

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
VALPARAÍSO - CHILE



**“MODELAMIENTO Y CONTROL DE ACUEDUCTO
LAS VEGAS”**

JUAN CARLOS ARAYA SANDOVAL

**MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO
CIVIL ELECTRÓNICO**

PROFESOR GUIA: ALEJANDRO M. SUAREZ SOTOMAYOR.

PROFESOR CORREFERENTE: DANIEL A. ERRAZ LEVAGGI.

NOVIEMBRE - 2022

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su gran apoyo incondicional durante toda mi carrera universitaria, al equipo detrás del programa de memorias multidisciplinarias, a mis compañeros que trabajaron en el prototipo de este proyecto y también agradezco a mi profesor guía por su disposición durante todo el proceso del desarrollo de la memoria multidisciplinaria.

Resumen

El presente trabajo de título surge del programa de memorias multidisciplinarias de la universidad, consistiendo en resolver el problema de la empresa ESVAL.

El proyecto busca abarcar en la resolución de un problema real de distribución de agua en el Gran Valparaíso, comunas que comprenden Villa Alemana, Quilpué, Viña del Mar, Concón y Valparaíso, además de la ciudad de Limache.

El proyecto tiene por finalidad la optimización de la distribución de agua potable en un día normal de operación. La empresa ESVAL cuenta con la infraestructura para satisfacer la demanda de agua de las distintas comunas, sin embargo, las decisiones no son las óptimas en cuanto a cuales son las fuentes que se deben activar para alimentar el acueducto en determinadas horas del día.

La metodología de trabajo consiste en dos partes, la primera es mostrar que existe un método por el cual se pueden resolver este tipo de problemas dinámicos mediante control óptimo, se mostraran ejemplos de aplicación de este tipo de algoritmo realizado en MATLAB, los alcances que puede tener y dificultades con las restricciones.

En cuanto a la segunda parte se desarrolla el problema planteado de optimización mediante la aplicación de un control LQR al modelo linealizado del acueducto Las Vegas en código MATLAB y el modelo en Simulink. Por último, se visualiza las gráficas correspondientes a los sistemas productivos y de los volúmenes de los estanques.

Abstract

The present work of title arises from the multidisciplinary memories program of the university, consisting in solving the problem of the company ESVAL.

The project seeks to solve a real problem of water distribution in the Greater Valparaíso, communes that include Villa Alemana, Quilpué, Viña del Mar, Concón and Valparaíso, in addition to the city of Limache.

The main goal of this project is optimize the distribution of drinking water on a normal operating day. ESVAL has the infrastructure to give the water demand towards different cities, however, the decisions are not optimal as to which sources should be activated to provide to aqueduct at certain times of the day.

The methodology consists in two parts, the first one is to show that there is a method by which this type of dynamic problems can be solved by optimal control, examples of application of this type of algorithm will be shown in MATLAB code, the scopes that can have and difficulties with the restrictions.

As for the second part, the proposed optimization problem is developed through the application of a LQR control to the linearized model of the Las Vegas aqueduct in MATLAB code and then Simulink model. Finally, the graphs corresponding to the productive systems and the volumes of the ponds are visualized.

Glosario

- **SCADA:** Supervisory Control And Data Acquisition (Supervisión, Control y Adquisición de Datos)
- **Ley de Kirchoff de corriente:** establece que la corriente que fluye hacia un nodo (o una unión) debe ser igual a la corriente que fluye fuera de él.

$$\sum_{k=0}^n I_k = 0 \quad (0.1)$$

- **Ley de Kirchoff de voltaje:** establece que la suma de todos los voltajes alrededor de cualquier lazo cerrado en un circuito debe ser igual a cero.

$$\sum_{k=0}^n V_k = 0 \quad (0.2)$$

- **Sistema MIMO:** Sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas, *Multiple Input, Multiple Outputs*.

- **Notación:** se denota

- Derivada de primer orden: $\dot{f}(x) = \frac{df}{dx}(x)$.
- Derivada de segundo orden $\ddot{f}(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x)$.
- La transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$, donde:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (0.3)$$

Introducción

Las empresas con el fin de optimizar los costos operacionales han incurrido en la utilización de algoritmos que permitan identificar variables a partir de sus datos obtenidos de sus operaciones, de ello existen una gran variedad de softwares y métodos heurísticos en la aplicación en distintos contextos como transporte, mantenimiento, servicios básicos, entre otros.

Entre las diferentes usos se destacan la predicción de volumen de agua y la eficiencia de la red de agua. El diseño de una arquitectura para la distribución de agua se basa en el conocimiento y predicción de la demanda de las ciudades. Asimismo la toma de decisiones por parte de la gerencia y de los operarios son cruciales a la hora de suministrar el caudal a las diferentes ciudades de manera de garantizar el agua a los clientes finales.

La utilidad de este trabajo recae en la utilización de un algoritmo de control el cual permite tener el entendimiento de un sistema real, lo que conlleva a visualizar los caudales suministrados por los sistemas de producción y el volumen de agua dentro de los correspondientes estanques.

En el presente documento se presenta la metodología de control óptimo. Para entender el concepto se despliega información sobre las definiciones de lo que es el cálculo de variaciones que es la base para las ecuaciones que se mencionan, además se aprecia la utilización de dicho método mediante ejemplos de estanques y se ve como es la interacción de los distintos parámetros sobre el costo final. Adicionalmente se presenta la resolución de un proyecto presentado por una empresa de agua local mediante otro tipo de método de control óptimo el cual es el control LQR de seguimiento, se presenta de igual forma la definición y la utilización del cálculo de variaciones para lograr este algoritmo de resolución. Por ultimo, mediante simulación se logra la visualización de las variables de interés del proyecto.

Índice general

1..	Capítulo 1	12
1.1.	Programa Memorias Multidisciplinarias	12
1.2.	Desarrollo de las memorias	12
1.2.1.	Desafío	13
1.3.	Descripción de la empresa	13
1.3.1.	Descripción de la empresa	13
1.3.2.	Ubicación de la empresa	14
1.3.3.	Razón social	15
1.3.4.	Constitución de la sociedad	15
1.3.5.	Visión	15
1.3.6.	Misión	15
1.3.7.	Descripción del departamento de infraestructura TI	16
1.3.8.	Sistema de monitoreo	16
1.4.	Problemática	17
1.5.	Propuesta	17
1.5.1.	Objetivos	18
1.5.2.	Requisitos del sistema	18
1.5.3.	Esquema general del sistema	19
1.5.4.	Descripción de los componentes	19
1.5.5.	División del trabajo	21
2..	Capítulo 2	22
2.1.	Cálculo de variaciones	22

2.1.1.	Distancia entre dos puntos	23
2.1.2.	Ecuación de Euler-Lagrange	24
2.1.3.	Casos Especiales	27
2.1.4.	Caso A	28
2.1.5.	Caso B	28
2.1.6.	Caso C	28
2.1.7.	Multiplicadores de Lagrange	29
2.1.8.	Ejemplo Euler-Lagrange	32
2.2.	Control óptimo	36
2.2.1.	Hamiltoniano	37
2.2.2.	Ejemplo 1	38
3..	<i>Capítulo 3</i>	43
3.1.	Modelo de dos estanques	43
3.1.1.	Ejemplo 3	51
3.2.	Modelo ampliado de estanques	57
3.3.	Acueducto del Gran Valparaíso	57
3.3.1.	Modelamiento del Acueducto	58
3.3.2.	Ecuaciones	60
3.3.3.	Sistema de ecuaciones	61
3.3.4.	Modelo linealizado del sistema	61
3.3.5.	Representación en variable de estado	64
4..	<i>Capítulo 4</i>	66
4.1.	Regulador cuadrático lineal	66
4.1.1.	Obtención matriz $K(t)$	67
4.1.2.	Controlabilidad	68
4.1.3.	Observabilidad	68
4.1.4.	Elección de las matrices Q y R	69
4.1.5.	Límites y saturación en las variables de control y estados	69

4.1.6.	LQR en estado estacionario	70
4.1.7.	Condiciones para la existencia de solución en estado estacionario	70
4.1.8.	LQR seguimiento	71
5..	Capítulo 5	76
5.1.	Resultados y simulaciones	76
6..	Capítulo 6	83
6.1.	Conclusiones	83
6.1.1.	Trabajo Futuro	85
7..	Anexos	86

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Ubicación de ESVL	15
1.2. Diagrama general del sistema	19
1.3. Arquitectura del sistema	20
2.1. Curvas que pasan por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano	23
2.2. Trayectoria de un barco en un río con corriente	32
2.3. Diagrama de bloques	34
2.4. Trayectoria mínima del barco	35
2.5. Estanque alimentado con caudal $u_1(t)$ y demanda $d_1(t)$	39
2.6. Fuente de entrada u_1	42
2.7. Variación de altura de agua	42
3.1. Dos estanques	43
3.2. Modelo eléctrico de los estanques	44
3.3. Fuentes de entrada	49
3.4. Variación de altura de agua	49
3.5. Modelo eléctrico de los estanques	51
3.6. Fuentes de entrada	54
3.7. Variación de altura de agua	54
3.8. Comportamiento de los caudales con variación de β	56
3.9. Sistema reducido del acueducto	58
3.10. Sistema eléctrico del acueducto	60
4.1. Control realimentación de estados	67

4.2. Lazo de control LQR de seguimiento	74
5.1. Lazo de control para planta linealizada	80
5.2. Sistemas productivos en un día de operación	80
5.3. Volúmenes de estanques	81

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Variación de α y relación de costos	50
3.2. Variación de β y relación de costos	50
3.3. Variación de α_1 y relación de costos	54
3.4. Variación de β y relación de costos	55
5.1. Puntos de operación	76

1. CAPÍTULO 1

1.1. Programa Memorias Multidisciplinarias

EL programa de memorias multidisciplinarias en términos generales, busca generar una vinculación permanente y significativa con la industria [1].

Se considera que el programa permite crear las competencias transversales como: comunicación oral y comunicación escrita; emprendimiento, innovación y creatividad; generación de redes; liderazgo; negociar en diversos niveles y contextos; trabajo en equipo; resolución de problemas; toma de decisiones; gestionar proyectos; pensamiento crítico y sistémico; formular estrategias; y gestionar procesos productivos.

1.2. Desarrollo de las memorias

Este programa se desarrolla a través de

- **Proposición de desafíos:** para el desarrollo de productos y servicios, a partir de necesidades y oportunidades de la industria.
- **Conformación de equipos:** Durante un año se desarrolla un plan de negocio y una prueba de concepto o prototipo comercial del producto.
- **Formación de estudiantes:** En las habilidades asociadas a la innovación y al emprendimiento necesarias para el exitoso desarrollo de cada proyecto. Esta formación es entregada principalmente a través de talleres dictados por expertos de la industria, realizados en forma coordinada con la etapa de desarrollo del producto y el emprendimiento.

- **Seguimiento de los proyectos:** A través de coaching, mentoring y boards de evaluación conjunta industria-academia, con métricas de avance y entregables de gestión.

1.2.1. Desafío

El desafío a afrontar es propuesto por la empresa de agua ESVAL, durante el tiempo que dura el programa, esta empresa pasa ser el cliente a quien se le debe proponer una solución de su problemática, es entonces que el problema propuesto consiste en optimizar los costos operacionales de la red de agua potable.

Luego se conforman los equipos respectivos, en particular para este desafío el grupo está compuesto por dos estudiantes de la carrera de ingeniería civil telemática.

1.3. Descripción de la empresa

1.3.1. Descripción de la empresa

ESVAL [2] es una compañía dedicada a la producción y distribución de agua potable, como también se dedican a la recolección, descontaminación y disposición de aguas servidas a todas las comunas de la Región de Valparaíso, con excepción de Panquehue, Olmué, Juan Fernández, Santo Domingo e Isla de Pascua. Asimismo, la actividad es regulada por la Superintendencia de Servicios Sanitarios (SISS), lo que permite asegurar que los servicios prestados sean eficientes, de calidad y tengan un precio justo. Al mismo tiempo, garantiza que el agua, una vez utilizada, será descontaminada y devuelta a los ríos y mares de manera sustentable. Adicionalmente, la Compañía presta servicios de agua potable a otras localidades fuera del área de concesión en la comuna de Algarrobo, en base a convenios suscritos con las comunidades de Algarrobo Norte, Mirasol y La Brisas.

Las áreas de concesión que tiene ESVAL, están en la región de Valparaíso y la región de Coquimbo, a continuación se presentará las provincias que abarca ESVAL en cada región

Región de Valparaíso

- Provincia de Petorca: Petorca, La Ligua, Cabildo, Papudo, Zapallar.
- Provincia de Los Andes: Calle Larga, Los Andes, Rinconada, San Esteban.
- Provincia de San Felipe: San Felipe, Santa María, Catemu, Llay Llay, Putaendo.
- Provincia de Quillota: La Cruz, La Calera, Hijuelas, Quillota, Nogales
- Provincia de Marga Marga: Limache, Villa Alemana, Quilpué
- Provincia de Valparaíso: Puchuncaví, Viña del Mar, Valparaíso, Concón, Quintero, Casablanca.
- Provincia de San Antonio: Algarrobo, El Quisco, El Tabo, Cartagena, San Antonio.

Región de Coquimbo

- Provincia de Elqui: La Serena, Coquimbo, Vicuña, Paihuano, Andacollo.
- Provincia de Limarí: Ovalle, Monte Patria, Punitaqui, Combarbalá.
- Provincia de Choapa: Canela, Illapel, Salamanca, Los Vilos.

Según los datos de operación, para proporcionar la prestación de servicios sanitarios, ESVAL cuenta con la siguiente infraestructura: 81 sistemas productivos de agua potable; 52 sistemas de tratamiento y disposición de aguas servidas; 38 sistemas de agua potable interconectados y 51 sistemas de aguas servidas interconectados.

1.3.2. Ubicación de la empresa

La empresa ESVAL queda ubicada en Cochrane 751, Valparaíso, V Región, Chile. En la siguiente imagen, se muestra un mapa de ubicación del edificio de la empresa



Fig. 1.1: Ubicación de ESVAL

1.3.3. Razón social

La razón social es ESVAL S.A, tiene como nombre de fantasía ESVAL y su inscripción en el Registro de Valores es el N° 0348 con fecha 24 de Octubre de 1989

1.3.4. Constitución de la sociedad

Escritura de Constitución otorgada el 12 de junio 1989, ante el Notario de Santiago, don Raúl Undurraga Laso, cuyo extracto fue inscrito en el Registro de Comercio de Valparaíso a fojas 449 vta., número 469 de 1989, y publicado en el Diario Oficial del 15 de junio del mismo año.

1.3.5. Visión

Ir más allá de las expectativas de nuestros clientes, generando valor en forma sostenible.

