como densidad y la velocidad, estén definidas como promedios sobre elementos que son suficientemente grandes en comparación de la estructura microscópica, pero suficientemente pequeños para utilizar las herramientas del cálculo diferencial. Para aquellos flujos donde estas condiciones son válidas, la conservación de masa, momentum y energía pueden ser expresadas como un set de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = 0 \quad (2.7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \Sigma_{ki}}{\partial x_k} + \rho g_i \quad (2.8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \Sigma_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (2.9)$$

donde ρ es la densidad del fluido, u_k es una componente de la velocidad instantánea en 3 dimensiones, Σ_{ki} es el tensor de esfuerzo de segundo orden, g_i es la fuerza sobre el cuerpo por unidad de masa, e es la energía interna, y q_k es la suma del flujo de calor por radiación y convección (Gad-el Hak, 2006).

Tal como se muestran, estas ecuaciones no forman un set determinado, por lo que es necesario encontrar una relación entre el tensor de esfuerzos y la tasa de deformación, una relación entre el flujo de calor y el campo de temperatura, y ecuaciones de estado que relacionen las diferentes propiedades termodinámicas entre sí. Tanto la relación de esfuerzo-deformación y la relación del gradiente de temperatura con el flujo de calor pueden aproximarse como lineales si el flujo está cercano al equilibrio termodinámico. Para un gas ideal, Newtoniano, isotrópico que sigue la ley de Fourier, estas relaciones se presentan como

$$\Sigma_{ki} = -p\delta_{ki} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \delta_{ki} \quad (2.10)$$

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} + \text{Flujo de calor por radiación} \quad (2.11)$$

$$de = c_v dT \quad (2.12)$$

$$p = \rho RT \quad (2.13)$$

donde p es la presión, μ y λ son los coeficientes de viscosidad de primer y segundo orden, respectivamente, δ_{ki} es el delta de Kronecker, κ es la conductividad térmica, T es el campo de temperatura, c_v es el calor específico a volumen constante, y R es la constante individual del gas (Gad-el Hak, 2006). Con estas relaciones y obviando la transferencia de calor por radiación las Ecuaciones 2.7, 2.8, 2.9 se reescriben como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = 0 \quad (2.14)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \delta_{ki} \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] \quad (2.15)$$

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) - p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \phi \quad (2.16)$$

Las 3 componentes de la Ecuación 2.15 se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes, expresando la conservación de momentum para un fluido Newtoniano. En la Ecuación 2.16, ϕ representa la función de disipación de la conversión irreversible de energía mecánica por la deformación del elemento de flujo a energía interna (Gad-el Hak, 2006). Para un flujo isotrópico, Newtoniano, la disipación viscosa está dada por

$$\phi = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \lambda \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)^2 \quad (2.17)$$

Ahora, con condiciones de borde adecuadas, estas ecuaciones pueden ser resueltas. Sin embargo, la complejidad de este sistema de ecuaciones diferenciales parciales da la necesidad de realizar ciertas simplificaciones dependiendo del problema a analizar. Al asumir un flujo incompresible, suposición válida para flujos con números de Mach característicos menores a 0,3 (Sutton y Biblarz, 2017), se obtiene una simplificación considerable:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2.18)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.19)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) - p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \phi_{incomp} \quad (2.20)$$

donde ϕ_{incomp} es el límite incompresible de la Ecuación 2.17, y c_p es el calor específico a presión constante.

En el caso que el fluido se considere como invíscido, es decir, $Re \rightarrow \infty$ o $Kn \rightarrow 0$, las ecuaciones de conservación dan paso a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = 0 \quad (2.21)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (2.22)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2.23)$$

donde la Ecuación 2.22 se conoce como la ecuación de Euler.

2.1.3. Modelos Continuos - Flujo Isentrópico quasi 1-D

En el estudio de toberas y propulsores, suponer que un fluido se comporta como no compresible puede sonar algo absurdo. De hecho, el propósito de utilizar estos dispositivos es comprimir un gas de escape y expulsarlo a velocidades supersónicas para generar impulsos. Pero, como se observa en la sección anterior, las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible son bastante complejas de resolver, por lo que soluciones analíticas son raramente utilizadas y es necesario el uso de diversos métodos numéricos. Sin embargo, existe una forma de analizar el comportamiento de gases compresibles a lo largo de secciones de área variable realizando una serie de supuestos. Para un flujo compresible, no viscoso, adiabático que cumpla con la ley de gases ideales, dada una condición de estancamiento, la presión, densidad y temperatura sólo dependen del número de Mach:

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.24)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (2.25)$$

$$\frac{T_0}{T} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right] \quad (2.26)$$

donde el subíndice 0 denota los valores en condición de estancamiento, y γ es la relación de calores específicos (Sutton y Biblarz, 2017). Además, podemos obtener el flujo másico a través de una sección transversal de área A .

$$\dot{m} = \rho_0 a_0 A \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{(\gamma+1)/\gamma} \right]} \quad (2.27)$$

Las toberas supersónicas (llamadas típicamente como De Laval) siempre consisten de una región convergente que lleva a un área mínima, llamada garganta, seguida por una sección divergente (Sutton y Biblarz, 2017). La razón entre el área de la garganta A_t y el área de la salida de la tobera A_e se conoce como la relación de expansión de tobera, y es designada por la letra griega ϵ :

$$\epsilon = \frac{A_s}{A_t} \quad (2.28)$$

El flujo de gas máximo ocurre en la garganta cuando una relación de presión única del gas existe, la cual solo es en función de la razón de calores específicos. Esta relación se encuentra evaluando en $M = 1$ la Ecuación 2.24:

$$\frac{p_0}{p^*} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.29)$$

La presión de garganta p_t para la cual un flujo isentrópico de masa obtiene su valor máximo es llamada la presión crítica. De similar manera, se puede obtener relaciones de densidad y temperatura en la garganta:

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (2.30)$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} \right] \quad (2.31)$$

La garganta de una tobera convergente-divergente es la única sección del flujo, dada una presión crítica, donde la velocidad del flujo también es la velocidad local del sonido ($M = 1$). La sección convergente es subsónica, mientras que la sección divergente alcanza velocidades supersónicas, gracias a una continua expansión del flujo. Las condiciones sónicas y supersónicas solo pueden mantenerse si la presión crítica se mantiene en la garganta, es decir, cuando p_b/p_0 es igual o mayor a la cantidad mencionada en Ecuación 2.29 (Sutton y Biblarz, 2017).

Otra condición importante al obtener flujo sónico en la garganta es la llamada condición de estrangulamiento, donde se alcanza el máximo de flujo másico en la tobera. En condición de estrangulamiento, el flujo de masa máximo se obtiene por:

$$\dot{m}_{max} = \rho_0 \sqrt{\gamma R T_0} A_t \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2.32)$$

2.1.4. Modelos Moleculares - Ecuación de Boltzmann

A diferencia de los modelos continuos mencionados anteriormente, los modelos moleculares consideran los fluidos como un compuesto formado de muchas partículas. El objetivo de estos modelos es determinar la posición, velocidad y el estado de todas estas partículas en cada instante temporal. Los modelos moleculares se subdividen en modelos determinísticos y modelos probabilísticos.

Los modelos determinísticos evalúan la posición y velocidad de cada una de las moléculas presentes en el flujo, de acuerdo con sus interacciones intermoleculares y las condiciones de borde (Gad-el Hak, 2006). Las simulaciones computacionales que utilizan estos modelos, como simulaciones MD (Molecular Dynamics), son altamente ineficientes para situaciones de gases a bajas densidades, como son los flujos sobre microtoberas, donde las interacciones moleculares son relativamente poco frecuentes, y son más aptas para aplicaciones con líquidos y gases densos. Por estas razones no se entrará en mucho detalle sobre modelos determinísticos en esta sección.

Por otro lado, los modelos estadísticos determinan la probabilidad de colisión entre las partículas simuladas, mientras que la posición y velocidad son obtenidas determinísticamente. En el enfoque estadístico, la única variable dependiente es la fracción de moléculas en una posición y estado dado, y las variables independientes para moléculas monoatómicas son el tiempo, las tres coordenadas espaciales, y las tres componentes de la velocidad molecular. En moléculas poliatómicas, los grados internos de libertad añaden

otras variables independientes, y en moléculas no esféricamente simétricas la orientación molecular añade una dimensión extra (Gad-el Hak, 2006).

Para simplificar el problema, se realizará un análisis sobre gases monoatómicos sin grados internos de libertad. Además, se restringirá el fluido a gases de baja densidad asumiendo caos molecular. La primera restricción, la cual requiere que la distancia intermolecular δ sea un orden de magnitud mayor que el diámetro molecular d , permite asegurar que casi todas las colisiones moleculares sean binarias, evitando la complejidad de evaluar colisiones múltiples. La segunda restricción, permite aumentar la precisión de cómputo asegurando que los volúmenes a evaluar tengan suficientes moléculas para reducir las fluctuaciones estadísticas. Esto requiere que la distancia característica del flujo L sea por lo menos 100 veces mayor que la distancia intermolecular. La Figura 2.3 muestra los límites de validez al considerar gases de baja densidad ($\delta/d > 7$), la teoría del continuo ($Kn < 0.1$), y el desprecio de las fluctuaciones estadísticas ($L/\delta > 100$).

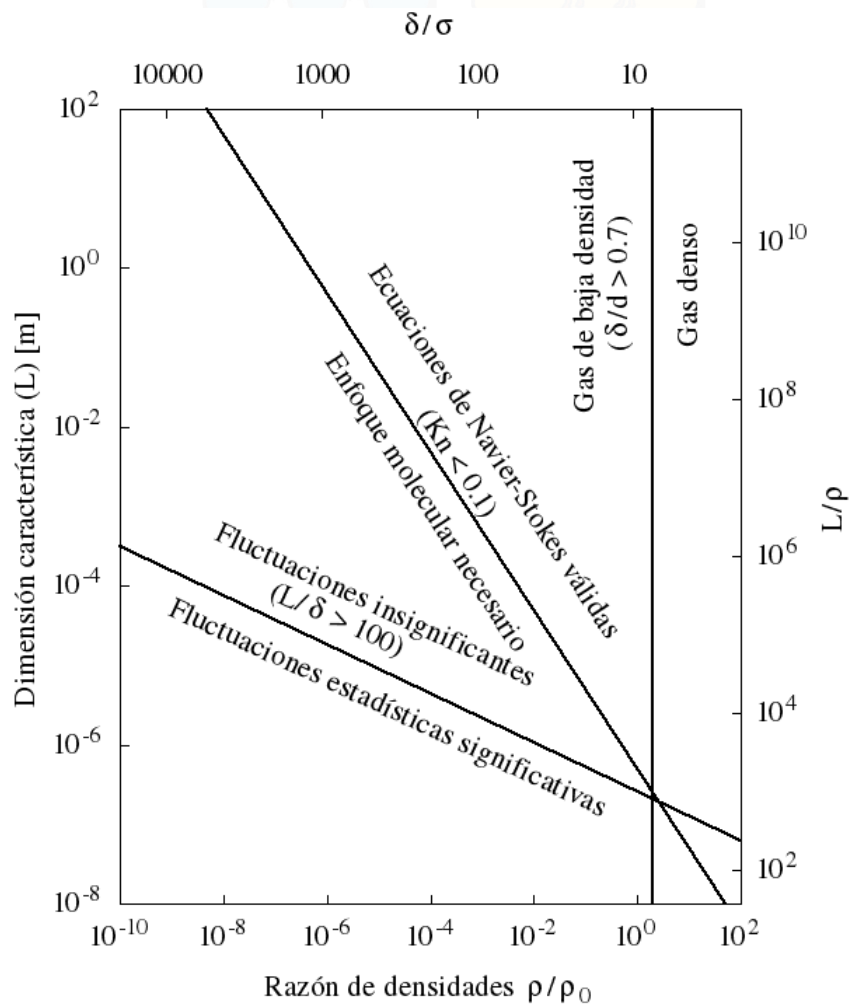


Figura 2.3: Límites efectivos de diferentes modelos.

Fuente: Adaptado de Bird (1994)

Un punto de partida de la mecánica estadística es la ecuación de Liouville, la cual expresa la conservación de la función de distribución de N -partículas en el espacio fásico $6N$ -dimensional, donde N es

el número de partículas en consideración. Para un sistema de N masas puntuales, considerando sólo fuerzas externas que no dependan de la velocidad, la ecuación de Liouville se describe como

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \xi_k \cdot \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_k} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial P}{\partial \xi_k} = 0, \quad (2.33)$$

donde P es la probabilidad de encontrar una molécula en un punto del espacio fásico, t es el tiempo, ξ_k es el vector tridimensional de velocidad, $\mathbf{x}_k$ es el vector tridimensional de posición, el subíndice k indica la k -ésima molécula, y $\mathbf{F}$ indica el vector de fuerza externa (Gad-el Hak, 2006).

Al integrar repetidamente la ecuación de Liouville se puede obtener una jerarquía de funciones de distribución reducidas, y la última de estas ecuaciones da paso a la ecuación de Boltzmann. Para un gas monoatómico, asumiendo colisiones binarias, la ecuación de Boltzmann está dada por

$$\frac{\partial(nf)}{\partial t} + \xi_j \frac{\partial(nf)}{\partial x_j} + F_j \frac{\partial(nf)}{\partial \xi_j} = J(f, f^*), \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.34)$$

donde nf es el producto de la densidad molecular n y la función de distribución de velocidad normalizada, y $J(f, f^*)$ es la integral de colisión no lineal, la cual describe el efecto neto de las colisiones sobre la función de distribución, descrita por

$$J(f, f^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{4\pi} n^2 (f^* f_1^* - f f_1) \xi_r \sigma d\Omega (d\xi)_1 \quad (2.35)$$

donde el superíndice $*$ indica los valores post colisión, f y f_1 representan las funciones de distribución de velocidad para 2 moléculas, ξ_r es la velocidad relativa entre moléculas, σ es la sección transversal molecular, Ω es el ángulo sólido, y $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$.

Una vez obtenida la función de distribución, propiedades macroscópicas como densidad, velocidad y temperatura pueden ser obtenidas integrando un ponderado apropiado de dicha función:

$$\rho = m \int (nf) d\xi \quad (2.36)$$

$$u_i = \int \xi_i f \xi \quad (2.37)$$

$$\frac{3}{2} k_B T = \int \frac{1}{2} m \xi_i \xi_i f \xi \quad (2.38)$$

Al adimensionalizar la ecuación de Boltzmann con una longitud y velocidad característica L y $\sqrt{2T(k_B/m)}$ se obtiene

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}} + \hat{\xi}_j \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}_j} + \hat{F}_j \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\xi}_j} = \frac{1}{Kn} \hat{J}(\hat{f}, \hat{f}^*), \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.39)$$

donde $\hat{\cdot}$ representa una variable adimensional y la función de distribución es adimensionalizada por una densidad molecular de referencia n_0 . Las ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía se

obtienen al multiplicar la Ecuación 2.39 por la masa molecular, momentum y energía, respectivamente.

2.2. Método Direct Simulation Monte Carlo (DSMC)

2.2.1. Perspectiva General

DSMC, siglas en inglés de Simulación Directa Monte Carlo, es un método de simulación directa de partículas basado en la teoría cinética de gases. Este método fue desarrollado por Bird (1976) y existen múltiples artículos detallando aplicaciones del método sobre flujos enrarecidos a bajas presiones (Bird, 1978, 1998; Muntz, 1989) y microfluidos (Zhan et al., 2004; Hao et al., 2005; Horisawa et al., 2009).

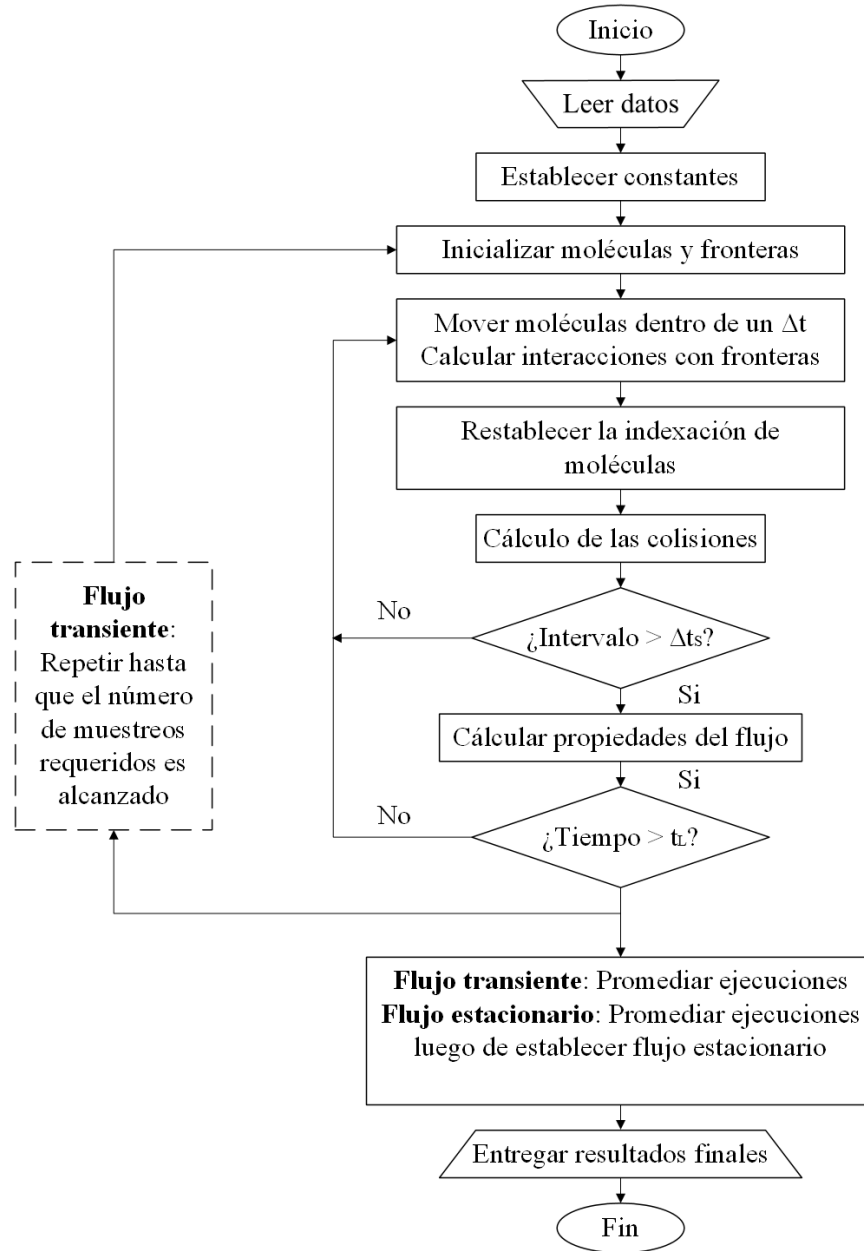
A condiciones estándar, un gas ocupando un volumen de $10 \mu\text{m}^3$ contiene alrededor de $2,69 \times 10^{10}$ moléculas (Gad-el Hak, 2006). Es evidente la dificultad y el costo computacional de simular las interacciones de todas esas moléculas. Por ello, típicamente el método DSMC utiliza un número relativamente pequeño de millones de moléculas simuladas, las cuales imitan el movimiento de partículas reales.

En resumen, DSMC trata de modelar el comportamiento de un gas siguiendo la posición y velocidad de una cantidad estadísticamente representativa de moléculas, donde cada partícula representa a un número de moléculas reales del gas, evaluando las colisiones intermoleculares probabilísticamente para modificar sus posiciones y estados en el tiempo (Liou y Fang, 2006).

Este método se basa en separar o 'desacoplar' el movimiento molecular y las colisiones intermoleculares, mediante un intervalo temporal menor al tiempo medio entre colisiones, siguiendo la evolución de este proceso a lo largo del espacio y tiempo (Gad-el Hak, 2006). Los intervalos espaciales son divididos en celdas de forma similar al método de volúmenes finitos, donde dichas celdas son proporcionales al camino libre medio (Oran et al., 1998). Luego, las cantidades moleculares son promediadas temporal y espacialmente como los valores macroscópicos en los centros de las celdas.

2.2.2. Metodología

El procedimiento general utilizado por el método DSMC se muestra en el diagrama de flujo en la Figura 2.4.

**Figura 2.4:** Diagrama de flujo típico de DSMC.

Fuente: Adaptado de Liou y Fang (2006)

En cada iteración temporal, el algoritmo consiste en procesos primarios: (i) Inicialización, (ii) Mover las partículas, (iii) indexar y hacer referencias cruzadas de las partículas, (iv) simular las colisiones, y (v) calcular el campo de flujo (Liou y Fang, 2006).

- i. *Inicialización:* La simulación DSMC comienza desde un set de condiciones iniciales prescritas. Las partículas son distribuidas inicialmente a lo largo del dominio computacional, donde se les asignan velocidades aleatorias, generalmente basadas en la distribución del estado de equilibrio. Si bien, en el caso de un problema en equilibrio estacionario, la condición inicial no afecta la solución final, esta sí tiene efecto sobre el tiempo de cómputo. La posición, velocidad, sección transversal de colisión,

temperatura molecular y las condiciones de borde determinan la posterior evolución del sistema.

- ii. *Movimiento*: Las partículas simuladas son movidas en un intervalo temporal Δt_d . Este movimiento es modelado determinísticamente, donde se imponen las condiciones de contorno y se recogen las propiedades macroscópicas del flujo a lo largo de las superficies sólidas. Para modelar la interacción de una partícula con una superficie se deben aplicar las leyes de conservación para cada una de ellas, en vez del uso de una función de distribución de velocidad, aplicando las respectivas condiciones de contorno. En el caso de condición de simetría, se aplica reflexión especular, mientras que para condiciones de pared se utilizan modelos como reflexión Maxwelliana difusa o reflexión quasi especular de Cercignani-Lampis-Lord. Nuevas moléculas pueden ingresar al dominio a través de fronteras de entrada o salida. Para estos casos, la posición, velocidad y energía interna de ellas son determinadas aleatoriamente en base a Δt_d y las propiedades macroscópicas de la frontera. En el caso de que una partícula salga del dominio, sus propiedades son eliminadas de iteraciones posteriores.
- iii. *Indexación*: Luego de que todas las partículas simuladas hayan sido desplazadas, sus nuevas posiciones espaciales posiblemente se encuentren en otra celda computacional, y nuevas moléculas pudieron haber entrado al dominio. Por ello se debe realizar una reindexación de ellas y seguir su desplazamiento. Un eficiente proceso de indexación y seguimiento es clave para grandes aplicaciones de DSMC.
- iv. *Colisión*: Después de una correcta indexación de las partículas, las colisiones intermoleculares son determinadas. Este proceso es modelado estadísticamente, donde solo se consideran moléculas que habiten en una misma celda computacional como candidatos a ser pares de colisión. Dentro de todos los posibles pares, un set representativo de colisiones ocurre y son seleccionados aleatoriamente. Para un correcto desacoplamiento del movimiento molecular y las colisiones, se requiere que Δt_d sea menor que el tiempo medio entre colisiones.
- v. *Muestreo*: Las propiedades macroscópicas son calculadas después de repetir los pasos ii a iv sobre un intervalo de tiempo largo. Como estos pasos no dependen de este proceso de cálculo, se puede utilizar un muestreo cada n intervalo de tiempo. Al ser DSMC un método explícito, sus resultados son siempre transientes, por lo que, si se requiere una solución estacionaria, el cómputo se lleva a cabo a un tiempo suficientemente largo t_L , y el resultado deseado es obtenido luego de promediar todos los muestreos después de obtener una solución estacionaria. En el caso de requerir una solución transiente, se puede utilizar un promedio de múltiples simulaciones independientes.

2.2.3. Colisiones Elásticas Binarias

Las colisiones moleculares son uno de los procesos más fundamentales de los gases. Una colisión elástica es tal que no exista un intercambio de energía traslacional e interna. En el estudio de gases enrarecidos, la probabilidad que estas colisiones ocurran solamente entre 2 moléculas es altísima, por ello, en este capítulo se entra en detalle los mecanismos de estas colisiones binarias [Bird \(1994\)](#).

Consideremos dos moléculas con masas m_1 y m_2 , vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, en un plano cartesiano. Las velocidades pre-colisión del par son denotadas $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$, y las velocidades post-colisión $\mathbf{c}_1^*$ y $\mathbf{c}_2^*$.

La posición y velocidad del centro de masa del sistema, $\mathbf{r}_m$ y $\mathbf{c}_m$, respectivamente, son

$$\mathbf{r}_m = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_2 \quad (2.40)$$

$$\mathbf{c}_m = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{c}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{c}_2 \quad (2.41)$$

Por conservación de momentum lineal y energía cinética:

$$m_1 \mathbf{c}_1 + m_2 \mathbf{c}_2 = m_1 \mathbf{c}_1^* + m_2 \mathbf{c}_2^* = (m_1 + m_2) \mathbf{c}_m \quad (2.42)$$

$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = m_1 c_1^{*2} + m_2 c_2^{*2} \quad (2.43)$$

También podemos definir los valores de velocidad relativa pre y post-colisión entre las moléculas como

$$\mathbf{c}_r = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \quad (2.44)$$

$$\mathbf{c}_r^* = \mathbf{c}_1^* - \mathbf{c}_2^* \quad (2.45)$$

Con estas ecuaciones, se puede reescribir los valores de velocidad pre y post colisión en términos de la velocidad del centro de masa y la velocidad relativa.

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_m + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{c}_r \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_m - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{c}_r \quad (2.46)$$

$$\mathbf{c}_1^* = \mathbf{c}_m + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{c}_r^* \quad \mathbf{c}_2^* = \mathbf{c}_m - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{c}_r^* \quad (2.47)$$

Esto muestra que, en un marco de referencia respecto al centro de masa, las velocidades pre-colisión del par son antiparalelas entre sí, por ende, las fuerzas intermoleculares y trayectorias permanecen en el mismo plano determinado para las velocidades pre-colisión. De igual forma, esto es cierto para las velocidades post-colisión.

La conservación de energía puede ser reescrita con las Ecuaciones 2.46 y 2.47, y utilizando el concepto de masa reducida m_r .

$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = (m_1 + m_2) c_m^2 + m_r c_r^2 \quad (2.48)$$

$$m_1 c_1^{*2} + m_2 c_2^{*2} = (m_1 + m_2) c_m^2 + m_r c_r^{*2}, \quad (2.49)$$

donde

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.50)$$

Al comparar estas ecuaciones con la conservación de energía, se llega a la conclusión que la magnitud de la velocidad relativa no es afectada por la colisión, es decir,

$$c_r^* = c_r. \quad (2.51)$$

Como tanto $\mathbf{c}_m$ y $\mathbf{c}_r$ pueden ser obtenidos de las velocidades pre-colisión, obtener las velocidades post-colisión se reduce a encontrar el cambio de dirección χ del vector relativo de velocidad.

Si $\mathbf{F}$ es la fuerza entre dos moléculas con centro de fuerza esféricamente simétricos, las ecuaciones de movimiento de las ellas son

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F} \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}. \quad (2.52)$$

Entonces

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = (m_1 + m_2) \mathbf{F} \quad (2.53)$$

o, si el vector de velocidad relativo es escrito como $\ddot{\mathbf{r}}$,

$$m_r \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (2.54)$$

Esto implica que el movimiento de una partícula con masa m_1 relativo a una con masa m_2 es equivalente al movimiento de una partícula con masa m_r , relativo a un centro fijo de fuerza.

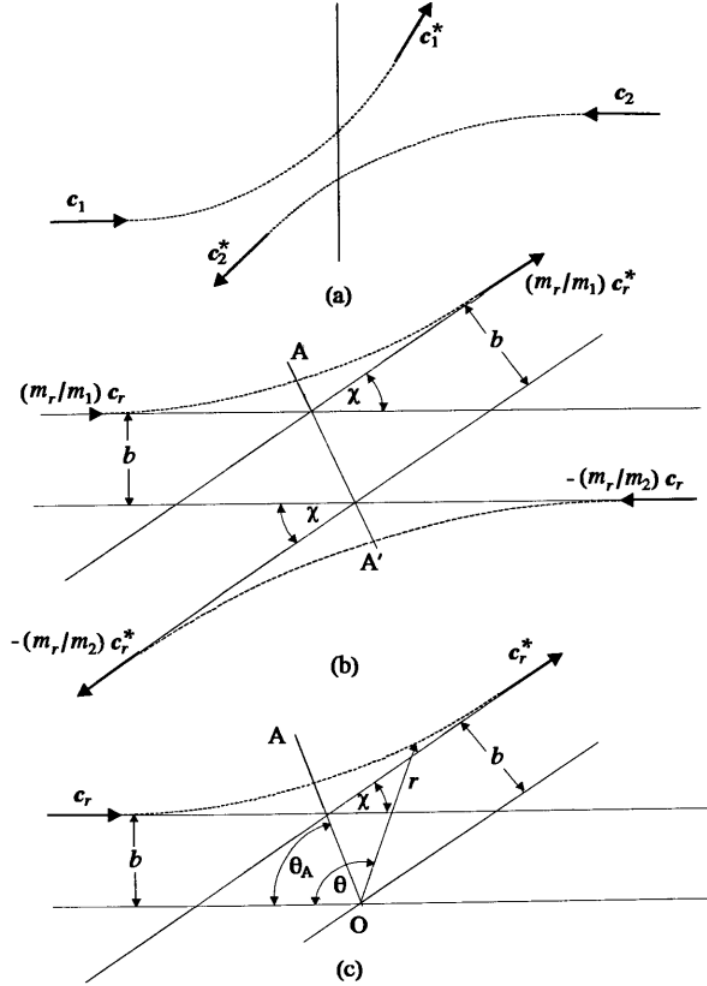


Figura 2.5: Distintos marcos de referencia para el análisis de colisiones binarias.

(a) Marco de referencia respecto al laboratorio.

(b) Marco de referencia respecto al centro de masa.

(c) Interacción de la partícula de masa reducida con un centro de dispersión fijo.

Fuente: Adaptado de Bird (1994)

Aparte de las velocidades del par de colisión, necesitamos solamente 2 parámetros más para describir completamente una colisión binaria entre dos moléculas esféricamente simétricas. Estas son la distancia más cercana entre las dos trayectorias no perturbadas b , y el ángulo entre el plano de colisión y un plano de referencia ϵ Bird (1994). Como se muestra en la Figura 2.6, la línea de intersección entre los dos planos es paralela a $\mathbf{c}_r$. Si consideramos el plano normal a $\mathbf{c}_r$ y que contiene a O , el diferencial de sección transversal de colisión $\sigma d\Omega$ es definida por los parámetros de impacto b y ϵ como

$$\sigma d\Omega = b db d\epsilon, \quad (2.55)$$

donde $d\Omega$ es el ángulo sólido unitario del vector $\mathbf{c}_r^*$.

$$d\Omega = \sin\chi d\chi d\epsilon, \quad (2.56)$$

entonces

$$\sigma = \frac{b}{\sin\chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|. \quad (2.57)$$

Integrando, se obtiene la sección transversal de colisión total σ_T

$$\sigma_T = \int_0^{4\pi} \sigma d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma \sin\chi d\chi. \quad (2.58)$$

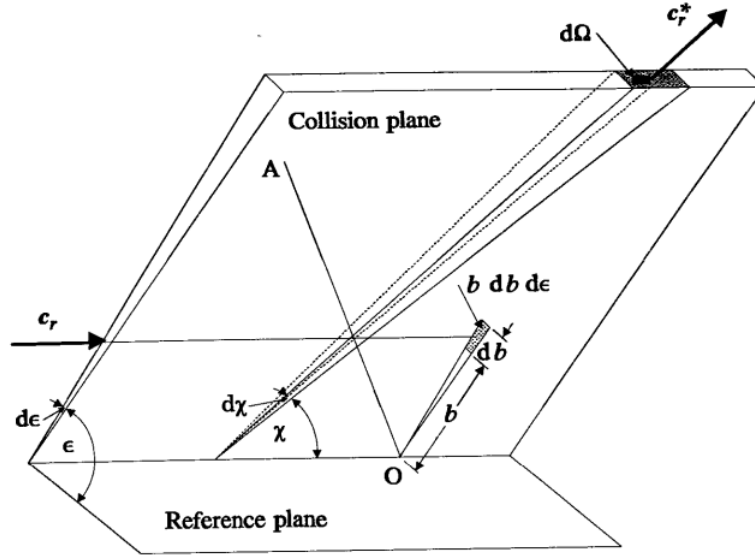


Figura 2.6: Parámetros de impacto.

Fuente: Adaptado de Bird (1994)

En referencia a coordenadas polares r, θ definidas en Figura c, el momentum angular y la energía de la partícula con masa reducida m_r dentro de un campo de fuerza centrado en O puede ser igualado al valor límite de esas cantidades cuando $\mathbf{r} \rightarrow \infty$. La ecuación de momentum angular es

$$r^2 \dot{\theta} = bc_r = cte. \quad (2.59)$$

La energía dentro del campo de fuerza es la suma de la componente cinética con el componente potencial, y como este último se hace 0 a grandes distancias, la energía se reduce a su parte cinética.

$$\frac{1}{2} m_r (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \phi = \frac{1}{2} m_r c_r^2 = E_t = cte., \quad (2.60)$$

donde ϕ es el potencial intermolecular relacionado con $\mathbf{F}$ por

$$\phi = \int_r^\infty F dr \quad (2.61)$$

$$F = -\frac{d\phi}{dr} \quad (2.62)$$

Eliminando la variable temporal de las Ecuaciones 2.59 y 2.60, se obtiene

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - r^2 - \frac{2\phi r^4}{m_r c_r^2 b^2}. \quad (2.63)$$

Introduciendo una coordenada adimensional $W = b/r$,

$$\left(\frac{dW}{d\theta}\right)^2 = 1 - W^2 - \frac{2\phi}{m_r c_r^2}, \quad (2.64)$$

entonces

$$\theta = \int_0^W \left(1 - W^2 - \frac{2\phi}{m_r c_r^2}\right)^{-1/2} dW. \quad (2.65)$$

Ahora, en la intersección de la órbita con la línea OA , $\theta = \theta_A$, y $dW/d\theta = 0$, entonces

$$\theta_A = \int_0^{W_1} \left(1 - W^2 - \frac{2\phi}{m_r c_r^2}\right)^{-1/2} dW, \quad (2.66)$$

donde W_1 es la raíz positiva de la ecuación

$$1 - W^2 - \frac{2\phi}{m_r c_r^2} = 0. \quad (2.67)$$

Finalmente, podemos encontrar el ángulo de deflexión de la velocidad relativa como

$$\chi = \pi - 2\theta_A, \quad (2.68)$$

y utilizando propiedades geométricas, las componentes de la velocidad relativa post-colisión son:

$$u_r^* = \cos\chi u_r + \sin\chi \sin\epsilon \sqrt{v_r^2 + w_r^2}, \quad (2.69)$$

$$v_r^* = \cos\chi v_r + \sin\chi (c_r w_r \cos\epsilon - u_r v_r \sin\epsilon) / \sqrt{v_r^2 + w_r^2}, \quad (2.70)$$

$$w_r^* = \cos\chi w_r - \sin\chi (c_r v_r \cos\epsilon + u_r w_r \sin\epsilon) / \sqrt{v_r^2 + w_r^2}, \quad (2.71)$$

donde u, v, w son las componentes en x, y, z de la velocidad, respectivamente.

En resumen, el proceso de obtener las velocidades post-colisión se divide en 5 pasos:

1. Calcular la velocidad del centro de masa.
2. Calcular la velocidad relativa pre-colisión.

3. Calcular el ángulo de deflexión.
4. Calcular la velocidad relativa post-colisión.
5. Calcular las velocidades 1 y 2 post-colisión.