1.3.6. Misión

Mejorar la calidad de vida de las personas, contribuyendo al desarrollo regional, con un equipo comprometido con la excelencia en la gestión integral del agua.

1.3.7. Descripción del departamento de infraestructura TI

El trabajo del Departamento de Infraestructura TI de ESVAL es facilitar las herramientas tecnológicas con el propósito de optimizar y mejorar continuamente los procesos de negocios de las distintas áreas de la empresa

Se destacan algunos procesos que apoya el Departamento de Infraestructura TI:

- Soporte de microinformática.
- Redes e internet.
- Telemetría y SCADA.
- Ofirmática y Mensajería.

En la gerencia de operaciones está el Centro de Control Operacional o CCO, en él, los asistentes técnicos son los que monitorean y controlan las plantas de ESVAL a través de las pantallas de los computadores.

1.3.8. Sistema de monitoreo

ESVAL cuenta con una amplia red de comunicación, y en esta red se encuentra incorporada la red de telemetría, la cual es la principal herramienta de comunicación y el telemando para el sistema SCADA que controla las plantas y procesos.

La red de telemetría se realiza la transmisión de las señales en las plantas, también se efectúa el monitoreo de cada uno de los componentes de esta red de comunicación compuesta por PLC, radios, switch y routers.

El monitoreo realizado en el Centro de Control Operacional también involucran el control de los procesos industriales como son el sondaje y producción de agua potable, recolección y tratamiento de aguas servidas. La interfaz gráfica impuesta en cada máquina manejada por los operarios fue diseñada en el programa Proficy iFIX, el cual es la herramienta principal que permite operar y administrar el sistema SCADA.

1.4. Problemática

La empresa ESVAL como monopolio natural se encarga de abastecer siempre la demanda diaria de agua potable al Gran Valparaíso, comprendiendo las ciudades de Valparaíso, Playa Ancha, Viña del Mar, Placilla de Peñuelas, Reñaca, Concón, Quilpué, El Belloto y Villa Alemana. Es entonces que en el Centro de Control Operacional realizan un monitoreo constante durante las 24 horas de lo que sucede con el nivel de agua en los principales estanques, lo importante es vigilar que el agua no sobrepase un nivel máximo de agua, esto es para que no se rebalse ningún estanque y un nivel mínimo de tal forma que no se vacíe ninguno de ellos. Esto implica que hay un control en tiempo real del nivel de agua en base a las decisiones de los operarios, en estos casos ellos se comunican con las personas encargadas en las distintas plantas de producción y les piden que suministren el caudal de agua necesario al acueducto, sin embargo estas decisiones no siempre son las mejores en termino de costo ya que por el hecho de enfocarse de satisfacer la demanda dan la orden de usar los caudales mas caros en algunos momentos del día provocando que el costo de agua no sea el óptimo. ESVAL al contar con los distintos sistemas productivos de agua y los sistemas de tratamiento respectivos en zona del Gran Valparaíso, el costo de producción es diferente en cada planta, esto tiene directa relación con el tipo de fuente hídrica y el lugar geográfico a donde se transportará.

1.5. Propuesta

La propuesta que se realiza a la empresa ESVAL es generar las reglas de operación que les permitan hacer el uso eficiente de los recursos hídricos y minimizar el costo operacional, garantizando suplir la demanda de los usuarios.

1.5.1. Objetivos

Objetivos generales

El objetivo general del desafío es desarrollar un software que permita predecir la demanda de agua del Gran Valparaíso y generar un plan de trabajo para las plantas distribuidoras, tal que disminuya el costo operacional diario.

Objetivos específicos

- Desarrollar modelo para la predicción de la demanda de agua a corto plazo.
- Desarrollar modelo para la optimización de la red de distribución de agua.
- Disponibilizar modelos para ESVAL mediante una API REST.

1.5.2. Requisitos del sistema

Los requisitos funcionales que tendrá el sistema se presentan a continuación, y además los requisitos no funcionales se describen de igual forma definiendo las condiciones por parte de ESVAL.

Requisitos funcionales

- El sistema debe entregar una predicción de la demanda de al menos 1 día.
- El sistema debe permitir cambiar el costo (\$/lt) de cada planta.
- El sistema debe entregar como salida un plan de trabajo para cada planta.
- El modelo de predicción se debe reentrenarse al finalizar un día
- El sistema debe contar con un gráfico de la predicción de demanda por hora.

Requisitos no funcionales

- El sistema debe funcionar diariamente.
- El sistema debe contar con una interfaz intuitiva.
- El modelo de predicción debe tener un error menor al 1.5 %.
- El modelo de optimización debe ser rápido de ejecutar.

1.5.3. Esquema general del sistema

La siguiente figura muestra los componentes que conforman el sistema y las principales interacciones.

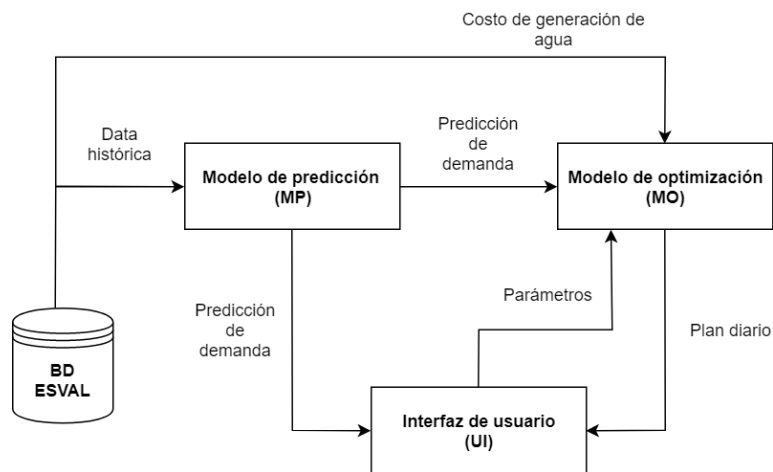


Fig. 1.2: Diagrama general del sistema

La implementación del sistema será en la plataforma cloud de Google. Se dispondrá de un servidor dedicado al procesamiento para los modelos de predicción y optimización, una base de datos para guardar los modelos de predicción ya entrenados, y mediante una API se dispondrán los datos a ESVAL.

1.5.4. Descripción de los componentes

Dada la arquitectura planteada, se identifican los siguientes componentes:

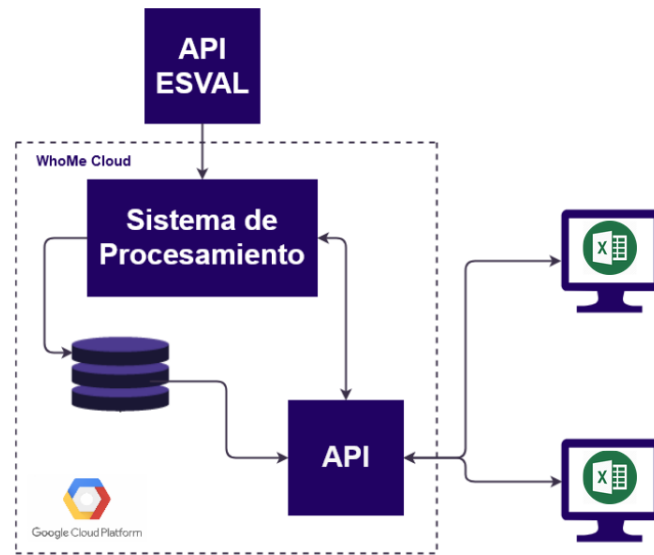


Fig. 1.3: Arquitectura del sistema

- **Modelo de predicción (MP):** El modelo se encarga de entregar predicciones de variables tales como demanda de agua y/o también el volumen disponible en cada estación. Recibe como entrada la data histórica de dichas variables desde la base de datos de ESVAL con el fin de entrenar el modelo. Además, dichas variables están registradas junto con información agregada como por ejemplo temperatura, presión, días de la semana entre otros
- **Modelo de optimización (MO):** El modelo se encarga de entregar planes de acción a ejecutar por ESVAL para reducir el costo operacional de la red, basándose principalmente en el costo operacional y volumen disponible (o demanda) de agua por estación. Note que el costo operacional se obtendrá mediante la BD de ESVAL, mientras que el volumen/demanda predecido se obtendrá mediante el modelo de predicción. Esto último implica que el MO es dependiente del MP. Además, la arquitectura planteada está preparada para que en el futuro eventualmente el cliente solicite ingresar otros parámetros de forma manual en la configuración del MO mediante una interfaz de usuario. Estos planes de acción pueden ser dirigidos para cada estación distribuidora de agua o para la red en

general.

- **Interfaz de usuario (UI):** Dicho componente se encarga principalmente de mostrar el comportamiento de la predicción del volumen/demanda a través de gráficos y mostrar el plan diario con el fin de que ESVAL pueda tomar medidas pro activas. Eventualmente, dicha UI puede servir para establecer parámetros en el modelo de optimización. La interfaz será una planilla Excel que contará con la red de distribución y los resultados de ambos modelos. Esta será disponibilizada mediante una API.
- **BD ESVAL:** Esta base de datos provee información necesaria como por ejemplo datos históricos de demanda/volumen y costos de operación por estación. Entrega información al MO y al MP.

1.5.5. División del trabajo

El trabajo en equipo es muy importante para tener el proyecto finalizado en las mejores condiciones, sin embargo, para agilizar el proceso se divide las actividades a cada uno de los integrantes, por consiguiente a lo largo de este trabajo se desarrolla el modelo de optimización, en cuanto a el modelo de predicción y la creación de la API los estudiantes de ingeniería civil telemática se encargaran de ello.

2. CAPÍTULO 2

2.1. *Cálculo de variaciones*

Los principios de minimización forman uno de los medios más amplios para formular modelos matemáticos que gobiernan las configuraciones de equilibrio de los sistemas físicos. Además, muchos esquemas de integración numérica populares como el poderoso método de elementos finitos también se basan en un paradigma de minimización.

Soluciones clásicas a los problemas de minimización en el cálculo de variaciones está prescrito por problemas de valor límite que involucran ciertos tipos de ecuaciones diferenciales, conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas. Las técnicas matemáticas que se han desarrollado para manejar estos problemas de optimización son fundamentales en muchas áreas de las matemáticas, la física, la ingeniería y otras aplicaciones.

El cálculo de variaciones constituye la forma clásica de solucionar problemas de optimización dinámica. Se trabaja con funcionales por ejemplo:

$$I(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 dx \quad (2.1)$$

y se llama funcional a una función que toma funciones como argumento. Los funcionales comparten muchas de las mismas propiedades que las funciones. En particular, la noción de un punto estacionario de una función tiene un análogo importante en la teoría de los funcionales, que da lugar al cálculo de variaciones.

2.1.1. Distancia entre dos puntos

Sean los puntos con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y considerando una familia de funciones dado por $y = y(x)$, que satisfacen las condiciones de contorno $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, es decir, la gráfica de la figura (2.1) une dichos puntos.

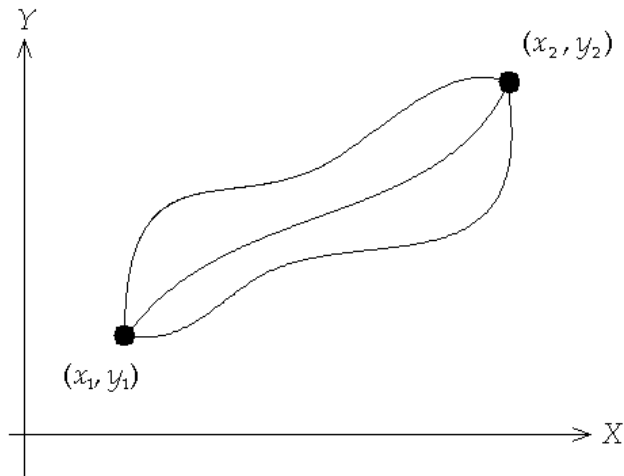


Fig. 2.1: Curvas que pasan por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano

Lo que se busca a continuación es hallar una función de esa familia tal que minimice la siguiente integral

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), \dot{y}(x)) dx \quad (2.2)$$

Si se considera las trayectorias de la figura (2.1), es posible hallar una función que contenga a las demás, esta es la longitud de arco que tiene la forma

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\dot{y}(x))^2} dx \quad (2.3)$$

y también se puede dar el área de la superficie de revolución obtenida al girar esta curva en torno al eje x que es

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + (\dot{y}(x))^2} dx \quad (2.4)$$

Las expresiones (2.3) y (2.4) son llamadas funcionales, por lo que a estas expresiones se le denominan funcional de I, dado que depende de la función $y(x)$ para obtener los valores dentro de un conjunto definido.

Si se vuelve a mirar la expresión (2.2), la función $f(x, y(x), \dot{y}(x))$ puede representar cualquier situación en donde se necesite minimizar algún tipo de problema.

En este sentido hay que precisar que es lo que se quiere minimizar, se supondrá que $f(x, y(x), \dot{y}(x))$, tiene derivadas parciales continuas de segundo orden respecto a x , y e $\dot{y}(x)$.

Para garantizar la validez de cada operación que se realice es necesario que $y(x)$ deba tener segunda derivada continua y satisfacer las condiciones de borde $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$, esta clase de funciones se llaman admisibles, y en consecuencia son llamadas funciones estacionarias de la integral.

Volviendo al cálculo de una variable, un punto estacionario x de una función $y(x)$ es un punto en el cual $\dot{y}(x) = 0$. Si el punto estacionario es encontrado es necesario determinar si la función tiene un máximo, mínimo o un punto de inflexión. Cuando no se hace distinción de ellos, estos casos son llamados valores estacionarios de $y(x)$.

2.1.2. Ecuación de Euler-Lagrange

Los funcionales dados anteriormente describen una gran variedad de situaciones físicas, ya que estas pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), \dot{y}(x)) dx \quad (2.5)$$
$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

en donde $f(x, y(x), \dot{y}(x))$ es una expresión que contiene al menos una de las funciones y , \dot{y} , o x , y que estará sujeta a sus respectivas condiciones de borde.

Por ejemplo se puede dar la función de área de la superficie de revolución descrita

anteriormente

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + \dot{y}(x)^2} dx \quad (2.6)$$

Conforme se puede observar el funcional I es una función de y e \dot{y} , pero no de x . Entonces un problema es encontrar el área mínima, para esto es necesario minimizar la función $y(x)$, la que estará sujeta a condiciones de borde.

Volviendo a la integral en (2.5) el paso a seguir es minimizarlo suponiendo que existe una función estacionaria $y(x)$ que haga admisible la solución.

Ahora para minimizar se hará de acuerdo a las pequeñas variaciones en la función $y(x)$ asumida como solución.

Se definen estas pequeñas variaciones como la función $\phi(x)$ tal que $\ddot{\phi}(x)$ sea continua y $\phi(x_1) = \phi(x_2) = 0$, luego se forma la siguiente expresión

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \epsilon\phi(x) \quad (2.7)$$

El elemento ϵ es un número real pequeño y $\phi(x)$ es cualquier función que cumpla con las condiciones mencionadas anteriormente. Es importante notar que se forma una familia de funciones de acuerdo a $\epsilon\phi(x)$, en consecuencia el mínimo se produce cuando $\epsilon = 0$, esto implica que $\tilde{y} = y$.

El valor del funcional usando (2.7) está dado por

$$\begin{aligned} I(\tilde{y}) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, \tilde{y}(x), \dot{\tilde{y}}(x)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x) + \epsilon\phi(x), \dot{y}(x) + \epsilon\dot{\phi}(x)) dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para $y(x)$ y $\phi(x)$ fijos, diferentes valores de ϵ dan diferentes valores del funcional $I(\tilde{y}(x)) = I(y(x) + \epsilon\phi(x))$, es claro que cuando $\epsilon = 0$ la expresión la de (2.8) queda $I(\tilde{y}(x)) = I(y(x))$. Por otro lado la función $y(x)$ está definida de forma estacionaria,

así que $I(\tilde{y})$ debe ser estacionaria en $\epsilon = 0$, esto es

$$\left. \frac{dI(\tilde{y}(x))}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (2.9)$$

Luego, la derivada del funcional evaluada en $\epsilon = 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI(\tilde{y}(x))}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \left(\int_{x_1}^{x_2} f(x, \tilde{y}(x), \dot{\tilde{y}}(x)) dx \right) \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left. \left(\frac{d}{d\epsilon} f(x, \tilde{y}(x), \dot{\tilde{y}}(x)) \right) \right|_{\epsilon=0} dx \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dado que los límites de integración son independientes de ϵ es posible intercambiar el orden de la integración y la derivada gracias a la regla de Leibniz para integrales.

Enseguida se aplica regla de la cadena

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} f(x, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) \right|_{\epsilon=0} = \left. \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{d\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{y}}} \frac{d\dot{\tilde{y}}}{d\epsilon} \right) \right|_{\epsilon=0} \quad (2.11)$$

Sin embargo, se tiene $y\tilde{(x)} = y(x) + \epsilon\phi(x)$ y $\dot{y}\tilde{(x)} = \dot{y}(x) + \epsilon\dot{\phi}(x)$

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} f(x, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) \right|_{\epsilon=0} = \left. \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \phi(x) + \frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{y}}} \dot{\phi}(x) \right) \right|_{\epsilon=0} \quad (2.12)$$

Ahora, $f = f(x, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}})$ depende de ϵ , mientras que $\phi(x)$ es independiente de ϵ , y además con $\epsilon \rightarrow 0$, implica que $\tilde{y} = y$ e $\dot{\tilde{y}} = \dot{y}$, entonces se tiene

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} f(x, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \phi(x) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{\phi}(x) \right|_{\epsilon=0} \quad (2.13)$$

Con (2.13) resuelto se sustituye en (2.10), resultando

$$\left. \frac{dI(\tilde{y})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\phi(x) \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\phi}(x) \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dx \quad (2.14)$$

Luego se desarrolla la integral usando integración por partes [3], y se obtiene

$$\left. \frac{dI(\tilde{y})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \phi(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] dx \quad (2.15)$$

se sabe que $\left. \frac{dI(\tilde{y})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$, por lo tanto, lo anterior se expresa como

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] dx = 0 \quad (2.16)$$

La elección de la función $\phi(x)$ es arbitraria, entonces para que se cumpla la expresión (2.16), ésta debe anularse para toda función estacionaria $I(y(x))$. En consecuencia esto ocurre si

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.17)$$

la expresión (2.17) es conocida como la ecuación de Euler-Lagrange.

2.1.3. Casos Especiales

La Ecuación de Euler-Lagrange formulada en el punto anterior no es muy transparente. La notación utilizada se debe entender en el siguiente sentido. La función $f(x, y(x), \dot{y}(x))$ depende de las variables independientes $x, y(x), \dot{y}(x)$ por lo que respecta a $\frac{\partial f}{\partial y}$ y a $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$. Sin embargo, $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right)$ no siempre es independiente de estas variables, de modo que este término al desarrollarlo la expresión en (2.17) queda como

$$\ddot{y} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y} \partial \dot{y}} + \dot{y} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y} \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y} \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

Es claro que (2.18) es una ecuación no lineal de segundo orden, y dada la complejidad de esta nueva expresión resulta imposible resolverla, pero no todas las aplicaciones requieren usar esta expresión de forma completa, es por esto que se pueden ver los siguientes casos:

2.1.4. Caso A

Si f no depende explícitamente de x ni de y , la ecuación se reduce a

$$\ddot{y} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y} \partial \dot{y}} = 0 \quad (2.19)$$

si $\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y} \partial \dot{y}} \neq 0$, entonces $\ddot{y} = 0$ e $y = c_1 x + c_2$, lo que se traduce en familia de rectas.

2.1.5. Caso B

Si f no depende explícitamente de y , en este caso se tiene $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ecuación se reduce a

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (2.20)$$

la que puede integrarse obteniendo una ecuación de primer orden

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = c_1 \quad (2.21)$$

2.1.6. Caso C

Si f no depende explícitamente de x , la ecuación se desarrolla de la siguiente manera, multiplicando por \dot{y} la ecuación de Euler se obtiene

$$\dot{y} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.22)$$

pero se sabe que

$$\frac{d}{dx} \left(\dot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \dot{y} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) + \ddot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \quad (2.23)$$

de esta forma se obtiene reemplazando (2.22) en (2.23)

$$\frac{d}{dx} \left(\dot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \ddot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \quad (2.24)$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, entonces

$$\frac{df}{dx} = \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \ddot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \quad (2.25)$$

dada estas condiciones se concluye

$$\frac{d}{dx} \left(\dot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{df}{dx} \quad (2.26)$$

lo que conlleva a

$$\dot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - f = c_1 \quad (2.27)$$

2.1.7. Multiplicadores de Lagrange

Considerar una función $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, teniendo al menos dos de sus derivadas continuas con respecto a las variables independientes, para hallar los puntos máximos o mínimos. Es claro que la función u debe ser al menos un polinomio cuadrático, o sino no puede encontrar aquellos puntos. Una condición necesaria para el extremo es que el diferencial de la función u sea cero:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (2.28)$$

Asumiendo que las variables x_i , son independientes, se deduce que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Lo siguiente, es considerar el caso donde alguna de las variables independientes están sujetas por restricciones, es fácil ver que la ecuación (2.28) es valida. Considerar la función, $u = f(x, y, z)$, donde $z = z(x, y)$ esta sujetas a x e y , a través de la siguiente

condición en forma de ecuación

$$\phi(x, y, z) = 0 \quad (2.30)$$

Considerando las variables x e y , como variables independientes, las condiciones necesarias para los extremos son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

En consecuencia, la ecuación se convierte en

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = 0 \quad (2.32)$$

además

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (2.33)$$

Se sigue que

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (2.34)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.28) es aún válida incluso cuando hay relación de restricciones entre las variables independientes, Ahora, la ecuación diferencial de la restricción dada por la ecuación(2.30)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0 \quad (2.35)$$

Multiplicando, la ecuación (2.35) por un multiplicador λ , y además sumando ese resultado a la ecuación (2.34) se obtiene

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dz \quad (2.36)$$

El multiplicador λ , puede ser escogido para que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 \\ \phi(x, y, z) &= 0\end{aligned}\tag{2.37}$$

Notar que este método no tiene inconvenientes respecto a las derivadas, permite eliminar la restricción por solo introducir un parámetro λ , el cual se llama multiplicador de Lagrange y el método se conoce como multiplicadores de Lagrange, agregar que este método se puede extender a funciones de más variables.

Ahora, Hay que ver que sucede cuando las funciones tienen restricciones del tipo integral y restricciones de superficie. El detalle del desarrollo de cada restricción se encuentra en [3].

En el primer caso se tiene una restricción funcional de la forma

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y(x), \dot{y}(x)) dx = C\tag{2.38}$$

toma valores $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$ en los límites de integración. y la forma en desarrollarlo es dar una familia biparamétrica de funciones próximas

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \epsilon_1 \phi_1(x) + \epsilon_2 \phi_2(x)\tag{2.39}$$

Luego del mismo modo que se encontró la ecuación Euler-Lagrange se desarrolla para encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales.

En cuanto a las restricciones finitas se considera el caso de hallar una curva espacial dentro de una superficie, entonces se define la parametrización $x = x(t)$, $y = y(t)$,

$z = z(t)$, y la superficies esta dada por

$$G(x, y, z) = 0 \tag{2.40}$$

La idea es eliminar esta ligadura por medio de encontrar funciones estacionarias, es decir, formar sistemas del estilo Euler-Lagrange.

2.1.8. Ejemplo Euler-Lagrange

En el siguiente ejemplo se considera un río con bancos rectos y paralelos a una distancia de 1, y un bote que puede viajar con velocidad constante $V_o = 2$. El problema a resolver es cruzar el río en el menor tiempo posible, comenzando y aterrizando en puntos determinados ver figura(2.2), además el agua fluye por el río con una velocidad $v(x) = \sin(\pi x)$

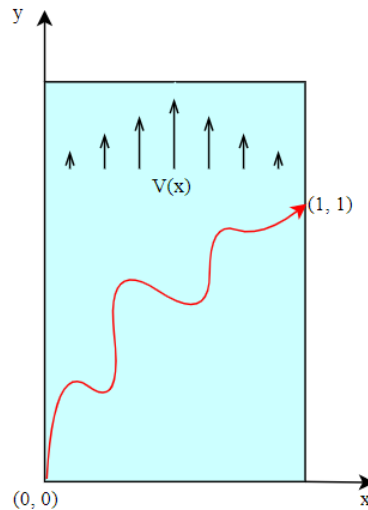


Fig. 2.2: Trayectoria de un barco en un río con corriente

El tiempo de paso a lo largo de la ruta $y(x)$ desde el punto (0,0) en el banco izquierdo

hasta el punto (1, 1) en el banco derecho, corresponde a

$$T(x, \dot{y}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{V_0^2(\dot{y})^2 + V_0^2 - V(x)^2} - V(x)\dot{y}}{V_0^2 - V(x)^2} dx \quad (2.41)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

Donde $V_0 = 2$ y $V(x) = \sin(\pi x)$

Al resolver este problema de la Ecuación-Lagrange, primero se identifica la función $f(x, \dot{y})$

$$f(x, y, \dot{y}) = \frac{\sqrt{V_0^2\dot{y}^2 + V_0^2 - V(x)^2} - V(x)\dot{y}}{V_0^2 - V(x)^2} dx \quad (2.42)$$

Por simplicidad se usará $V(x)$.

Como es una ecuación donde esta faltante la variable y , la ecuación de Euler-Lagrange se traduce al caso especial b, esto implica que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (2.43)$$

Entonces se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{4\dot{y}}{\sqrt{4 - V(x)^2 + 4\dot{y}^2(4 - V(x)^2)}} - \frac{V(x)}{4 - V(x)^2} \quad (2.44)$$

Luego la expresión anterior se deriva respecto a x

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{-4V'(x)}{(V(x)^2 - 4)^2} + \frac{\alpha V'(x)}{(V(x)^2 - 4)^2} + \frac{4\dot{y}}{(4 - V(x)^2 + 4\dot{y}^2)^{3/2}} \quad (2.45)$$

Donde $\alpha = \frac{V(x)(48\dot{y} - 12V(x)^2\dot{y} + 32\dot{y}^3 - V(x)(4 - V(x)^2 + 4\dot{y}^2)^{3/2})}{(4 - V(x) + 4\dot{y}^2)^{3/2}}$

Ahora se despeja \ddot{y} , logrando obtener

$$\ddot{y} = \frac{\dot{V}(x)[12V(x)^3\dot{y} - 16V(x)\dot{y}(3 + 2\dot{y}^2) - \beta]}{4(V(x)^2 - 4)^2} \quad (2.46)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

Donde $\beta = \sqrt{4 - V(x)^2 + 4\dot{y}^2(V(x)^4 + 4V(x)\dot{y}^2 + 16(1 + \dot{y}^2))}$

Se aprecia que la ecuación resultante es una ecuación diferencial de segundo orden, no-lineal y con condiciones de borde. Ahora para resolverlo se procederá a usar MATLAB/Simulink, entonces se forma el siguiente diagrama de bloques.

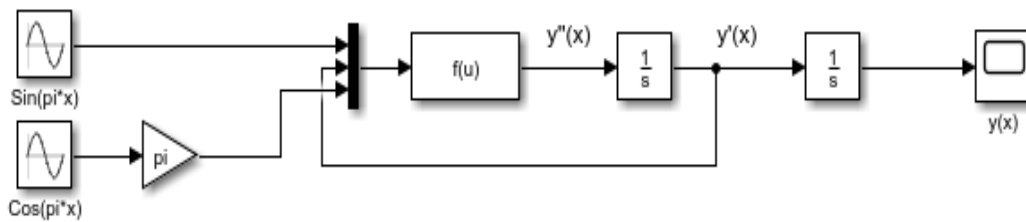


Fig. 2.3: Diagrama de bloques

El problema de contorno puede ser resuelto usando simulink (por método de disparo [5]), para esto se utiliza el valor de $\dot{y}(0) = 0,5$ en el primer integrador, y el segundo se usa $y(0) = 0$. Esto da como resultado la trayectoria de la figura (2.4)

Ahora queda la pregunta. ¿Qué sucede si la condición final es libre?. Esto se resuelve analizando la ecuación Euler-Lagrange

De la condición natural de borde $f_{\dot{y}}(b, y_0(b), \dot{y}_0(b)) = 0$ se obtiene

$$\frac{4\dot{y}(b)}{\sqrt{4 - V(b)^2 + 4\dot{y}(b)^2(4 - V(b)^2)}} - \frac{V(b)}{4 - V(b)^2} = 0 \quad (2.47)$$

Despejando $\dot{y}(b)$

$$\dot{y}(b)^2 = \frac{V(b)^2(4 - V(b))^2}{4(4 - V(b))^2} = \frac{V(b)^2}{4} \quad (2.48)$$

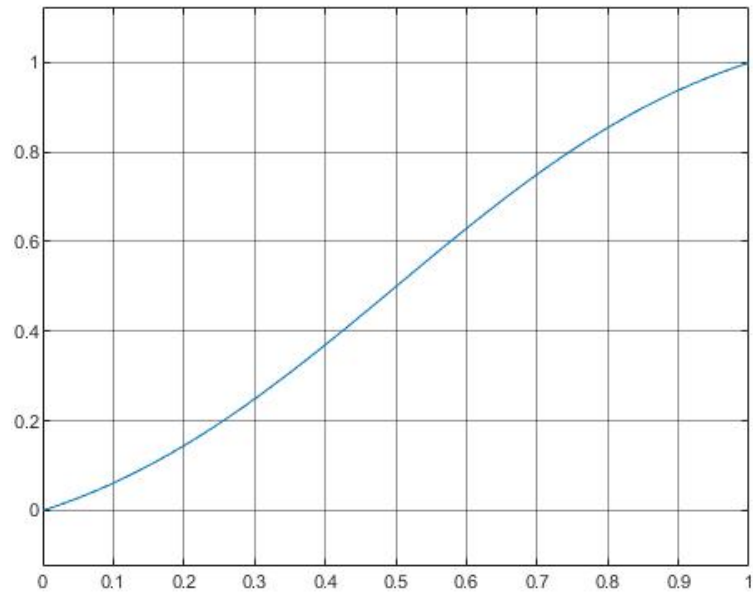


Fig. 2.4: Trayectoria mínima del barco

Así la condición de borde natural para un extremal y_0 de $T(x, y)$ es

$$\dot{y}(b) = \frac{V(b)}{2} \quad (2.49)$$

El bote llega a la orilla derecha del río con una pendiente que es la relación entre la velocidad del agua en la orilla derecha y la velocidad del bote en las aguas. Tomando en cuenta que $b=1$ y que la velocidad del agua es $V(x) = \sin(\pi x)$, esto implica que la pendiente con la cual llega el transporte es de $\dot{y}(1) = 0$

2.2. Control óptimo

La teoría de control trata con sistemas que pueden controlarse, es decir, cuya evolución puede ser influenciado por algún agente externo. Permite la solución de una gran clase de problemas de control no lineales sujetos a restricciones complejas de estado y señales de control. Siendo además una extensión del cálculo clásico de variaciones ya que no se basa en el suposiciones de curvas suaves; de hecho, en la mayoría de los casos, el control óptimo es altamente discontinuo.