2.2.4. Modelos moleculares

Los diferentes modelos moleculares a utilizar se diferencian en la definición de la fuerza $\mathbf{F}$ o el potencial ϕ . En las moléculas reales, la fuerza entre ellas es altamente repulsiva a cortas distancias y levemente atractiva a largas distancias (ver Figura 2.7). Estos modelos involucran algún grado de aproximación, y su uso va a depender de la aplicación y exactitud requerida (Bird, 1994).

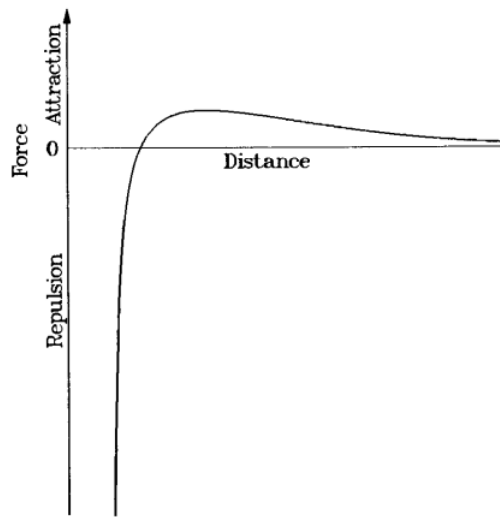


Figura 2.7: Campo de fuerza intermolecular típico.

Fuente: Adaptado de Bird (1994)

2.2.4.1. Modelo de ley de potencia inversa

Este describe el potencial y el campo de fuerza según

$$\phi = \frac{\kappa}{(\eta - 1)r^{\eta-1}} \quad F = \frac{\kappa}{r^\eta}, \quad (2.72)$$

donde η es la potencia que determina la 'dureza' de las partículas y κ una constante. El ángulo de deflexión es

$$\chi = \pi - 2 \int_0^{W_1} \left[1 - W^2 - \frac{2}{\eta - 1} \left(\frac{W}{W_0} \right)^{\eta-1} \right]^{-1/2} dW, \quad (2.73)$$

donde

$$W_0 = b(m_r c_r^2 / \kappa)^{1/(\eta-1)} \quad (2.74)$$

y W_1 es la raíz positiva de

$$1 - W^2 - \frac{2}{\eta - 1} \left(\frac{W}{W_0} \right)^{\eta-1} = 0. \quad (2.75)$$

Combinando las Ecuaciones 2.55 y 2.74 obtenemos que

$$\sigma d\Omega = W_0 \left(\frac{\kappa}{m_r c_r^2} \right)^{2/(\eta-1)} dW_0 d\epsilon \quad (2.76)$$

Un problema es que para cualquier valor finito de η , el campo se extiende hacia el infinito y la integral de Ecuación 2.58 diverge. Sin embargo, aunque σ_T es infinito, la gran mayoría de estas colisiones son muy oblicuas, causando deflexiones despreciables. Por ende, es posible definir un límite finito. En la mayoría de los casos, este límite es basado en el ángulo de deflexión χ , ya que se define en función de W_0 , por lo que se puede establecer un valor máximo de W_0 , $W_{0,m}$. Luego, para un valor fijo de c_r , la sección transversal total es

$$\sigma_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{W_{0,m}} W_0 \left(\frac{\kappa}{m_r c_r^2} \right)^{2/(\eta-1)} dW_0 d\epsilon \quad (2.77)$$

$$\pi W_{0,m}^2 \left(\frac{\kappa}{m_r c_r^2} \right)^{2/(\eta-1)} = \pi W_{0,m}^2 \left(\frac{\kappa}{E_t} \right)^{2/(\eta-1)}. \quad (2.78)$$

También, podemos definir la sección transversal de viscosidad σ_μ y la sección transversal de transferencia de momentum σ_M , definidas por

$$\sigma_\mu = \int_0^{4\pi} \sin^2 \chi \sigma d\Omega \quad (2.79)$$

$$\sigma_M = \int_0^{4\pi} (1 - \cos \chi) \sigma d\Omega, \quad (2.80)$$

las cuales se obtienen de la teoría de Chapman-Enskog para los coeficientes de viscosidad y difusión, respectivamente.

2.2.4.2. Modelo esfera rígida HS

El modelo *hard sphere* (HS) o de esfera rígida, es un caso especial del modelo de ley de potencia cuando $\eta \rightarrow \infty$, donde la fuerza entra en acción en

$$r = 1/2(d_1 + d_2) = d_{12}, \quad (2.81)$$

como se muestra en la Figura 2.8. Entonces,

$$b = d_{12} \sin \theta_A = d_{12} \cos(\chi/2) \rightarrow \chi = 2 \cos^{-1}(b/d_{12}) \quad (2.82)$$

y

$$\left| \frac{db}{d\chi} \right| = 1/2 d_{12} \sin(\chi/2), \quad (2.83)$$

con lo que al reemplazar esta ecuación en la Ecuación 2.57 se obtiene

$$\sigma = d_{12}^2/4. \quad (2.84)$$

Esta ecuación indica que σ es independiente de χ , es decir, que todas las direcciones son igualmente probables para c_r^* . La sección total de colisión es

$$\sigma_T = \int_0^{4\pi} \sigma d\Omega = \pi d_{12}^2 \quad (2.85)$$

y la sección transversal viscosa y el coeficiente de difusión son

$$\sigma_\mu = \frac{2}{3} \sigma_T \quad (2.86)$$

$$\sigma_M = \sigma_T \quad (2.87)$$

respectivamente.

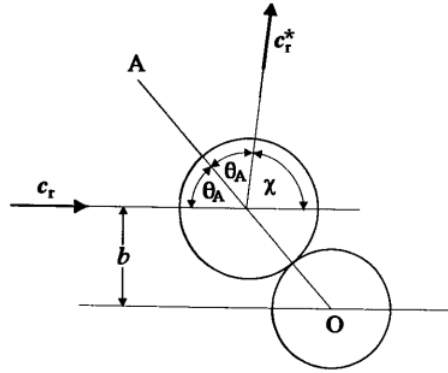


Figura 2.8: Geometría de colisión entre moléculas HS.

Fuente: Adaptado de Bird (1994)

2.2.4.3. Modelo esfera rígida variable VHS

Si bien las ventajas del modelo HS son evidentes, el uso de una sección transversal de colisión finita y la dispersión isotrópica facilitan el cálculo de colisiones, existen condiciones donde los supuestos de HS no concuerdan con la realidad. Exceptuando en el caso de temperaturas extremadamente bajas, la sección transversal de las moléculas reales disminuye a medida que c_r y E_t aumentan. Esto lleva a la necesidad de crear un modelo que se ajuste a estas condiciones.

El modelo VHS utiliza una esfera rígida con un diámetro variable en función de c_r , siguiendo una ley de potencia con coeficiente ν

$$d = d_{ref} \left(\frac{c_{r,ref}}{c_r} \right)^\nu, \quad (2.88)$$

donde el subíndice *ref* indica valores de referencia según la especie que se esté tratando, y se encuentran tabulados en la literatura. El ángulo de deflexión se obtiene de la misma forma que el modelo HS,

$$\chi = 2\cos^{-1}(b/d), \quad (2.89)$$

y pese a que d es en función de c_r , no existe acoplamiento entre χ y c_r , por lo que los resultados de sección transversal viscosa (Ecuación 2.86) y de momentum (Ecuación 2.87) del modelo HS también aplican.

2.2.4.4. Modelo esfera blanda variable VSS

Este modelo toma en cuenta la dispersión anisotrópica de los gases reales. El diámetro molecular varía de la misma manera que el modelo VHS, pero el ángulo de deflexión está dado por

$$\chi = 2\cos^{-1}((b/d)^{1/\alpha}). \quad (2.90)$$

El diámetro d y el exponente de deflexión α se determinan de tal manera que los coeficientes de viscosidad y difusión sean consistentes con la ley de potencia inversa,

$$\sigma_\mu = \frac{4\alpha}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \sigma_T \quad (2.91)$$

$$\sigma_M = \frac{2}{(\alpha + 1)} \sigma_T, \quad (2.92)$$

donde nuevamente $\sigma_T = \pi d^2$.

2.2.4.5. Modelo esfera dura generalizado GHS

El modelo GHS es una extensión de los modelos VHS y VSS, donde la dispersión es la de una esfera dura o blanda, pero la variación de la sección transversal, que es en función de la energía relativa traslacional, simula un potencial atractivo-repulsivo. Este método es implementado de forma paramétrica, por lo que puede hacer uso de datos recopilados por mediciones experimentales.

2.2.5. Técnicas de Muestreo de Colisiones

Existen múltiples técnicas para el muestreo de colisiones en DSMC, y en esta sección se presenta dos de los más populares, el muestreo *time counter* (TC) y el muestreo *no time counter* (NTC) descritos por Bird (1994).

Ambos métodos emplean la estadística de aceptación-rechazo (Bird, 1994) para seleccionar los pares de colisión, en donde se utilizan números aleatorios para determinar si el par seleccionado al azar va a interactuar.

La probabilidad de que dos moléculas colisionen en un gas homogéneo es proporcional al producto de la velocidad relativa c_r y la sección transversal de colisión total σ_T . La tasa total de colisión por unidad de volumen es

$$N_c = \frac{1}{2} n^2 \sigma_T c_r, \quad (2.93)$$

y entonces, al multiplicar este valor por el intervalo temporal Δ_d obtenemos el número de colisiones por celda $N_c \Delta_d$. En el método DSMC, el promedio de $\sigma_T c_r$ es calculado para cada celda, y el valor máximo es almacenado. Luego, los pares de colisión pueden ser escogidos por el método de aceptación-rechazo, con P siendo la probabilidad de que un par interactúe.

$$P = \frac{\sigma_T c_r}{(\sigma_T c_r)_{max}} \quad (2.94)$$

La técnica TC asigna un incremento de tiempo δt a cada colisión y, para moléculas HS y VHS, este es dado por

$$\delta t = \frac{2}{N_m \sigma_T c_r}, \quad (2.95)$$

donde N_m es el número de moléculas simuladas por celda. El número de colisiones simuladas por celda es tal que la suma de todos los δt es igual al intervalo temporal Δ_d . El costo computacional de este método es proporcional a N_m , y produce buenos resultados para flujos ligeramente lejos del equilibrio, sin embargo, en regiones de desequilibrio extremas como ondas de choque fuertes, los resultados son inexactos.

Este problema es resuelto por el método NTC, el cual utiliza un procedimiento similar a TC, pero con la importante diferencia que el número de colisiones no requiere de un δt , sino que las colisiones se realizan hasta que un número permitido de colisiones, N_{cp} , son alcanzadas, dado por

$$N_{cp} = \frac{N_m \bar{N}_m S_m (\sigma_T c_r)_{max} \Delta_d}{2V_c}, \quad (2.96)$$

donde S_m es el número de moléculas reales que una molécula simulada representa y V_c el volumen de la celda. Este método es el más utilizado en la actualidad y tiene el mismo costo computacional que TC.

2.2.6. Muestreo de Propiedades Macroscópicas

Las propiedades macroscópicas del campo de flujo son obtenidas de los valores de las celdas, los cuales representan el valor al centro de esta. Los valores de densidad y velocidad pueden ser obtenidos por las siguientes ecuaciones (Liou y Fang, 2006):

$$N = \sum_{i=1}^{N_t} N_i \quad (2.97)$$

$$\rho = \frac{1}{N_t} \frac{N F_{num}}{\Delta V} m \quad (2.98)$$

$$U = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_i} c_{u,j} \quad (2.99)$$

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_i} c_{v,j} \quad (2.100)$$

$$W = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_i} c_{w,j} \quad (2.101)$$

Donde N_i representa el número de moléculas en la celda muestreada en el i -ésimo paso de tiempo de muestreo, N el número total de moléculas muestreadas durante la totalidad de pasos de tiempo de N_t en la celda, ΔV el volumen de la celda, F_{num} el número de moléculas reales que cada partícula representa, m la masa de la molécula simulada, $c_{u,j}$, $c_{v,j}$, $c_{w,j}$ los componentes de la velocidad molecular en x , y , z , respectivamente, de la j -ésima molécula muestreada en el intervalo i -ésimo, ρ la densidad del flujo, y U , V , W las velocidades promedio de la velocidad del flujo en las direcciones x , y , z , respectivamente (Liou y Fang, 2006). Por otro lado, la temperatura térmica T_x , T_y , T_z , en las direcciones x , y , z , respectivamente se obtienen como

$$T_x = \frac{m}{k} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_i} c_{u,j}^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_i} c_{u,j} \right)^2 \right\} \quad (2.102)$$

$$T_y = \frac{m}{k} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_i} c_{v,j}^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_i} c_{v,j} \right)^2 \right\} \quad (2.103)$$

$$T_z = \frac{m}{k} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_i} c_{w,j}^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_i} c_{w,j} \right)^2 \right\} \quad (2.104)$$

La temperatura (T) y presión (p) del flujo se obtienen como

$$T = \frac{1}{3}(T_x + T_y + T_z) \quad (2.105)$$

$$p = \left(\frac{1}{N_t} \frac{NF_{num}}{\Delta V} \right) kT \quad (2.106)$$

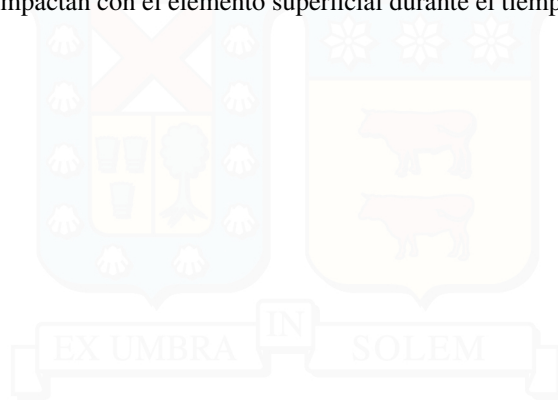
Las propiedades aerotermodinámicas en la superficie son obtenidas por las diferencias entre flujos de momentum y energía en la superficie, antes y después de la interacción gas-superficie por área ΔA durante un tiempo de muestreo t_s . La presión superficial p_w se obtiene por la diferencia del flujo de momentum normal a la superficie, el esfuerzo de corte τ_w por la diferencia del flujo de momentum tangencial, y la tasa de transferencia de calor q_w por la diferencia del flujo de energía (Liou y Fang, 2006):

$$p_w = \frac{F_{num}}{t_s \Delta A} \sum_{j=1}^{N_s} m(c_{n,j}^r - c_{n,j}^i) \quad (2.107)$$

$$\tau_w = \frac{F_{num}}{t_s \Delta A} \sum_{j=1}^{N_s} m(c_{t,j}^r - c_{t,j}^i) \quad (2.108)$$

$$q_w = \frac{F_{num}}{t_s \Delta A} \left[\sum_{j=1}^{N_s} \left(\frac{1}{2} m c_j^2 \right)^i - \sum_{j=1}^{N_s} \left(\frac{1}{2} m c_j^2 \right)^r \right] \quad (2.109)$$

Los superíndices i y r denotan los valores antes y después del impacto con el elemento superficial, respectivamente, c_n y c_t son las componente normal y tangencial de la velocidad molecular, respectivamente, y N_s es el número de moléculas que impactan con el elemento superficial durante el tiempo t_s .



3 | Procedimiento Computacional

3.1. Geometría

Uno de los objetivos de esta memoria es determinar la influencia de la geometría de microtobera en el empuje e impulso específico, utilizando N_2 y Ar como fluido de trabajo. Para esto, se definen 2 configuraciones geométricas, una microtobera formada por paredes rectas, y otra formada por paredes curvas. Además, debido a los métodos de fabricación de estos dispositivos ([Zhan et al., 2004](#)), se utilizará una sección transversal rectangular, y su implementación será analizada desde una configuración de arreglos de microtoberas ([Horisawa et al., 2009](#)). La Figura 3.1 muestra la disposición de dicho arreglo, y la Figura 3.2 visualiza una vista en corte transversal.

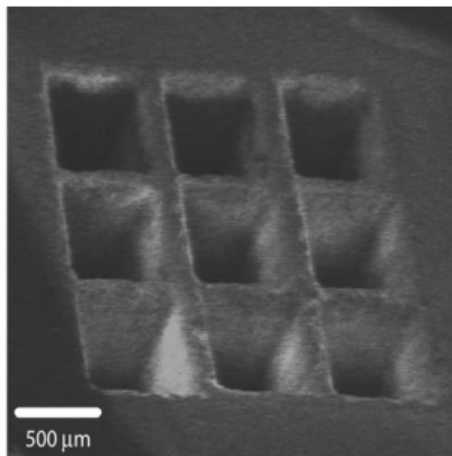


Figura 3.1: Arreglo de microtoberas.

Fuente: [Horisawa et al. \(2009\)](#)

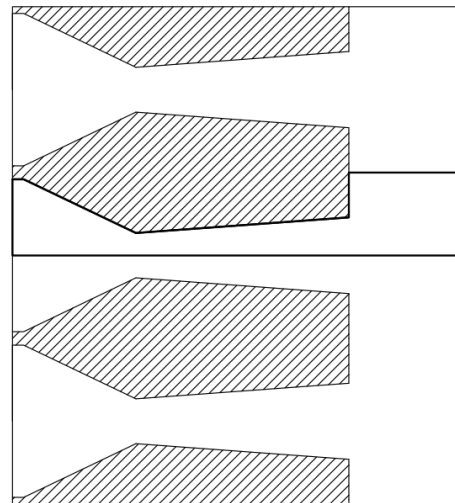


Figura 3.2: Vista en corte de un arreglo de microtoberas.

3.1.1. Microtobera Recta

Esta configuración está basada en la geometría utilizada por ([Hao et al., 2005](#)), en donde se investigó el desempeño de una microtobera convergente-divergente, con una garganta de $20 \mu m$, una relación de expansión de $1/1.7$, y una profundidad de $120 \mu m$.

Dada la simetría del sistema, la modelación se realizó en base a la mitad superior. Los parámetros

geométricos utilizados para modelar esta microtobera se observan en la Figura 3.3, y la Tabla 3.1 muestra las dimensiones normalizadas por la mitad del ancho de garganta h_t .

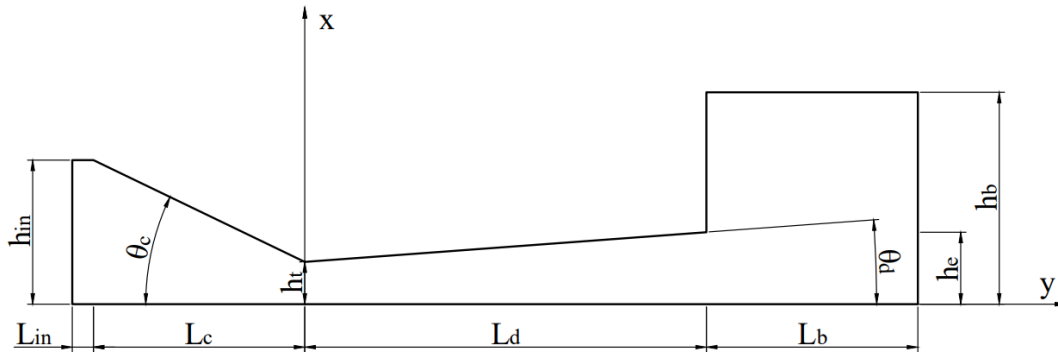


Figura 3.3: Esquema geométrico de la tobera recta.

Tabla 3.1: Parámetros geométricos de la microtobera recta.

h_{in}/h_t	h_e/h_t	h_b/h_t	L_{in}/h_t	L_c/h_t	L_d/h_t	L_b/h_t	θ_c	θ_d
3.40	1.70	3.70	0.50	5.00	9.50	5.00	25.64°	4.21°

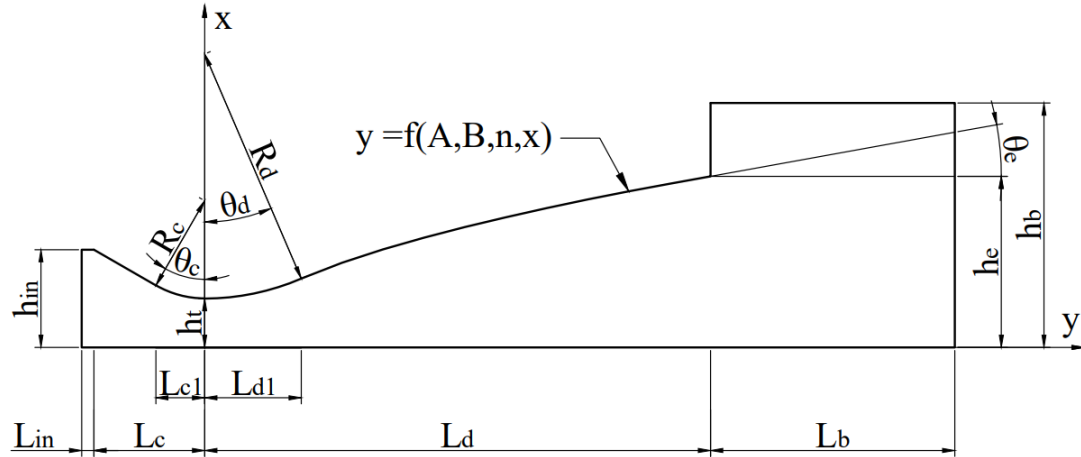
Las dimensiones en el eje y son denotadas por la letra h , las dimensiones en x por la letra L , y los subíndices in , c , t , d , e , b , hacen referencia a las dimensiones de la entrada, sección convergente, garganta, sección divergente, salida, y externa, respectivamente. Además, se indican los ángulos de convergencia θ_c y divergencia θ_d .

3.1.2. Microtobera Curva

La geometría utilizada para modelar el micropropulsor curvo está basada en la investigación realizada por [Sebastiao \(2011\)](#). En esta configuración, la parte convergente está compuesta de una superficie inclinada por un ángulo de convergencia θ_c tangente a un arco de radio R_c . De igual forma al caso recto, la garganta tiene una altura de $20 \mu\text{m}$, pero la sección divergente está compuesta por una parte cóncava, formada por un arco de radio R_d y ángulo θ_d , conectada a una sección convexa descrita por una función potencial la cual depende de un exponente n y constantes A y B , como se muestra en la Ecuación 3.1.

$$y = A(x - B)^n \quad (3.1)$$

Específicamente, de las múltiples configuraciones propuestas por [Sebastiao \(2011\)](#), se escogió el modelo A3, donde sus parámetros geométricos se muestran en la Figura 3.4. La Tabla 3.2 muestra las dimensiones generales normalizadas por la mitad del ancho de garganta h_t , y la Tabla 3.2 muestra los parámetros geométricos específicos que conforman la curvatura de la pared.

**Figura 3.4:** Esquema geométrico de la tobera curva.**Tabla 3.2:** Dimensiones generales de la microtobera curva.

h_{in}/h_t	h_e/h_t	h_b/h_t	L_{in}/h_t	L_c/h_t	L_d/h_t	L_b/h_t	θ_c	θ_d	θ_e
2.00	3.50	5.00	0.25	2.268	10.353	5.00	30°	23.286°	10°

Tabla 3.3: Dimensiones específicas de la microtobera curva.

L_{c1}/h_t	L_{d1}/h_t	R_c/h_t	R_d/h_t	$A (\times 10^{-3})$	$B (\times 10^{-6})$	n
1.00	1.9766	2.00	5.00	3.6665	3.2465	0.5052

La nomenclatura es la misma que para el caso recto, a excepción de los subíndices $c1$ y $d1$, que indican los puntos de transición entre sección recta y curva de la parte convergente, y el punto de inflexión de la parte divergente, respectivamente.

3.2. Parámetros computacionales

El método computacional utilizado está basado en el método DSMC discutido en la Sección 2.2, mediante el programa dsmcFoamPlus de la herramienta computacional OpenFOAM (Open-source Field Operation And Manipulation).

Las colisiones moleculares están modeladas por el modelo VHS, y la técnica de muestreo NTC, mientras que el intercambio energético y los modos internos de vibración y rotación están controlados por el modelo estadístico Borgnakke-Larsen (Borgnakke y Larsen, 1975).

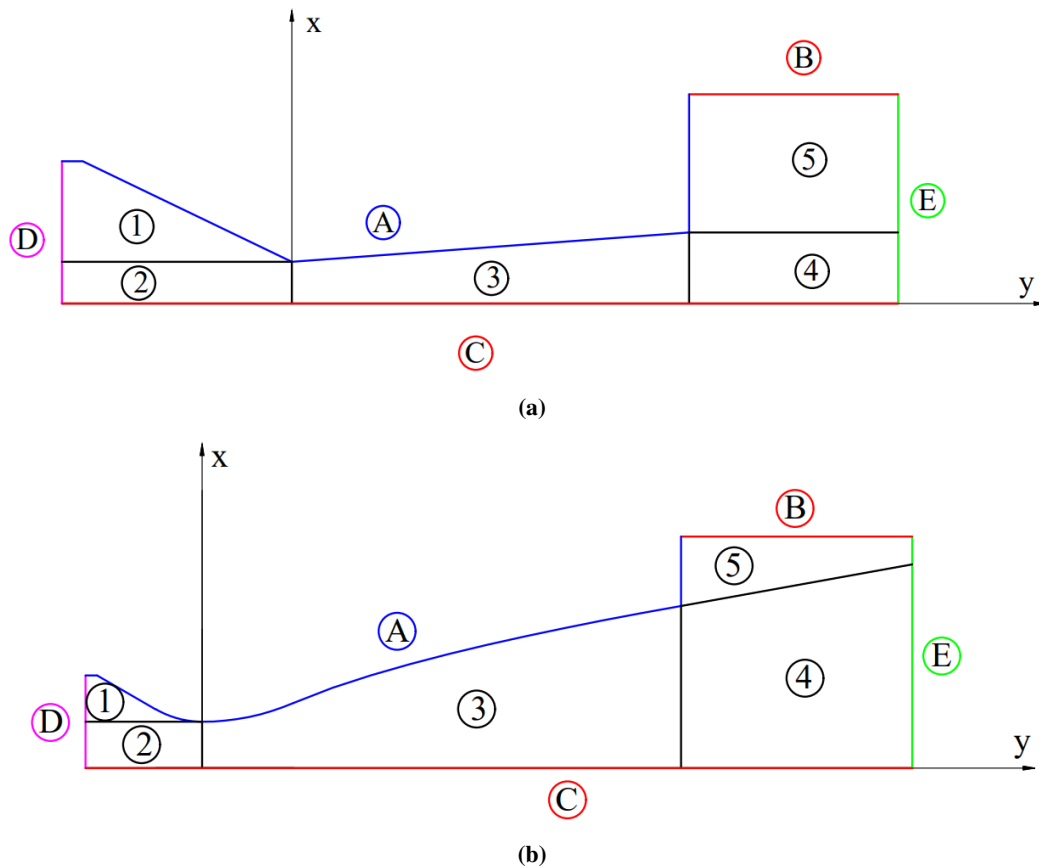
Además de analizar el rendimiento de las dos configuraciones geométricas, se investigará el efecto de utilizar dos tipos de gases fríos, Argón (Ar) y Nitrógeno (N₂), donde los parámetros moleculares del modelo VHS se aprecian en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4: Parámetros moleculares.

Fuente: Bird (1994)

Parámetro	N ₂	Ar	Unidad
Peso molecular (M)	28,02	39,948	kg/kmol
Masa molecular (m)	$4,65 \times 10^{-26}$	$6,63 \times 10^{-26}$	kg
Diámetro de referencia (d_{ref})	$4,17 \times 10^{-10}$	$4,17 \times 10^{-10}$	m
Temperatura de referencia (T_{ref})	273	273	K
Índice de viscosidad (ω)	0,74	0,81	-
Grados de libertad (ξ)	5	3	-

De modo de realizar una comparación correcta entre las dos geometrías, se utilizó un mallado estructurado similar para ambos casos, con las mismas condiciones de borde, como se muestra en la Figura 3.5.

**Figura 3.5:** Esquema del dominio computacional y condiciones de borde de la tobera recta (a) y la tobera curva (b).

Los dominios computacionales están subdivididos en las zonas 1-5, de tal forma que el mallado se adecue a las condiciones del flujo en cada sección de la tobera. Este mallado, en conjunto con el intervalo temporal y tiempo de cómputo están definidos en detalle en el Capítulo 4.

El dominio computacional también posee 5 tipos de condiciones de borde, como se ve en Figura 3.5. El borde A representa la superficie de la tobera, utilizando un modelo de reflexión difusa y temperatura constante. Dada la simetría mencionada anteriormente, las fronteras B y C están modeladas como condición de simetría. Finalmente, los bordes D y E representan las condiciones de entrada y salida, respectivamente, cada una modelada a presión constante. Las propiedades macroscópicas del flujo son las mismas para todos los casos, y se observan en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5: Condiciones de flujo.

Parámetro	N ₂	Ar	Unidad
Presión de entrada (p_{in})	100	100	kPa
Presión de externa (p_b)	5	5	kPa
Temperatura de entrada (T_{in})	300	300	K
Temperatura superficial (T_w)	300	300	K
Densidad de entrada (ρ_{in})	1.1231	1.6018	kg/m ³
Densidad molecular de entrada (n_{in})	$2,414 \times 10^{25}$	$2,414 \times 10^{25}$	l/m ³
Camino libre medio de entrada (λ_{in})	$5,361 \times 10^{-8}$	$5,361 \times 10^{-8}$	m

4 | Verificación y Validación

El uso de métodos numéricos para resolver desafíos tecnológicos es una de las herramientas más potentes de la ingeniería moderna, pero si no se tiene una forma de verificar si estas soluciones son precisas, los resultados obtenidos no se apegarán con la realidad. Por ello, antes de realizar dichas simulaciones, es necesario enviar el procedimiento computacional a un proceso de verificación y validación.

La etapa de verificación comprueba si el procedimiento numérico es efectuado correctamente, evaluando el efecto de la variación de diversos parámetros, mientras que la etapa de validación compara los resultados obtenidos con resultados experimentales o simulaciones ya comprobadas dentro de la literatura, con el fin de validar si dichos resultados se apegan a la realidad.

4.1. Verificación

Como se menciona anteriormente, el proceso de verificación consiste en variar los parámetros computacionales para determinar su efecto sobre las simulaciones. En el contexto de modelos DSMC, la verificación está relacionada a 4 fuentes principales de error, la discretización espacial, la discretización temporal, el número de partículas simuladas por celda, y el número de iteraciones.

Para efectuar la verificación del modelo computacional, se tomará como base la microtobera recta descrita en la Subsección 3.1.1, evaluando las 4 condiciones de error mencionadas sobre las propiedades macroscópicas de número de Mach, presión, densidad y temperatura adimensional a lo largo de la longitud de la tobera, y los resultados se extrapolarán hacia la geometría curva (Subsección 3.1.2).

4.1.1. Efectos de la Discretización Espacial

El tamaño de las celdas computacionales juega un papel muy relevante en simulaciones del tipo DSMC. Es de gran importancia que las celdas tengan un tamaño menor que el camino libre medio molecular, con el fin de promover colisiones intermoleculares con las partículas más cercanas, y capturar los gradientes macroscópicos. Pero un mallado muy fino incrementará el tiempo de cómputo, por lo que es necesario encontrar un balance.

En general, es buena práctica en DSMC utilizar celdas con tamaños menores a $\lambda/3$, y esta condición es más relevante en direcciones de gradientes fuertes. Sin embargo, se ha demostrado que para flujos en

microcanales, es posible utilizar celdas elongadas por múltiplos de λ en la dirección del flujo (Nance et al., 1997), y se examinará el efecto de esta condición.

El mallado estándar consta de celdas estructuradas con $\Delta x = 10\lambda$ y $\Delta y = \lambda/2$, donde el camino libre medio es calculado para cada región (ver Sección 3.2) utilizando una aproximación de flujo isentrópico. La independencia de la discretización espacial es examinada variando el mallado en x por $\Delta x = 5\lambda$ y $\Delta x = 3\lambda$, y en y por $\Delta y = \lambda$ y $\Delta y = \lambda/3$. La Tabla 4.1 presenta el número de celdas que componen cada región computacional, para los diferentes mallados descritos.

Tabla 4.1: Diferentes mallados aplicados en el proceso de verificación.

	$\Delta x = 3\lambda$	$\Delta x = 5\lambda$	Estándar	$\Delta y = \lambda/3$	$\Delta y = \lambda$
Región 1	300×825	190×825	95×825	95×1238	95×413
Región 2	300×350	190×350	95×350	95×515	95×175
Región 3	250×350	156×350	78×350	78×515	78×175
Región 4	45×350	30×350	15×350	15×515	15×175
Región 5	45×118	30×118	15×118	15×175	15×59
N° celdas	461060	291890	145945	217055	73020

Como se muestra en las Figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4, el hecho de utilizar un mallado más fino que el estándar no afecta los resultados, por lo que dicho mallado es suficiente para realizar las simulaciones.

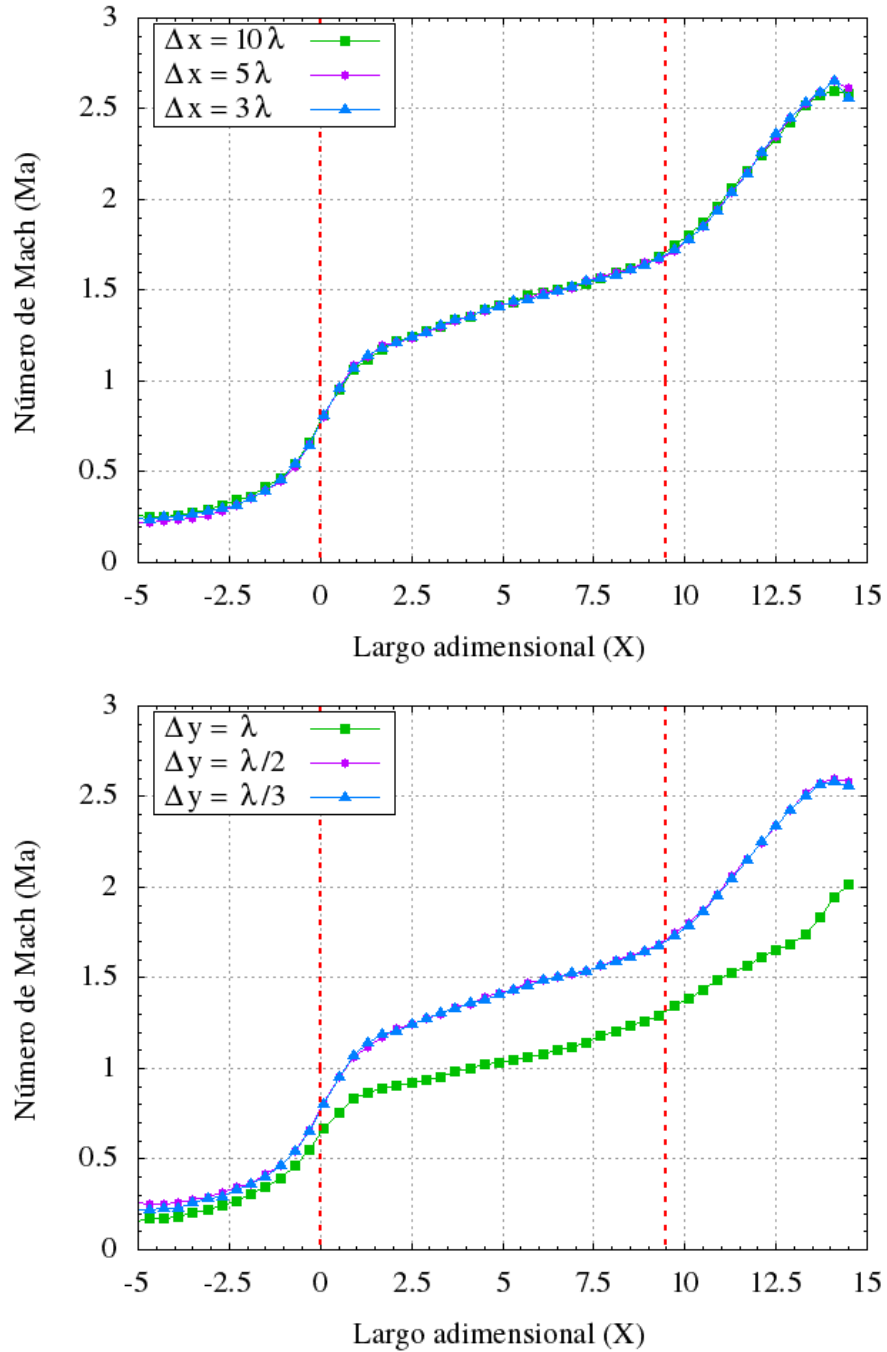


Figura 4.1: Influencia de variar el tamaño de celdas en la dirección x (arriba) y en la dirección y (abajo) sobre el número de Mach.

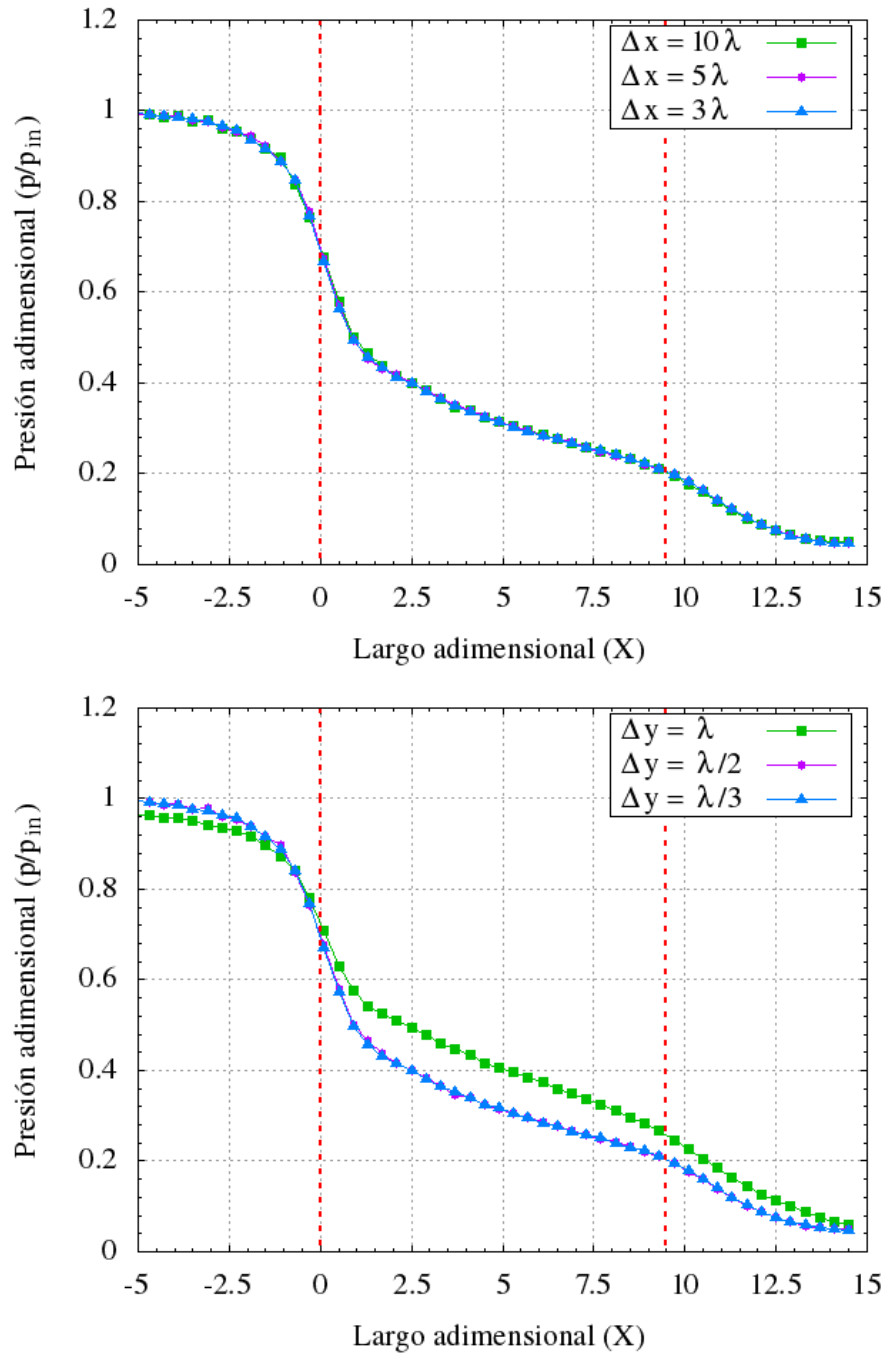


Figura 4.2: Influencia de variar el tamaño de celdas en la dirección x (arriba) y en la dirección y (abajo) sobre la presión.

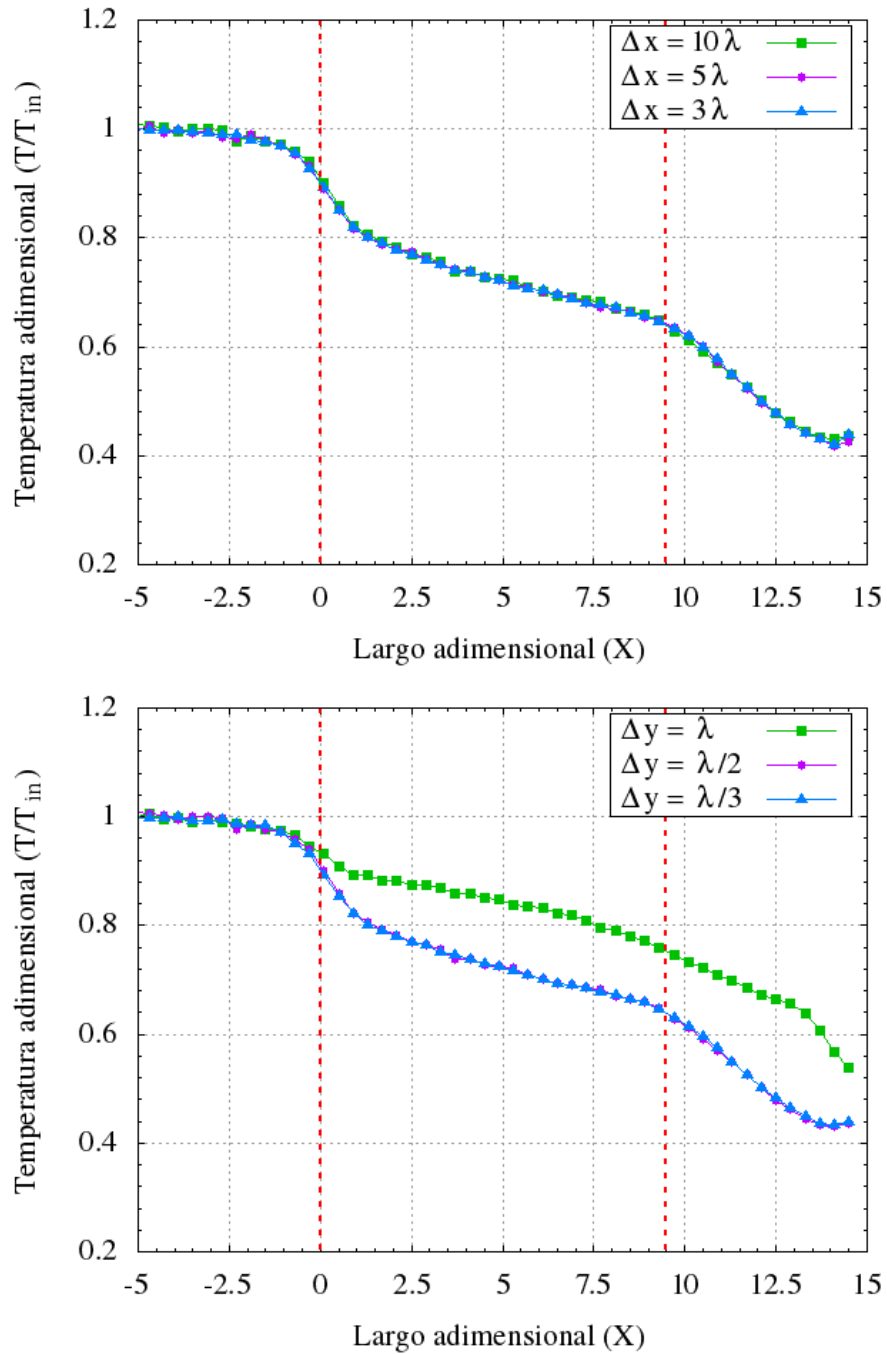


Figura 4.3: Influencia de variar el tamaño de celdas en la dirección x (arriba) y en la dirección y (abajo) sobre la temperatura.

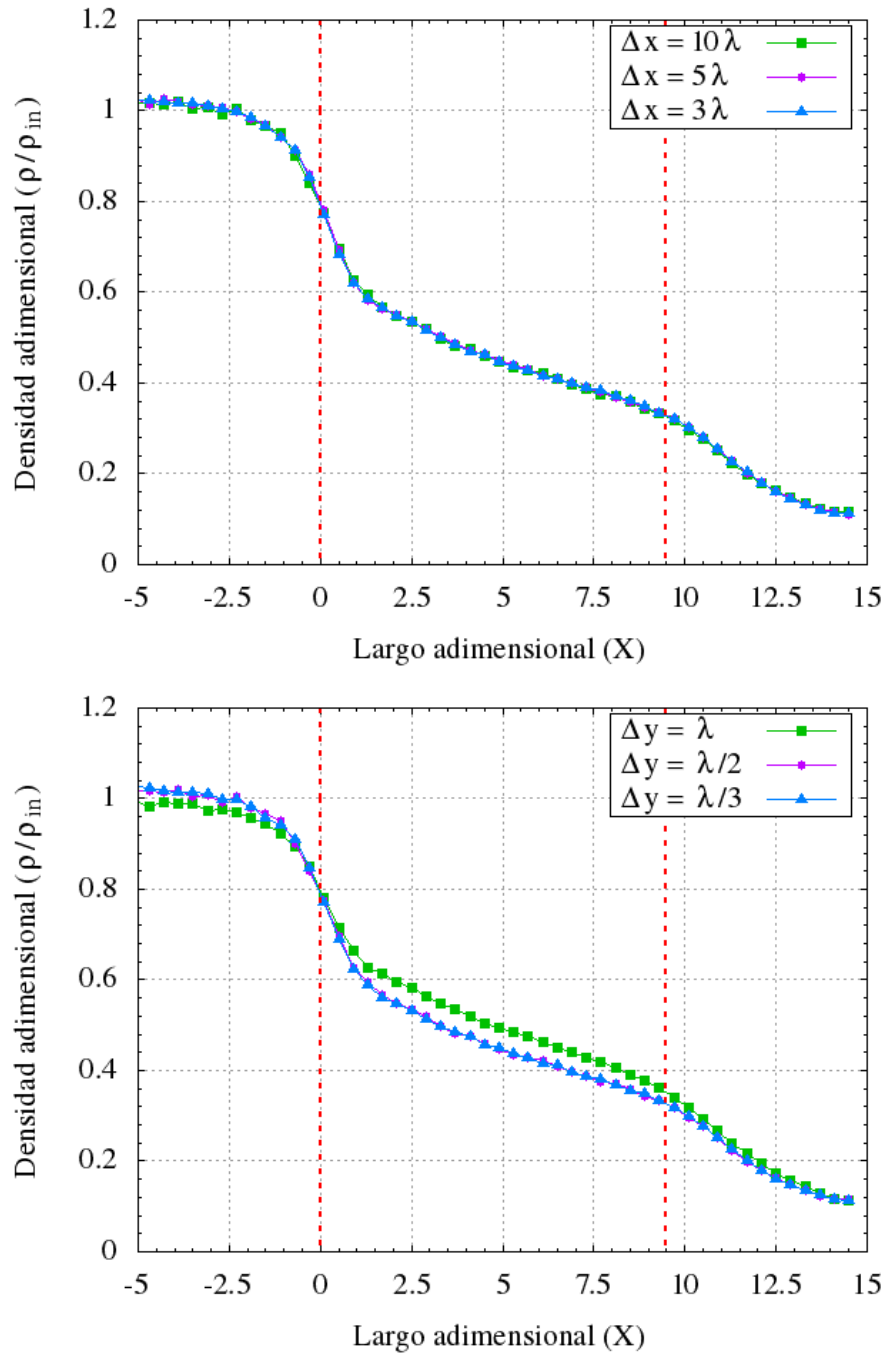


Figura 4.4: Influencia de variar el tamaño de celdas en la dirección x (arriba) y en la dirección y (abajo) sobre la densidad.

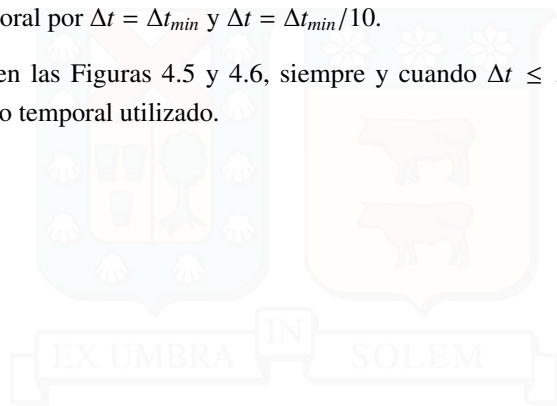
4.1.2. Efectos de la Discretización Temporal

De similar forma, el uso de una debida discretización temporal es esencial en DSMC. Este intervalo temporal Δt debe ser menor al tiempo medio entre colisiones (Δt_{min}), con el fin de asegurar que los movimientos y colisiones moleculares puedan ser desacopladas. Si el intervalo es muy grande en relación

al tamaño de celda, es posible que una molécula entre y salga de dicha celda en un tiempo menor que el intervalo, y esto obviamente produce resultado errados.

En simulaciones DSMC se suele utilizar un $\Delta t < \Delta t_{min}/5$, y este valor fue utilizado para el intervalo temporal estándar, donde se asume un tiempo medio entre colisiones constante calculado para la entrada de la tobera, donde su valor es más desfavorable. Para realizar el proceso de verificación, se evalúa los efectos de variar dicho intervalo temporal por $\Delta t = \Delta t_{min}$ y $\Delta t = \Delta t_{min}/10$.

Como se observa en las Figuras 4.5 y 4.6, siempre y cuando $\Delta t \leq \Delta t_{min}/5$, las soluciones son independientes del intervalo temporal utilizado.



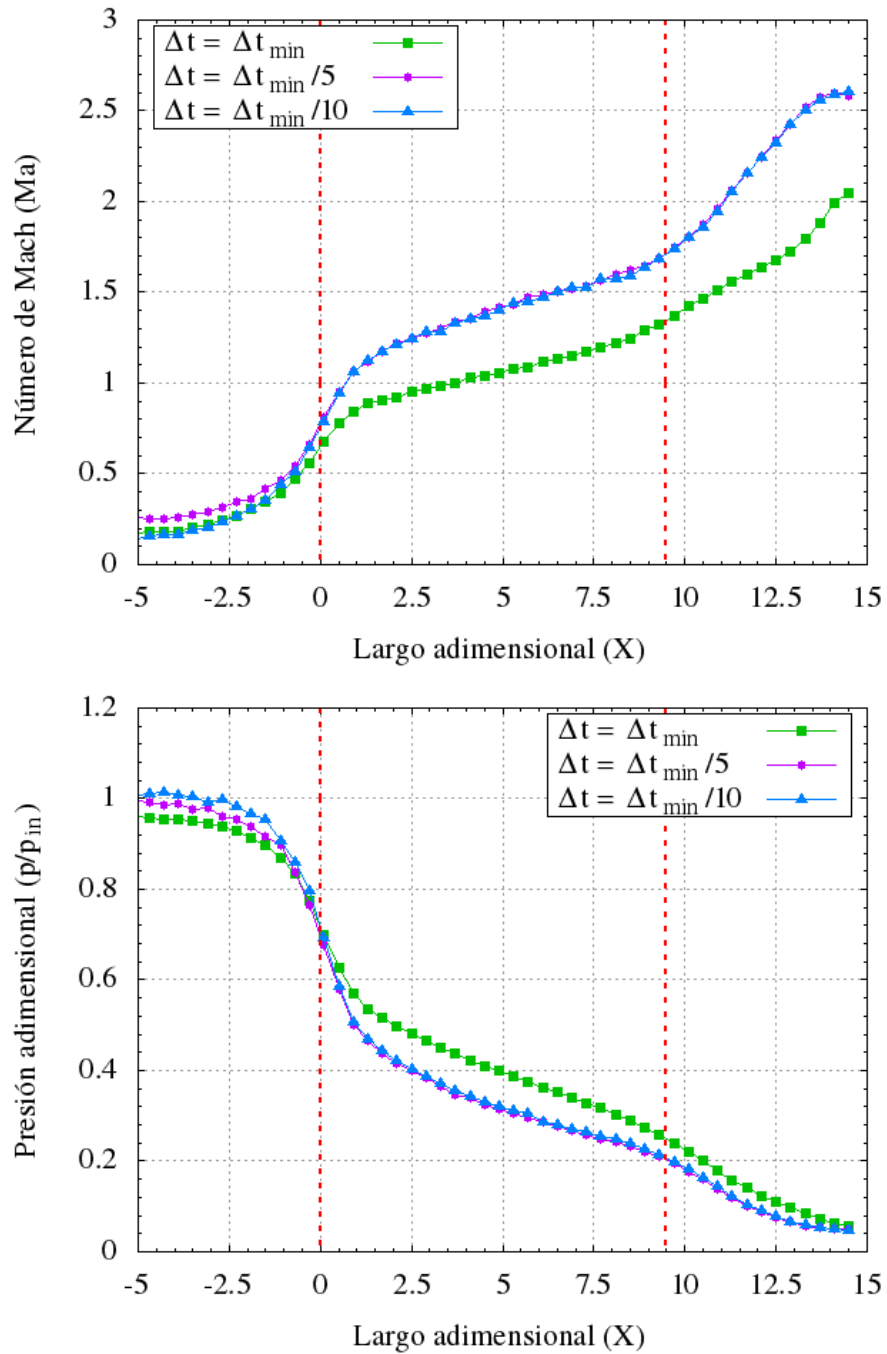


Figura 4.5: Influencia de variar el intervalo temporal sobre el número de Mach (arriba) y la presión (abajo).

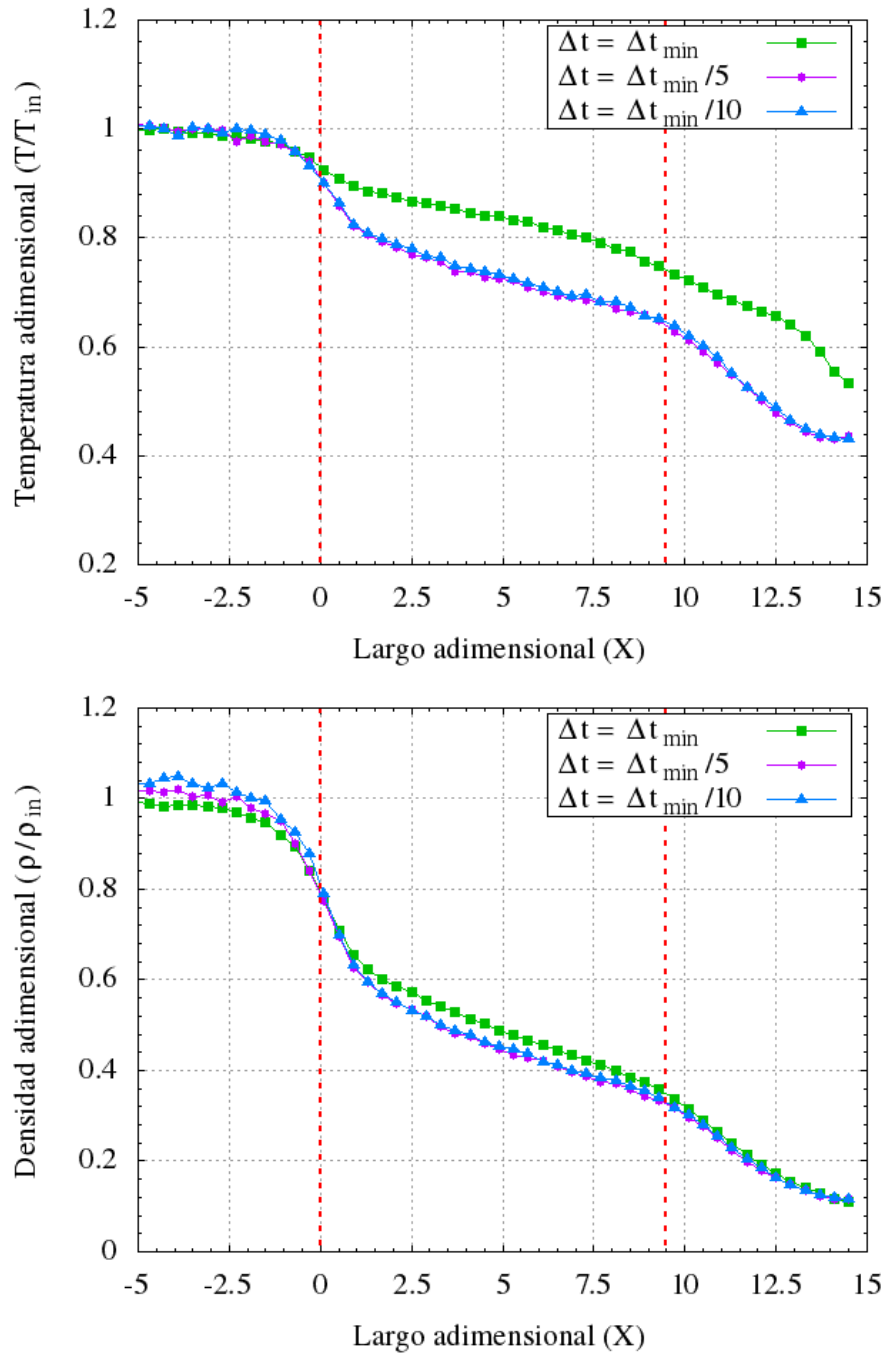


Figura 4.6: Influencia de variar el intervalo temporal sobre la temperatura (arriba) y la densidad (abajo).

4.1.3. Efectos del Número de Partículas por Celda

El número de partículas por celda aproximado se obtiene dividiendo el número total de partículas simuladas por la cantidad de celdas computacionales. Para una misma cantidad de celdas, entre mayor sea este número, mayor es la cantidad de partículas simuladas, por ende, mayor el número de interacciones moleculares y colisiones superficiales, permitiendo que los resultados obtenidos tienen una dispersión estadística menor.

Dependiendo de las aplicaciones, el número de partículas por celda (N_{celda}) puede variar entre 10 a 30. En el caso de la simulación realizada, se toma como referencia un valor de $N_{\text{celda}} = 10$, y se miden los efectos de utilizar $N_{\text{celda}} = 5$ y $N_{\text{celda}} = 15$.

Al analizar las Figuras 4.7 y 4.8, se observa que no hay mucha diferencia de las propiedades macroscópicas al cambiar el número de partículas simuladas.

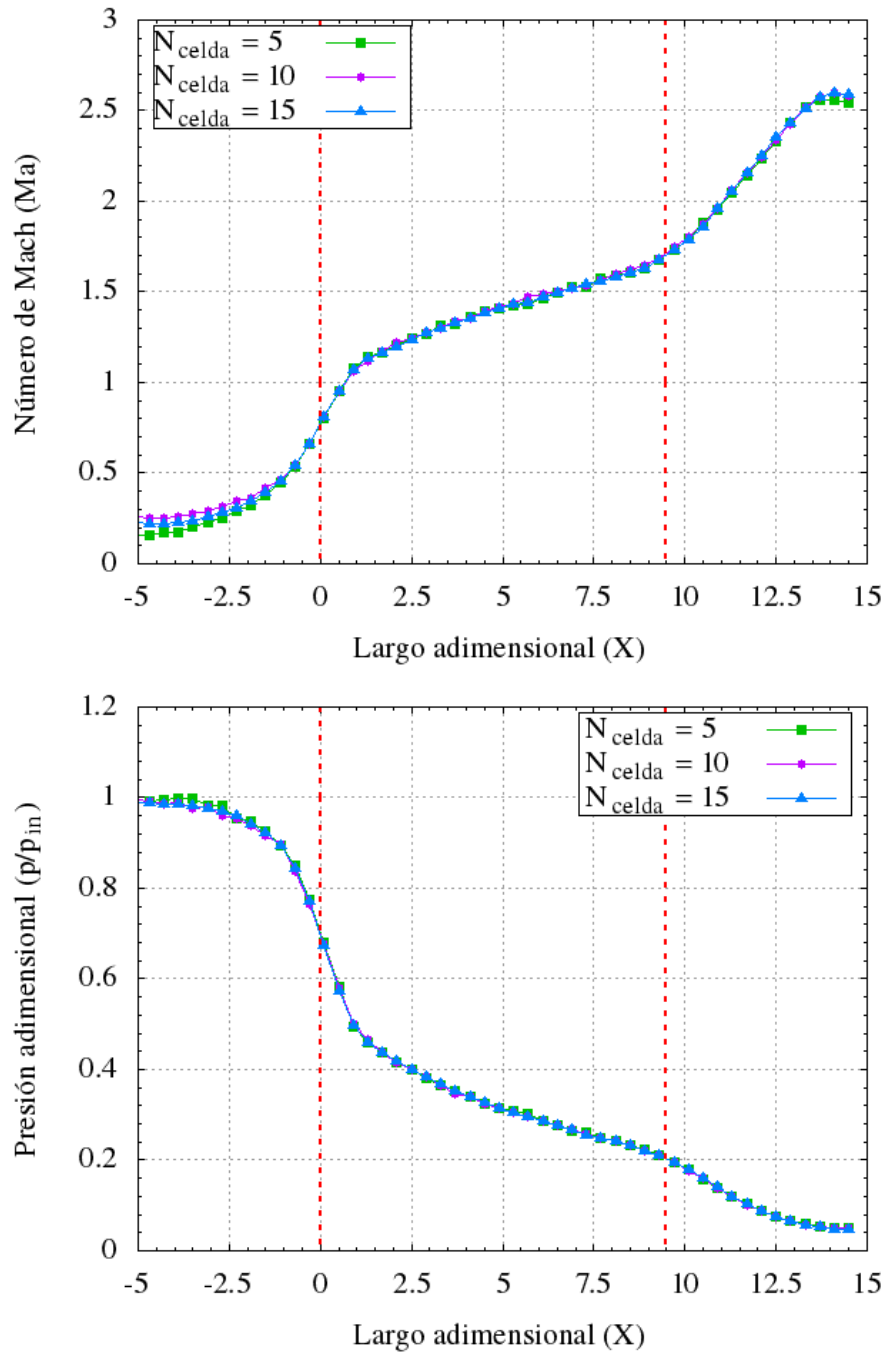


Figura 4.7: Influencia de variar el número de partículas por celda sobre el número de Mach (arriba) y la presión (abajo).

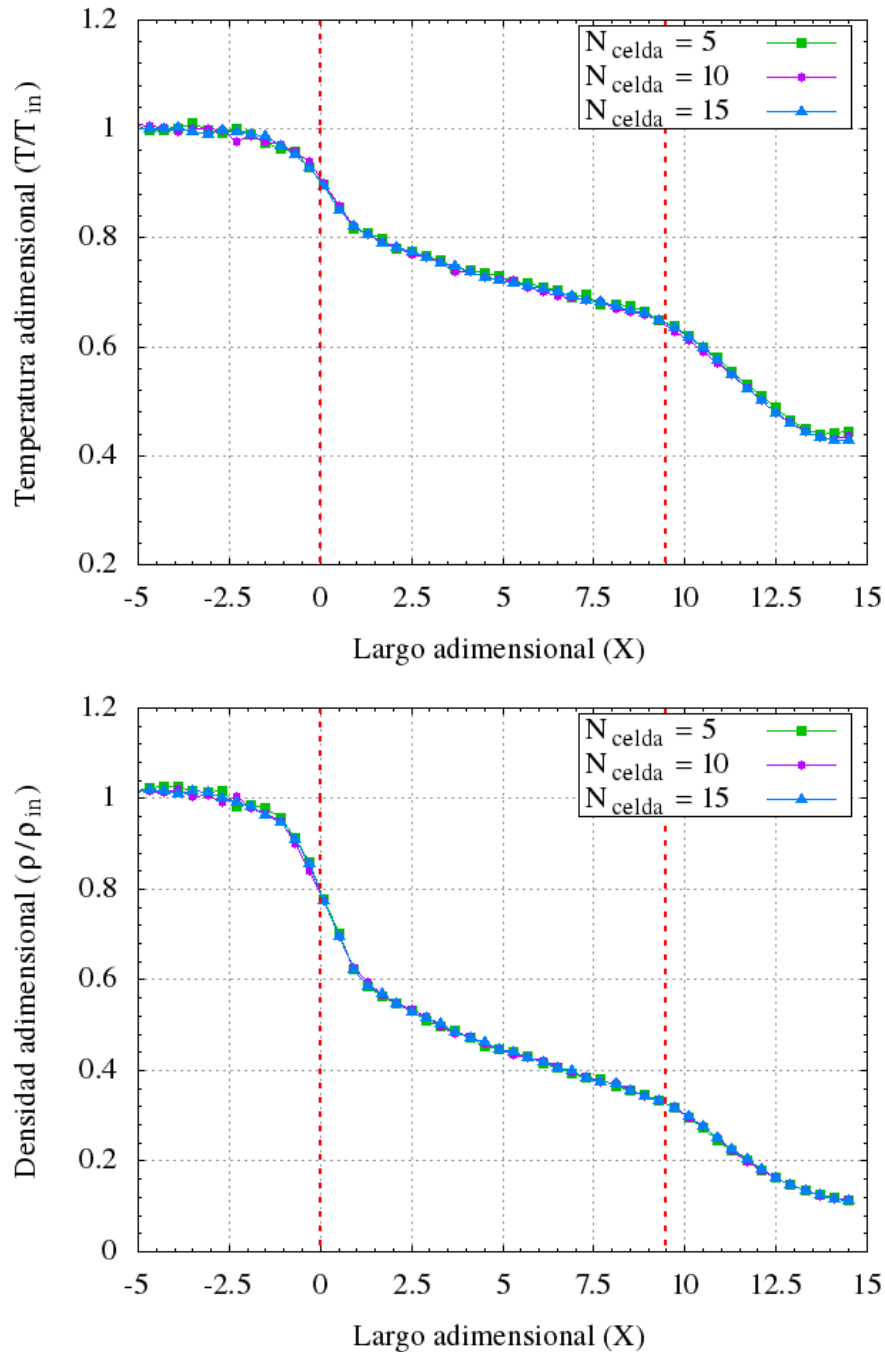


Figura 4.8: Influencia de variar el número de partículas por celda sobre la temperatura (arriba) y la densidad (abajo).

4.1.4. Efectos del Número de Iteraciones

Por su propia naturaleza, el método DSMC es incondicionalmente transiente. Por esta razón, es necesario esperar que se realice un número de iteraciones suficiente para que la simulación 'avance' hacia un resultado estacionario. Típicamente se determina que una solución es estacionaria si algunos parámetros moleculares se estabilizan a lo largo de un valor.

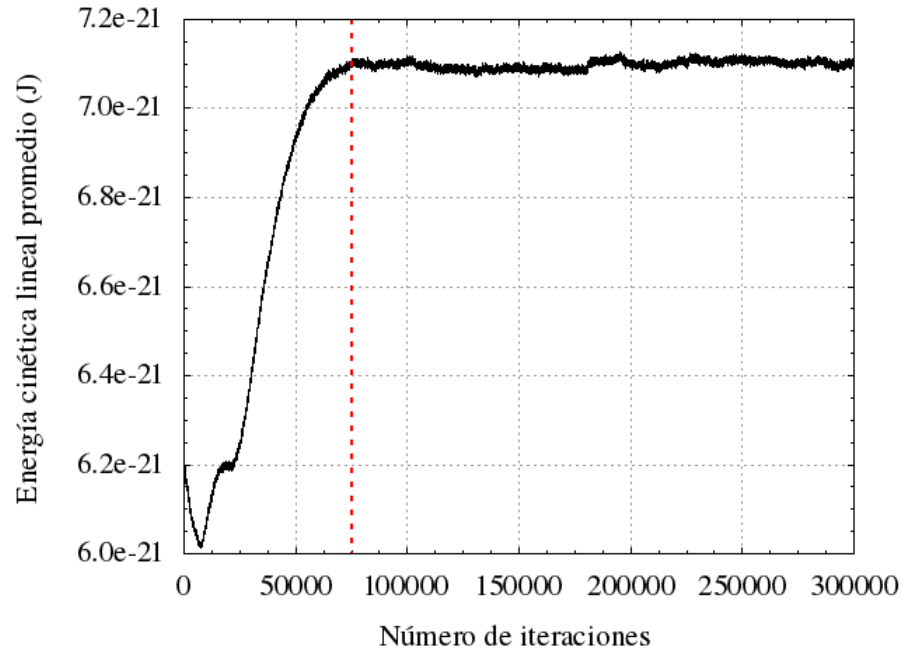


Figura 4.9: Avance de la energía cinética lineal promedio a lo largo de la simulación.

En la Figura 4.9 se muestra el avance de la energía cinética lineal promedio de las partículas simuladas a lo largo del cómputo. Se puede observar que cercano a las 75,000 iteraciones este valor deja de subir, por lo que se concluye que la simulación se convierte en estacionaria, y se puede empezar a promediar los valores obtenidos entre sí.

Para el proceso de verificación, se analizará el comportamiento al cambiar el número de iteraciones realizados, del valor estándar de 200,000 iteraciones a 100,000 y 300,000 iteraciones.

Se observa en las Figuras 4.10 y 4.11 que para un número de iteraciones mayor a 200,000, no hay cambios en los valores obtenidos, pero para números menores de iteraciones, no hay tiempo de cómputo suficiente para que los resultados se estabilicen.