La formulación del problema implica la minimización de una "función de costo" sujeta a restricciones iniciales y terminales que recuerdan el cálculo de Problemas de variación.

Se considerará sistemas de control que pueden ser definidos como un sistema de ecuaciones diferenciales que dependen de algunos parámetros.

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.50)$$

Donde x es el estado que toma valores en \mathbb{R}^n , u es el control de entrada tomando valores en algún dominio tal que $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo, t_0 es el tiempo inicial y x_0 es el estado inicial. Tanto x como u son funciones del tiempo, $x = x(t)$ y $u = u(t)$. El conjunto de control U suele ser un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^m y puede ser el \mathbb{R}^m completo; en principio también puede variar con el tiempo, pero se puede fijar. Para cada punto inicial x_0 hay muchas trayectorias dependiendo de la elección de los parámetros de control de u

Por lo general, se distinguen dos formas diferentes de elegir el control:

- Lazo abierto escoger u como función de t
- Lazo cerrado escoger u como función de variable de estado x

El primer problema que uno enfrenta es el estudio del conjunto de puntos que se pueden alcanzar, desde x_0 , utilizando controles de lazo abierto. Esto también se conoce

como el problema de controlabilidad.

Si se otorga la capacidad de control hasta un punto final x_1 , se puede intentar alcanzar x_1 minimizando algún costo, definiendo así un problema de control óptimo

$$\begin{aligned} \min \int_0^T F(x(t), u(t)) dt \\ x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Donde F es la función de costo. Para tener una definición precisa del problema de control óptimo, se debe especificar más a fondo: el tiempo T fijo o libre, el conjunto de controles admisibles y las trayectorias admisibles, etc.

Fijando el punto inicial x_0 y dejando que la condición final x_1 varíe en algún dominio de R^n , por ende se tiene una familia de problemas de control óptimo.

El problema típico a resolver es

$$\begin{aligned} \min J = \int_0^T F(t, x, u) dt \\ \text{sujeto a } \frac{dx}{dt} = f(t, x, u) \\ x(0) = A, \quad x(T) = B \\ u(t) \in \mathcal{U} \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \tag{2.52}$$

Si es que se quiere cambiar el problema a un problema de maximización, todo lo que hay que hacer es agregar un signo negativo al funcional.

2.2.1. Hamiltoniano

La condición necesaria de primer orden en la Teoría del Control Óptimo se conoce como el principio máximo (o mínimo [4]), que fue nombrado por Lev Pontryagin, para resolver un problema de control óptimo, se debe cambiar el problema de optimización dinámica restringida en un problema sin restricciones, y la función consecuente se

conoce como la función de Hamilton

$$\mathcal{H}(t, x, u, p) = F(t, x, u) + \sum_1^n p_i(t) f_i(t, x, u) \quad (2.53)$$

donde cada $p_i(t)$ se define como coestado. Su interpretación no es diferente al multiplicador en el método del multiplicador de Lagrange, en otras palabras, se puede considerar como el precio sombra de la relación entre el estado y la variable de control definida por $f(t, y, u)$.

El principio mínimo de Pontryagin establece que la trayectoria del estado óptimo x^* , y control óptimo u^* minimizan el Hamiltoniano tal que

- $\dot{x}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$
- $\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$
- $\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \leq \mathcal{H}(x^*(t), u(t), p^*(t), t)$

El principio mínimo proporciona las condiciones necesarias para la optimización. Si una trayectoria de control satisface estas condiciones, no es necesariamente óptima. Se necesita más análisis para garantizar la optimalidad. Un método que a menudo funciona es demostrar que existe una trayectoria de control óptima y verificar que solo haya una trayectoria de control que satisfaga las condiciones del Principio Mínimo.

Finalmente, hay casos en los que el Hamiltoniano $\mathcal{H}(x, u, p)$ no es una función de u en algunos valores de x, p . Estos casos se denominan extremos singulares [6] y deben tratarse con cuidado, ya que el valor de u se deja sin especificar en lo que respecta a la optimización.

2.2.2. Ejemplo 1

El problema a resolver consiste en minimizar el costo de agua en el intervalo de tiempo $t \in [0, 5]$ de un estanque cilíndrico, el cual es alimentado por un caudal $u_1(t)$ y tiene un consumo variable el que puede considerarse como $d_1 = \sin(\frac{2\pi}{5}t)$.

El estanque tiene altura x_1 y área basal A , ver figura (2.5), además las condiciones de borde del estanque son $x_1(0) = x_1(5) = 1$

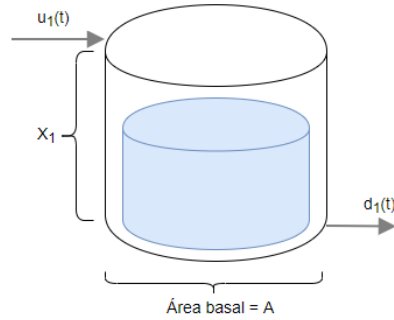


Fig. 2.5: Estanque alimentado con caudal $u_1(t)$ y demanda $d_1(t)$

La función de costo a minimizar es

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 (u_1^2 + 4(x_1 - 1)^2) dt \quad (2.54)$$

La ecuación de la planta con $A = 1$ es

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1 - d_1 \quad (2.55)$$

El consumo es

$$d_1(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right) + 1 \quad (2.56)$$

Las condiciones de borde son

$$x_1(0) = x_1(5) = 1 \quad (2.57)$$

Se forma el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [u_1^2 + 4(x_1 - 1)^2 + p_1(u_1 - d_1)] \quad (2.58)$$

Condiciones de optimalidad

$$\begin{aligned} -\frac{dp_1}{dt} &= 4(x_1 - 1) \\ u_1 &= -p_1 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Por comodidad se reescribe el coestado $p_1 = -p_1$

Entonces se tiene el nuevo Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[u_1^2 + 4(x_1 - 1)^2 - p_1(u_1 - d_1)] \tag{2.60}$$

Las condiciones de optimalidad nuevas son

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= 4(x_1 - 1) \\ u_1 &= p_1 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Además por comodidad se puede reescribir el estado $x_1 = x_1 - 1$

Con esto se tiene el problema a resolver que es

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_1 - d_1 \\ \frac{dp_1}{dt} &= 4x_1 \\ x_1(0) &= x_1(5) = 0 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Al resolver este sistema se debe de ajustar el $p_1(0)$ para que logre calzar con $x_1(5) = 0$.

El problema se puede resolver analíticamente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

Aplicando Transformada de Laplace

$$\begin{bmatrix} sX_1(s) \\ sP_1(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ p_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ P_1(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Reescribiendo

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ P_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1(s) \\ p_1(0) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Así se sigue el desarrollo encontrando la inversa

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ P_1(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - 4} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_1(s) \\ p_1(0) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Ahora solo interesa la primera fila por lo que se tiene

$$X_1(s) = -\left(\frac{s}{s^2 - 4}\right) D_1(s) + \left(\frac{1}{s^2 - 4}\right) p_1(0) \quad (2.67)$$

Usando transformada de Laplace inversa se tiene

$$x_1(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - 4} D_1(s)\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 4}\right) p_1(0) \quad (2.68)$$

La transformada de laplace del consumo es

$$D_1(s) = \frac{10\pi}{4\pi^2 + 25s^2} \quad (2.69)$$

Por lo tanto se tiene

$$x_1(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - 4} \frac{10\pi}{4\pi^2 + 25s^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 4}\right) p_1(0) \quad (2.70)$$

Se evalúa con $t = 5$, donde $x_1(5) = 0$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - 4} \frac{10\pi}{4\pi^2 + 25s^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 4}\right) p_1(0) \quad (2.71)$$

Luego usando un script en Matlab se puede obtener el resultado numérico de las expresiones, entonces

$$p_1(0) = 1,4504363419 \quad (2.72)$$

una vez encontrado este punto, lo siguiente es encontrar las funciones $x_1(t)$ y $p_1(t)$ con ayuda del mismo script realizado es posible obtener dichas funciones, y además se calcula el costo que se realiza por integración.

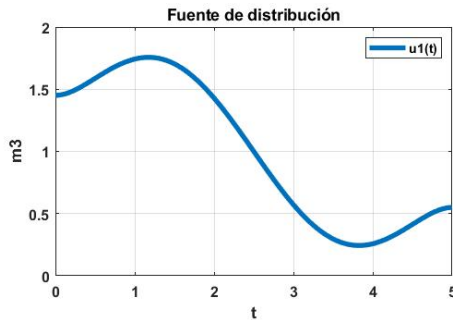


Fig. 2.6: Fuente de entrada u_1

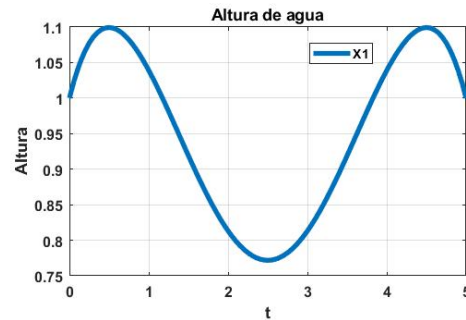


Fig. 2.7: Variación de altura de agua

Después de ejecutar el código se obtienen las gráficas mostradas en la figura (2.6) y figura(2.7), además del costo obtenido que es de \$4,683. Cabe destacar que no existe restricción para la fuente de entrada $u_1(t)$, esto permite encontrar de manera analítica las expresiones mediante la transformada de Laplace.

En la figura(2.6) se aprecia el comportamiento que debe tener el flujo de entrada para obtener el mínimo costo, asegurando que se cumplan las condiciones de borde del nivel de agua, figura(2.7).

Por otro lado el parámetro de ajuste en la función de costo se puede ajustar manualmente lo que implica adaptar a un nuevo nivel mínimo la fluctuación de la altura y claramente en la formula este ajuste afecta el costo final.

3. CAPÍTULO 3

3.1. Modelo de dos estanques

En el capítulo anterior se culminó con un ejemplo de optimización dinámica sobre el llenado de agua de un estanque con una demanda sinusoidal. Ahora se expande al caso de tener dos estanques ver figura (3.1). El primer estanque mantiene las mismas características usado previamente, junto a este se agrega el segundo que para modo de resolución los valores serán similares y con una demanda $d_2(t)$ cosenoidal, además se adiciona a ambos un tercer caudal $u_0(t)$, el cual tiene como particularidad ser más barato que $u_1(t)$ y $u_2(t)$. El caudal $u_0(t)$ se conecta a cada uno de los estanques por medio de una válvula respectivamente, es importante notar que en ellas no habrá un control y por lo tanto se fijaran a un valor constante.

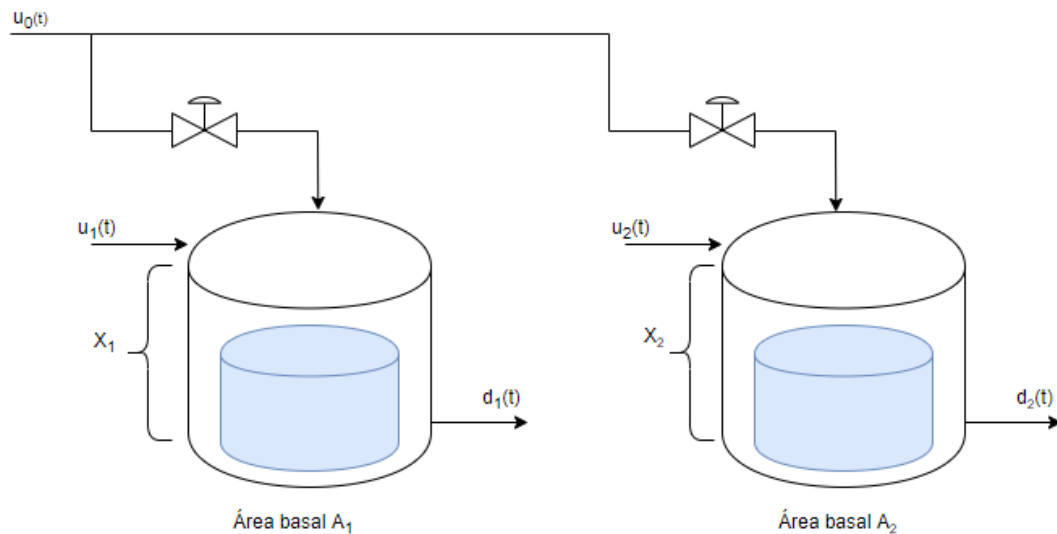


Fig. 3.1: Dos estanques

En este sentido se puede hacer la analogía hidráulica-eléctrica para tener un mejor entendimiento del problema, luego el nuevo modelo es el siguiente

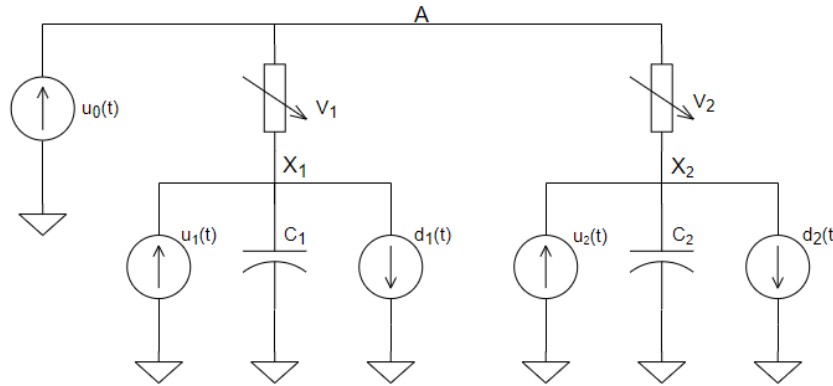


Fig. 3.2: Modelo eléctrico de los estanques

De la figura(3.2) ambas válvulas se transforman en conductancias y los nodos están descritas por A , x_1 y x_2 , entonces se hacen las ecuaciones en los nodos de acuerdo a la ley de Kirchoff de corriente y de voltaje

Nodo 1

$$u_0(t) = (A - x_1(t))V_1 + (A - x_2(t))V_2 \quad (3.1)$$

Nodo 2

$$(A - x_1(t))V_1 + u_1(t) = C_1 \frac{dx_1}{dt} + d_1(t) \quad (3.2)$$

Nodo 3

$$(A - x_2(t))V_2 + u_2(t) = C_2 \frac{dx_2}{dt} + d_2(t) \quad (3.3)$$

Entonces del nodo 1 se obtiene

$$A = \frac{u_0(t) + x_1(t)V_1 + x_2(t)V_2}{V_1 + V_2} \quad (3.4)$$

Es importante notar que el denominador, $V_1 + V_2 \neq 0$, en otras palabras las dos válvulas no pueden estar cerradas al mismo tiempo (ambas conductancias diferentes de cero). Luego se reemplaza esta expresión en las dos ecuaciones encontradas, y desarrollando se llega a

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{u_0(t)V_1 - x_1(t)V_1V_2 + x_2(t)V_1V_2}{V_1 + V_2} + u_1(t) - d_1(t) \right) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{u_0(t)V_2 + x_1(t)V_1V_2 - x_2(t)V_1V_2}{V_1 + V_2} + u_2(t) - d_2(t) \right)\end{aligned}\quad (3.5)$$

Las constantes tomarán los siguientes valores $C_1 = 1, C_2 = 1, V_1 = 1, V_2 = 1$ y las ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{u_0(t)}{2} + u_1(t) - d_1(t) - \frac{x_1(t)}{2} + \frac{x_2(t)}{2} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{u_0(t)}{2} + u_2(t) - d_2(t) + \frac{x_1(t)}{2} - \frac{x_2(t)}{2}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Por otra parte el problema que se quiere resolver es minimizar el costo de la distribución de agua, luego se define la siguiente función de costo

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{2} \int_0^5 (\beta^2 u_0^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t) + \alpha(x_1(t) - 1)^2 + \alpha(x_2(t) - 1)^2) dt \\ \alpha &= 4, \quad \beta = \frac{1}{2}\end{aligned}\quad (3.7)$$

Con las condiciones de borde

$$x_1(0) = x_2(0) = x_1(5) = x_2(5) = 1 \quad (3.8)$$

Se aplica la teoría de control óptimo para resolver este problema dinámico.

El primer paso es encontrar el Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \frac{1}{2} \left[\frac{u_0^2(t)}{4} + u_1^2(t) + u_2^2(t) + 4(x_1(t) - 1)^2 + 4(x_2(t) - 1)^2 \right] \\
& + p_1(t) \left[\frac{u_0(t)}{2} + u_1(t) - d_1(t) - \frac{x_1(t)}{2} + \frac{x_2(t)}{2} \right] \\
& + p_2(t) \left[\frac{u_0(t)}{2} + u_2(t) - d_2(t) + \frac{x_1(t)}{2} - \frac{x_2(t)}{2} \right]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Entonces se tienen las condiciones de optimalidad

$$\begin{aligned}
-\frac{dp_1}{dt} &= 4(x_1(t) - 1) - \frac{p_1(t)}{2} + \frac{p_2(t)}{2} \\
-\frac{dp_2}{dt} &= 4(x_2(t) - 1) + \frac{p_1(t)}{2} - \frac{p_2(t)}{2} \\
\frac{d\mathcal{H}}{du_0} &= \frac{u_0(t)}{4} + \frac{p_1(t)}{2} + \frac{p_2(t)}{2} = 0 \\
\frac{d\mathcal{H}}{du_1} &= u_1(t) + p_1(t) = 0 \\
\frac{d\mathcal{H}}{du_2} &= u_2(t) + p_2(t) = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

El coestado se puede escribir como $p_i = -\dot{x}_i$, y además por comodidad se reescribe el estado $x_i = x_i - 1$, así se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= 2p_1(t) + p_2(t) - d_1(t) - \frac{x_1(t)}{2} + \frac{x_2(t)}{2} \\
\frac{dx_2}{dt} &= p_1(t) + 2p_2(t) - d_2(t) + \frac{x_1(t)}{2} - \frac{x_2(t)}{2} \\
\frac{dp_1}{dt} &= 4x_1(t) + \frac{p_1(t)}{2} - \frac{p_2(t)}{2} \\
\frac{dp_2}{dt} &= 4x_2(t) - \frac{p_1(t)}{2} + \frac{p_2(t)}{2} \\
x_1(0) &= x_2(0) = x_1(5) = x_2(5) = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Con esto se obtiene el sistema de ecuaciones a resolver, en seguida se tiene la forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 2 \\ 4 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 4 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Aplicando Transformada de Laplace

$$\begin{bmatrix} sX_1(s) \\ sX_2(s) \\ sP_1(s) \\ sP_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 2 \\ 4 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 4 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ P_1(s) \\ P_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_1(s) \\ D_2(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Resolviendo se tiene

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ P_1(s) \\ P_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & -2 & -1 \\ \frac{-1}{2} & s + \frac{1}{2} & -1 & -2 \\ -4 & 0 & s - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -4 & \frac{1}{2} & s - \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -D_1(s) \\ -D_2(s) \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

La matriz inversa da como resultado

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ P_1(s) \\ P_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{17s}{2} + 6}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{\frac{s^2}{2} + \frac{7s}{2} - 6}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{2s^2 - \frac{27}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{s^2 - \frac{3}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} \\ \frac{\frac{s^2}{2} + \frac{7s}{2} - 6}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{17s}{2} + 6}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{s^2 - \frac{3}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{2s^2 - \frac{27}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} \\ \frac{4s^2 - 34}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{14}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{s^3 + \frac{s^2}{2} - \frac{17s}{2} - 6}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{-\frac{s^2}{2} + \frac{7s}{2} + 6}{s^4 - 17s^2 + 60} \\ \frac{14}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{4s^2 - 34}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{-\frac{s^2}{2} + \frac{7s}{2} + 6}{s^4 - 17s^2 + 60} & \frac{s^3 + \frac{s^2}{2} - \frac{17s}{2} - 6}{s^4 - 17s^2 + 60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_1(s) \\ -D_2(s) \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Para encontrar los puntos solo se interesa las dos primeras filas

$$\begin{aligned}
 X_1(s) = & - \left(\frac{s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{17s}{2} + 6}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) D_1(s) - \left(\frac{\frac{s^2}{2} + \frac{7s}{2} - 6}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) D_2(s) \\
 & + \left(\frac{2s^2 - \frac{27}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) p_1(0) + \left(\frac{s^2 - \frac{3}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) p_2(0)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 X_2(s) = & - \left(\frac{\frac{s^2}{2} + \frac{7s}{2} - 6}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) D_1(s) - \left(\frac{s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{17s}{2} + 6}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) D_2(s) \\
 & + \left(\frac{s^2 - \frac{3}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) p_1(0) + \left(\frac{2s^2 - \frac{27}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) p_2(0)
 \end{aligned}$$

Aplicando Transformada de Laplace inversa y evaluando en $t = 5$ donde $x_1(5) = x_2(5) = 0$ se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{17s}{2} + 6}{s^4 - 17s^2 + 60} D_1(s) \right) \Big|_{t=5} + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\frac{s^2}{2} + \frac{7s}{2} - 6}{s^4 - 17s^2 + 60} D_2(s) \right) \Big|_{t=5} \\
 & = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2s^2 - \frac{27}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) \Big|_{t=5} p_1(0) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^2 - \frac{3}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) \Big|_{t=5} p_2(0)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\frac{s^2}{2} + \frac{7s}{2} - 6}{s^4 - 17s^2 + 60} D_1(s) \right) \Big|_{t=5} + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{17s}{2} + 6}{s^4 - 17s^2 + 60} D_2(s) \right) \Big|_{t=5} \\
 & = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^2 - \frac{3}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) \Big|_{t=5} p_1(0) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2s^2 - \frac{27}{2}}{s^4 - 17s^2 + 60} \right) \Big|_{t=5} p_2(0)
 \end{aligned}$$

Las incógnitas son $p_1(0)$ y $p_2(0)$, es claro ver que las expresiones se pueden desarrollar a mano, sin embargo con ayuda de un script hecho en Matlab permite la resolución de este sistema, con lo cual se obtiene el valor de los puntos $p_1(0) = 0,44203017145$ y $p_2(0) = 0,6260640323$, luego el costo es de \$2,9325

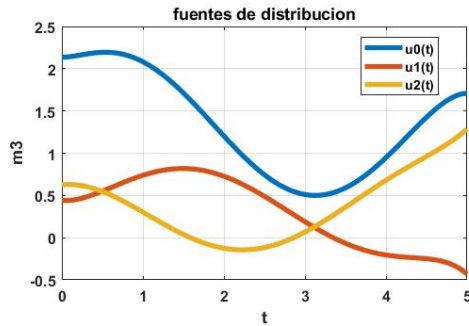


Fig. 3.3: Fuentes de entrada

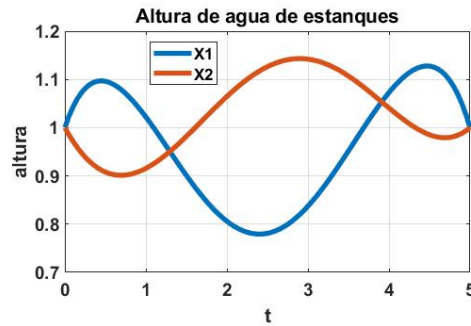


Fig. 3.4: Variación de altura de agua

La figura (3.3) muestra como es el comportamiento de las tres fuentes en el periodo de $t \in [0, 5]$, cabe recordar que cada una de ellas no tienen restricciones por lo que su comportamiento es libre, los resultados negativos físicamente no son realizables, sin embargo si estas están bajo cero significa que la fuente esta apagada.

Al tener una fuente mas barata que en este caso es $u_0(t)$, este toma mas relevancia respecto a las otras dos, también es necesario mirar la figura (3.4), se observa como las condiciones de bordes se cumplen y la regulación del agua depende del factor α que se define al principio del ejemplo.

A continuación se analiza en un cuadro comparativo la implicancia del factor α sobre el costo final cuadrático y lineal.

Cabe antes destacar que el costo lineal se refiere al costo real del problema, pero dicho costo no se puede resolver con el método de control óptimo ya que trabajar con un costo lineal ocasiona una singularidad en el algoritmo. Por esto, solamente se evalúa el resultado al final de la resolución, en (3.18) es como se representa el costo lineal.

$$J = \int_0^5 (\beta u_0(t) + u_1(t) + u_2(t)) dt \tag{3.18}$$

En la siguiente tabla se realiza una comparación con el cambio del parámetro de regulación α , el costo cuadrático y el costo lineal, manteniendo el valor de $\beta = 0,5$ y las válvulas constantes.

α	costo cuadrático \$	costo lineal \$
1	2.5916	7.2619
2	2.7643	7.3215
3	2.8642	7.4744
4	2.9316	7.6073
5	2.9809	7.7141
10	3.1113	8.0206

Tab. 3.1: Variación de α y relación de costos

El parámetro α en este ejemplo da a entender que aumentando el valor también aumenta el costo, esto se traduce a si se quiere obtener una mejor regulación el costo se elevará ya que el factor penaliza el costo en la expresión (3.7) .

Ahora se varía el valor de β con α constante igual a 1.

β	costo cuadrático \$	costo lineal \$
0.1	0.7521	3.2039
0.2	1.0844	4.2146
0.5	2.5916	7.2619
1	4.4372	10.0786
2	5.6377	11.1133
10	6.2054	10.4478

Tab. 3.2: Variación de β y relación de costos

En cuanto al tema de costo se ve como el cuadrático y lineal aumentan al ir subiendo el valor de β , este parámetro esta asociado al costo del caudal $u_0(t)$, puede hacer gran dependencia de este, siempre y cuando el valor es menor a 1, ejecutando el código se puede comprobar que aumentar β ocasiona que se deje de usar el caudal inicial, esto es esperable ya que usar un caudal mas caro que los demás va a tender a no usarse y solo bastaría con los otros dos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ en cada estanque respectivamente.

3.1.1. Ejemplo 3

Ahora se realiza el mismo ejemplo de control óptimo siendo que esta vez se considerará la existencia de un conducto irregular capaz de almacenar flujo en su viaje entre la fuente u_0 y las válvulas, esto implica que en la analogía hidráulico - eléctrico habrá valores de resistencia y condensadores (se puede considerar el uso inercencia considerando una cañería, esto es usar inductores en vez de condensadores). Entonces se obtiene un nuevo diagrama de analogía ver figura (3.5)

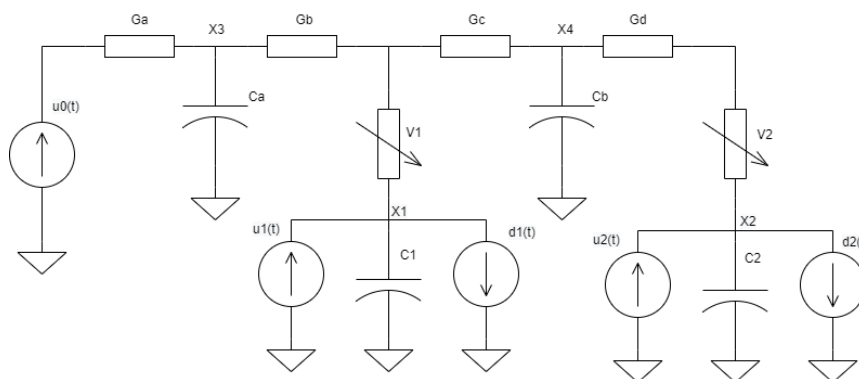


Fig. 3.5: Modelo eléctrico de los estanques

Como se aprecia en la figura anterior ahora se tienen cuatro condensadores, cuatro resistencias (se trabaja con el valor de conductancia) y dos válvulas, por supuesto, también con sus correspondientes fuentes de corrientes que son los caudales y las demandas.