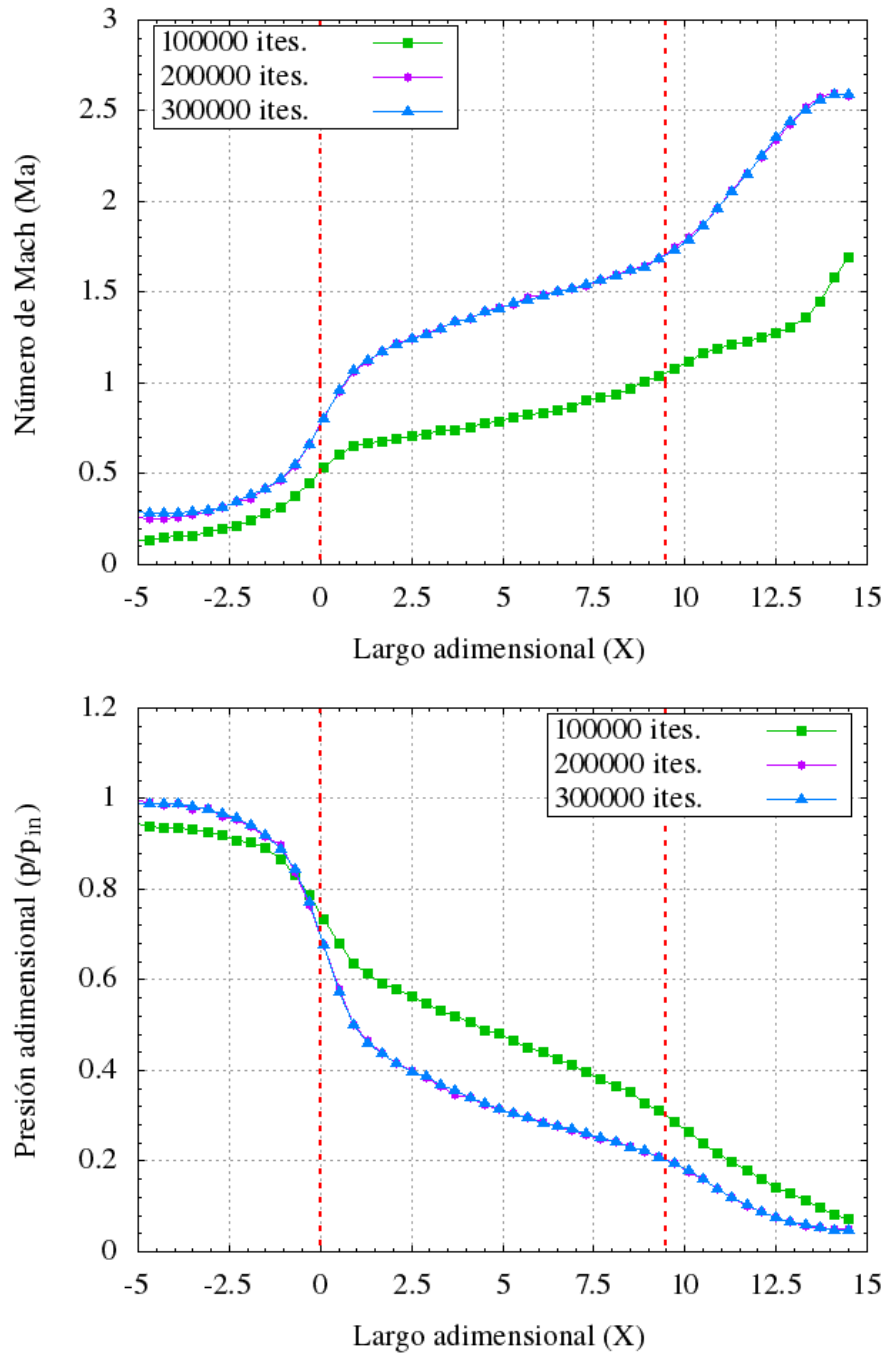


Figura 4.10: Influencia de variar el número de iteraciones sobre el número de Mach (arriba) y la presión (abajo).

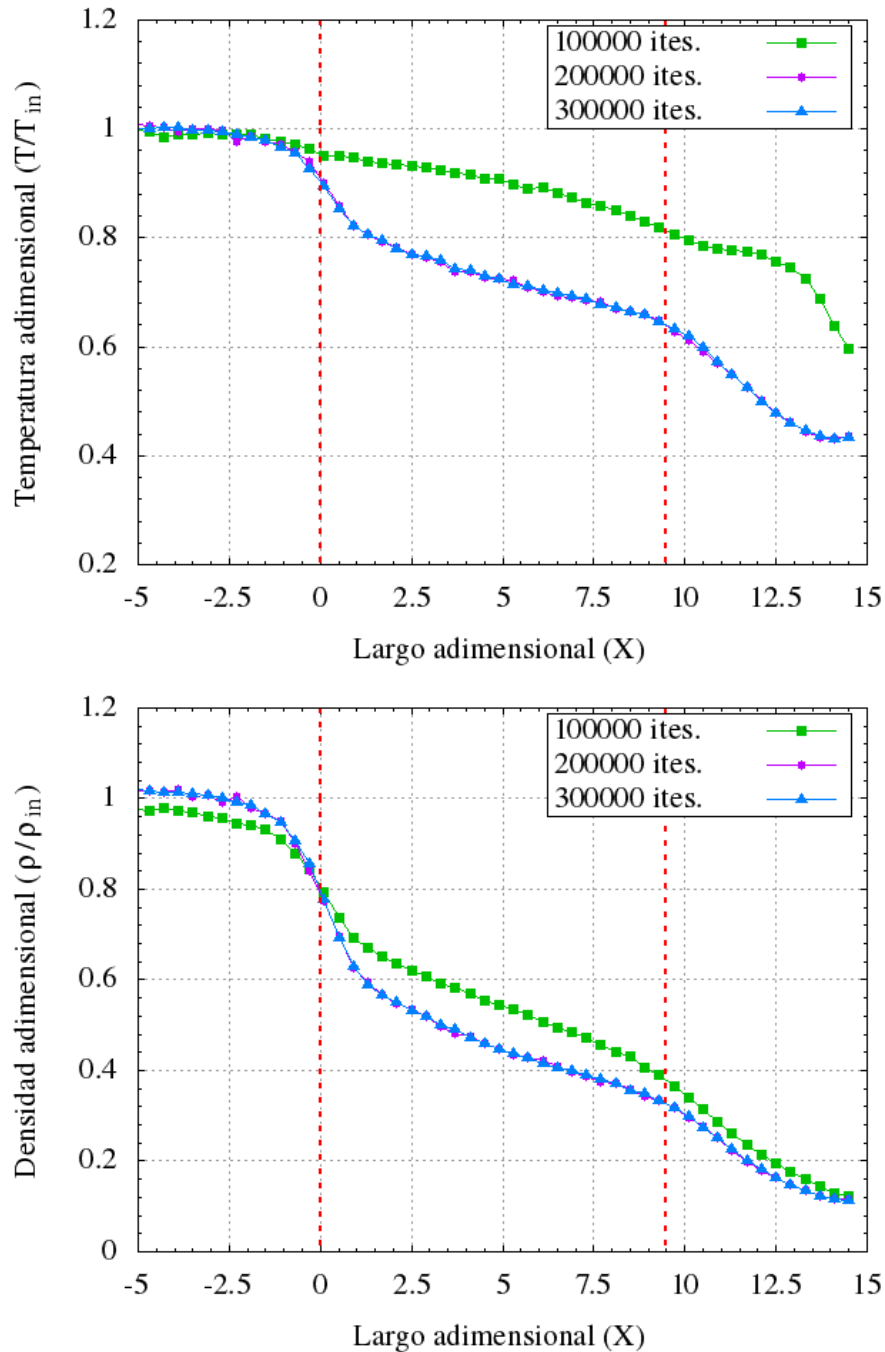


Figura 4.11: Influencia de variar el número de iteraciones sobre la temperatura (arriba) y la densidad (abajo).

4.2. Validación

El objetivo del proceso de validación realizado es comprobar si el flujo simulado a lo largo de la microtobera es físicamente correcto. Para ello, el método DSMC utilizado es comparado con casos experimentales y/o numéricos ya comprobados en la literatura. El caso prueba a comparar está basado en el

estudio numérico-experimental realizado por [Hao et al. \(2005\)](#). La geometría a utilizar es la misma descrita para la microtobera recta (Subsección 3.1.1), pero el fluido de operación es aire (mezcla $N_2 + O_2$) a 100 kPa, evaluado a presiones externas de 10, 40, 70 y 90 kPa. Las propiedades moleculares y condiciones de flujo se muestran en la Tabla 4.2 y Tabla 4.3, respectivamente.

Tabla 4.2: Parámetros moleculares.

Parámetro	N_2	O_2	Unidad
Peso molecular (M)	28,02	31,998	kg/kmol
Masa molecular (m)	$4,65 \times 10^{-26}$	$5,31 \times 10^{-26}$	kg
Fracción molar	0,79	0,21	-
Diámetro de referencia (d_{ref})	$4,17 \times 10^{-10}$	$4,07 \times 10^{-10}$	m
Temperatura de referencia (T_{ref})	273	273	K
Índice de viscosidad (ω)	0,74	0,77	-
Grados de libertad (ξ)	5	5	-

Tabla 4.3: Condiciones de flujo.

Parámetro	N_2+O_2	Unidad
Presión de entrada (p_{in})	100	kPa
Temperatura de entrada (T_{in})	300	K
Temperatura superficial (T_w)	300	K
Densidad de entrada (ρ_{in})	1,161	kg/m ³
Densidad molecular de entrada (n_{in})	$2,414 \times 10^{25}$	1/m ³
Camino libre medio de entrada (λ_{in})	$5,423 \times 10^{-8}$	m

La Figura 4.12 muestra la distribución del número de Mach (arriba) y presión (abajo), y la Figura 4.13 muestra la distribución de la temperatura (arriba) y densidad (abajo) a lo largo de la tobera para diferentes presiones externas. Se puede apreciar que el flujo es supersónico en la garganta para presiones externas menores a 40 kPa, y esto conlleva a variaciones mayores de las demás propiedades macroscópicas en dichos casos. En la Figura 4.14 se observa el flujo másico que atraviesa la garganta en función de la diferencia de presión $\Delta p = p_{in} - p_n$, comparando los resultados obtenidos por esta simulación con: Método quasi-1D isentrópico, soluciones de Navier-Stokes con condición de deslizamiento ([Hao et al., 2005](#)), simulaciones DSMC ([Sebastiao, 2011](#)), y resultados experimentales ([Hao et al., 2005](#)). Finalmente, la Figura 4.15 compara la distribución del número de Mach obtenida a lo largo de la línea central de la tobera respecto a los resultados isentrópicos, por Navier-Stokes y DSMC mencionados anteriormente.

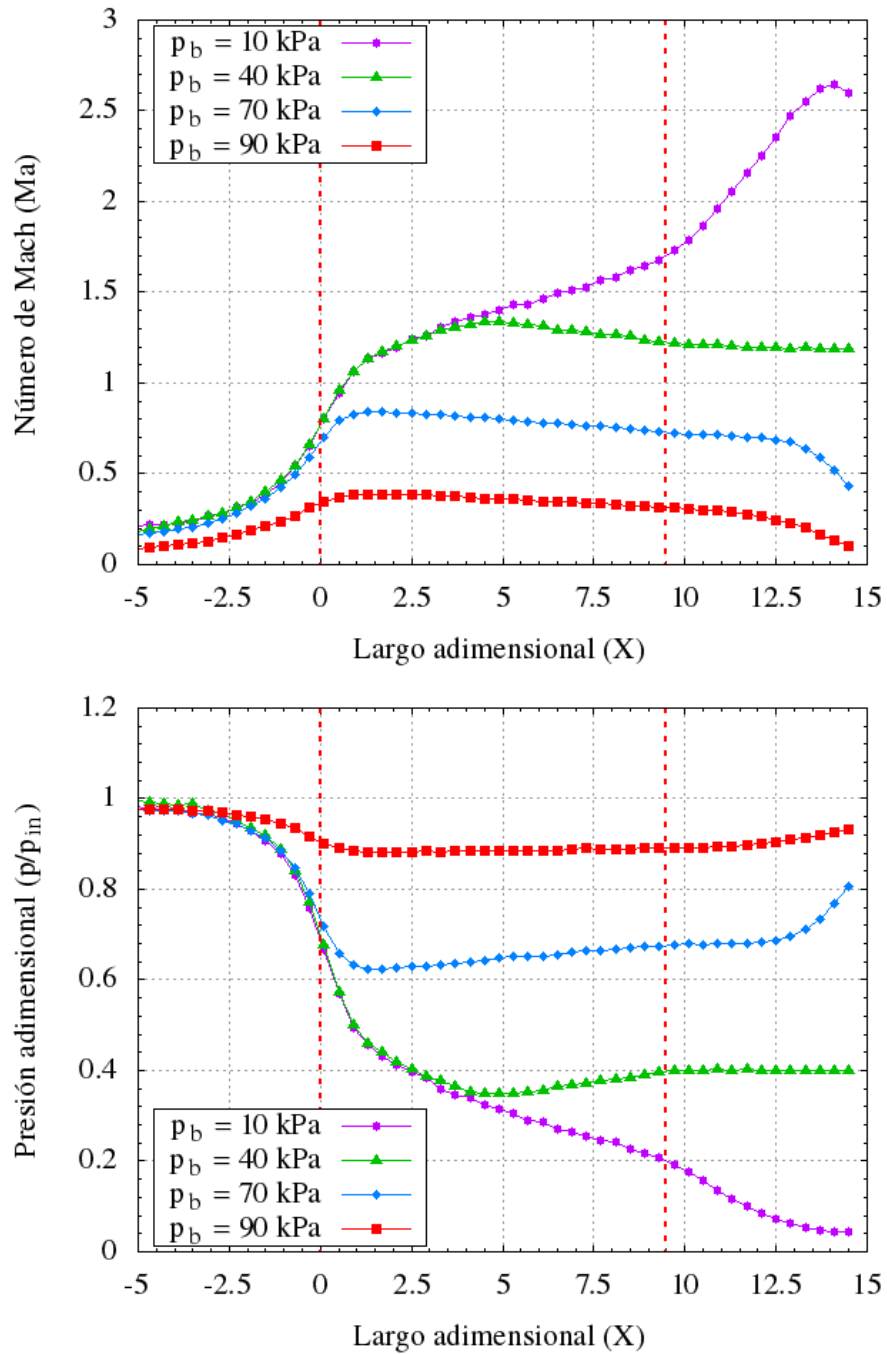


Figura 4.12: Distribución del número de Mach (arriba) y presión (abajo) a lo largo de la tobera para diferentes presiones externas.

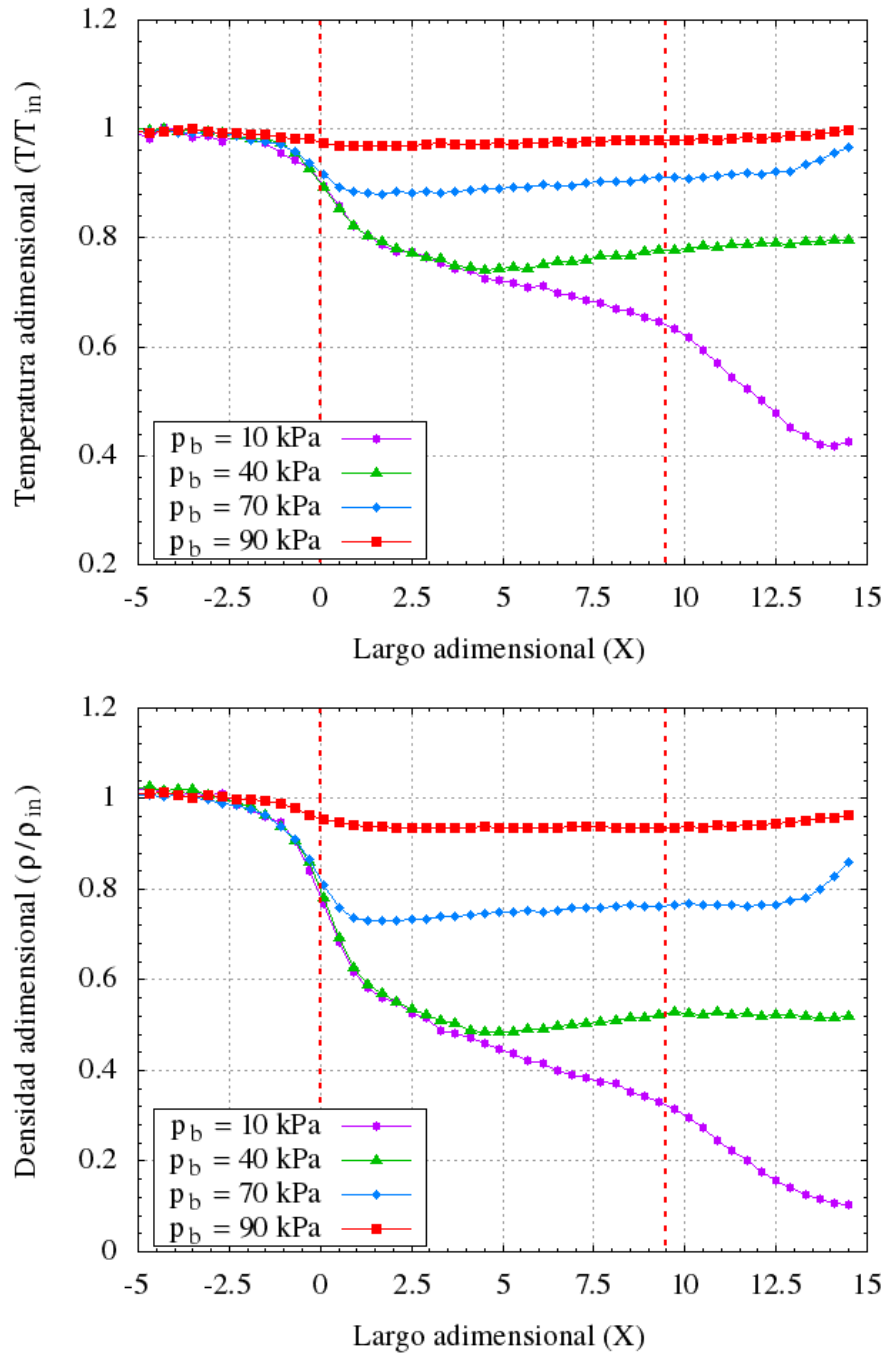


Figura 4.13: Distribución de la temperatura (arriba) y densidad (abajo) a lo largo de la tobera para diferentes presiones externas.

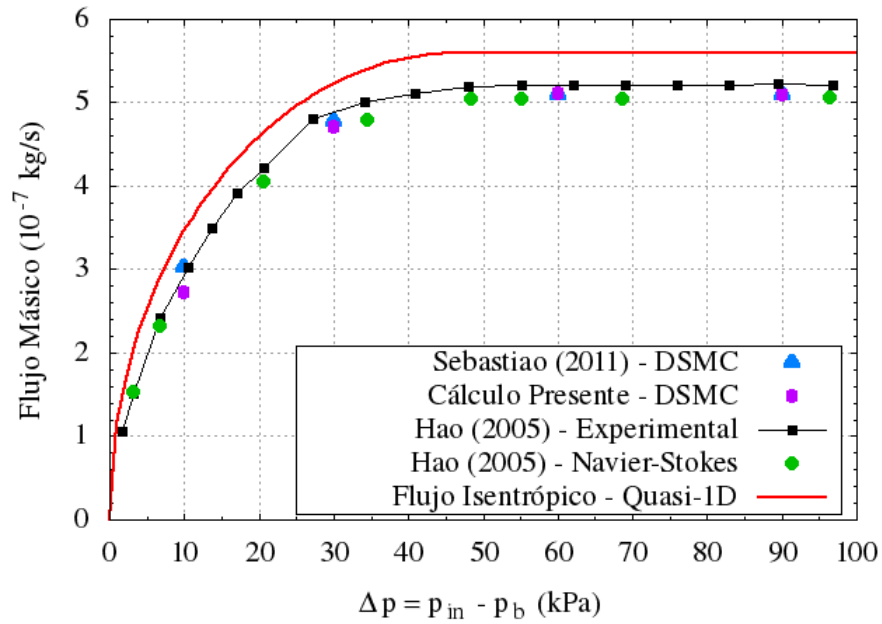


Figura 4.14: Comparación entre resultados experimentales y numéricos para el flujo másico.

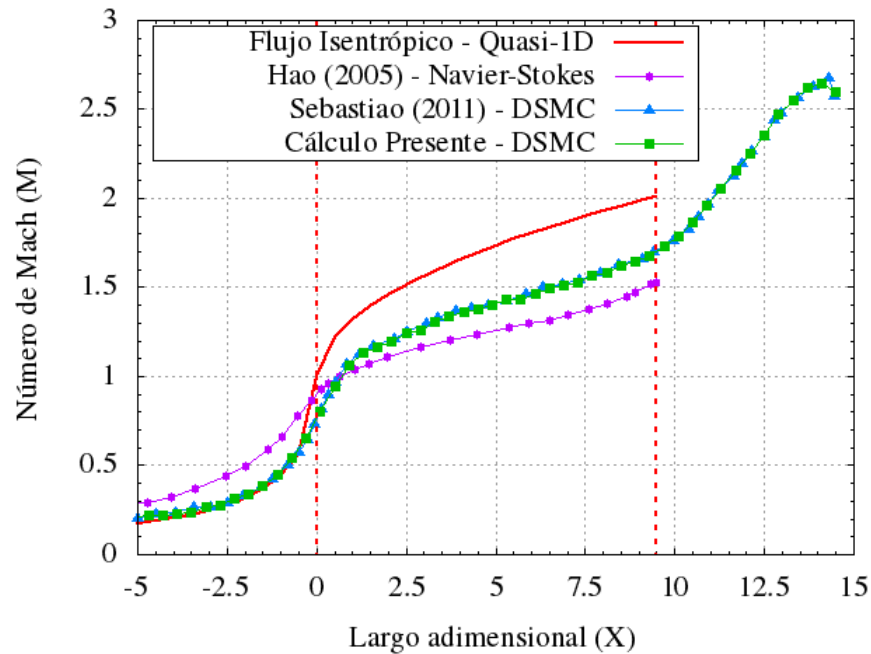


Figura 4.15: Comparación entre la distribución del número de Mach a lo largo de la línea central para simulaciones isentrópicas, Navier-Stokes y DSMC a presión externa de 10 kPa, con respecto al estudio presente.

Al observar el comportamiento del flujo másico, se ve claramente como el flujo se vuelve estrangulado cuando la diferencia de presión supera los 60 kPa. Además, los resultados obtenidos por la simulación realizada concuerdan tanto con resultados experimentales como simulaciones numéricas dentro de la literatura. De

igual forma, al analizar la Figura 4.15 se observa que los resultados obtenidos son prácticamente idénticos a la investigación DSMC de ([Sebastiao, 2011](#)).

Entonces, se puede concluir que los resultados obtenidos tienen validez física.



5 | Resultados

El propósito de este capítulo es discutir y comparar los resultados de las simulaciones DSMC realizadas, mostrando los efectos del uso de microtoberas rectas y curvas, y distintas especies de gases (nitrógeno y argón), sobre la estructura del campo de flujo de las propiedades macroscópicas, las propiedades aerodinámicas superficiales y los parámetros de desempeño.

5.1. Propiedades macroscópicas del flujo

Esta sección expone los resultados obtenidos por las simulaciones realizadas de las principales propiedades macroscópicas, número de Mach, densidad, presión y temperatura, donde estas 3 últimas son normalizadas por los valores de entrada del flujo. Además, se muestran las distribuciones del número de Knudsen a lo largo de las diferentes configuraciones de micropropulsores.

Dichas propiedades son calculadas a lo largo de la línea de simetría de las toberas, y a través de secciones transversales relevantes: Entrada, garganta y salida. Finalmente, para el caso de las propiedades macroscópicas, se muestran los contornos de estas para analizar su distribución a lo largo de toda la geometría.

5.1.1. Número de Mach

Las Figuras 5.1 y 5.2 muestran la evolución del número de Mach a lo largo de la tobera, comparando ambas geometrías y especies de gas utilizadas, respectivamente. Entre ambos gases no se aprecia mucha diferencia, pero al comparar entre el uso de una microtobera recta y una curva (ver Figura 5.2) se observa un fenómeno interesante. El comportamiento en la sección convergente es similar entre ambas geometrías, llegando a velocidad sónica ($M = 1$) en la garganta. Pero, al analizar la sección divergente se aprecia que, para la geometría recta, el número de Mach aumenta con una pendiente constante, mientras que en el caso curvo existen dos pendientes, con una transición suave entre sí.

Esto es de esperar, ya que la geometría recta tiene una sección divergente con un ángulo de expansión constante, mientras que la geometría curva posee una sección cóncava, donde el ángulo de expansión aumenta rápidamente, seguida por una sección convexa, donde el crecimiento del ángulo disminuye.

También, se observa el efecto de utilizar una transición suave entre secciones convergentes y divergentes. En el caso recto, se aprecia un cambio abrupto de pendiente tras la garganta, mientras que, en el caso

curvo, la pendiente prácticamente no cambia al pasar por ella.

Los perfiles del número de Mach a lo largo de la tobera se observan en las Figuras 5.3, 5.4 y 5.5. Nuevamente no hay mucha diferencia entre el uso de gas nitrógeno y argón. A la entrada (ver Figura 5.3), ambos perfiles son relativamente uniformes, aunque la geometría curva presenta un perfil levemente más desarrollado. Al analizar el flujo en la garganta (ver Figura 5.4) se puede concluir que, para la geometría curva, el flujo es estrangulado en dicho punto, pero para el caso recto, la velocidad sónica se genera un tanto después. Finalmente, a la salida de las toberas (ver Figura 5.5), se aprecia claramente que la geometría curva alcanza números de Mach mayores. Esto se debe principalmente a que la tobera curva presenta una relación de expansión mayor que su contraparte recta.

Otro punto interesante se aprecia al analizar el número de Mach en la superficie a lo largo de la superficie. En la entrada este valor es 0, indicando que existe una condición de no deslizamiento, pero a medida que el flujo avanza, se generan saltos de velocidad considerables. Esto es indicativo de los efectos de enrarecimiento que aumentan a lo largo de la tobera, los cuales son discutidos en más detalle en la Subsección 5.1.5.

Los fenómenos mencionados se detallan de forma más clara en la Figura 5.6, donde se muestran las líneas de contorno de número de Mach. Se puede apreciar claramente como los efectos viscosos dominan el flujo, dada la gruesa capa límite observada en las cercanías de las paredes, y notando que los gradientes de velocidad son predominantemente en la dirección y . Además, viendo la distribución de velocidad observada a la salida de la tobera, el caso recto tiene una forma típica de un flujo sub-expandido, mientras que la tobera curva posee una distribución relativamente ideal.

Finalmente, en la Figura 5.7 se observan las líneas de flujo. Al analizar la región exterior aguas abajo de la tobera, se observa que en el caso curvo se genera un vórtice en la región directamente arriba de la salida. Este vórtice también es presente en el caso recto, pero de un mayor diámetro, extendiéndose arriba del dominio. Dada la configuración de arreglos mencionada en la Sección 3.1, podemos concluir que en el caso curvo, se generan 2 vórtices pequeños a cada lado de la simetría entre toberas adyacentes, mientras que en el caso recto se forma un solo vórtice de gran tamaño.

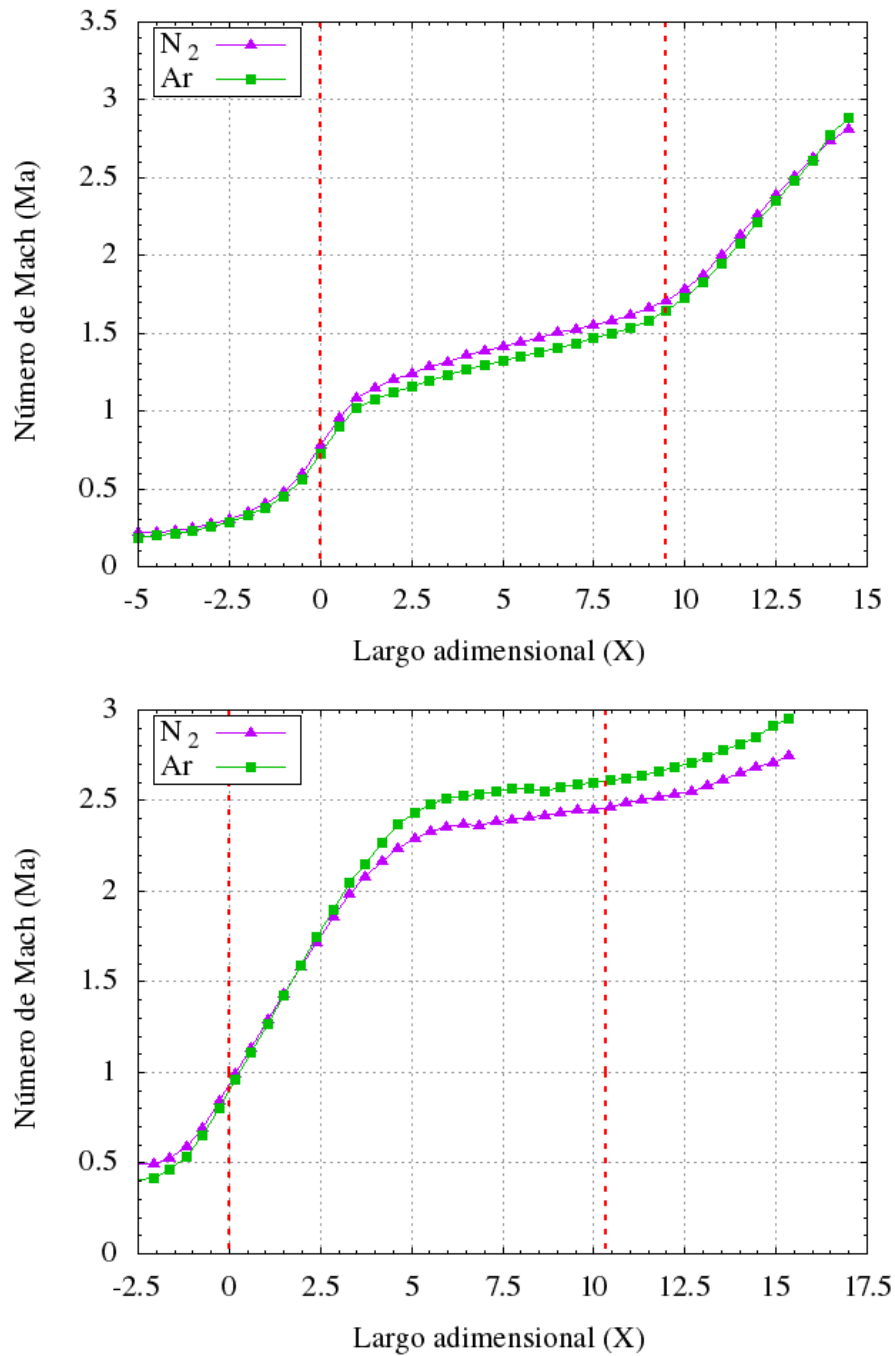


Figura 5.1: Comparación entre la distribución del número de Mach a lo largo de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

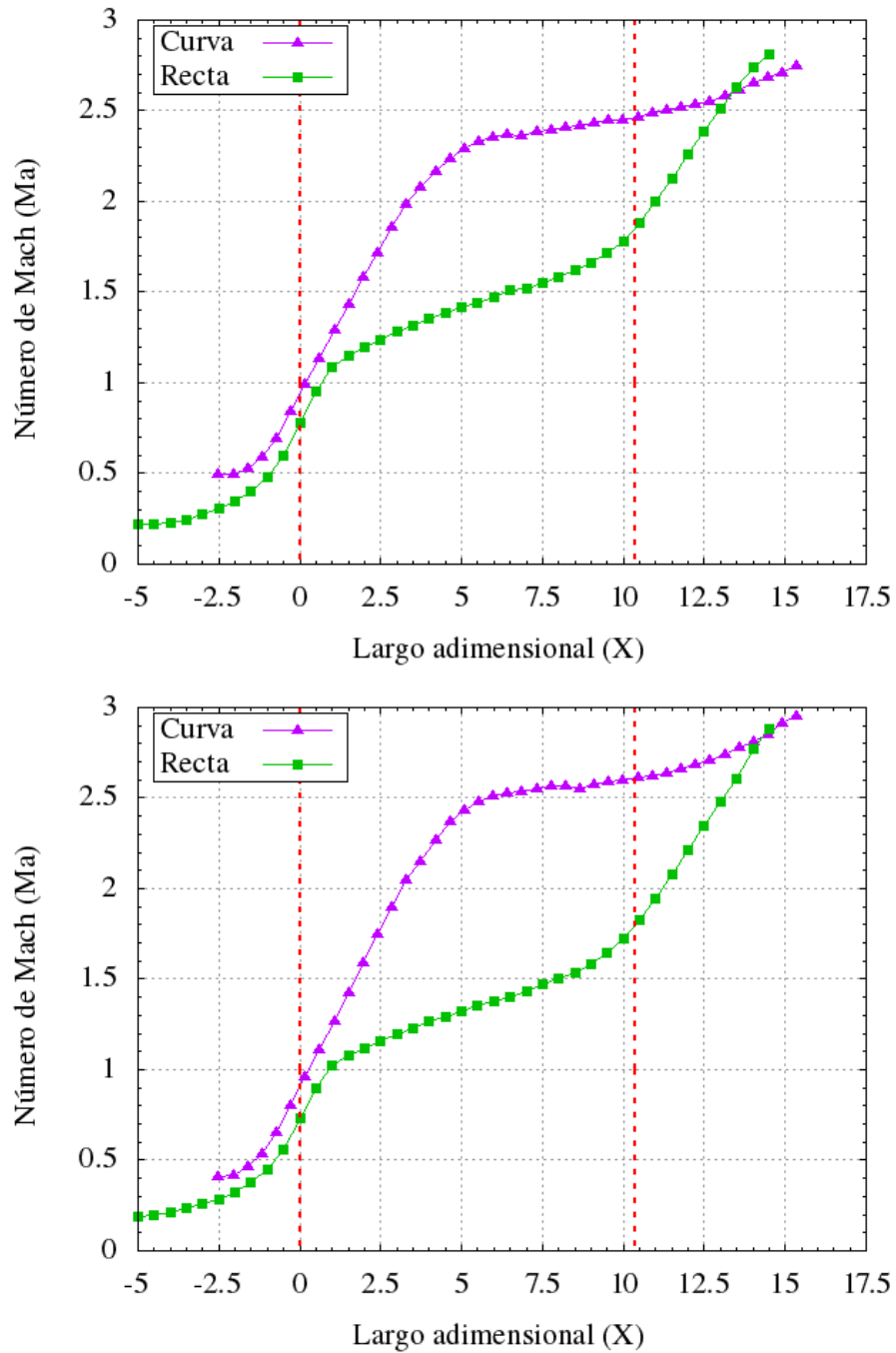


Figura 5.2: Comparación entre la distribución del número de Mach a lo largo de las microtoberas utilizando nitrógeno (arriba) y argón (abajo).

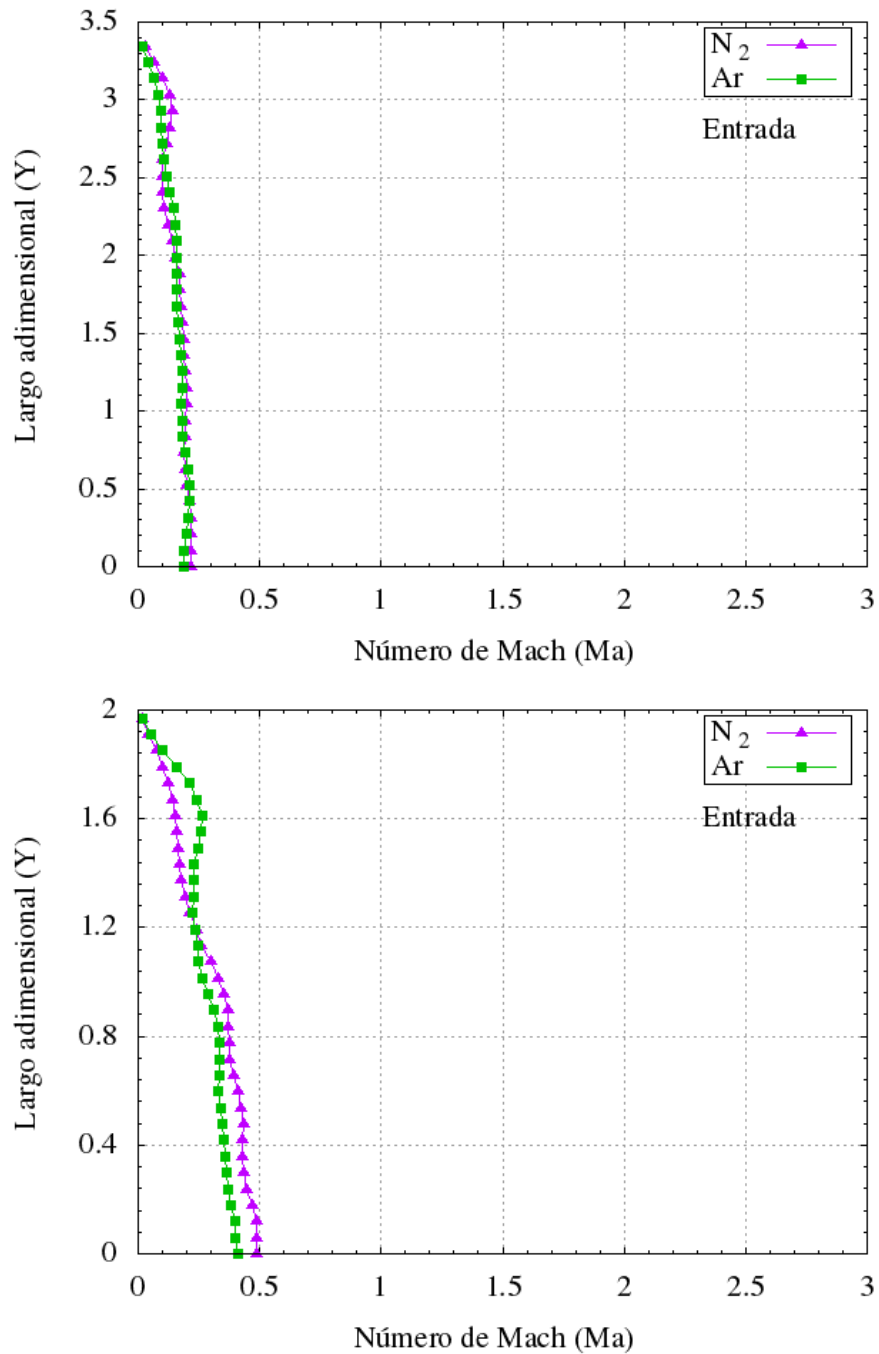


Figura 5.3: Comparación entre los perfiles del número de Mach en la entrada de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

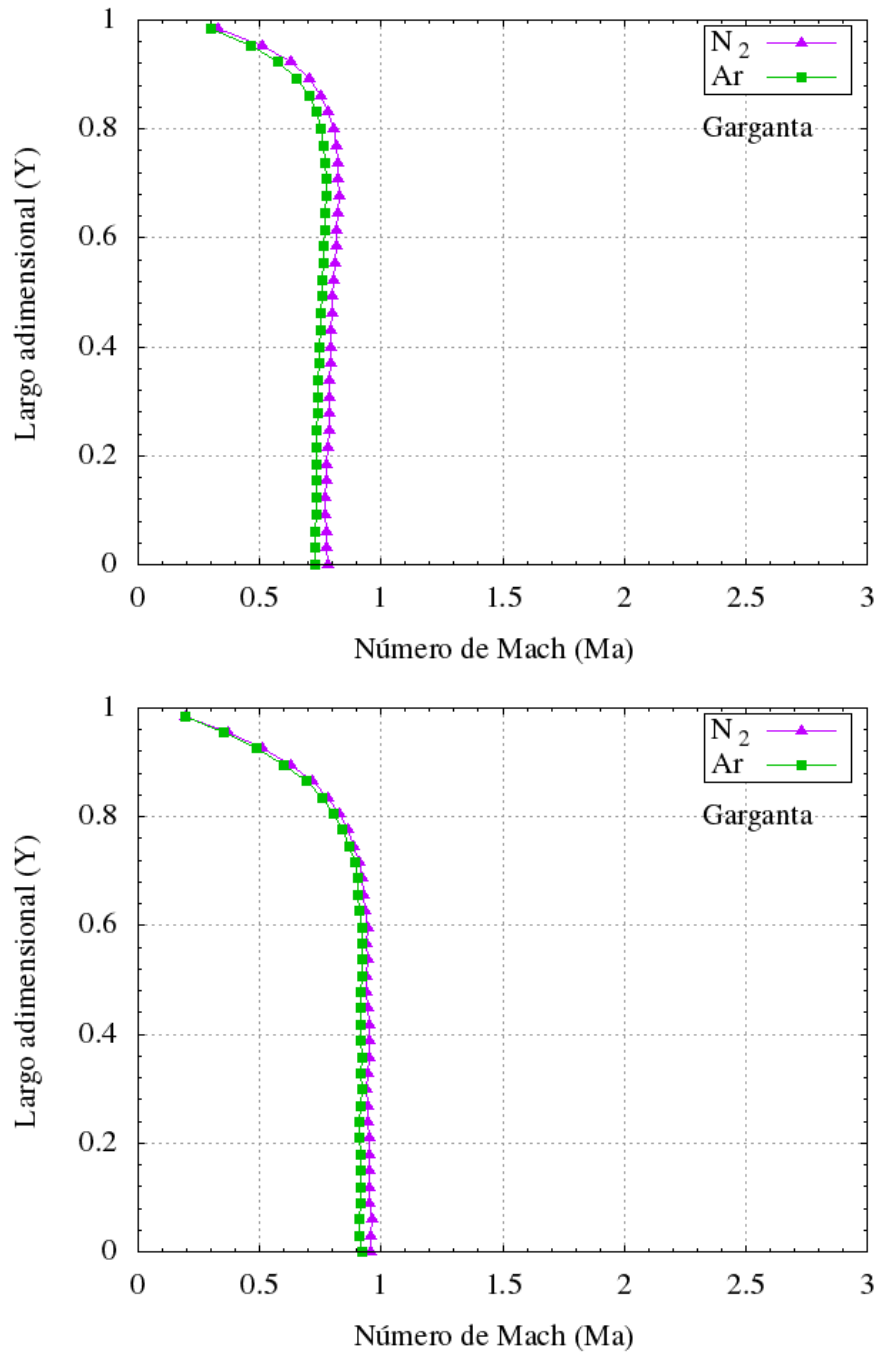


Figura 5.4: Comparación entre los perfiles del número de Mach en la garganta de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

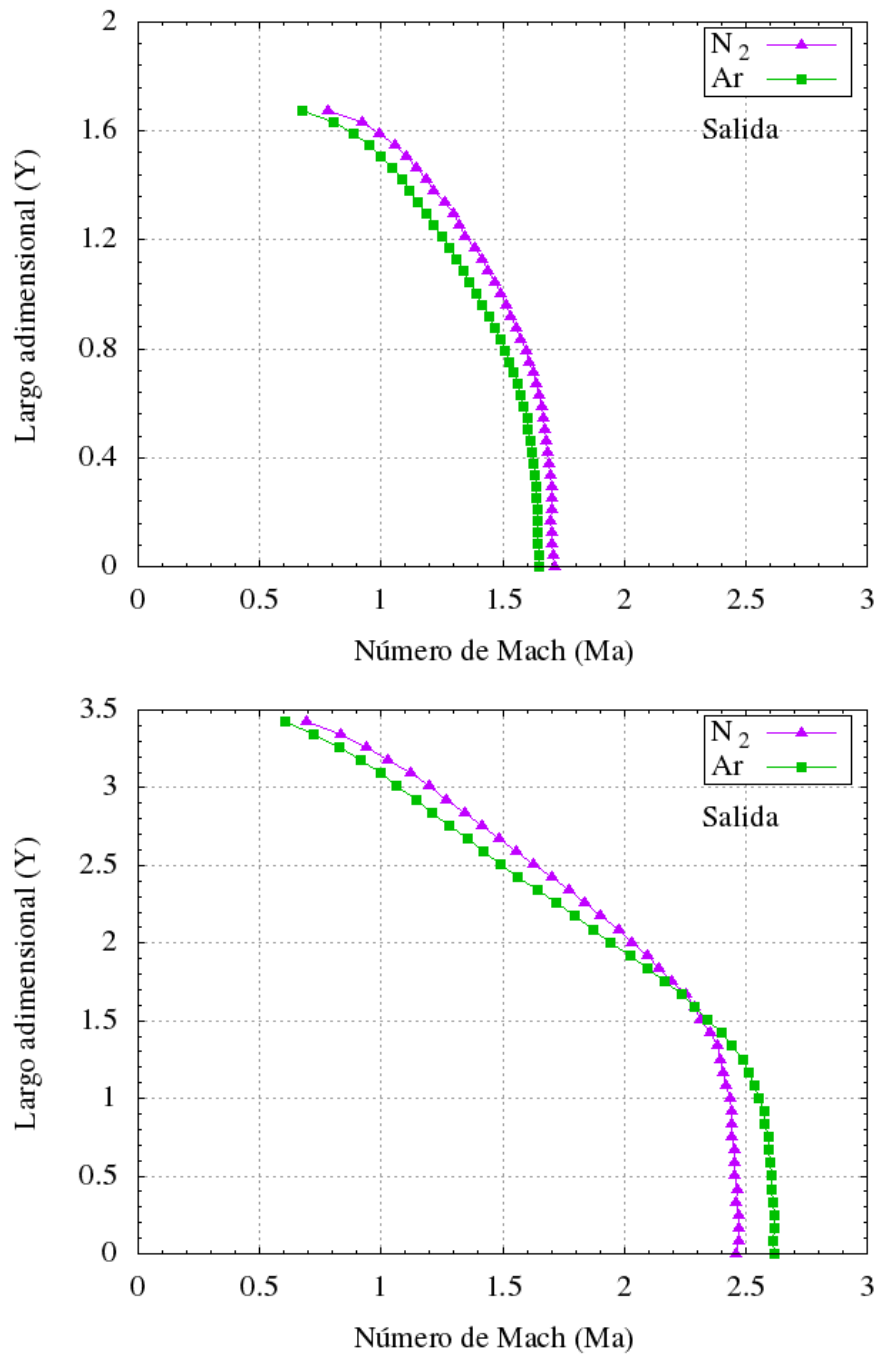
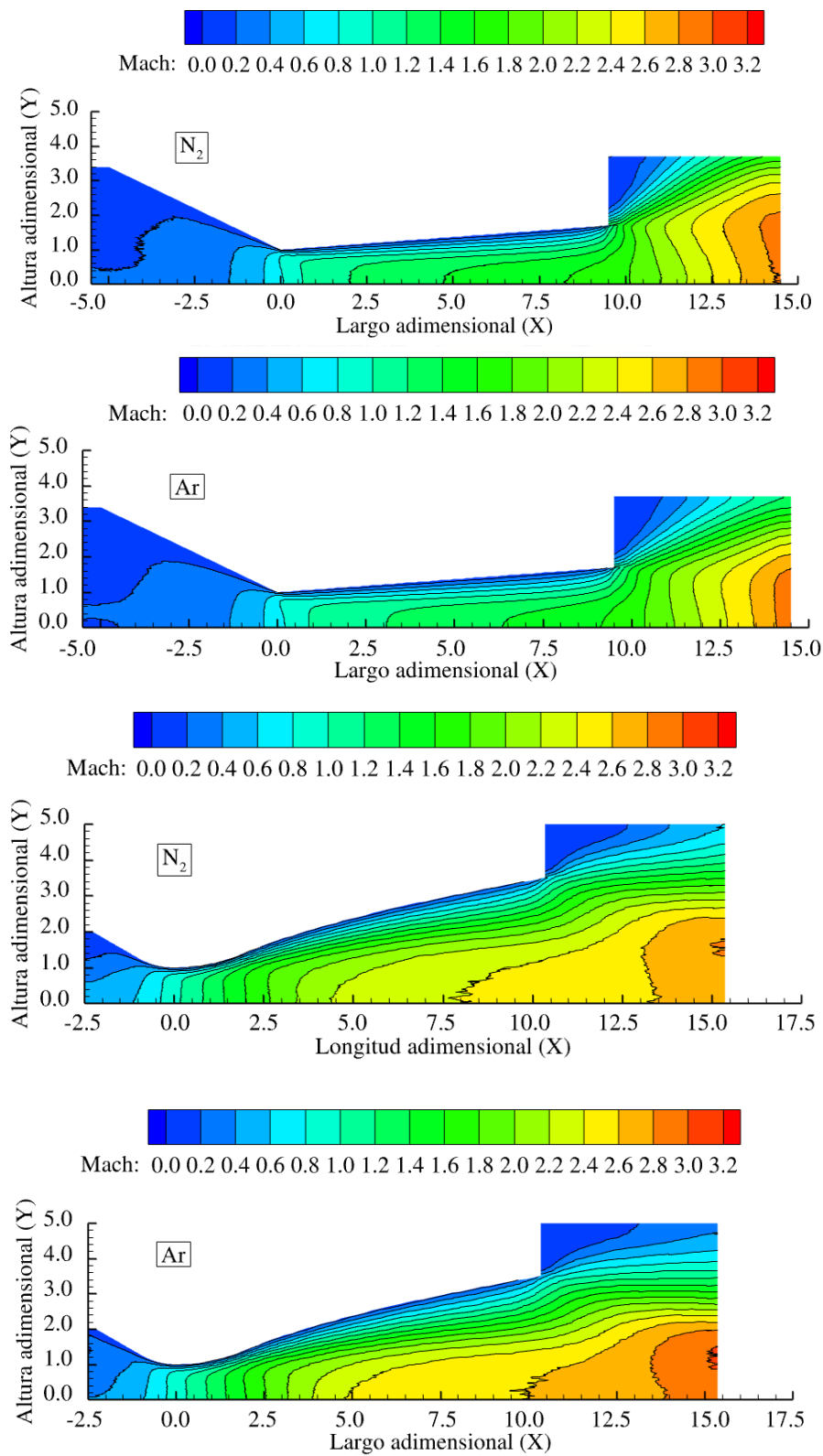


Figura 5.5: Comparación entre los perfiles del número de Mach en la salida de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

**Figura 5.6:** Contornos de número de Mach.

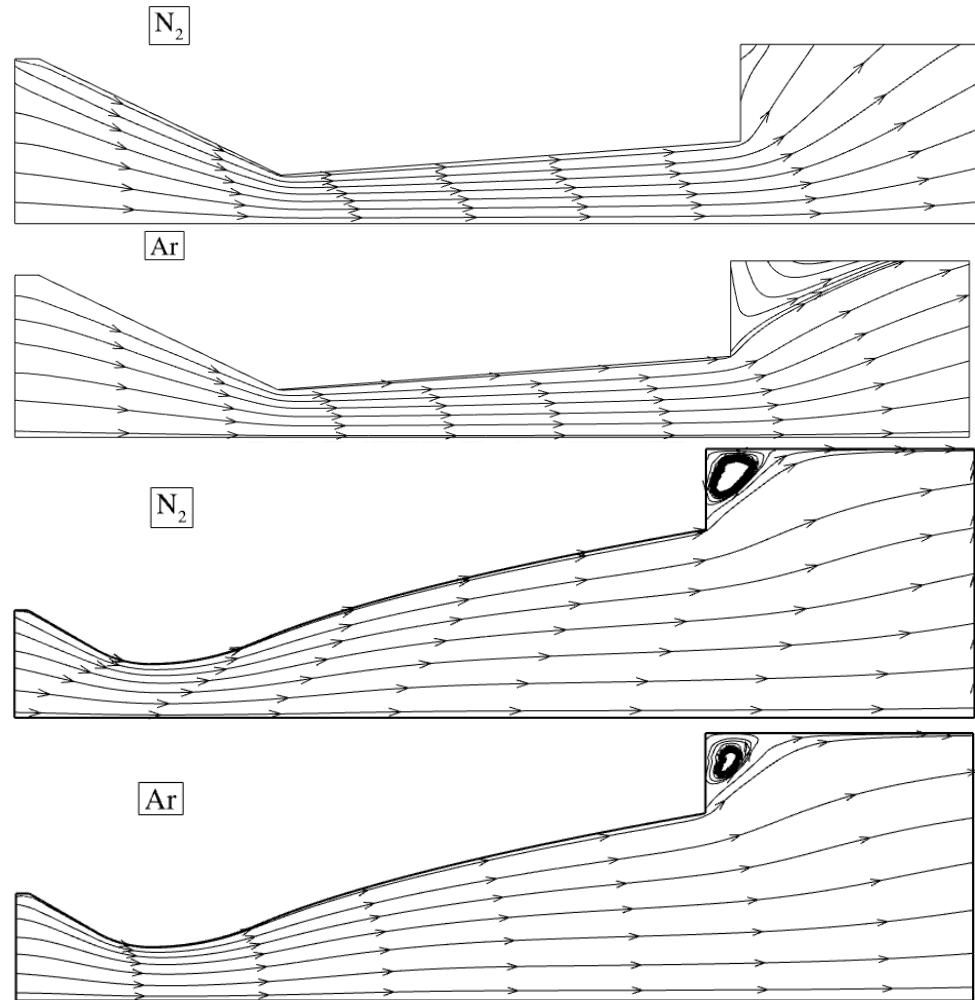


Figura 5.7: Distribución de las líneas de flujo a lo largo de las toberas.

5.1.2. Densidad

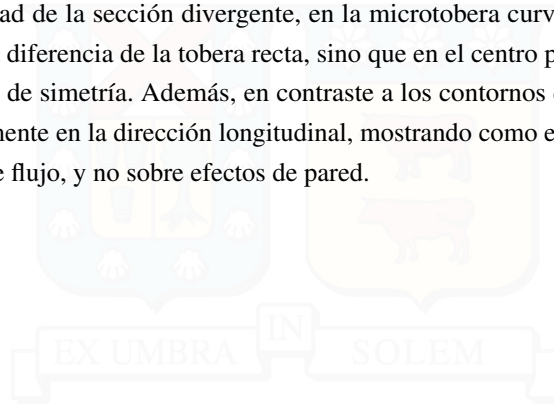
Las Figuras 5.8 y 5.9 muestran la evolución de la densidad adimensional, normalizada por ρ_{in} , a lo largo de la tobera, comparando ambas geometrías y especies de gas utilizadas, respectivamente.

De igual forma que en la subsección anterior, no se aprecia mucha diferencia entre las especies de gas utilizadas, pero sí entre las geometrías. Nuevamente, en la microtobera recta se observa una pendiente constante, mientras que en la microtobera curva existen 2 pendientes principales, aunque en el caso de la densidad, estos valores descienden a medida que avanzamos a lo largo de ella, producto de la expansión del flujo. También, no existe un cambio de pendiente en dicha propiedad al pasar por la garganta de la microtobera curva, fenómeno que no se cumple en el caso recto.

Las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12 muestran los perfiles de densidad en la entrada, garganta y salida de las toberas, respectivamente. De estas curvas podemos identificar que la densidad es máxima en la línea de simetría y mínima en la superficie. Esto se debe principalmente a que la temperatura superficial es mayor que la temperatura del flujo, generando que la densidad disminuya en las cercanías de las paredes. Como el flujo

se expande al avanzar en la tobera, este disminuye su temperatura, lo cual explica por qué los gradientes de densidad aumentan a lo largo de la tobera.

La Figura 5.13 muestra los contornos de densidad para las 4 configuraciones de toberas. Lo más evidente de estas distribuciones es que la densidad disminuye considerablemente más en la tobera curva que la tobera recta. Esto probablemente se deba a la mayor relación de expansión del caso curvo. También cabe notar que cercano a la mitad de la sección divergente, en la microtobera curva la densidad no cumple un perfil pseudo-parabólico, a diferencia de la tobera recta, sino que en el centro presenta una densidad mayor que la superficie y la línea de simetría. Además, en contraste a los contornos de velocidad, los gradientes de densidad son principalmente en la dirección longitudinal, mostrando como esta propiedad depende en su mayoría de la expansión de flujo, y no sobre efectos de pared.



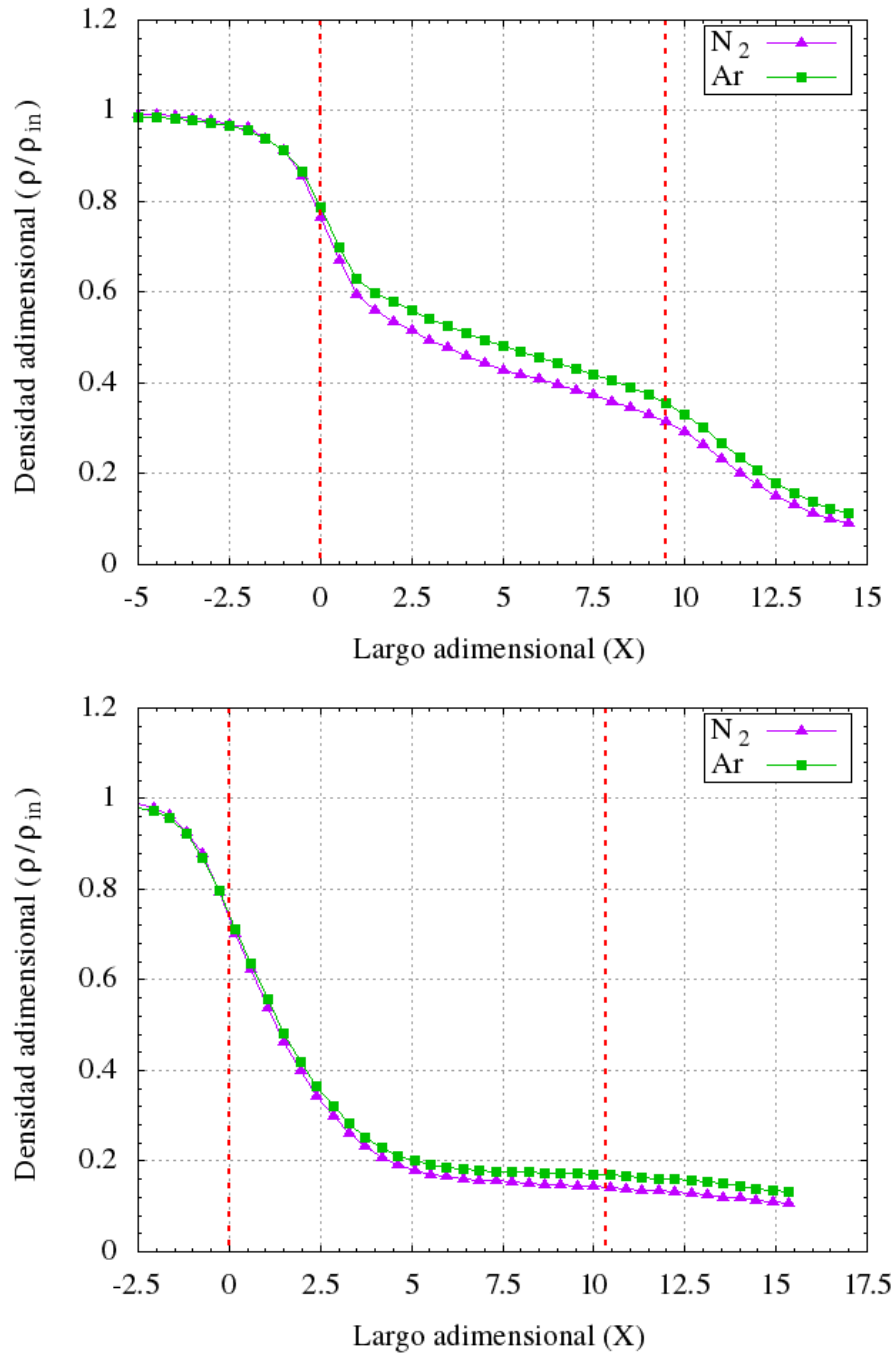


Figura 5.8: Comparación entre la distribución de la densidad a lo largo de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

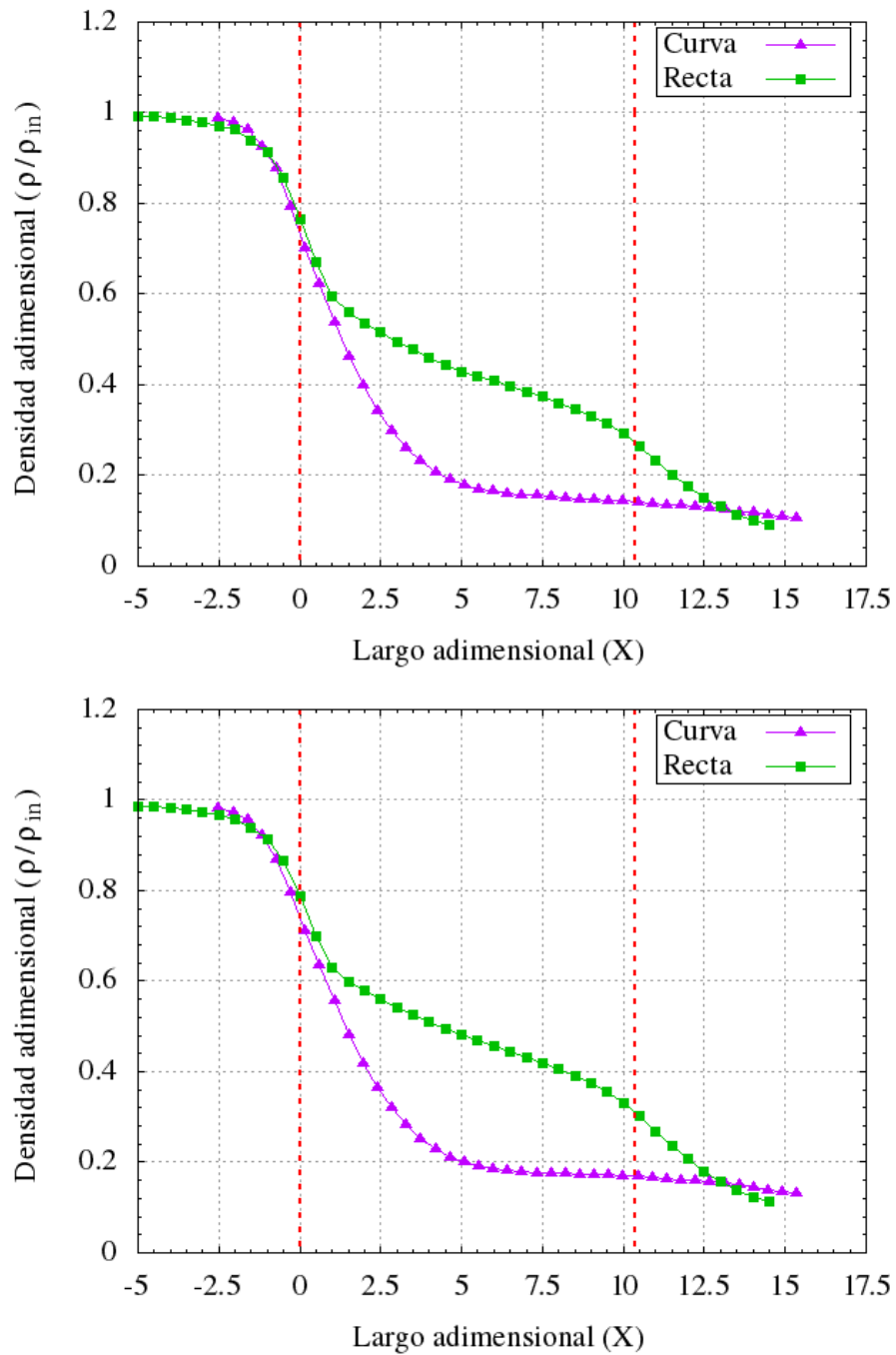


Figura 5.9: Comparación entre la distribución de la densidad a lo largo de las microtoberas utilizando nitrógeno (arriba) y argón (abajo).

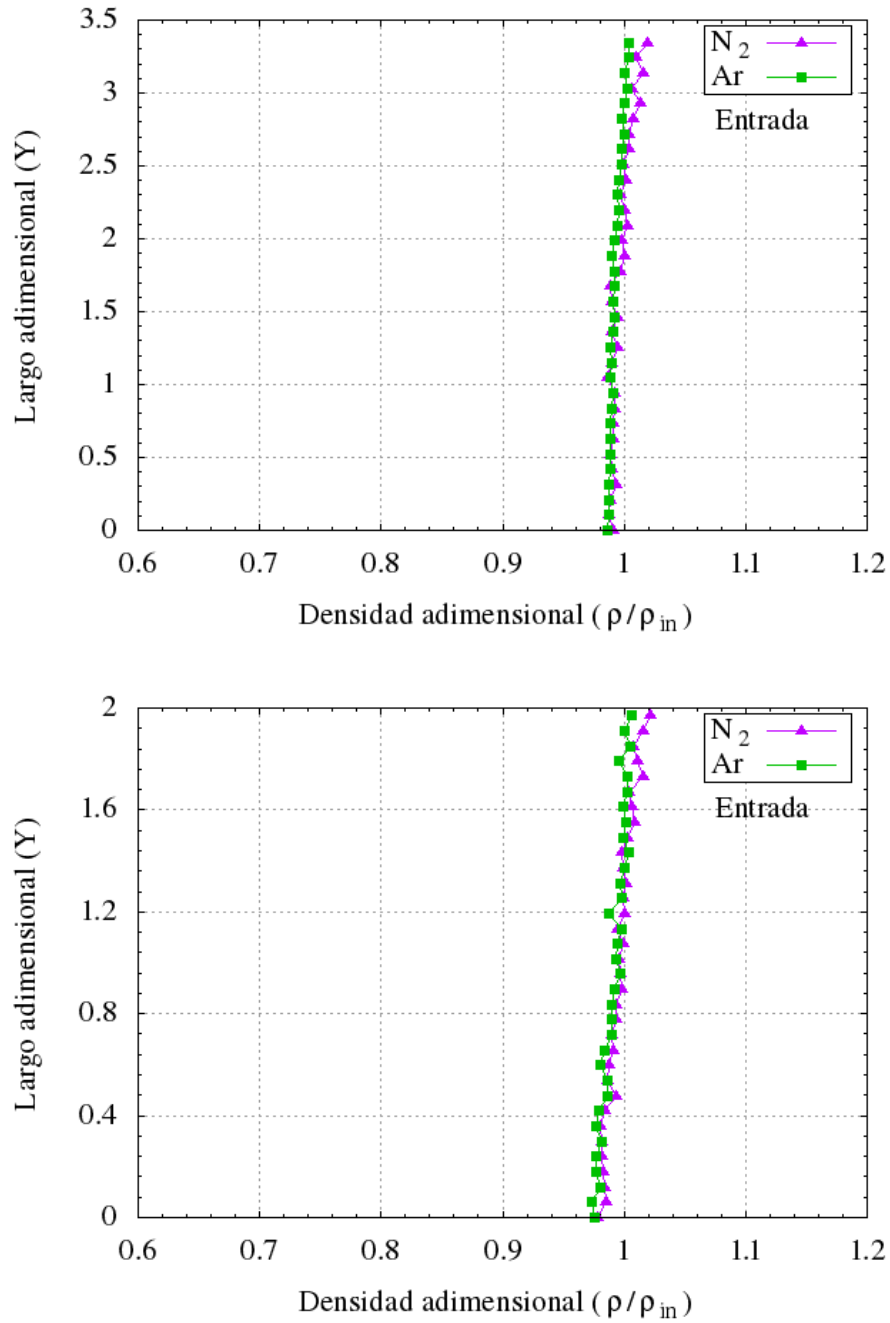


Figura 5.10: Comparación entre los perfiles de la densidad en la entrada de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

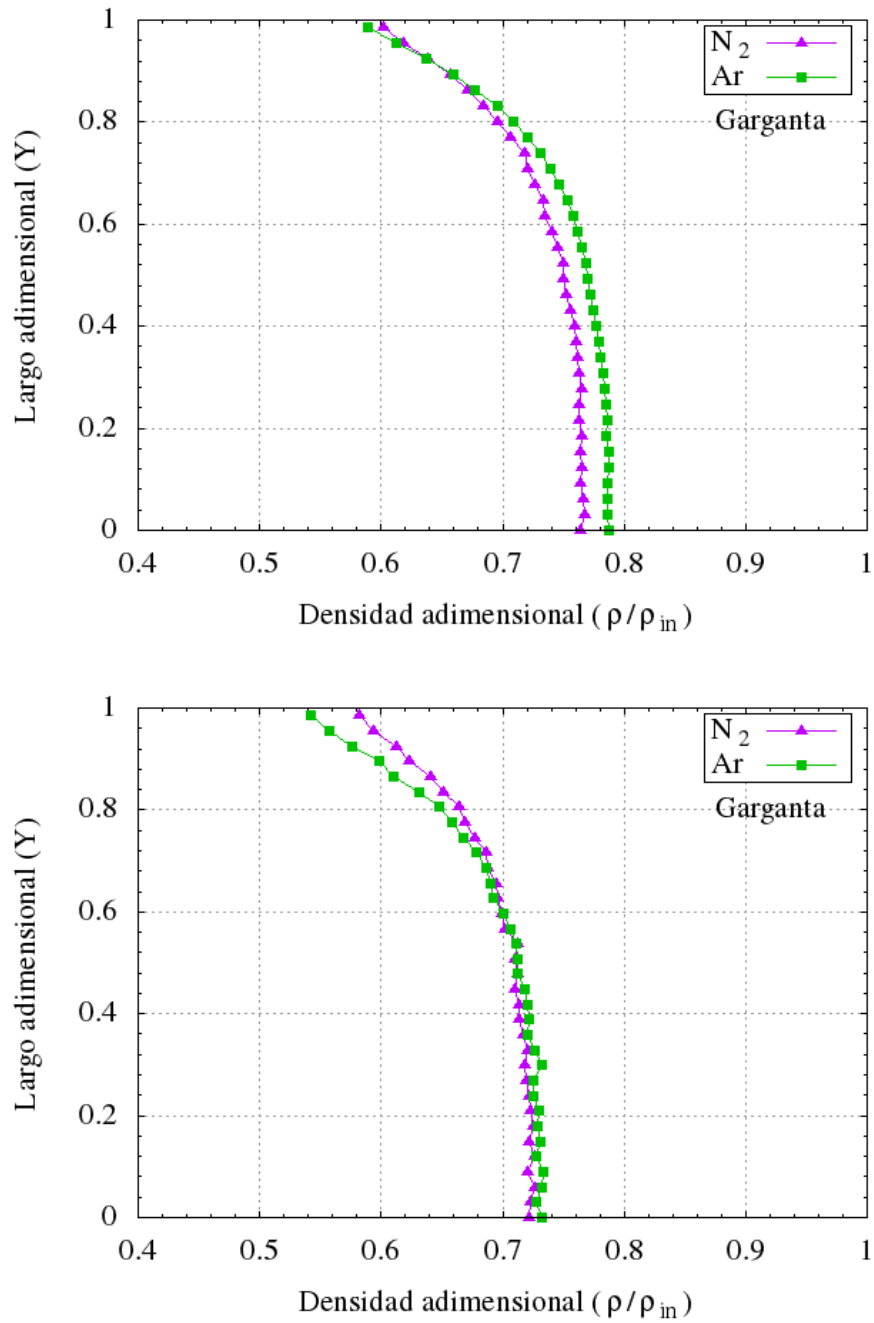


Figura 5.11: Comparación entre los perfiles de la densidad en la garganta de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