En el desarrollo se considera las ecuaciones de Kirchoff de voltaje y corriente, con lo cual se obtienen.

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_1 &= \frac{1}{c_1} \left[-X_1 \left(\frac{G_b V_1 + G_c V_1}{G_b + V_1 + G_c} \right) + \frac{X_3 G_b V_1 + X_4 G_c V_1}{G_b + V_1 + G_c} - d_1(t) + u_1(t) \right] \\
 \dot{X}_2 &= \frac{1}{c_2} \left[-\frac{X_2 G_d V_2}{G_d + V_2} - \frac{X_4 G_d V_2}{G_d + V_2} - d_2(t) + u_2(t) \right] \\
 \dot{X}_3 &= \frac{1}{c_b} \left[\frac{X_1 V_1 G_b + X_4 G_b G_c}{G_b + V_1 + G_c} - X_3 \left(\frac{G_b V_1 + G_c G_b}{G_d + V_2 + G_e} \right) + u_0(t) \right] \\
 \dot{X}_4 &= \frac{1}{c_c} \left[\frac{X_1 V_1 G_c + X_3 G_b G_c}{G_b + V_1 + G_c} + \frac{X_2 V_2 G_d}{G_d + V_2} - X_4 \left(\frac{V_1 G_c + G_b G_c}{G_b + V_1 + G_c} + \frac{G_d V_2}{V_2 + G_d} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Las constantes tomaran los siguientes valores $C_1 = 1, C_2 = 1, C_a = 1, C_b = 1, G_a = 1, G_b = 1, G_c = 1, G_d = 1, V_1 = 1$ y $V_2 = 1$, por lo tanto las ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_1 &= -\frac{2X_1(t)}{3} + \frac{X_3(t)}{3} + \frac{X_4(t)}{3} - d_1(t) + u_1(t) \\
 \dot{X}_2 &= -\frac{X_2(t)}{2} - \frac{X_4(t)}{2} - d_2(t) + u_2(t) \\
 \dot{X}_3 &= \frac{X_1(t)}{3} - \frac{2X_3(t)}{3} + \frac{X_4(t)}{3} + u_0(t) \\
 \dot{X}_4 &= \frac{X_1(t)}{3} + \frac{X_2(t)}{2} + \frac{X_3(t)}{3} - \frac{7X_4(t)}{6}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por otra parte la función de costo que se quiere minimizar es de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \int_0^5 (\beta^2 u_0^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t) + \alpha_1(x_1(t) - 1)^2 + \alpha_1(x_2(t) - 1)^2 \\
 &+ \alpha_2(x_3(t) - 2)^2 + \alpha_2(x_4(t) - 2)^2) dt
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

con $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \beta = 1$

Luego las condiciones de borde son

$$\begin{aligned}
 X_1(0) = X_2(0) = X_1(5) = X_2(5) &= 1 \\
 X_3(0) = X_4(0) = X_3(5) = X_4(5) &= 2
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Enseguida se obtiene el Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \frac{1}{2} (u_0^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t) + (x_1(t) - 1)^2 \\
& + (x_2(t) - 1)^2 + (x_3(t) - 2)^2 + (x_4(t) - 2)^2) \\
& + p_1 \left(-\frac{2X_1(t)}{3} + \frac{X_3(t)}{3} + \frac{X_4(t)}{3} - d_1(t) + u_1(t) \right) \\
& + p_2 \left(-\frac{X_2(t)}{2} - \frac{X_4(t)}{2} - d_2(t) + u_2(t) \right) \\
& + p_3 \left(\frac{X_1(t)}{3} - \frac{2X_3(t)}{3} + \frac{X_4(t)}{3} + u_0(t) \right) \\
& + p_4 \left(\frac{X_1(t)}{3} + \frac{X_2(t)}{2} + \frac{X_3(t)}{3} - \frac{7X_4(t)}{6} \right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Entonces se tienen las condiciones de optimalidad

$$\begin{aligned}
-\frac{dp_1}{dt} &= (x_1(t) - 1) - \frac{2p_1(t)}{3} + \frac{p_3(t)}{3} + \frac{p_4(t)}{3} \\
-\frac{dp_2}{dt} &= (x_2(t) - 1) - \frac{p_2(t)}{2} + \frac{p_4(t)}{2} \\
-\frac{dp_3}{dt} &= (x_3(t) - 2) + \frac{p_1(t)}{3} - \frac{2p_3(t)}{3} + \frac{p_4(t)}{3} \\
-\frac{dp_4}{dt} &= (x_4(t) - 2) - \frac{p_1(t)}{3} - \frac{p_2(t)}{2} + \frac{p_3(t)}{3} - \frac{7p_4(t)}{6} \\
\frac{d\mathcal{H}}{du_0} &= u_0(t) + p_3(t) = 0 \\
\frac{d\mathcal{H}}{du_1} &= u_1(t) + p_1(t) = 0 \\
\frac{d\mathcal{H}}{du_2} &= u_2(t) + p_2(t) = 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Como los pasos resolución son iguales al ejemplo anterior, y el código en Matlab esta en el anexo, entonces se mostraran los resultados a continuación.

La figura (3.6) muestra como debe comportarse los caudales para que se cumplan las condiciones de borde, también notar que no hay restricciones sobre el nivel de agua que se pueden sacar de las fuentes, esto se traduce a que son condiciones libres. Por otra parte como el costo de sacar agua es el mismo para los tres, toma mayor relevancia

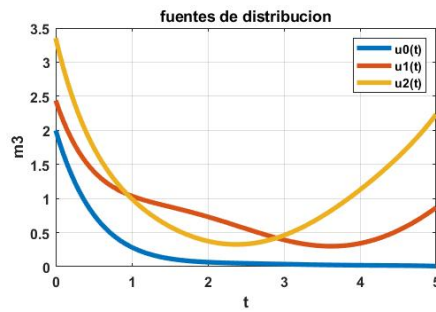


Fig. 3.6: Fuentes de entrada

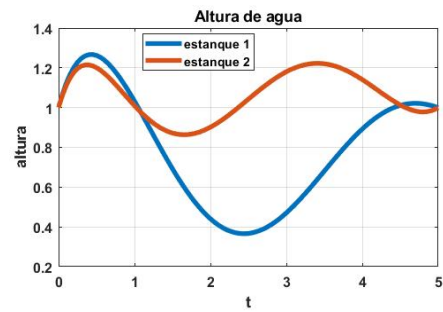


Fig. 3.7: Variación de altura de agua

los caudales $u_1(t)$ y $u_2(t)$, dado que estos son los que alimentan a los estanques, en cambio el caudal $u_0(t)$ presenta mayor tiempo para poder alcanzar ambos estanques, ya que además de alimentar se debe satisfacer las demandas.

En la figura (3.7) se puede apreciar como varía la altura de agua en los estanques. Con la metodología de control óptimo se logra que se cumplan condiciones de borde, en este caso el estanque parte y termina con un determinado nivel dado por el usuario.

En la siguiente tabla se realizan comparaciones entre cambio de los parámetros primero el costo β del caudal u_0 , el control de las regulaciones con α_1 , α_2 y los valores de las válvulas de esta forma se ve como cambia el costo final.

β	α_1	α_2	costo final \$
1	1	1	10.1952
1	2	1	10.1199
1	3	1	10.1076
1	4	1	10.1107
1	5	1	10.1175
1	10	1	10.156

Tab. 3.3: Variación de α_1 y relación de costos

Se observa que al variar el parámetro α_1 el costo no obtiene un cambio significativo dentro de lo que se puede esperar. Dicho parámetro está relacionado con la regulación de del volumen del estanque 1 y estanque 2 (X_1 y X_2 respectivamente). Entonces la implicancia de la regulación sobre el costo depende de dos factores, esto es un juego de ambos por lo cual la relación regulación/costo que queda a criterio del usuario.

Ahora se varía beta

β	α_1	α_2	costo final \$
0.1	1	1	8.8162
0.5	1	1	9.5011
0.5	1	1	9.8046
1	1	1	10.1199
2	1	1	10.802
3	1	1	10.9382
4	1	1	10.9586
5	1	1	10.9452
10	1	1	10.765

Tab. 3.4: Variación de β y relación de costos

El valor de β al ir incrementando se puede notar que el costo aumenta, es esperable que suceda esto, ya que como este se encuentra asociado al caudal $u_0(t)$, este está dentro de la función de costo, y físicamente el caudal es utilizado dentro de las primeras horas del intervalo de $t \in [0, 5]$, sin embargo, al usar $\beta = 5$ el valor del costo decae, y eso sigue a medida que dicho valor es mas alto, esto sucede debido a que como el caudal es mucho mas caro que los demás implica que no se use, y eso se refleja en el costo. Al ejecutar el script en Matlab se pueden obtener las gráficas de los caudales y observar como $u_0(t)$ tiende a cero ver figura (3.8).

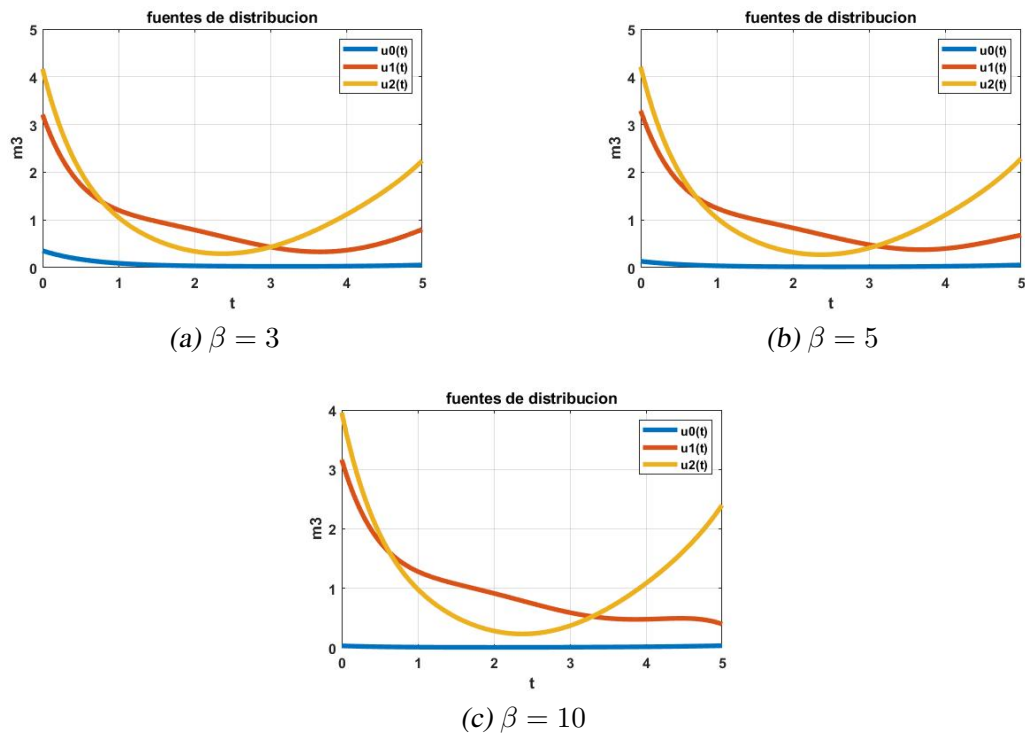


Fig. 3.8: Comportamiento de los caudales con variación de β

3.2. *Modelo ampliado de estanques*

A medida que se aumenta la cantidad de estanques la resolución del problema radica en aumentar la matriz de los estados del Hamiltoniano. Esto es bajo el supuesto de tener solo las variables de la altura de los estanques, sin embargo, esto no es así ya que esta también dependen de las válvulas. En los ejemplos se hizo el supuesto de que el comportamiento de ellas eran constantes pero esto cambia ya que estas controlan el agua que ingresa a cada estanque y esto implica que en el hamiltoniano se deben considerar como variables, es entonces que el algoritmo de resolución se vuelve aún mas complicado aumentando los coestados y el tiempo de solución por computador. En el capítulo 4 se propone una nueva metodología de control, con esto se evita usar los multiplicadores de Lagrange.

3.3. *Acueducto del Gran Valparaíso*

El esquema del gran Valparaíso consta de 132 estanques en total (esquema entregado por la empresa ESVAL), resolver el problema con esa cantidad de estanques se hace una tarea bastante difícil, por lo que lo se propone resolver el problema con 4 estanques ficticios, de esta forma es posible aplicar metodologías de resolución apropiadas de control. Los estanques ficticios tienen la particularidad de tener la capacidad mas grande por comuna. En la figura (3.9) se muestra el esquema reducido.

Se observa además que se combinan ciudades, esto se hace para obtener el caudal de agua de forma mas general. También notar que existe una bifurcación entre la unión de Concón con el sector de Valparaíso y Viña del Mar.

Existen 3 sistemas de producción los cuales son Las Vegas (el principal), Andrés bello correspondiente a la ciudad de Limache y el de Concón. Por otra parte con la reducción del sistema permite dar una visión más clara de como se tiene que distribuir el agua, a partir de este modelo reducido es que se procede a analizar aplicando metodologías de modelamiento de sistemas.