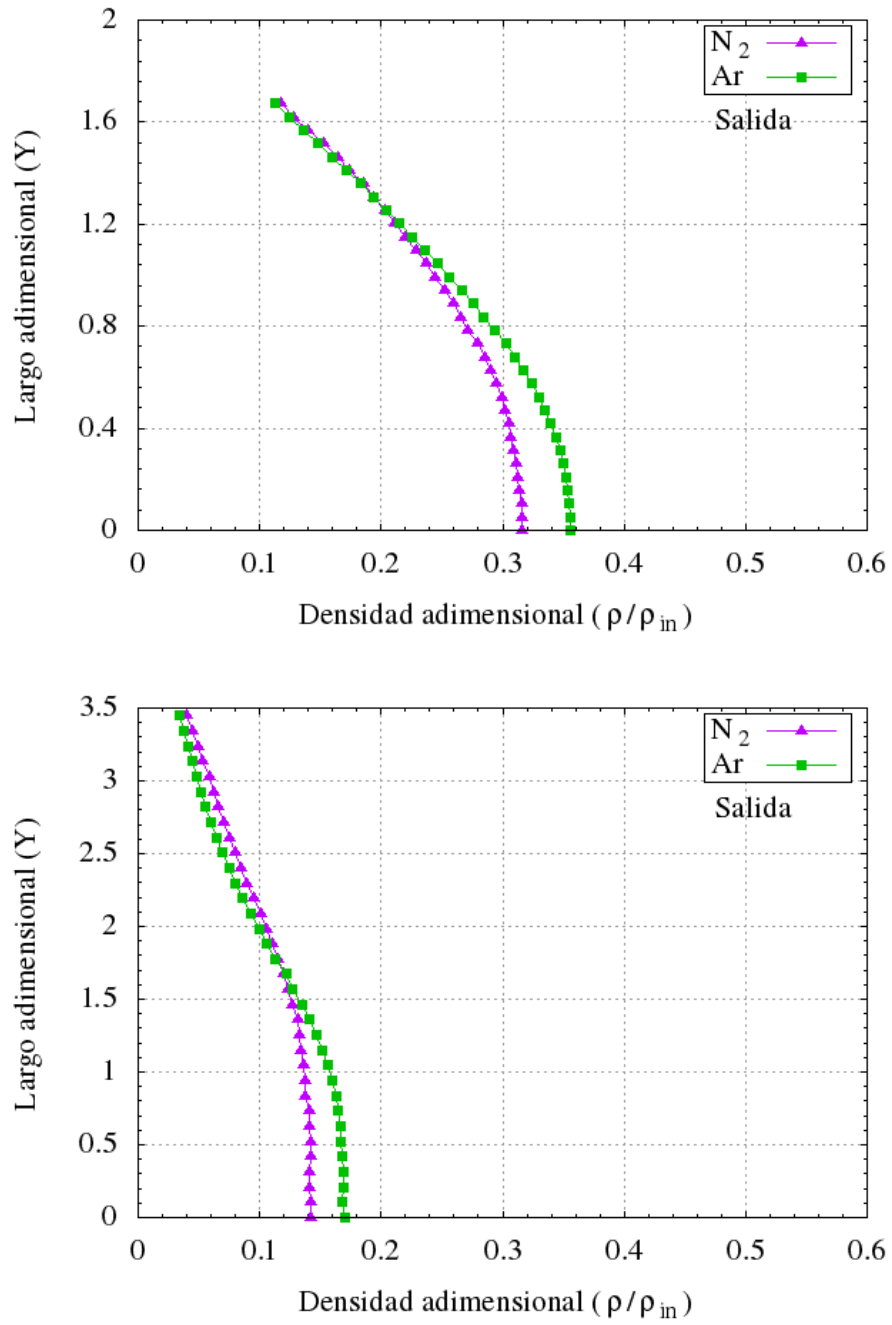
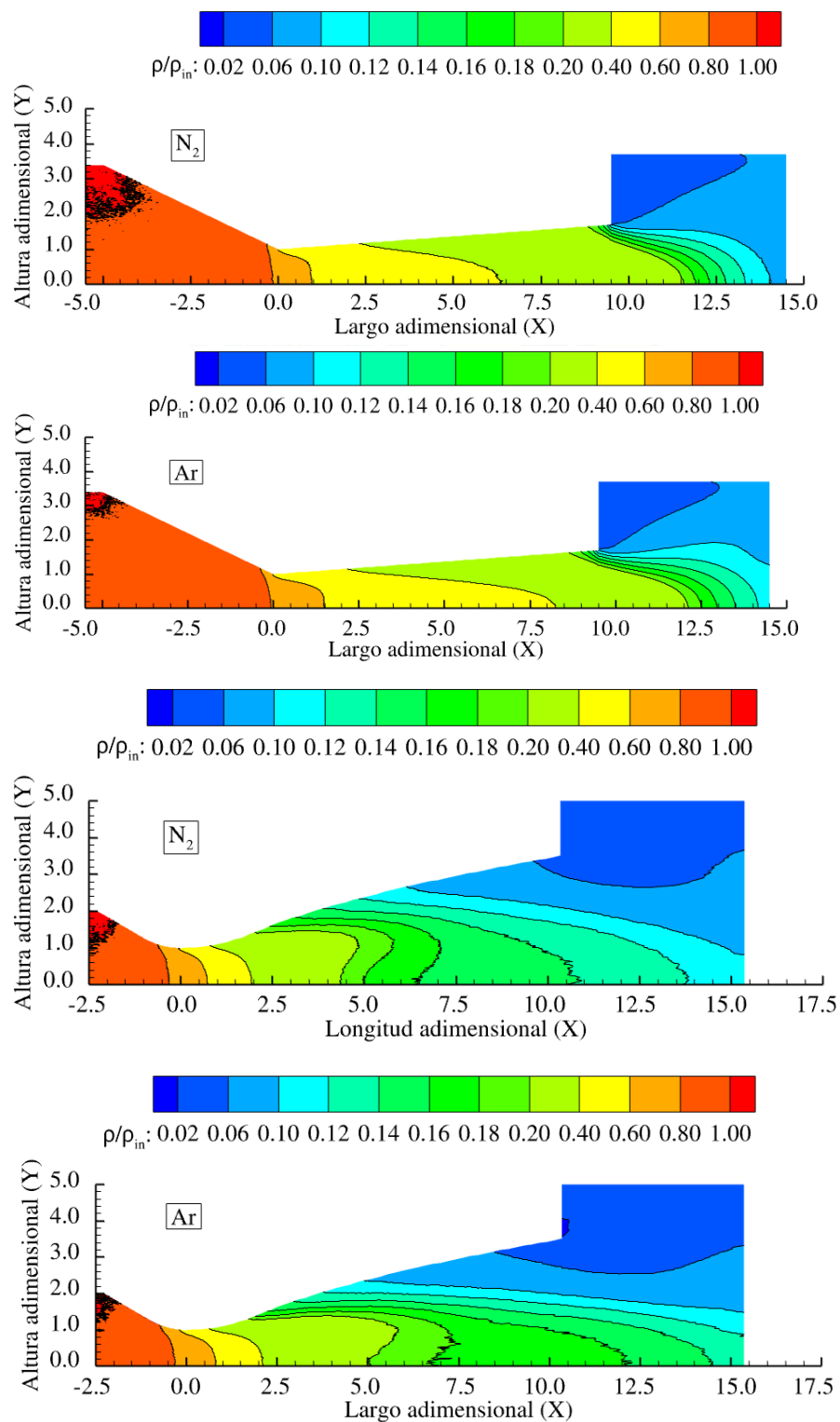


Figura 5.12: Comparación entre los perfiles de la densidad en la salida de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

**Figura 5.13:** Contornos de densidad.

5.1.3. Presión

Las Figuras 5.14 y 5.15 muestran la evolución de la presión adimensional, normalizada por p_{in} , a lo largo de la tobera, comparando ambas geometrías y especies de gas utilizadas, respectivamente.

El comportamiento de la distribución de presión y densidad son muy similares entre sí, disminuyendo a medida que el flujo avanza, producto de la expansión del gas, además de producir las 2 curvas características mencionadas anteriormente. Al observar los valores de presión a la salida de ambas toberas, se ve que la tobera recta produce gases de escape a una presión mayor que la ambiente (5000 Pa), mientras que la tobera curva produce gases con una presión similar al ambiente. Por ende, se puede decir que la microtobera recta es sub-expandida, y la tobera curva es idealmente expandida. La razón de esto yace en que la relación de expansión de la microtobera curva es mayor que la microtobera recta, permitiendo así bajar más la presión de salida.

Las Figuras 5.16, 5.17 y 5.18 muestran los perfiles de presión en la entrada, garganta y salida de las toberas, respectivamente. Lo más relevante es la sección de salida, donde se observa en detalle, como discutido anteriormente, que la presión de salida en la microtobera recta ronda los 15000 Pa, mientras que para la microtobera curva esta ronda los 5000 Pa. También cabe destacar que para todas las secciones transversales mostradas, la microtobera curva presenta perfiles de presión más uniformes que la microtobera recta.

La Figura 5.19 muestra las líneas de contorno de la distribución de presión, donde en se puede observar claramente el fenómeno de *Expansion Fan* producido en la punta de salida de la tobera, el cual es más evidente en la geometría recta. También, se comprueba que en la parte convexa de la sección divergente no existe separación de flujo, la cual de ocurrir pudiese afectar negativamente el desempeño. Finalmente, de la misma forma que para la densidad, el gradiente de presión es casi únicamente en la dirección x del flujo, por lo que la caída de presión depende principalmente de la expansión del flujo.

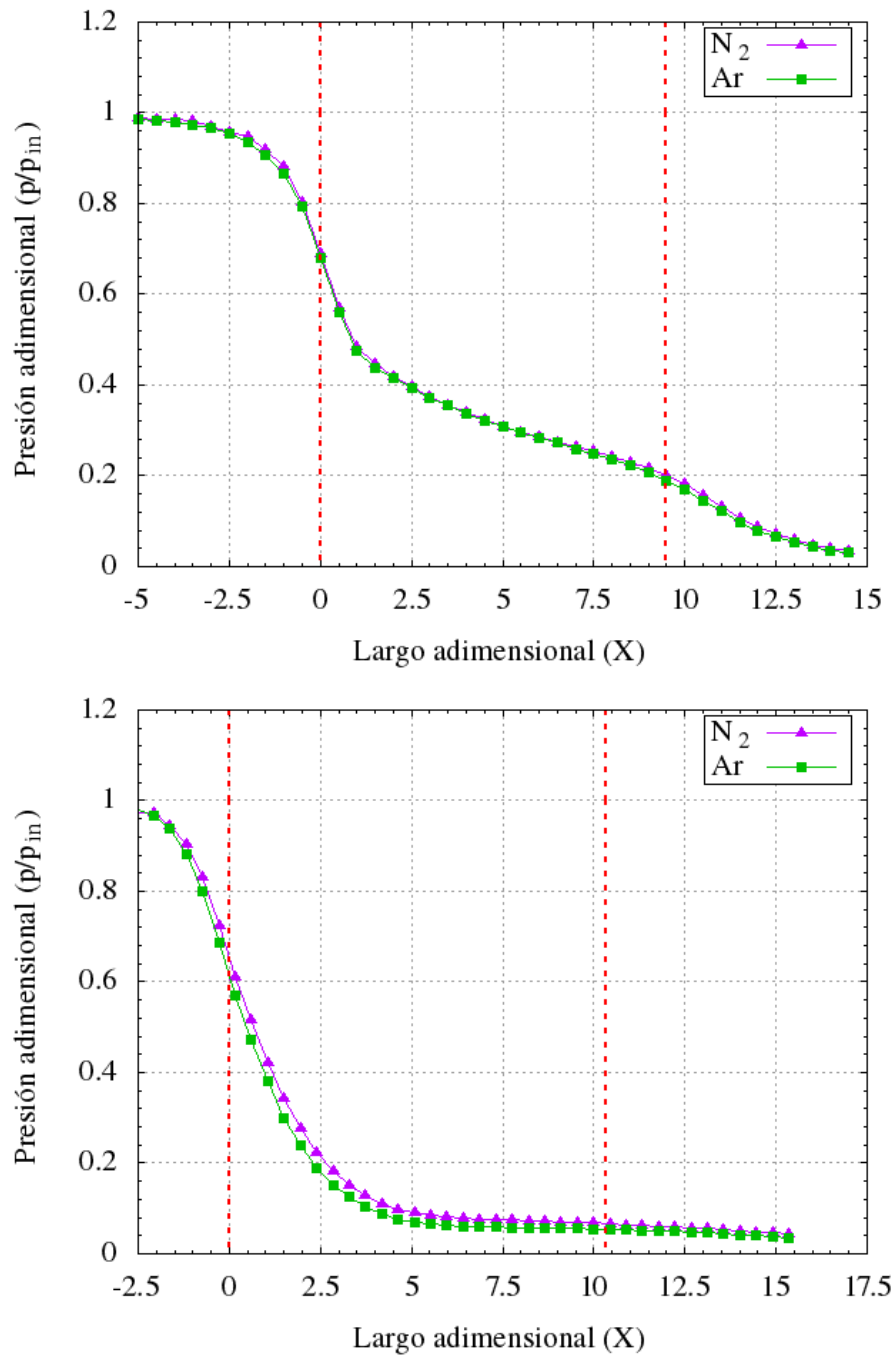


Figura 5.14: Comparación entre la distribución de la presión a lo largo de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

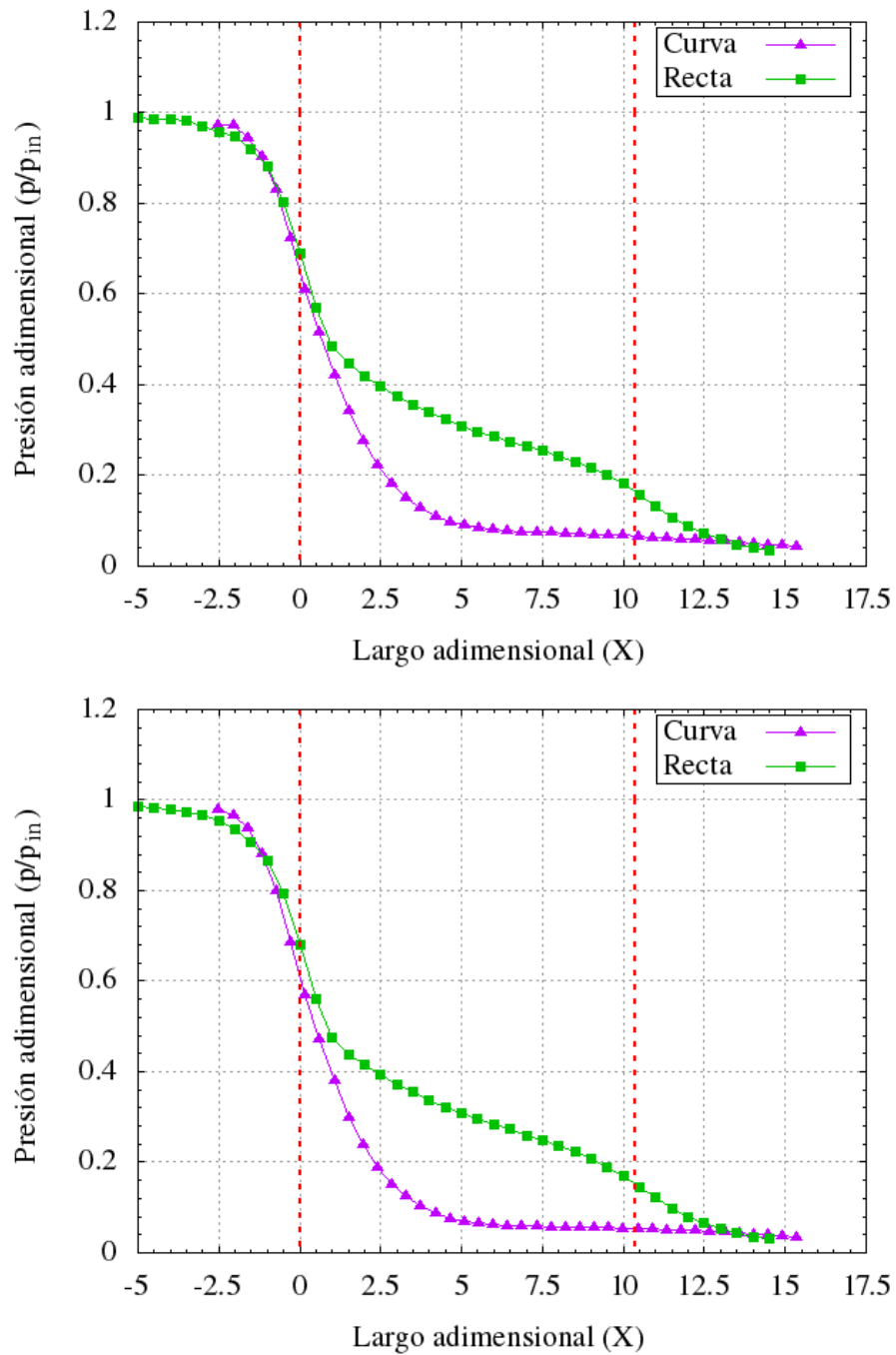


Figura 5.15: Comparación entre la distribución de la presión a lo largo de las microtoberas utilizando nitrógeno (arriba) y argón (abajo).

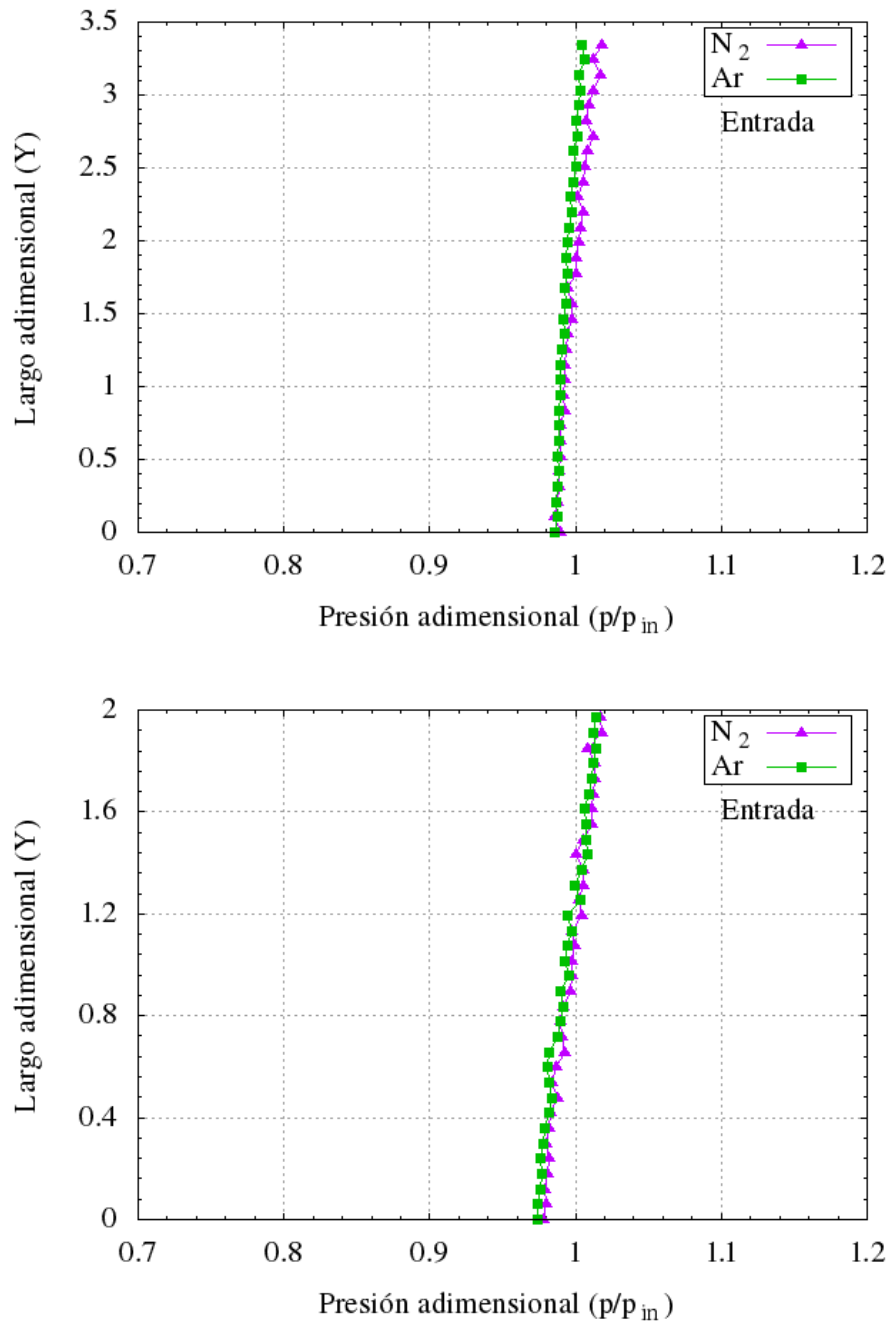


Figura 5.16: Comparación entre los perfiles de la presión en la entrada de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

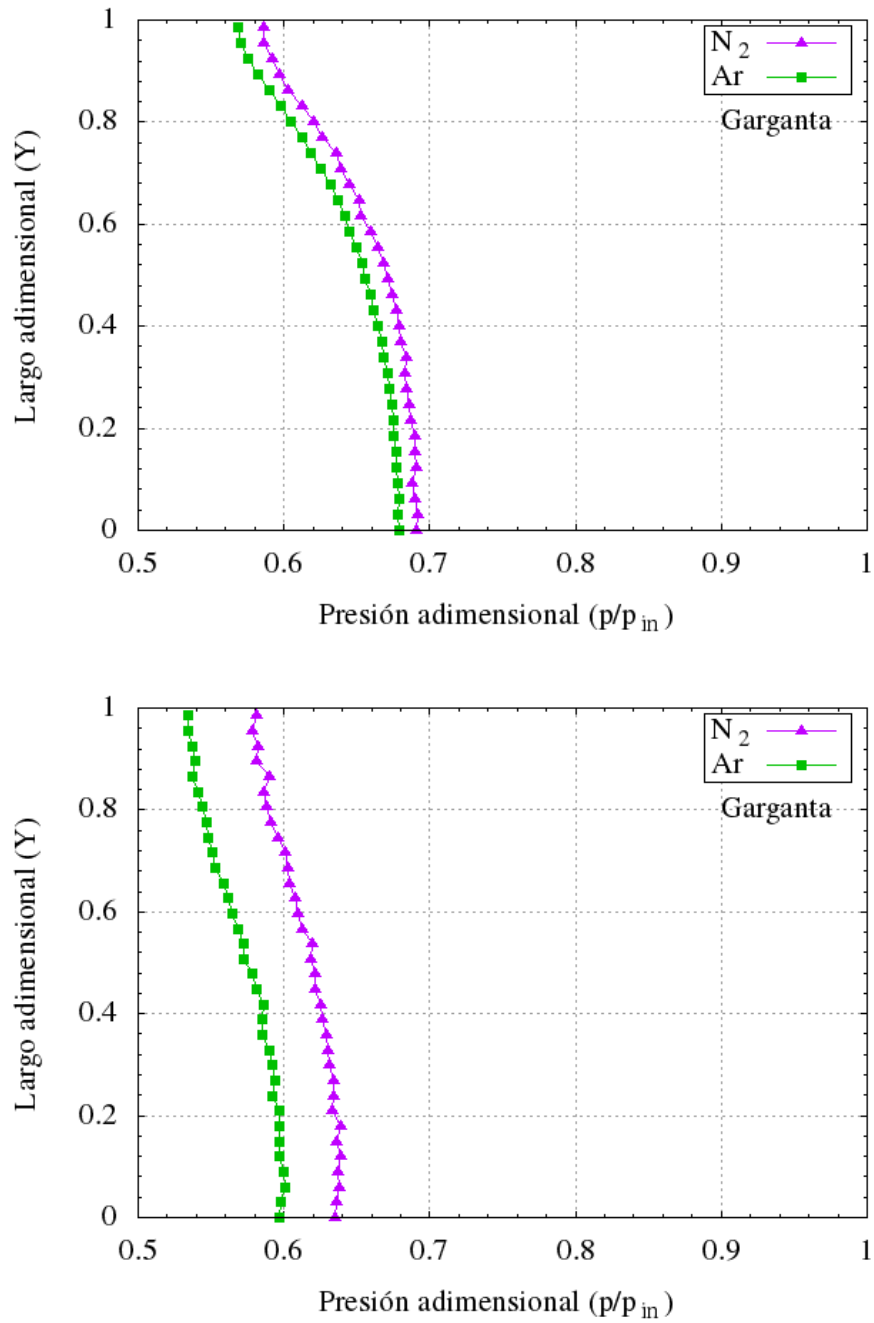


Figura 5.17: Comparación entre los perfiles de la presión en la garganta de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

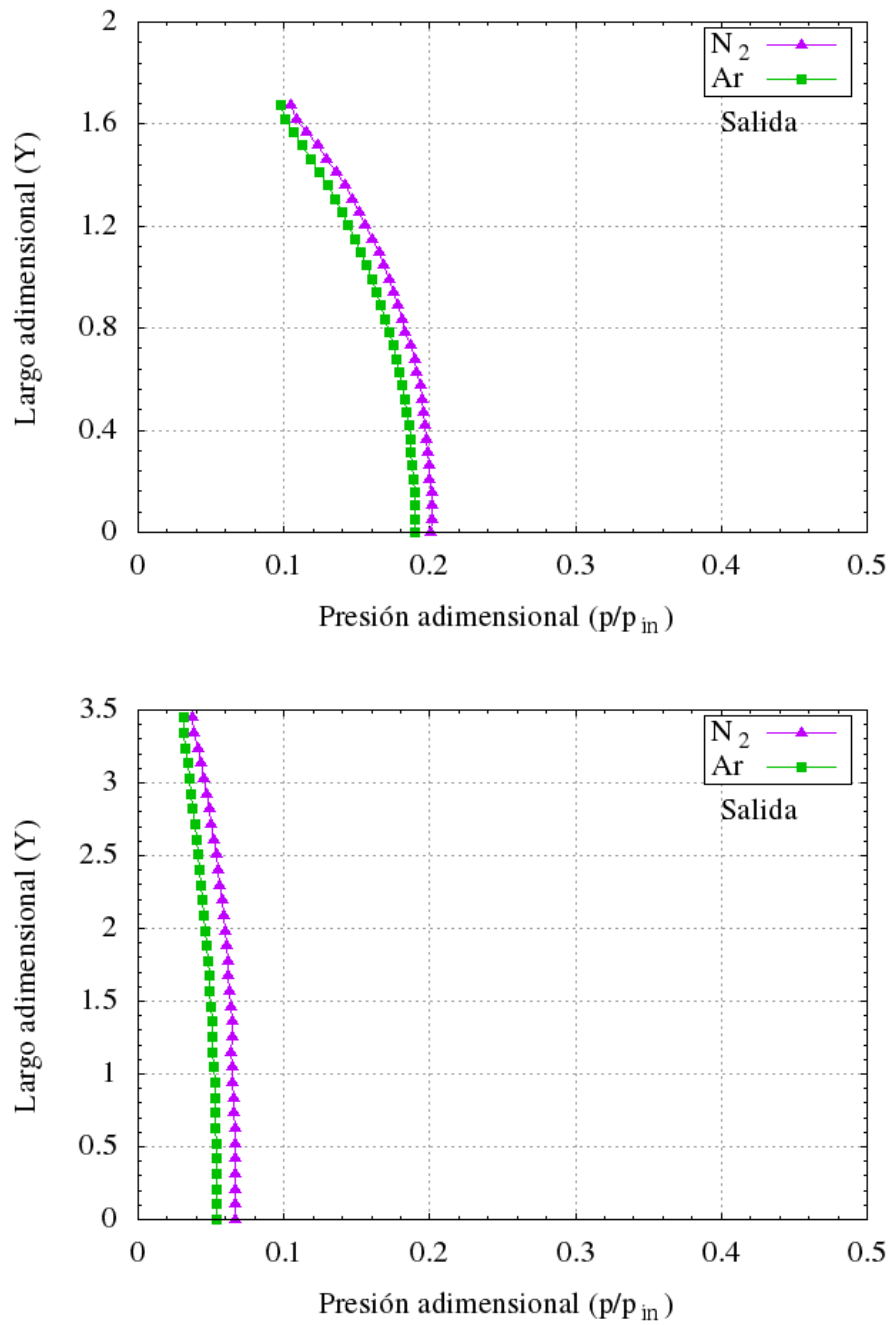


Figura 5.18: Comparación entre los perfiles de la presión en la salida de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

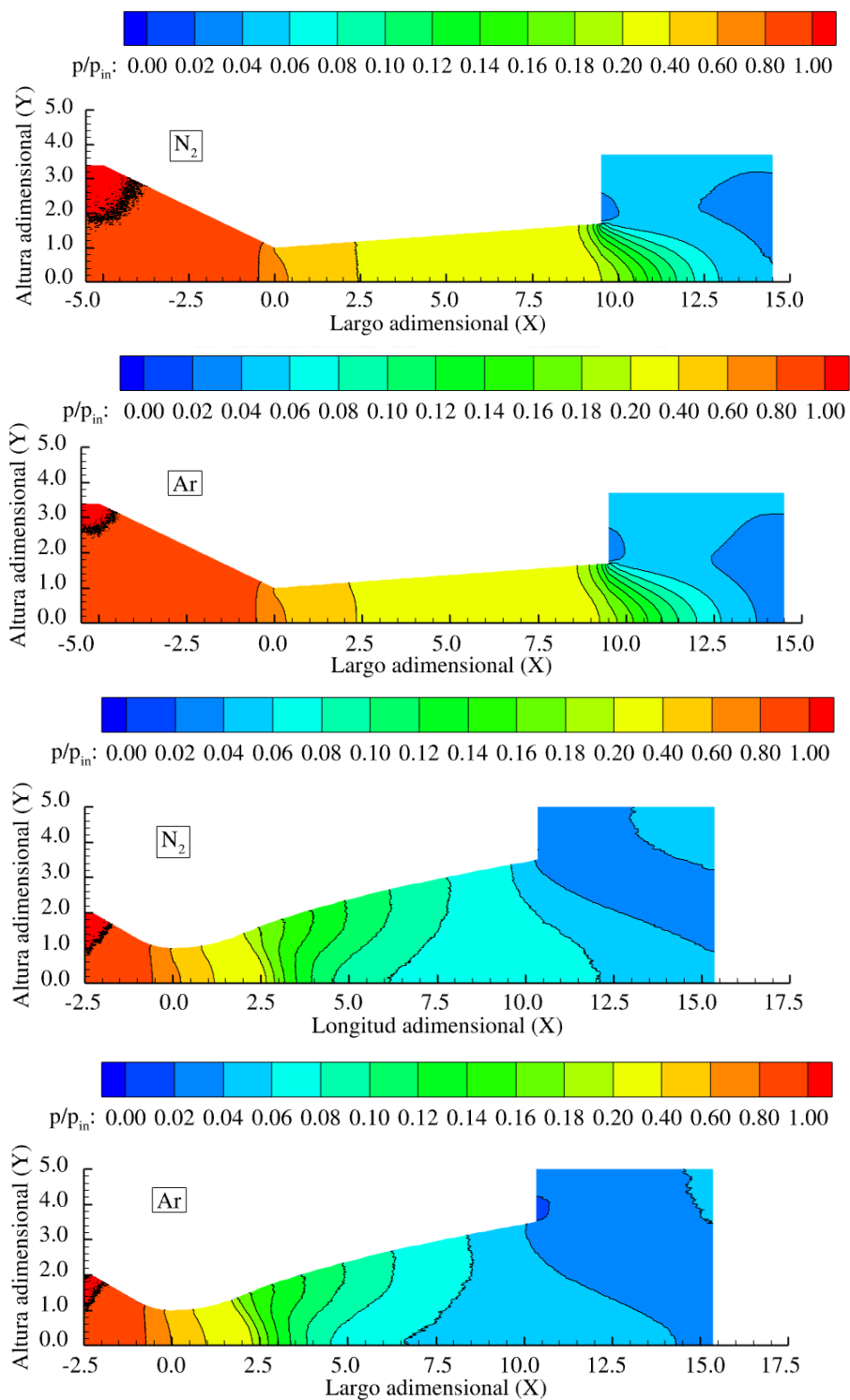


Figura 5.19: Contornos de presión.

5.1.4. Temperatura

Las Figuras 5.20 y 5.15 muestran la evolución de la temperatura adimensional, normalizada por T_{in} , a lo largo de la tobera, comparando ambas geometrías y especies de gas utilizadas, respectivamente.

A diferencia de las propiedades macroscópicas mencionadas anteriormente, en el caso de la temperatura existe una diferencia notable entre ambas especies de gas utilizadas. Para las dos geometrías utilizadas, la temperatura del flujo de gas nitrógeno es mayor que el flujo de gas argón. Una explicación de esto puede encontrarse en las ecuaciones de flujo isentrópico, donde la curva de temperatura en relación al número de Mach es mucho más sensible a los cambios de la relación de calores específicos, la cual es diferente entre ambas especies, que las curvas de presión y densidad (ver Subsección 2.1.3).

Además, las mismas diferencias entre las microtoberas curva y recta mencionadas para las propiedades macroscópicas anteriores se pueden notar en este caso.

Las Figuras 5.22, 5.23 y 5.24 muestran los perfiles de temperatura en la entrada, garganta y salida de las toberas, respectivamente. En contraste a los perfiles de Mach, densidad y presión, en este caso la temperatura es máxima en la superficie, y mínima en la línea de simetría. Esto es de esperar ya que la temperatura de la pared es constante e igual a la temperatura de entrada, mientras que la temperatura del flujo disminuye a medida que avanza, debido a la expansión.

De la misma manera que en los perfiles de número de Mach, al comienzo del flujo la temperatura del gas en la pared es igual a la temperatura superficial. Pero al avanzar, los efectos de enrarecimiento toman más y más relevancia, y pasada la garganta se aprecia un salto de temperatura, si bien menor al salto de velocidad, entre el flujo cercano a la pared y la superficie.

La Figura 5.25 muestra las líneas de contorno de la distribución de temperatura. En ella se aprecia que la región más cercana a la pared presenta una temperatura relativamente constante y alta, producto de la temperatura superficial, mientras que esta disminuye al acercarnos a la línea de simetría. Esto indica que el gradiente de temperatura sigue la misma tendencia que la velocidad, siguiendo una dirección predominantemente transversal al flujo, evidenciando su dependencia de los efectos superficiales. También, a la entrada de la tobera existe una dispersión estadística considerable de la temperatura.

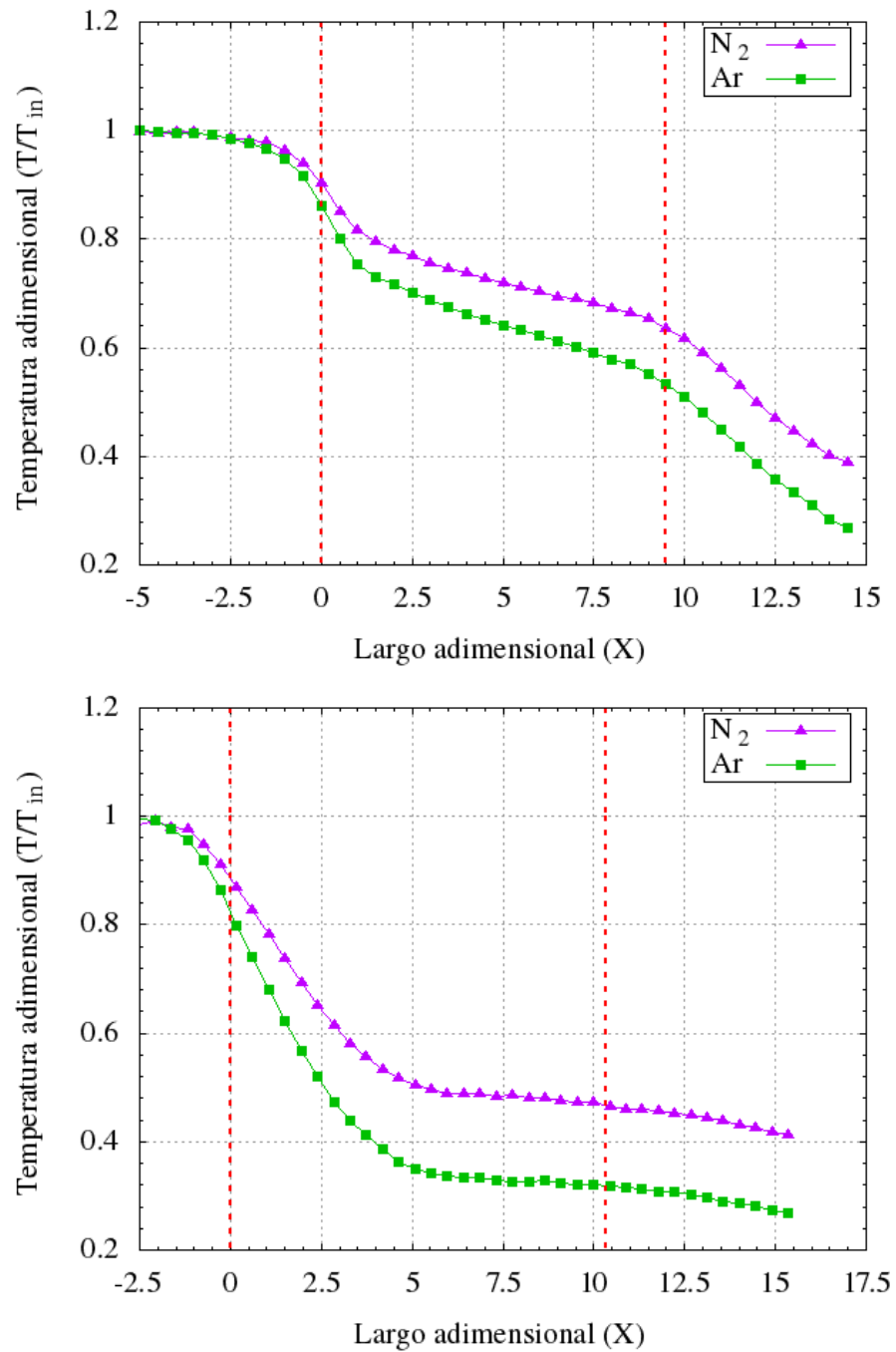


Figura 5.20: Comparación entre la distribución de la temperatura a lo largo de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

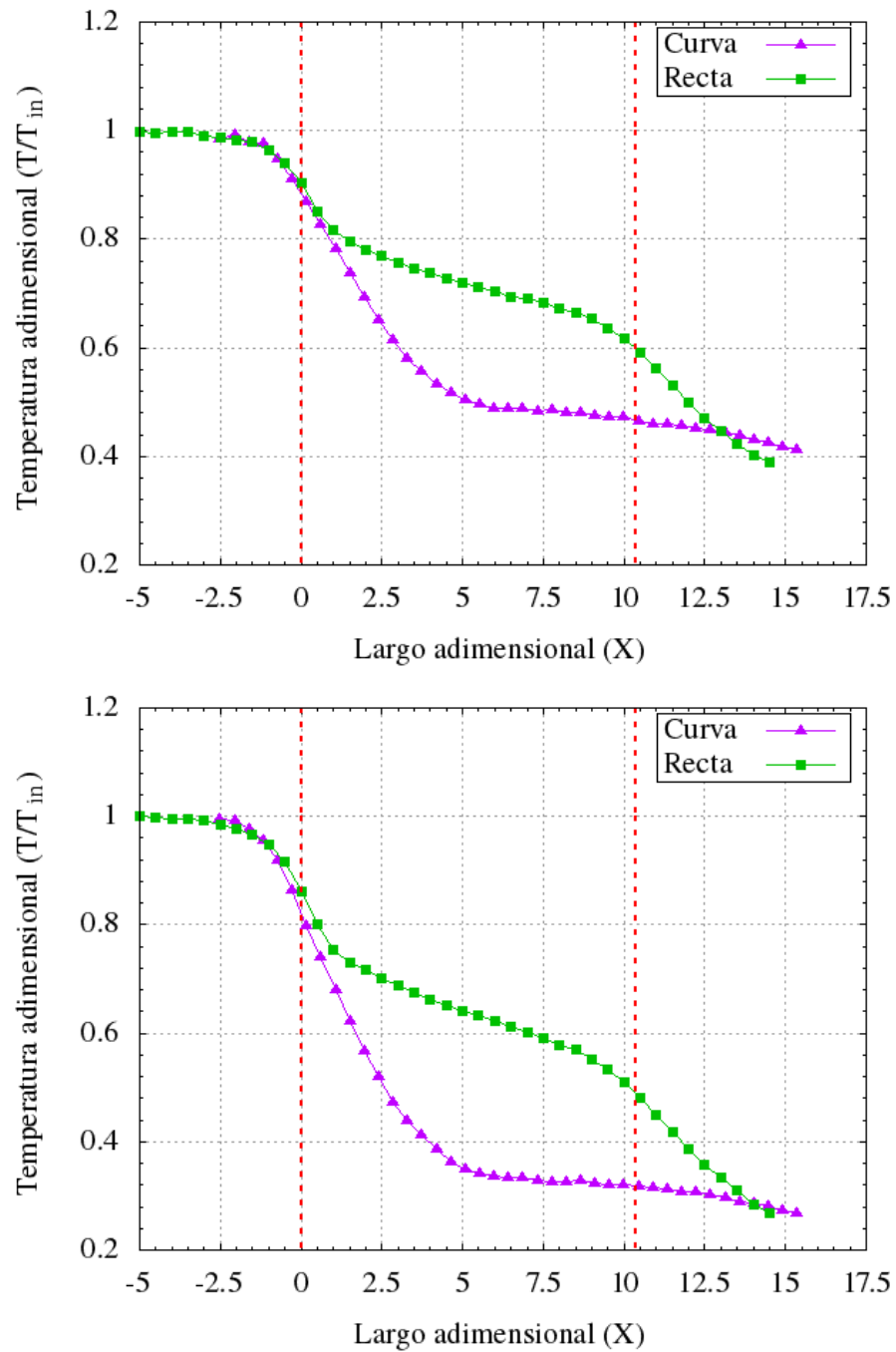


Figura 5.21: Comparación entre la distribución de la temperatura a lo largo de las microtoberas utilizando nitrógeno (arriba) y argón (abajo).

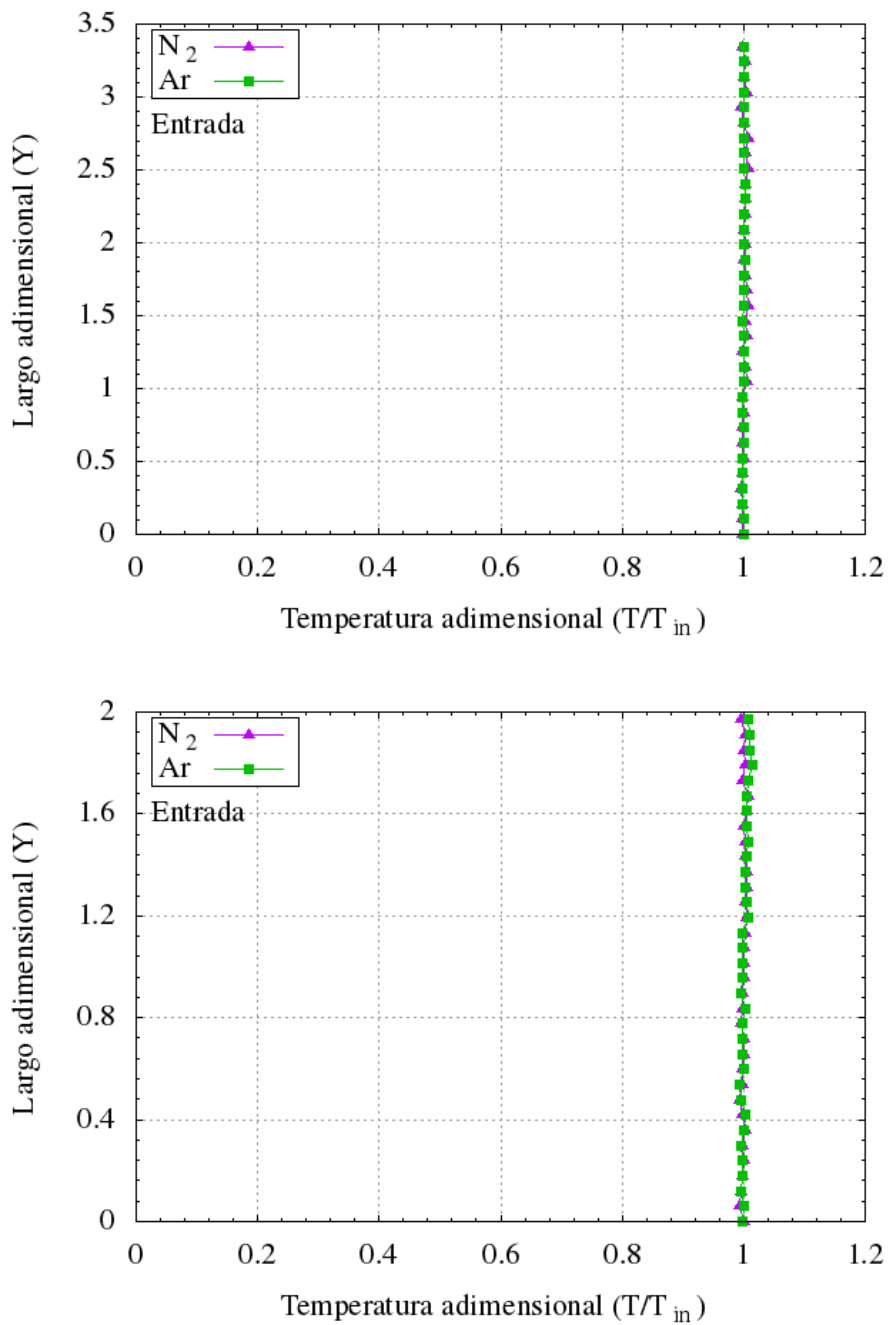


Figura 5.22: Comparación entre los perfiles de la temperatura en la entrada de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

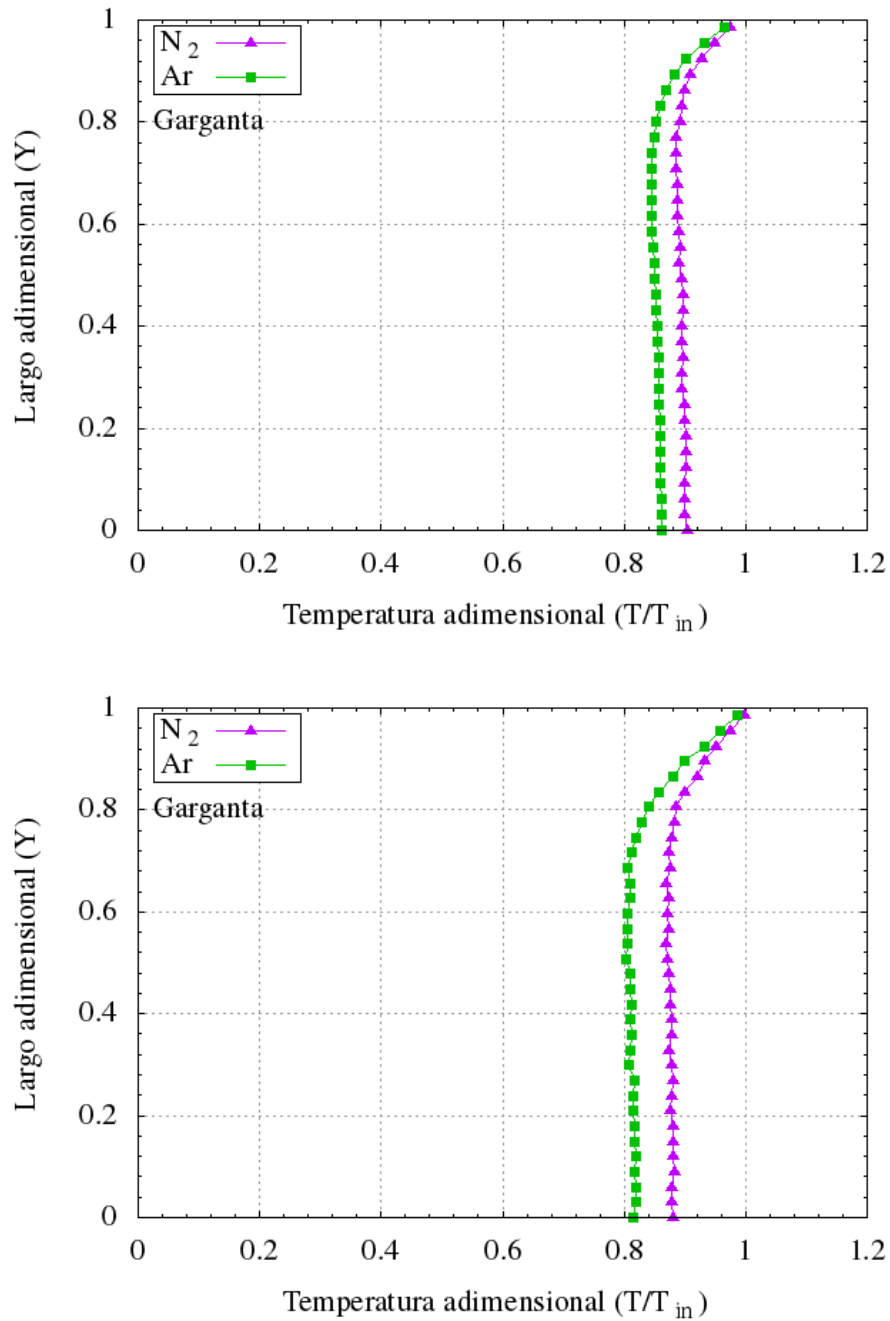


Figura 5.23: Comparación entre los perfiles de la temperatura en la garganta de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

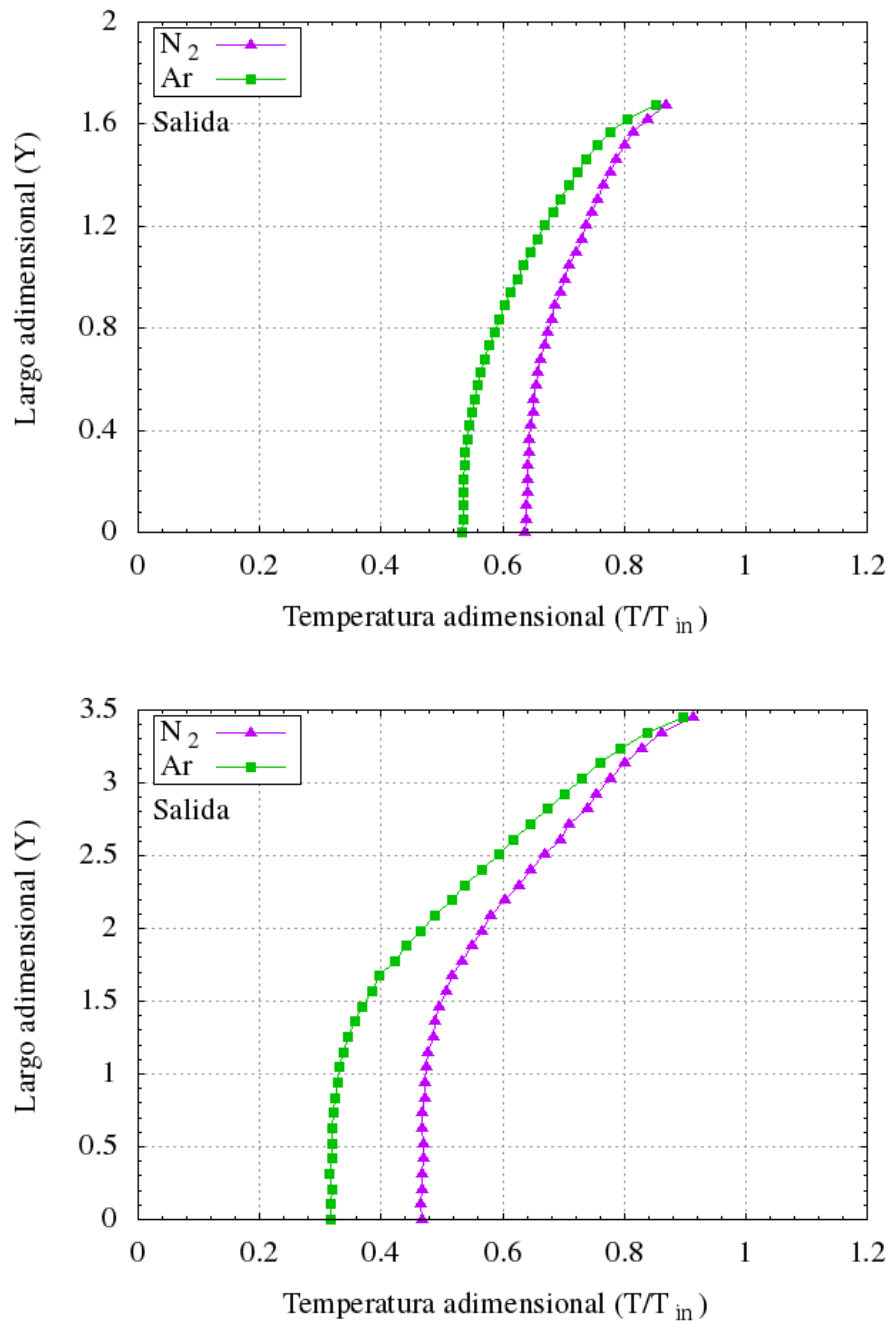


Figura 5.24: Comparación entre los perfiles de la temperatura en la salida de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

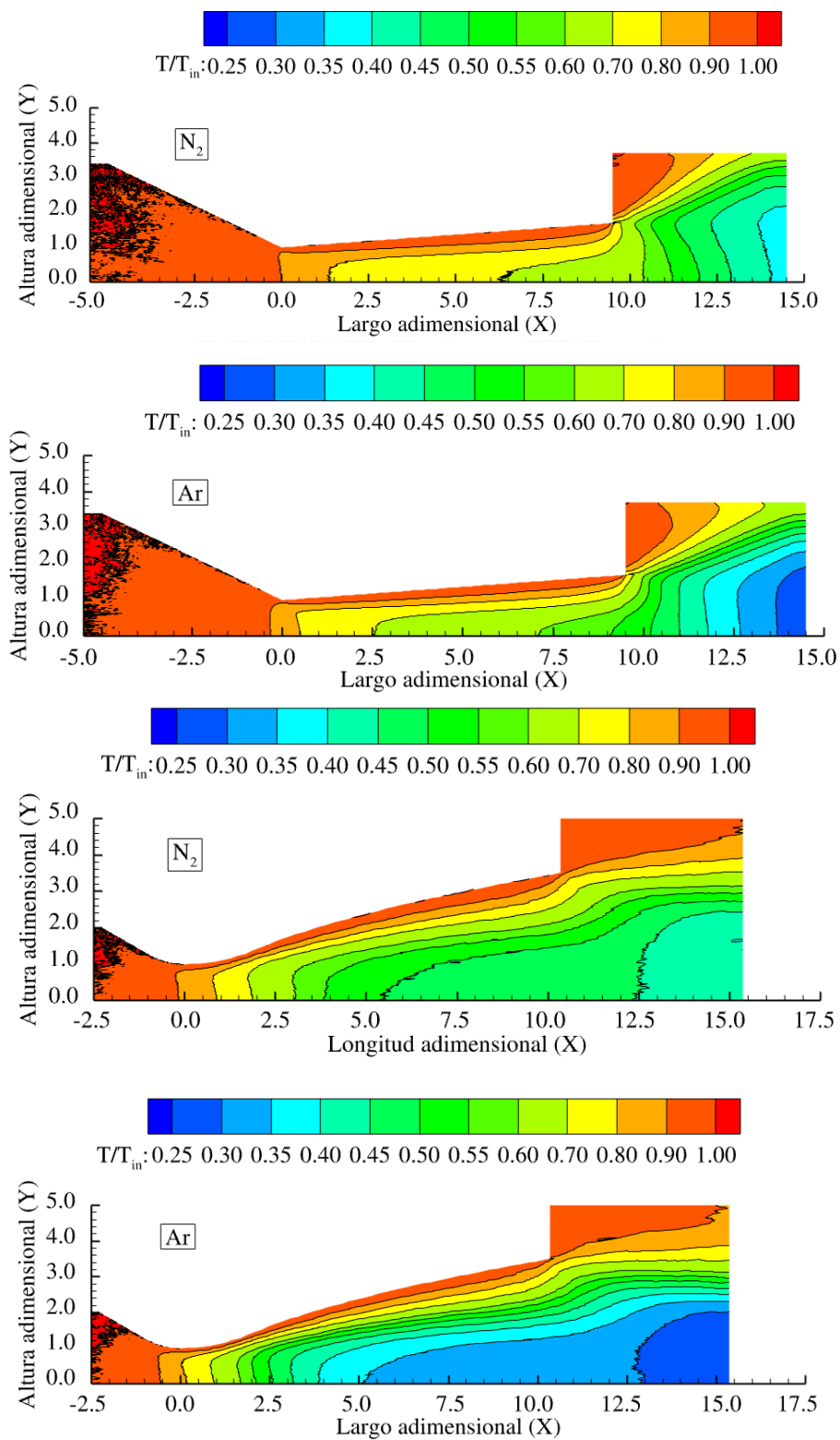


Figura 5.25: Contornos de temperatura.

5.1.5. Número de Knudsen

Como se describe en el Capítulo 2, el número de Knudsen es una medida del nivel de enrarecimiento de un flujo, obtenido por la relación del camino libre medio y una dimensión característica. Por ello, es importante observar como este parámetro se desarrolla a través del flujo, con el fin de conocer adecuadamente las condiciones de operación y la validez de los modelos utilizados.

En las Figuras 5.26 y 5.27 se muestra como el número de Knudsen cambia a lo largo de la línea de simetría. La dimensión característica local cambia en cada punto del flujo, por lo que el valor referencial a utilizar es el ancho de garganta ($2h_t$).

Nuevamente, el efecto de utilizar gas nitrógeno o argón no afecta mucho, pero en la sección divergente, el número de Knudsen es considerablemente mayor en la microtobera curva que en la microtobera recta. Sin embargo, en todas las configuraciones, el flujo se encuentra en régimen de deslizamiento en la totalidad de la línea de simetría.

Las Figuras 5.28, 5.29 y 5.30 muestran los perfiles del número de Knudsen en la entrada, garganta y salida de las toberas, respectivamente, donde el largo característico utilizado es el ancho de la tobera en sus respectivas secciones. A la entrada el número de Knudsen es uniforme, y su valor es mínimo, debido a que en esa zona la densidad es máxima. De similar forma, al avanzar en la tobera el Knudsen es mayor en las cercanías de la superficie, ya que en esos puntos la densidad del flujo es mínima. Notamos nuevamente que la totalidad del flujo transversal se encuentra en el régimen de deslizamiento.

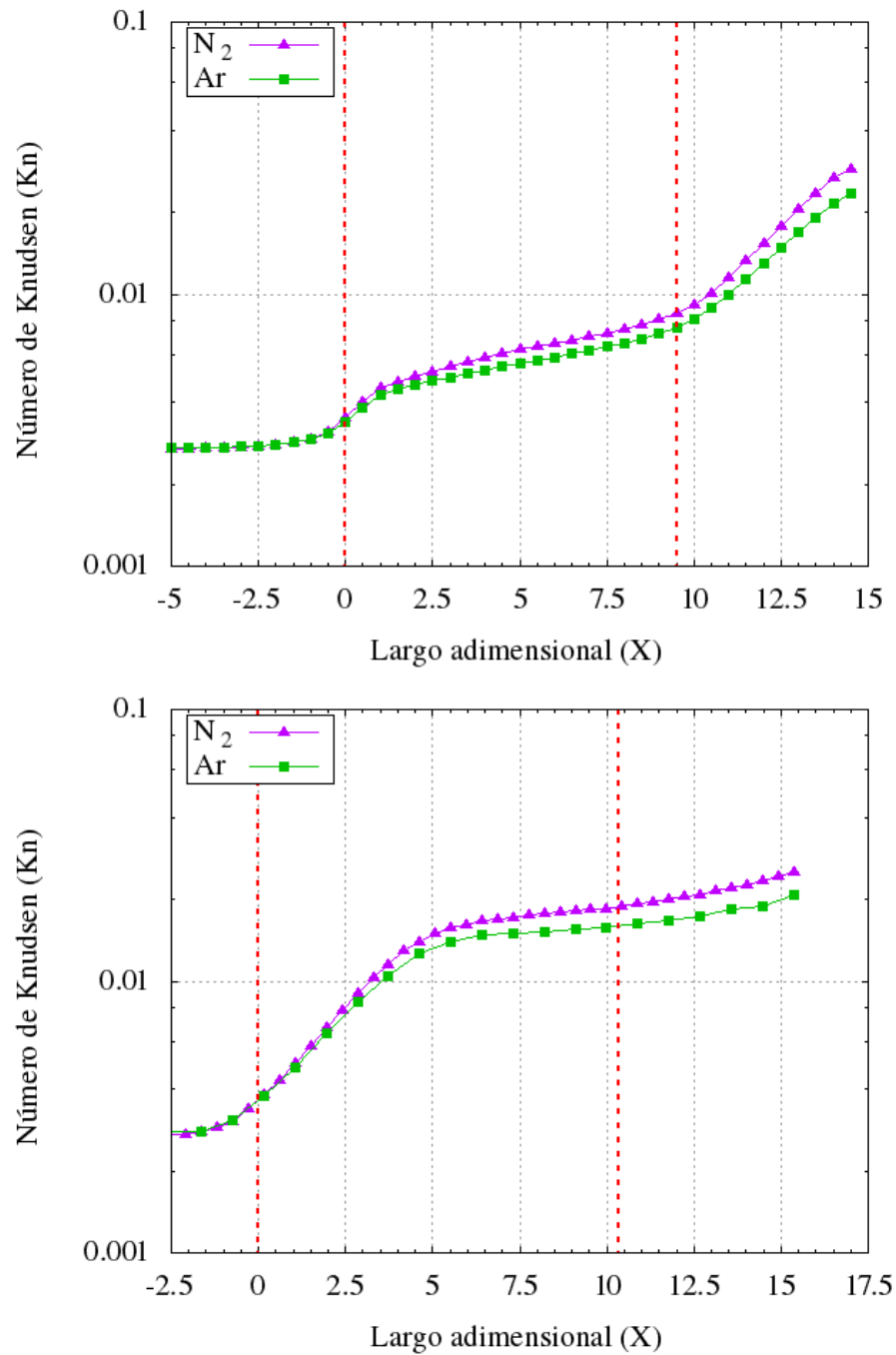


Figura 5.26: Comparación entre la distribución del número de Knudsen a lo largo de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

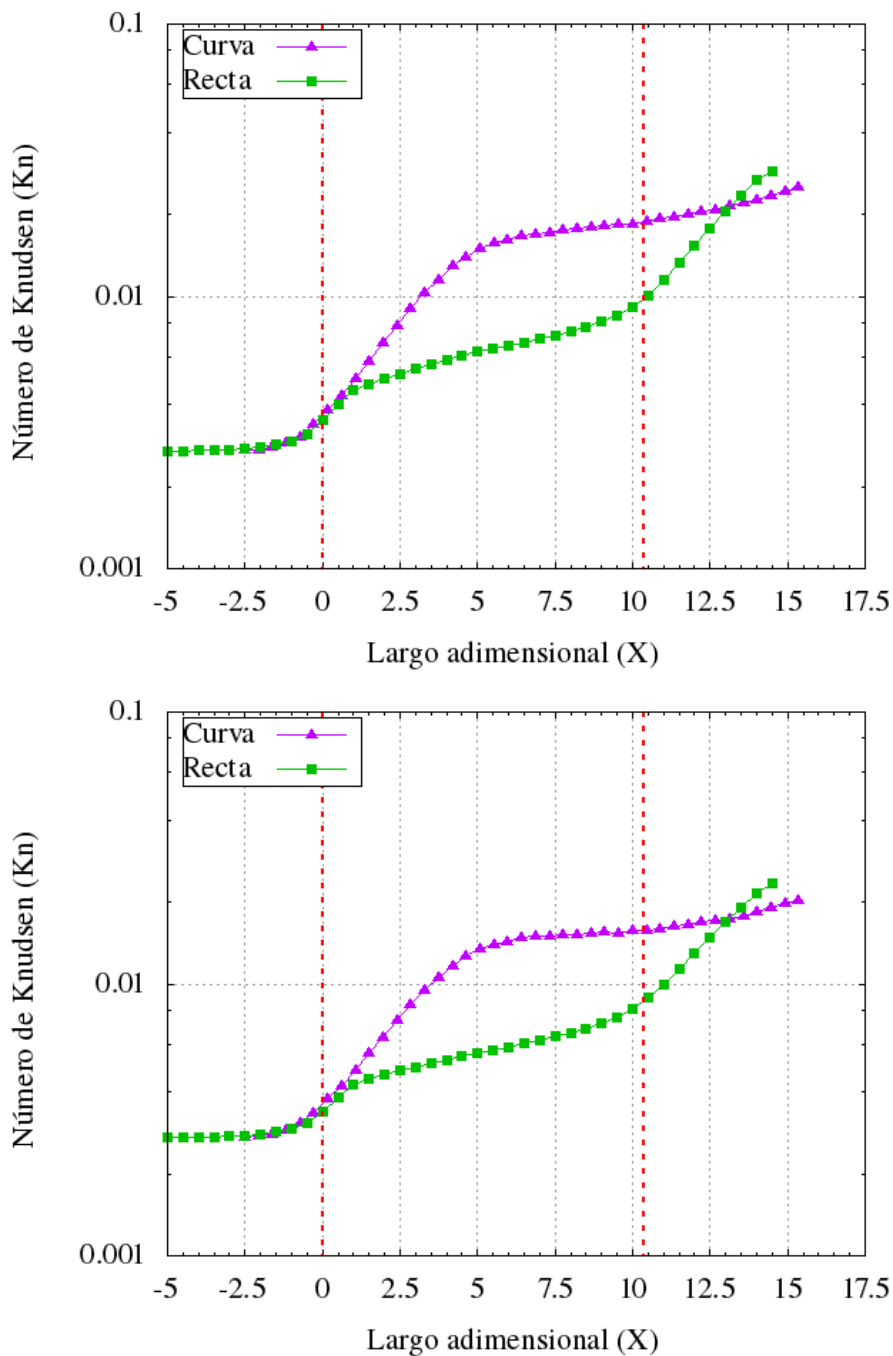


Figura 5.27: Comparación entre la distribución del número de Knudsen a lo largo de las microtoberas utilizando nitrógeno (arriba) y argón (abajo).