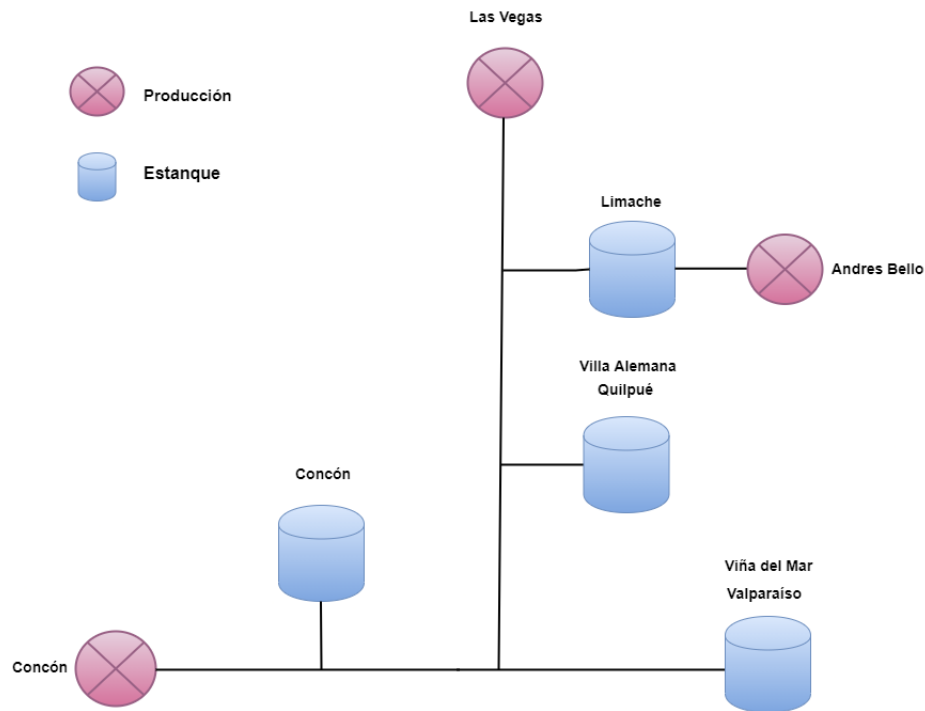


Fig. 3.9: Sistema reducido del acueducto

3.3.1. Modelamiento del Acueducto

El acueducto es un sistema hidráulico puesto que está compuesto de un tubo de gran extensión aproximadamente de 84 km (Las Vegas a Valparaíso), con diámetro aproximadamente constante de 1.2 m, también se consideran los estanques de las ciudades, las resistencias hidráulicas, las bombas, etc. Por consiguiente los componentes del sistema son de una gran extensión y al entrar en detalle por cada uno de ellos resulta un problema muy complejo de abordar.

Dada su naturaleza existen fenómenos propios los cuales se omitirán para el análisis, también se supondrá que el agua no sufre pérdidas por filtraciones. Es por esto que al simplificar varias componentes, solo se considerará el acueducto, las válvulas, los estanques y los sistemas productivos.

Dentro de las posibilidades que existen para analizar el sistema hidráulico es posible ver este problema desde el punto de vista eléctrico (en el capítulo de control óptimo se vieron ejemplos donde se uso esta analogía). Al describir el voltaje, la co-

riente y la resistencia, una analogía común es un estanque de agua. En esta analogía, la carga está representada por la cantidad de agua, el voltaje está representado por la presión del agua y la corriente está representada por el flujo de agua. Entonces, para esta analogía se tiene:

1. Agua = Carga
2. Presión = Voltaje
3. Flujo = Corriente
4. Estanque = Condensador

Los sistemas de producción se transforman en fuentes de corriente, el transporte de flujo del agua no es instantáneo, además el acueducto no es un tubo extensiblemente liso, contiene muchas irregularidades a través del Gran Valparaíso, la masa de agua dentro del acueducto sufre varios cambios de altura y en ciertos tramos almacena agua por lo que se puede considerar como un condensador. Los estanques son condensadores con una gran capacidad, las demandas son flujos de fuentes de corriente variable en el tiempo y se trabajará con conductancias en vez de las resistencias, de esta forma se pueden modelar las válvulas con lo cual se asegura que no habrán problemas de indeterminación numérica. La figura (3.10) ilustra el modelo eléctrico del acueducto con cada uno de los detalles nombrados anteriormente.

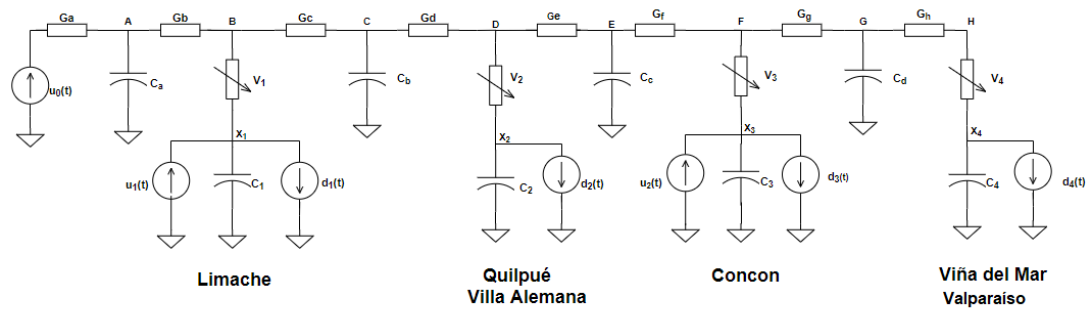


Fig. 3.10: Sistema eléctrico del acueducto

3.3.2. Ecuaciones

Con el modelo hecho en el punto anterior se procede a describir las ecuaciones que permiten ver el comportamiento de los sistemas productivos.

Se realiza el análisis de circuitos, el cual consiste en aplicar las leyes de kirchhoff en los respectivos nodos de las conexiones eléctricas. Los nodos B,D, F y H quedan en función de las demás variables. Luego se al reemplazar sobre las expresiones de los condensadores se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

3.3.3. Sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= \frac{1}{c_1} \left[\frac{AG_bV_1 + CG_cV_1}{G_b + V_1 + G_c} - X_1 \left(\frac{G_bV_1 + G_cV_1}{G_b + V_1 + G_c} \right) + u_1 - d_1 \right] \\
\dot{X}_2 &= \frac{1}{c_2} \left[\frac{CG_dV_2 + EG_eV_2}{G_d + V_2 + G_e} - X_2 \left(\frac{G_dV_2 + G_eV_2}{G_d + V_2 + G_e} \right) - d_2 \right] \\
\dot{X}_3 &= \frac{1}{c_3} \left[\frac{EG_fV_3 + GG_gV_3}{G_f + V_3 + G_g} - X_3 \left(\frac{G_fV_3 + G_gV_3}{G_f + V_3 + G_g} \right) + u_2 - d_3 \right] \\
\dot{X}_4 &= \frac{1}{c_4} \left[\frac{GG_hV_4}{G_h + V_4} - X_4 \left(\frac{G_hV_4}{G_h + V_4} \right) - d_4 \right] \\
\dot{A} &= \frac{1}{c_a} \left[u_0 - A \left(\frac{G_bV_1 + G_bG_c}{G_b + V_1 + G_c} \right) + \frac{X_1G_bV_1 + CG_bG_c}{G_b + V_1 + G_c} \right] \\
\dot{C} &= \frac{1}{c_b} \left[\frac{AG_bG_c + X_1V_1G_c}{G_b + V_1 + G_c} + \frac{X_2G_dV_2 + EG_eG_d}{G_d + V_2 + G_e} - C \left(\frac{G_cV_1 + G_bG_c}{G_b + V_1 + G_c} + \frac{V_2G_d + G_dG_e}{G_d + V_2 + G_e} \right) \right] \\
\dot{E} &= \frac{1}{c_c} \left[\frac{CG_dG_e + X_2V_2G_e}{G_d + V_2 + G_e} + \frac{X_3G_fV_3 + GG_fG_g}{G_f + V_3 + G_g} - E \left(\frac{G_eV_2 + G_dG_e}{G_d + V_2 + G_e} + \frac{V_3G_f + G_fG_g}{G_f + V_3 + G_g} \right) \right] \\
\dot{G} &= \frac{1}{c_d} \left[\frac{EG_fG_g + X_3V_3G_g}{G_f + V_3 + G_g} + \frac{X_4G_hV_4}{G_h + V_4} - G \left(\frac{G_gV_3 + G_fG_g}{G_f + V_3 + G_g} + \frac{V_4G_h}{G_h + V_4} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.25}$$

De las ecuaciones anteriores se tiene 8 variables las que corresponden a los condensadores del sistema eléctrico, 4 pertenecen a las ciudades y los otros 4 a los tramos que representan el acueducto.

Las ecuaciones especifican la carga de los condensadores, que en el sistema hidráulico es el agua almacenada dentro de los estanques. Cabe destacar que se tiene un sistema no lineal y variante en el tiempo. Entonces bajo este escenario es necesario establecer un punto de operación de las variables, por consiguiente se debe linealizar el sistema dinámico.

3.3.4. Modelo linealizado del sistema

La linealización [7] es el proceso de tomar el gradiente de una función no lineal con respecto a todas las variables y crear una representación lineal en ese punto, de esta forma se puede hacer análisis de estabilidad. Para aplicar linealización se define una función

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u) \tag{3.26}$$

El lado derecho de la ecuación se linealiza mediante una expansión de la serie Taylor, utilizando solo los dos primeros términos.

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u) \approx f(\bar{y}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{y}, \bar{u}} (y - \bar{y}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{y}, \bar{u}} (u - \bar{u}) \quad (3.27)$$

si los valores de \bar{u} y \bar{y} son escogidos en estado estacionario entonces $f(\bar{u}, \bar{y}) = 0$, esto es porque el término $\frac{dy}{du} = 0$ en estado estacionario. Aplicando este concepto al sistema de ecuación se tiene la siguiente linealización.

Para cada estanque se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X}_1 = & \frac{1}{c_1} \left[\frac{\Delta A G_b V_{1q} + \Delta C G_c V_{1q}}{G_b + V_{1q} + G_c} - \Delta X_1 \left(\frac{G_b V_{1q} + G_c V_{1q}}{G_b + V_{1q} + G_c} \right) + \Delta u_1 - \Delta d_1 \right. \\ & \left. + \Delta V_1 \left(\frac{(A_q G_b + C_q G_c - X_{1q} G_b - X_{1q} G_c)(G_b + G_c)}{(G_b + G_c + V_{1q})^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X}_2 = & \frac{1}{c_2} \left[\frac{\Delta C G_d V_{2q} + \Delta E G_e V_{2q}}{G_d + V_{2q} + G_e} - \Delta X_2 \left(\frac{G_d V_{2q} + G_e V_{2q}}{G_d + V_{2q} + G_e} \right) - \Delta d_2 \right. \\ & \left. + \Delta V_2 \left(\frac{(C_q G_d + E_q G_e - X_{2q} G_d - X_{2q} G_e)(G_d + G_e)}{(G_d + G_e + V_{2q})^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X}_3 = & \frac{1}{c_3} \left[\frac{\Delta E G_f V_{3q} + \Delta G G_g V_{3q}}{G_f + V_{3q} + G_g} - \Delta X_3 \left(\frac{G_f V_{3q} + G_g V_{3q}}{G_f + V_{3q} + G_g} \right) + \Delta u_2 - \Delta d_3 \right. \\ & \left. + \Delta V_3 \left(\frac{(E_q G_f + G_q G_g - X_{3q} G_f - X_{3q} G_g)(G_f + G_g)}{(G_f + G_g + V_{3q})^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\Delta \dot{X}_4 = \frac{1}{c_4} \left[\frac{\Delta G G_h V_{4q}}{G_h + V_{4q}} - \Delta X_4 \left(\frac{G_h V_{4q}}{G_h + V_{4q}} \right) - \Delta d_4 + \Delta V_4 \left(\frac{(G_q - X_{4q}) G_h^2}{(G_h + V_{4q})^2} \right) \right] \quad (3.31)$$

Para cada nodo del acueducto se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \dot{A} = & \frac{1}{c_a} \left[\Delta u_0 - \Delta A \left(\frac{G_b V_{1q} + G_b G_c}{G_b + V_{1q} + G_c} \right) + \frac{\Delta X_1 G_b V_{1q} + \Delta C G_b G_c}{G_b + V_{1q} + G_c} \right. \\ & \left. + \Delta V_1 \left(\frac{(A_q - C_q)(G_b G_c) + (G_b + G_c)(X_{1q} G_b - A_q G_b)}{(G_b + G_c + V_{1q})^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{C} = & \frac{1}{c_b} \left[\frac{\Delta A G_b G_c + \Delta X_1 V_{1q} G_c}{G_b + V_{1q} + G_c} + \frac{\Delta X_2 G_d V_{2q} + \Delta E G_e G_d}{G_d + V_{2q} + G_e} \right. \\
& - \Delta C \left(\frac{G_c V_{1q} + G_b G_c}{G_b + V_{1q} + G_c} + \frac{V_{2q} G_d + G_d G_e}{G_d + V_{2q} + G_e} \right) \\
& + \Delta V_1 \left(\frac{(C_q - A_q)(G_b G_c) + (X_{1q} G_c - C_q G_c)(G_b + G_c)}{(G_b + V_{1q} + G_c)^2} \right) \\
& \left. + \Delta V_2 \left(\frac{(C_q - E_q)(G_d G_e) + (X_{2q} G_d - C_q G_d)(G_d + G_e)}{(G_d + V_{2q} + G_e)^2} \right) \right] \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{E} = & \frac{1}{c_c} \left[\frac{\Delta C G_d G_e + \Delta X_2 V_{2q} G_e}{G_d + V_{2q} + G_e} + \frac{\Delta X_3 G_f V_{3q} + \Delta G G_f G_g}{G_f + V_{3q} + G_g} \right. \\
& - \Delta E \left(\frac{G_e V_{2q} + G_d G_e}{G_d + V_{2q} + G_e} + \frac{V_{3q} G_f + G_f G_g}{G_f + V_{3q} + G_g} \right) \\
& + \Delta V_2 \left(\frac{(E_q - C_q)(G_d G_e) + (X_{2q} G_e - E_q G_e)(G_d + G_e)}{(G_d + V_{2q} + G_e)^2} \right) \\
& \left. + \Delta V_3 \left(\frac{(E_q - G_q)(G_f G_g) + (X_{3q} G_f - E_q G_f)(G_f + G_g)}{(G_f + V_{3q} + G_g)^2} \right) \right] \quad (3.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{G} = & \frac{1}{c_d} \left[\frac{\Delta E G_f G_g + \Delta X_3 V_{3q} G_g}{G_f + V_{3q} + G_g} + \frac{\Delta X_4 G_h V_{4q}}{G_h + V_{4q}} \right. \\
& - \Delta G \left(\frac{G_g V_{3q} + G_f G_g}{G_f + V_{3q} + G_g} + \frac{V_{4q} G_h}{G_h + V_{4q}} \right) \\
& + \Delta V_3 \left(\frac{(G_q - E_q)(G_f G_g) + (X_{3q} G_g - G_q G_g)(G_f + G_g)}{(G_f + V_{3q} + G_g)^2} \right) \\
& \left. + \Delta V_4 \left(\frac{(X_{4q} - G_q) G_h^2}{(G_h + V_{4q})^2} \right) \right] \quad (3.35)
\end{aligned}$$