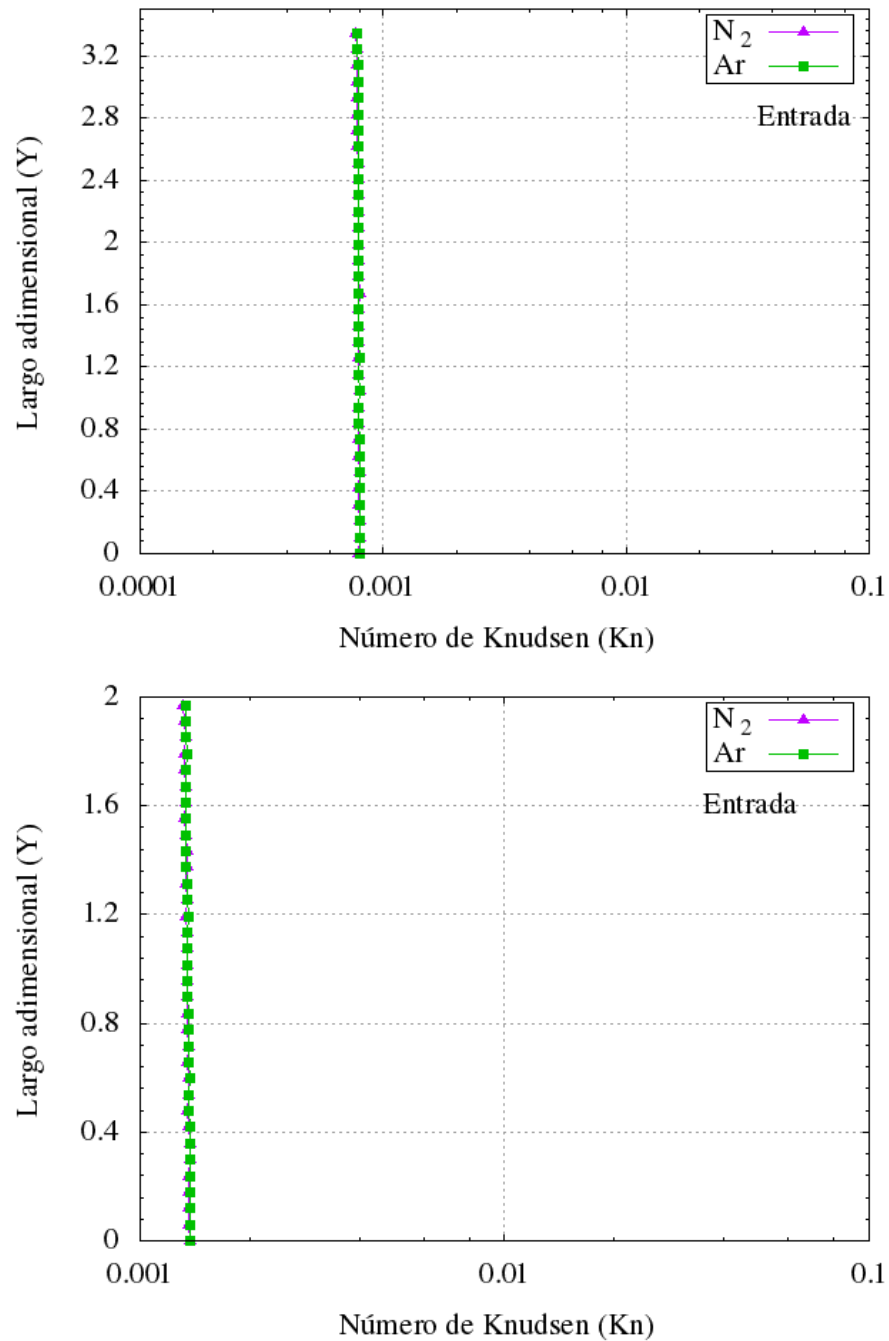


Figura 5.28: Comparación entre los perfiles del número de Knudsen en la entrada de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

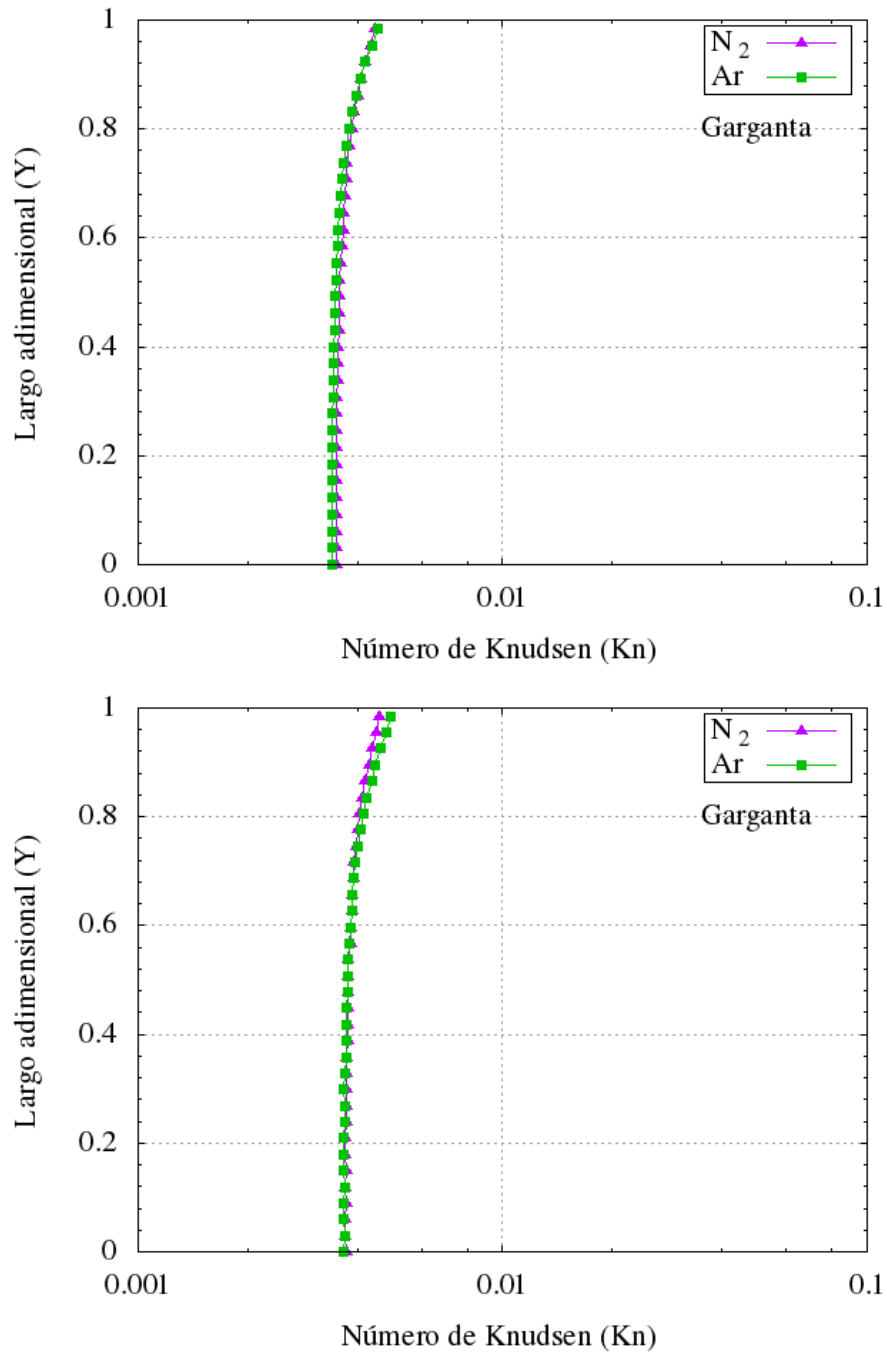


Figura 5.29: Comparación entre los perfiles del número de Knudsen en la garganta de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

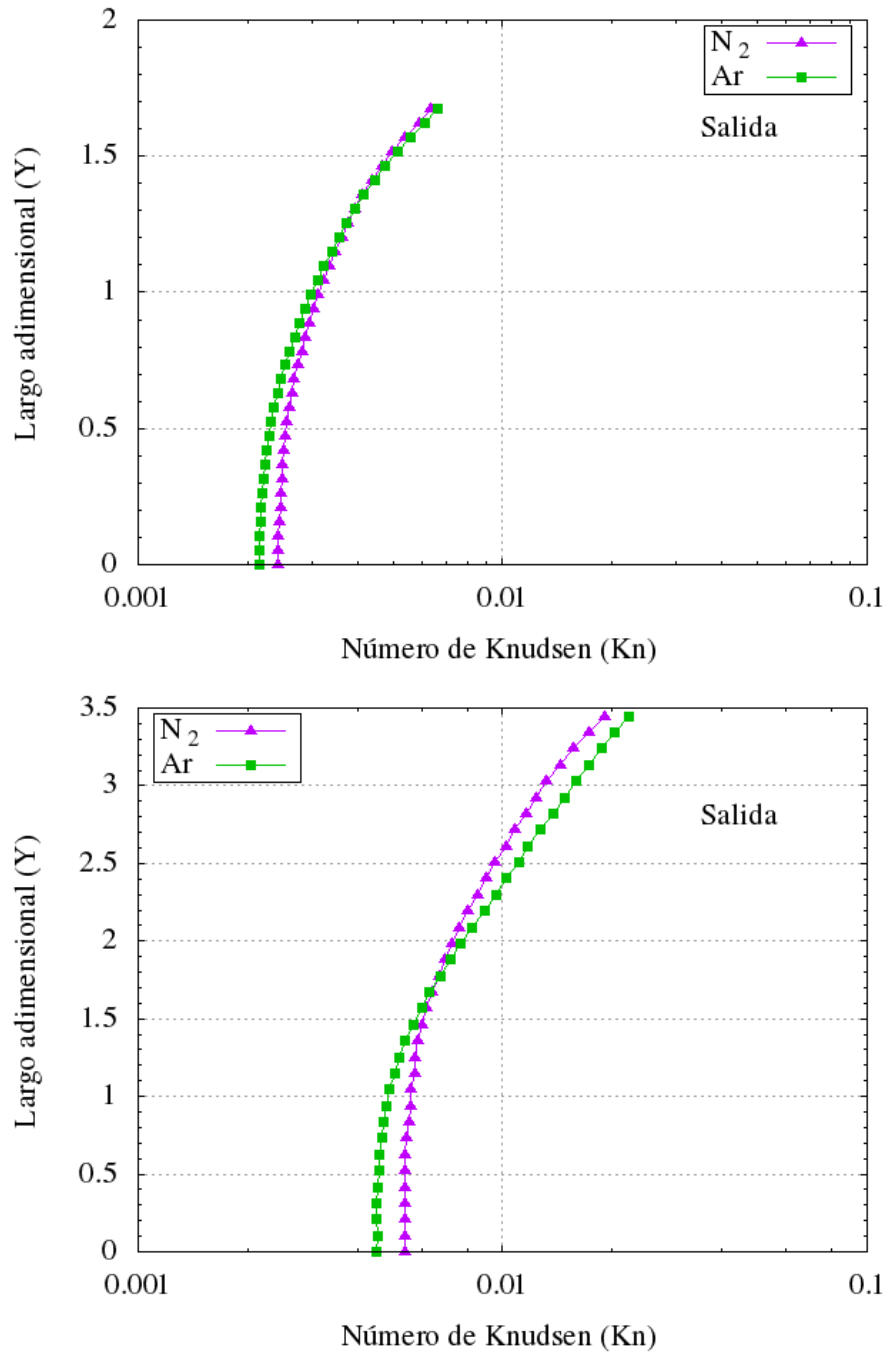


Figura 5.30: Comparación entre los perfiles del número de Knudsen en la salida de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

5.2. Propiedades aerodinámicas superficiales

Esta sección trata sobre analizar las variaciones de las propiedades aerodinámicas superficiales debido a las diferentes geometrías y gases utilizados. Los parámetros superficiales típicamente de interés en microcanales y toberas son la presión, arrastre por fricción, y la transferencia de calor.

5.2.1. Coeficiente de Presión

El coeficiente de presión se define por la ecuación:

$$C_p = \frac{p_w - p_{in}}{\frac{1}{2}\rho_{in}u_{in}^2} \quad (5.1)$$

donde p_w es la presión en la superficie sólida, obtenida por la Ecuación 2.107.

La Figura 5.31 muestra la variación del coeficiente de presión para la microtobera recta y curva. En ambas geometrías, C_p es menor para el flujo de argón. Esto se explica al analizar la Ecuación 5.1, donde el denominador contiene la densidad inicial, la cual es mayor en el caso del argón, por ende, disminuyendo el valor del coeficiente. De similar manera, esto explica porque el coeficiente de presión en la tobera curva posee un valor absoluto mucho mayor que la tobera recta. Como el ancho de entrada en la tobera recta es casi el doble que su contraparte curva, esta posee una velocidad inicial menor, y al estar elevada al cuadrado en el denominador, produce que el coeficiente de presión en la geometría recta sea 4 veces el valor de la geometría curva.

Para ambas configuraciones, C_p disminuye a medida que avanzamos en la superficie, debido a la caída de presión, y se pueden apreciar los mismos efectos del cambio de pendiente mencionados en la sección anterior, aunque con mayor exageración, debido a que tomamos valores en la superficie misma. Ambas geometrías presentan una disminución drástica del C_p desde la entrada hacia la garganta, pero la microtobera de paredes rectas disminuye esta tasa al atravesar la garganta, mientras que la microtobera curva no influencia la caída de presión superficial.

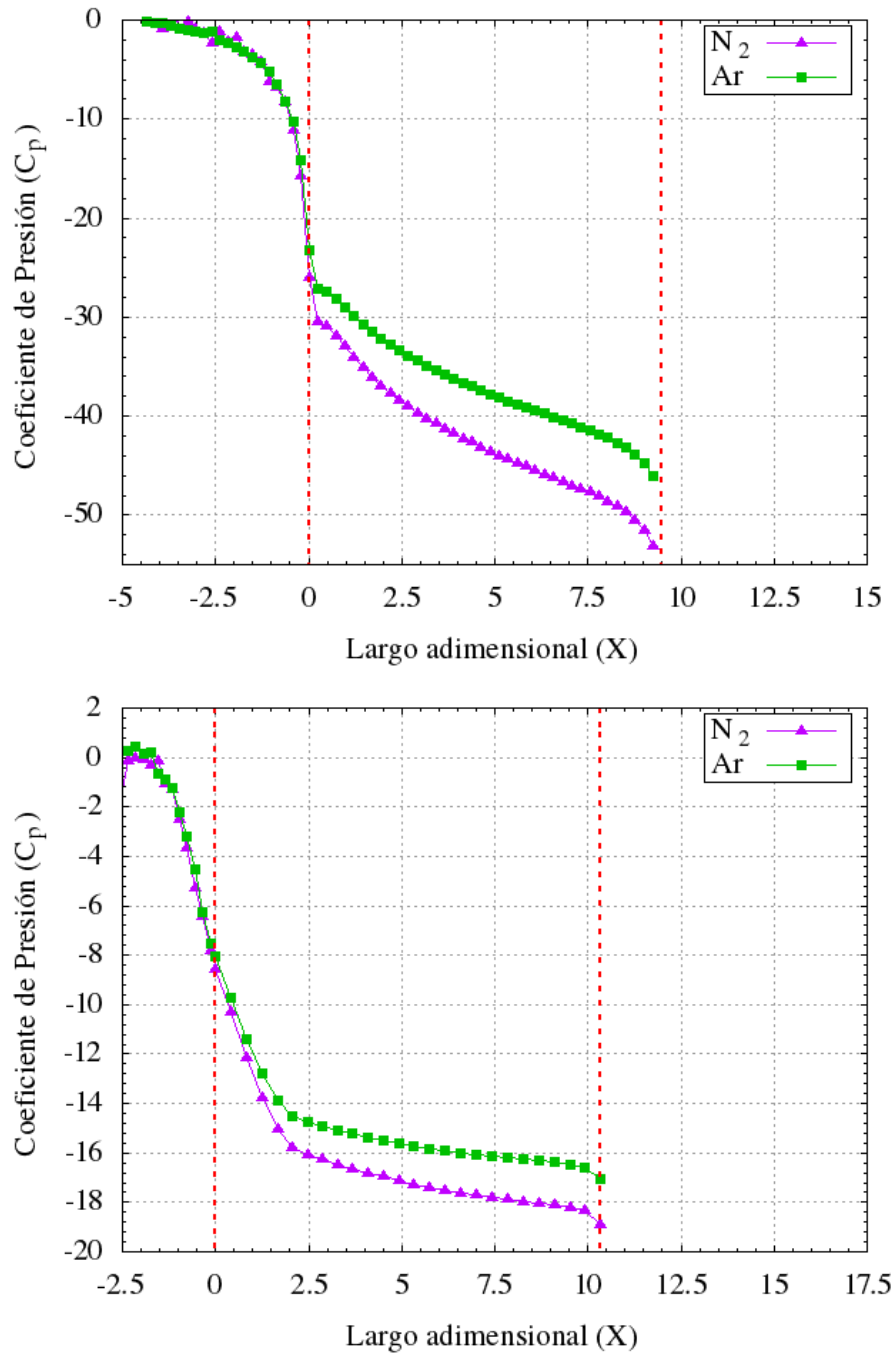


Figura 5.31: Distribución del coeficiente de presión a lo largo de la superficie interna de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

5.2.2. Coeficiente de Fricción

El coeficiente de fricción se define por la ecuación:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_{in}u_{in}^2} \quad (5.2)$$

donde τ_w es el esfuerzo de corte local en la superficie sólida, obtenida por la Ecuación 2.108.

La Figura 5.32 muestra la variación del coeficiente de fricción para la microtobera recta y curva. Nuevamente se cumple que los valores son menores para el flujo de argón, y ambas geometrías presentan un comportamiento similar del roce antes y después de la garganta, aumentando en la sección convergente, y disminuyendo hacia la sección divergente. Pero una diferencia clave se observa en la garganta. Debido al cambio brusco del ángulo de tobera en la microtobera recta, el comportamiento del coeficiente de roce es asintótico, mientras que en la geometría curva el máximo es relativamente menor (incluso considerando el efecto de una menor velocidad inicial). Esto indica claramente que una transición abrupta del ángulo de pared causa un aumento considerable de las fuerzas viscosas sobre el flujo, impactando negativamente el rendimiento.

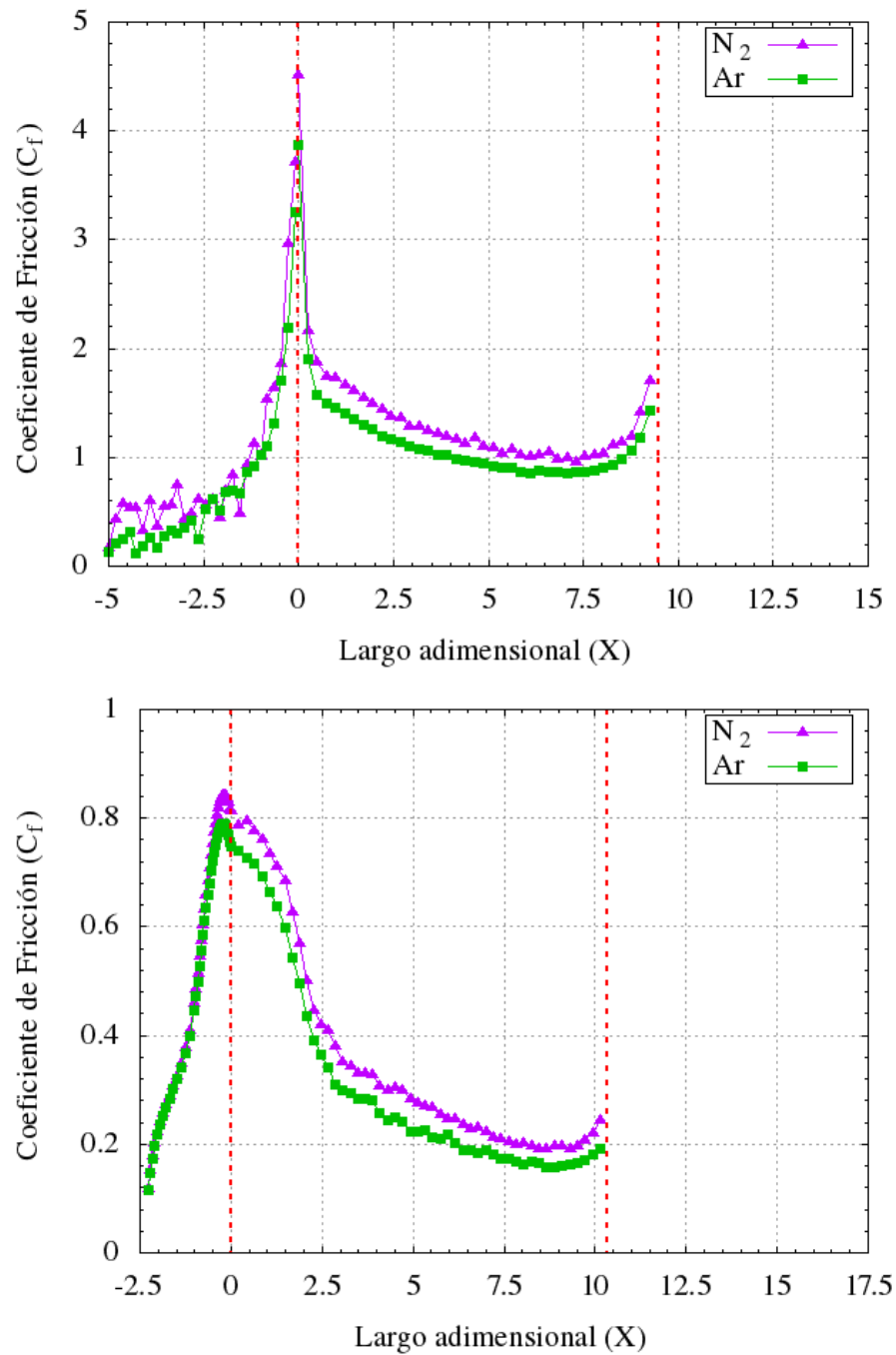


Figura 5.32: Distribución del coeficiente de fricción a lo largo de la superficie interna de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

5.2.3. Coeficiente de Transferencia de Calor

El coeficiente de transferencia de calor se define por la ecuación:

$$C_h = \frac{q_w}{\frac{1}{2}\rho_{in}u_{in}^3} \quad (5.3)$$

donde q_w es el flujo de calor local en la superficie sólida, obtenida por la Ecuación 2.109. Este flujo es considerado positivo si es dirigido hacia la superficie sólida.

La Figura 5.33 muestra la variación del coeficiente de transferencia de calor para la microtobera recta y curva. Al comparar los dos gases utilizados, no se aprecia una gran diferencia entre ellos en relación a los efectos sobre el C_h .

En relación a parámetros geométricos, el C_h es cercano a 0 a la entrada de la tobera, para luego volverse negativo a medida que el flujo se expande. Esto indica que en la sección convergente no existe mucha transferencia de calor entre la pared y el flujo, mientras que tras la garganta la pared entrega energía hacia el flujo. Esto es producto de que la temperatura superficial y de entrada son las mismas, por lo que no existe un diferencial de temperatura al comienzo de la tobera para producir un flujo de calor. Pero al expandirse el flujo, este necesariamente disminuye su temperatura, mientras que la temperatura superficial permanece constante, permitiendo así un flujo de calor hacia el gas.

También, cerca de la garganta, el coeficiente de transferencia de calor disminuye y de similar forma al coeficiente de fricción, esta tendencia es asintótica en la geometría recta, y suave en la geometría curva.

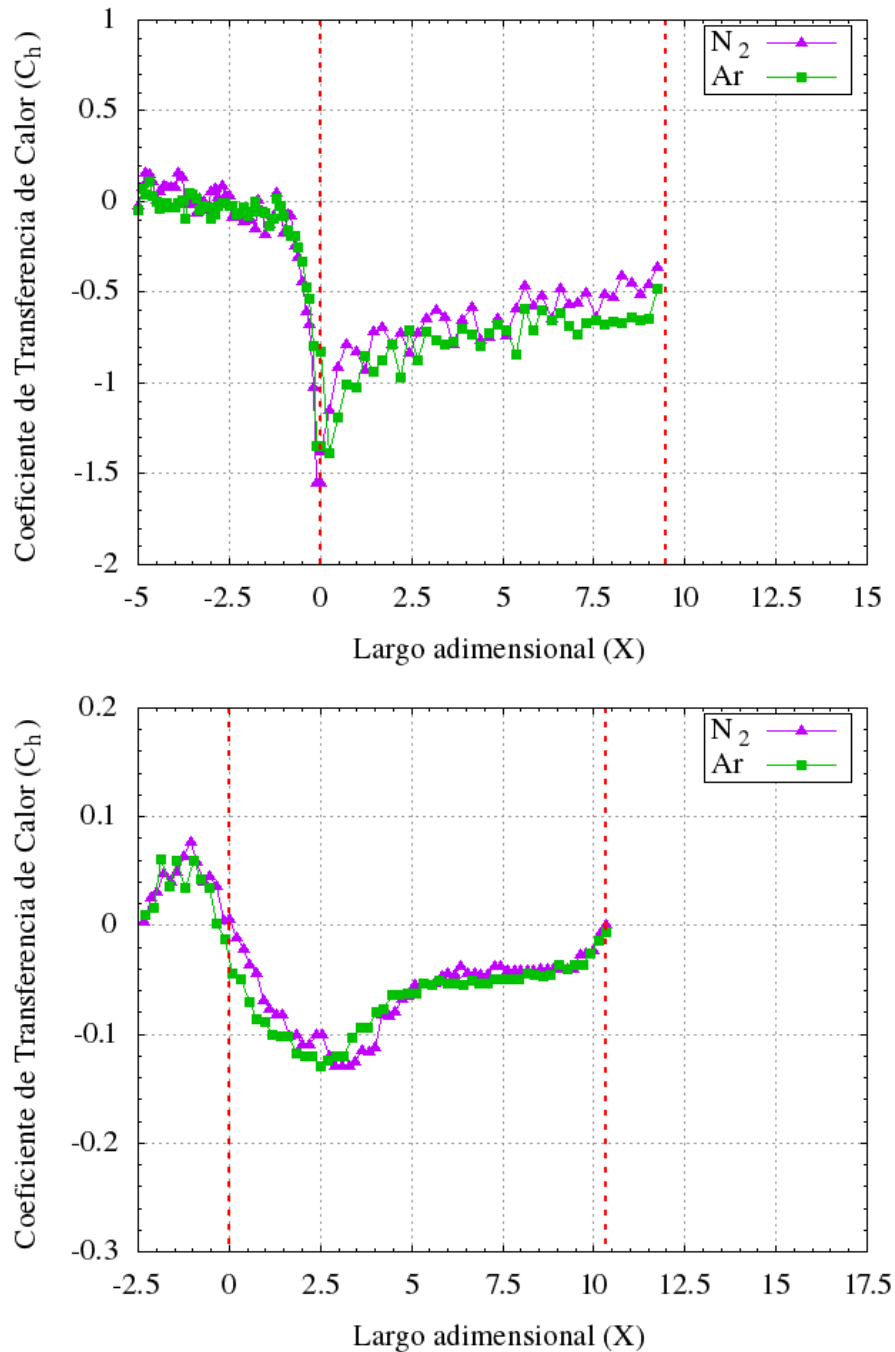


Figura 5.33: Distribución del coeficiente de transferencia de calor a lo largo de la superficie interna de la microtobera recta (arriba) y curva (abajo).

5.3. Parámetros de desempeño

En las secciones anteriores, la discusión está enfocada en los aspectos físicos del flujo, y como la geometría y especies de gas utilizadas afectan las propiedades macroscópicas y superficiales. En cambio, esta sección resume todas estas variables y entrega el impacto global sobre el sistema, en forma de los parámetros

de desempeño. Para el estudio de propulsores, los parámetros de desempeño más relevantes son la fuerza de empuje (F_t), el flujo másico ($\dot{m}$), y el impulso específico (I_{sp}), los cuales son las variables por considerar a la hora de implementar estos dispositivos en aplicaciones ingenieriles.

El propósito de utilizar dispositivos de micropropulsión en nanosatélites es generar una fuerza de empuje para realizar correcciones orbitales y ajustes de orientación. La fuerza de empuje es producto de 2 contribuciones, un flujo de momentum y un empuje de presión, como se observa en la Ecuación 5.4.

$$F_t = \int \rho u^2 dA + (p_e - p_b)A \quad (5.4)$$

donde ρ y u son la densidad local y la componente longitudinal de la velocidad, y A es el área de la sección transversal a considerar, la cual típicamente es el área de salida del propulsor.

Como cualquier equipo mecánico, un micropropulsor utiliza una fuente de energía para realizar trabajo útil. En el caso de propulsores de gas frío, esta fuente puede ser un estanque o compartimiento de gas, el cual debe tener un volumen determinado dentro del sistema. Por ello, no solo es importante tener propulsores de gran empuje, sino que también estos produzcan dicho empuje con la menor cantidad de propelente posible.

El consumo del propelente se conoce como flujo másico y es obtenido por la Ecuación 5.5.

$$\dot{m} = \int \rho u dA \quad (5.5)$$

La eficiencia del propulsor se obtiene por la razón entre la fuerza de empuje y el flujo másico, como se ve en la Ecuación 5.6

$$I_{sp} = \frac{F_t}{\dot{m}g}, \quad (5.6)$$

donde g es la aceleración de gravedad.

La Tabla 5.1 presenta los resultados obtenidos de los parámetros mencionados anteriormente, calculados para las 4 configuraciones de microtobera descritas.

Comparando el desempeño entre ambas especies de gases, se observa que el uso de gas nitrógeno, respecto al gas argón, genera un descenso del flujo másico en un 19,37 % y 17,71 %, en la microtobera recta y curva, respectivamente. Sin embargo, esta disminución no se ve expresada en términos de empuje generado. En la microtobera recta, el uso de gas nitrógeno prácticamente no causa una diferencia, disminuyendo la fuerza de empuje en un 0,35 %, mientras que en la microtobera curva el gas nitrógeno aumenta el empuje generado en un 1,75 %, respecto al argón. Por otro lado, en ambas geometrías el uso de gas nitrógeno causa un aumento significativo del impulso específico. Al utilizar nitrógeno, el impulso específico aumenta en un 23,43 % en el propulsor recto y en 23,75 % en el propulsor curvo, respecto al argón.

Dando paso al análisis entre las 2 geometrías presentadas, es evidente que el micropropulsor curvo sobrepasa en desempeño al micropropulsor recto en todos los parámetros descritos en esta sección. Al utilizar una geometría curva, el flujo másico aumenta en un 10,68 % con el uso de nitrógeno, y en un 8,44 % para el caso del argón. Siguiendo la misma tendencia, el empuje aumenta en un 36,51 % y 33,70 %, para el gas nitrógeno y argón, respectivamente, con el uso de una geometría curva respecto a una geometría recta.

Finalmente, el propulsor curvo presenta un impulso específico un 23,48 % y 23,16 % mayor que el propulsor de paredes rectas, para los propelentes de nitrógeno y argón, respectivamente.

Tabla 5.1: Parámetros de desempeño.

Parámetro	Recta		Curva		Unidad
	N ₂	Ar	N ₂	Ar	
Flujo másico ($\dot{m}$)	$4,87 \times 10^{-7}$	$6,04 \times 10^{-7}$	$5,39 \times 10^{-7}$	$6,55 \times 10^{-7}$	kg/s
Empuje (F_t)	219,10	219,87	299,10	293,96	μN
Impulso específico (I_{sp})	45,83	37,13	56,59	45,73	s

En definitiva, el uso de argón como gas propelente en vez de nitrógeno tiene un efecto insignificante sobre el empuje generado por el micropropulsor —del orden de 1 %—, mientras que los beneficios de utilizar gases más ligeros, como el nitrógeno, son considerables, aumentando la eficiencia aproximadamente en un 23 %, para ambas geometrías. Estos resultados son coherentes con otras investigaciones realizadas ([Wang y Li, 2004](#)), donde se ha encontrado que para mismas condiciones de operación, entre menor el peso molecular del gas, mayor es el impulso específico, a costo de leves pérdidas de empuje.

Ciertamente, son apreciables las claras ventajas del uso de geometrías curvas, presentando aumentos tanto de empuje como impulso específico del orden de 35 % y 23 %, respectivamente. Estos resultados se deben principalmente a 2 razones. Primero, las transiciones suaves entre secciones convergentes y divergentes permiten disminuir los saltos de roce y transferencia de calor, presentados en la Sección 5.2, reduciendo las pérdidas internas de energía. Segundo, el uso de una geometría compleja en la sección divergente permite aprovechar las ventajas de relaciones de expansión mayores, manteniendo una longitud y ángulo de divergencia pequeña —si quisiéramos utilizar una relación de expansión igual entre el propulsor curvo y recto, este último tendría que aumentar su longitud divergente más de 3 veces, manteniendo el mismo ángulo de expansión—.

6 | Conclusiones

En el presente trabajo de título, se realizó una investigación numérica de flujos enrarecidos sobre arreglos de micropropulsores de gas frío mediante el método Direct Simulation Monte Carlo (DSMC). Al considerar dos geometrías de propulsores, una compuesta por secciones rectas, y otra compuesta por secciones curvas, fue posible evaluar los efectos de utilizar geometrías complejas sobre el campo de flujo, propiedades aerodinámicas y los parámetros de desempeño. Simultáneamente, se examinó los efectos del uso de diferentes gases fríos, argón y nitrógeno.

Los resultados computacionales indican que existen pequeñas diferencias sobre las propiedades macroscópicas —velocidad, densidad, presión y temperatura— entre el uso de gas nitrógeno y argón como propelente en micropropulsores. En cambio, la información obtenida señala que el uso de paredes curvas en micropropulsores permite generar transiciones suaves de las propiedades mencionadas a través de la garganta, en contraste con el uso de paredes rectas donde hay cambios abruptos. Siguiendo la misma línea, es claro observar los beneficios traídos al utilizar geometrías curvas, permitiendo generar relaciones de expansión mayores a un mismo largo, y entonces, generar mayores velocidades de salida.

En relación con el grado de enrarecimiento del flujo, podemos ver que, a lo largo de toda la tobera, el número de Knudsen opera desde 10^{-3} hasta 10^{-1} . Este rango es donde generalmente se define la validez de las ecuaciones de Navier-Stokes con condición de deslizamiento, y esto es evidente al analizar los perfiles de velocidad y temperatura, donde claramente se ven los saltos de velocidad y temperatura en las regiones del flujo cercanas a la pared. Dado el relativo alto costo computacional del método DSMC en estos regímenes de flujo, a futuro podría investigarse el uso de métodos híbridos NS-DSMC (Wu et al., 2006), donde la región convergente de la tobera es modelada mediante las ecuaciones de Navier-Stokes con condición de deslizamiento, mientras que la sección divergente y externa es modelada por el método DSMC.

Con respecto a los coeficientes aerodinámicos superficiales, las simulaciones indican que estos parámetros son altamente dependientes de la geometría utilizada y el nivel de suavidad superficial. El cambio abrupto de ángulo en la garganta del micropropulsor recto generan saltos importantes tanto del coeficiente de fricción como del coeficiente de transferencia de calor, resultando en pérdidas innecesarias de energía.

Además, el estudio realizado concluye que el uso de gases más ligeros aumenta la eficiencia de los micropropulsores, con pérdidas bajas de empuje. Más aún, la implementación de paredes formadas por secciones curvas, en relación a paredes rectas, incrementa considerablemente tanto el empuje como el impulso específico.

Dada la naturaleza del método de fabricación de estos sistemas microelectromecánicos, no hay mayor dificultad o costo en la manufactura de micropropulsores con paredes curvas, respecto a micropropulsores

de paredes rectas. Por lo tanto, según los resultados expuestos en esta investigación, se recomienda el uso de micropropulsores de paredes curvas para aplicaciones en Cubesats, mediante el uso de gases fríos ligeros.



Bibliografía

- Airbus (2023). Mega-constellations in space: revolutionising the satellite industry. <https://securecommunications.airbus.com/en/meet-the-experts/mega-constellations-in-space-revolutionising-satellite-industry>. Recuperado el 08-04-2023. 1
- Bird, G.A. (1963). Approach to translational equilibrium in a rigid sphere gas. *Physics of Fluids*, 6(5), 1518–1519. 1
- Bird, G.A. (1976). *Molecular gas dynamics*. Oxford: Clarendon Press, 1ra. edición. 2.2.1
- Bird, G.A. (1978). Monte carlo simulation of gas flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 10, 11–31. 2.2.1
- Bird, G.A. (1994). *Molecular gas dynamics and the simulation of gas flows*. Oxford: Oxford Science Publications, 1ra. edición. (document), 2.2, 2.3, 2.2.3, 2.5, 2.2.3, 2.6, 2.2.4, 2.7, 2.8, 2.2.5, 3.4
- Bird, G.A. (1998). Recent advances and current challenges for dsmc. *Comput. Math. Appl.*, 35, 1–14. 2.2.1
- Borgnakke, C. y Larsen, P. (1975). Statistical collision model for monte carlo simulation of polyatomic gas mixture. *Journal of Computational Physics*, 18, 405–420. 3.2
- Gad-el Hak, M. (2006). *MEMS: Introduction and Fundamentals*. Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, 2da. edición. (document), 1, 2.1, 2.1, 2.1, 2.1.1, 2.1, 2.1.2, 2.1.2, 2.1.2, 2.1.4, 2.1.4, 2.2.1
- Hao, P.F.; Ding, Y.T.; Yao, Z.H.; He, F.; y Zhu, K.Q. (2005). Size effect on gas flow in micro nozzles. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 15, 181–194. 2.2.1, 3.1.1, 4.2, 4.2
- Horisawa, H.; Sawada, F.; Onodera, K.; y Funaki, I. (2009). Numerical simulation of micro-nozzle and micro-nozzle-array flowfield characteristics. *Vacuum*, 83, 52–56. (document), 2.2.1, 3.1, 3.1
- Liou, W.W y Fang, Y. (2006). *Microfluid Mechanics: Principles and Modeling*. The McGraw-Hill Companies, 1ra. edición. 2.2.1, 2.4, 2.2.2, 2.2.6, 2.2.6, 2.2.6
- Muntz, E.P. (1989). Rarefied gas dynamics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 21, 387–417. 2.2.1

- Nance, R.P.; Hash, D.B.; y Hassan, H.A. (1997). Role of boundary conditions in monte carlo simulation of mems devices. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 12(3), 119–128. 4.1.1
- Oran, E.S.; Oh, C.K.; y Cybyk, B.Z. (1998). Direct simulation monte carlo: Recent advances and applications. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 30(1), 403–441. 2.2.1
- Sebastiao (2011). Numerical simulation of mems-based cold gas micronozzle flows. Master's thesis, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Brasil. 3.1.2, 3.1.2, 4.2, 4.2
- Sutton, G.P y Biblarz, O. (2017). *Rocket Propulsion Elements*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 9va. edición. 2.1.2, 2.1.3, 2.1.3, 2.1.3
- NASA CubeSat Launch Initiative (2017). *CubeSat101: Basic Concepts and Processes for First-Time CubeSat Developers*. National Aeronautics and Space Administration. 1
- The CubeSat Program (2022). *CubeSat Desing Specification Rev. 14.1*. California Polytechnic State University, San Luis Obispo, CA. (document), 1, 1.1
- Venkatesan, A.; Lowenthal, J.; y Prem, P. (2020). The impact of satellite constellations on space as an ancestral global commons. *Nat Astron*, 4, 1043–1048. 1
- Wang, M.R. y Li, Z.X. (2004). Numerical simulations on performance of mems-based nozzles at moderate or low temperatures. *Microfluidics and Nanofluidics*, 1(1), 62–70. 5.3
- Wu, J.S.; Lian, Y.Y.; Cheng, G.; Koomullil, R.P.; y K.C., Tseng (2006). Development and verification of a coupled dsmc–ns scheme using unstructured mesh. *Journal of Computational Physics*, 219(2), 579–607. 6
- Zhan, K.; Chou, S.K.; y Ang, S.S. (2004). Memes-based solid propellant microthruster design, simulation, fabrication, and testing. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 13(2), 165–175. 2.2.1, 3.1