El siguiente paso es encontrar los puntos de equilibrio del sistema de ecuación (3.25), para esto se analiza en estado estacionario, esto quiere decir que las derivas son igual a cero, y en

consecuencia se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
& \frac{A_q G_b V_{1q} + C_q G_c V_{1q}}{G_b + V_{1q} + G_c} - X_{1q} \left(\frac{G_b V_{1q} + G_c V_{1q}}{G_b + V_{1q} + G_c} \right) + u_{1q} - d_{1q} = 0 \\
& \frac{C_q G_d V_{2q} + E_q G_e V_{2q}}{G_d + V_{2q} + G_e} - X_{2q} \left(\frac{G_d V_{2q} + G_e V_{2q}}{G_d + V_{2q} + G_e} \right) - d_{2q} = 0 \\
& \frac{E_q G_f V_{3q} + G_q G_g V_{3q}}{G_f + V_{3q} + G_g} - X_{3q} \left(\frac{G_f V_{3q} + G_g V_{3q}}{G_f + V_{3q} + G_g} \right) + u_{2q} - d_{3q} = 0 \\
& \frac{G_q G_h V_{4q}}{G_h + V_{4q}} - X_{4q} \left(\frac{G_h V_{4q}}{G_h + V_{4q}} \right) - d_{4q} = 0 \\
& u_{0q} - A_q \left(\frac{G_b V_{1q} + G_b G_c}{G_b + V_{1q} + G_c} \right) + \frac{X_{1q} G_b V_{1q} + C_q G_b G_c}{G_b + V_{1q} + G_c} = 0 \\
& \frac{A_q G_b G_c + X_{1q} V_{1q} G_c}{G_b + V_{1q} + G_c} + \frac{X_{2q} G_d V_{2q} + E_q G_e G_d}{G_d + V_{2q} + G_e} - C_q \left(\frac{G_c V_{1q} + G_b G_c}{G_b + V_{1q} + G_c} + \frac{V_{2q} G_d + G_d G_e}{G_d + V_{2q} + G_e} \right) = 0 \\
& \frac{C_q G_d G_e + X_{2q} V_{2q} G_e}{G_d + V_{2q} + G_e} + \frac{X_{3q} G_f V_{3q} + G_q G_f G_g}{G_f + V_{3q} + G_g} - E_q \left(\frac{G_e V_{2q} + G_d G_e}{G_d + V_{2q} + G_e} + \frac{V_{3q} G_f + G_f G_g}{G_f + V_{3q} + G_g} \right) = 0 \\
& \frac{E_q G_f G_g + X_{3q} V_{3q} G_g}{G_f + V_{3q} + G_g} + \frac{X_{4q} G_h V_{4q}}{G_h + V_{4q}} - G_q \left(\frac{G_g V_{3q} + G_f G_g}{G_f + V_{3q} + G_g} + \frac{V_{4q} G_h}{G_h + V_{4q}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Del sistema (3.36) se tienen 12 incógnitas, las cuales se dividen en 4 para los estanques, 4 para el acueducto y 4 para las posiciones de las válvulas. Sin embargo, las cuatro válvulas parten de un valor inicial, además el nivel inicial de los estanques debe ser dado por el usuario (la referencia), es entonces que sólo se tendrán 4 incógnitas las cuales corresponden a los niveles del acueducto. Las soluciones a encontrar deben ser estrictamente positivas, porque como el nivel de este sistema siempre debe haber agua por encima de un límite inferior y jamás debe ser cero.

Para el desarrollo de este sistema se considera los datos de las conductancias y los valores de los sistemas de producción, cabe destacar que la demanda no puede tener un punto de operación fija debido a su comportamiento variante en el tiempo, para efectos de simulación la demanda de agua se considera como una función sinusoidal.

3.3.5. Representación en variable de estado

A medida que los sistemas se vuelven más complejos, representarlos con ecuaciones diferenciales o funciones de transferencia se vuelve engorroso. Esto es aún más cierto si el sistema tiene múltiples entradas y salidas, más conocidos como sistemas MIMO. La representación de las variables de estado de un sistema reemplaza una ecuación diferencial de enésimo orden

con una sola ecuación diferencial de matriz de primer orden y el sistema se muestra mediante estas dos ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{3.37}$$

Luego según el sistema linealizado es posible ordenarla en variable de estado, de este modo la estructura es la siguiente

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) + E\Delta d(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t)\end{aligned}\tag{3.38}$$

La expresión (3.38) consta de cuatro matrices, la matriz A representa los estados de los 4 estanques y los 4 nodos del acueducto. La matriz B corresponde a las entradas del sistema, estos son los sistemas productivos y además las 4 válvulas de los estanques; La matriz D correspondiente a la ecuación de $y(t)$ es cero, en tanto la matriz C es una matriz identidad de orden 8 (en la simulación se considera un C de dimensión 4, que son los 4 estanques principales, esto es solo para visualizar solo la salida de ellos), Por último la matriz E corresponde a las demandas.

Los valores de conductancias, capacitancias y valores de cada válvula se mostrarán en la posterior simulación a realizar.

4. CAPÍTULO 4

En el capítulo anterior se da la definición de un algoritmo que permite la obtención de la solución a problemas de optimización dinámica, esto permite a través de la modelación de un sistema físico y con ayuda de derivadas parciales hallar el punto óptimo a esa solución. Sin embargo, el uso de control óptimo para este tipo de problema en estanques con válvulas variables hace que sea complejo de analizar, es por esto que se usara otro tipo de algoritmo el cual se presenta a continuación.

4.1. Regulador cuadrático lineal

El control LQR (Linear Quadratic Regulator) [10] es un método de control óptimo con el cual se asegura la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a través de ganancias de realimentación, esto implica en la determinación de una señal de entrada que tomará un sistema lineal desde un estado inicial dado $x(t_0)$ a un estado final $x(t_f)$ mientras minimiza un costo cuadrático funcional.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt + \frac{1}{2} x^T(T) H x(T) \quad (4.1)$$

La principal ventaja es que la señal de entrada óptima $u(t)$ se puede obtener de la retroalimentación de estado completo ver figura (4.1), es decir, $u(t) = -K(t)x(t)$, (usualmente con referencia igual a 0) para alguna matriz de $K(t)$. La matriz de retroalimentación $K(t)$ en cuestión se obtiene resolviendo la ecuación de Riccati asociada con el problema particular de LQR que tiene a mano.

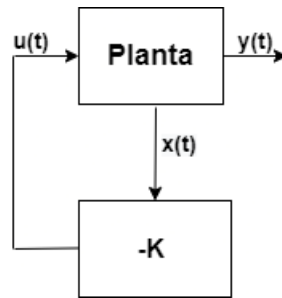


Fig. 4.1: Control realimentación de estados

LQR es un controlador óptimo. Óptimo porque se define para proporcionar el menor error posible a su entrada, es decir, una o más de las salidas del sistema controlado, combinado con minimizar la salida de control. En comparación con LQR, los típicos controladores crean un sistema estable, sin optimizar explícitamente nada. LQR también es fácil de usar para sistemas multivariados. El procedimiento de diseño es esencialmente el mismo que para los sistemas de entrada única y salida única.

Por último se calcula en base a un modelo lineal de la planta bajo control. Si el modelo lineal representa la planta exactamente, entonces el controlador es óptimo. Sin embargo, si hay una falta de coincidencia debido a la inexactitud del modelo (es decir, en los parámetros del modelo lineal), cambios en la planta (por ejemplo, cambios en la velocidad del vehículo o la máquina o el nivel de potencia en una planta de energía) o no linealidades (es decir, el sistema real no es realmente lineal), entonces el controlador resultante se degradará e incluso el sistema puede volverse inestable.

4.1.1. Obtención matriz $K(t)$

Como se vio anteriormente la ley de control óptima por realimentación de estado corresponde a

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (4.2)$$

y la matriz $K(t)$ se define

$$K(t) = R^{-1}B^T P(t) \quad (4.3)$$

Donde $P(t)$ en (4.3) se obtiene solucionando la ecuación de Riccati (4.4) considerando condiciones de borde en t_f .

$$\begin{aligned} -\dot{P}(t) &= A^T P(t) + P(t)A + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t) \\ P(T) &= x(t_f) \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.1.2. Controlabilidad

Un sistema es controlable si existe una función que permita transferir los estados iniciales del sistema a cualquier otro estado final en un tiempo finito.

La controlabilidad [8] puede entenderse como los estados son afectados por las salidas. En un sistema que no es controlable, uno o varios estados no son afectados por las entradas, y en consecuencia no se pueden aplicar acciones de control sobre las entradas de la planta.

Existen varios criterios para verificar la controlabilidad de un sistema en variable de estado. Uno de ellos es comprobar que el rango de la matriz de controlabilidad coincida con el orden del sistema (4.5).

$$\text{rango}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n \quad (4.5)$$

En casos puntuales, es posible emplear propiedades de estabilidad en vez de las de controlabilidad. Un sistema es estabilizable si los estados incontrolables son estables. Esta propiedad junto a un control adecuado garantiza como mínimo, que ningún estado en lazo cerrado sea inestable.

4.1.3. Observabilidad

Un sistema es observable si los estados pueden ser determinados a partir de las salidas, en cada instante de tiempo.

Si el sistema es observable, se puede hacer realimentación de estado con las salidas. Por el contrario si el sistema no es observable, la información de las salidas no es suficiente ya que no se puede obtener el valor de los estados deseados, y en consecuencia no es posible entender el comportamiento del sistema.

La observabilidad al igual que la controlabilidad se puede comprobar de distintos métodos. Uno de ellos es comprobar el rango de la matriz de observabilidad coincida con el orden del

sistema (4.6).

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (4.6)$$

De igual forma se pueden emplear propiedades pero esta vez de detectabilidad frente a la observabilidad. Un sistema es detectable si los estados inestables son observables. Esta propiedad junto a un control adecuado hace que los estados en lazo cerrado son estables.

4.1.4. Elección de las matrices Q y R

No existen reglas para seguir y emplearse de manera general en la elección de las matrices Q y R. Lo más usual es elegir ambas matrices diagonales y asignando valores a aquellas variables que se desean minimizar, los valores de Q y R deben ser siempre positivos o cero (4.7). El conocimiento del sistema resulta fundamental en la selección de estas matrices, sin embargo es conveniente elegir diferentes valores y probar su efectividad mediante simulación.

Una ventaja importante del control LQR, no importando el valor de las matrices Q y R, se preserva la estabilidad asintótica y su robustez.

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

4.1.5. Límites y saturación en las variables de control y estados

Las acciones de control del sistema no pueden crecer infinitamente, estas deben saturarse a cierto valor o bien ser admitidas hasta cierto valor. Hay casos donde las variables de estados están sometidas a algún tipo de restricción limitándolas.

El controlador LQR no considera restricciones de valores en ninguno de los estados ni las variables de control. Sin dificultar el problema, se pueden considerar todas estas restricciones y proponer las matrices Q y R de tal forma que, se alcancen valores admisibles por el sistema. La magnitud con que se elijan los valores influyen en las respuestas de las acciones de control

y los estados. Será necesario, hacer elecciones de diferentes valores para las matrices Q y R, simular la respuesta del sistema y escoger el control para el cual las variables de control y estados estén dentro de los límites admisibles.

Si aún así se quieren considerar las restricciones, se debe emplear otros métodos de resolución como por ejemplo multiplicadores de Lagrange y seguir lo que es control óptimo ya descrito en el capítulo 2.

4.1.6. LQR en estado estacionario

Se ha presentado el control LQR en forma general. Si se considera el intervalo de optimización infinito, el tiempo T es infinito, bajo este escenario la matriz resultante de la ecuación de Riccati, es constante y en consecuencia la matriz de control K también lo es. Frente a esto el controlador es invariante en el tiempo en régimen permanente (4.8).

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.8)$$

La solución de la ecuación de Riccati en estado estacionario es independiente de la matriz de condiciones de borde, debido a esto si se quiere calcular la matriz K de control no es necesario utilizar el término $x(t)^T H x(t)$ en la función de costo J, y se obtiene la nueva ecuación (4.9).

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.9)$$

Bajo este nuevo entorno, solo basta definir las matrices Q y R.

4.1.7. Condiciones para la existencia de solución en estado estacionario

Si el sistema es controlable y observable, existe una única matriz óptima K de manera que en lazo cerrado el control $u(t) = -Kx(t)$ haga al sistema asintóticamente estable. En otras palabras, es condición suficiente que el sistema sea controlable y observable para garantizar solución en estado estacionario de la ecuación de Riccati y la existencia de la matriz de control óptimo.

4.1.8. LQR seguimiento

El objetivo de un problema seguimiento [4] es mantener el estado del sistema $x(t)$ lo más cerca posible del estado deseado (o trayectoria de referencia) $r(t)$, mientras se utiliza un control de mínimo esfuerzo en el intervalo de tiempo, $t \in [t_0, t_f]$. Por lo tanto, el problema de control óptimo se plantea de la siguiente manera Encontrar el control óptimo $u(t)$ para el sistema de espacio de estado dado en (4.10) que sigue una trayectoria deseada $r(t)$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.10)$$

y minimiza la función de costo

$$J = \frac{1}{2}[x(t_f) - r(t)]^T H[x(t_f) - r(t)] + \int_{t_0}^{t_f} \{[x(t_f) - r(t)]^T Q[x(t_f) - r(t)] + u(t)^T Ru(t)\} dt \quad (4.11)$$

donde el tiempo final t_f esta fijado, el estado final, $x(t_f)$, es libre en cuanto al estado y el control no están limitados. La matriz de ponderación del estado terminal, H, y la matriz de ponderación del estado Q son matrices semi definidas reales, simétricas y positivas y la matriz de ponderación del control, F, es una matriz real, simétrica y positiva definida.

El Hamiltoniano para el problema de seguimiento esta definido como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\|x(t) - r(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + p^T(t)Ax(t) + p^T Bu(t) \quad (4.12)$$

las ecuaciones de coestados son

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Qx(t) - A^T p(t) + Qr(t) \quad (4.13)$$

y la condición de optimalidad es

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = Ru(t) + B^T p(t) \quad (4.14)$$

La ley de control óptimo como función de la variable de coestado es, por lo tanto,

$$u(t) = -R^{-1}B^T p(t) \quad (4.15)$$

Sustituyendo la ley de control óptima (4.15) dentro de las ecuaciones de estado (4.10) y combinando con las ecuaciones de coestado (4.13), se obtiene una matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Qr(t) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Estas ecuaciones diferenciales son lineales y variante en el tiempo, pero no homogéneas. la solución de (4.16)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t_f) \\ \dot{p}(t_f) \end{bmatrix} = \varphi(t_f, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \varphi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} 0 \\ Qr(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (4.17)$$

donde φ es la matriz de transición. Si φ es particionado, y la integral es reemplazado por el vector $2n \times 1$

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

estas ecuaciones pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \varphi_{11}(t_f, t) + \varphi_{12}(t_f, t)p(t) + f_1(t) \\ p(t_f) &= \varphi_{21}(t_f, t) + \varphi_{22}(t_f, t)p(t) + f_2(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Las condiciones de borde son

$$p(t_f) = Hx(t_f) - Hr(t_f) \quad (4.20)$$

Luego reemplazando (4.20) en (4.19) y despejando $p(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} p(t) &= [\varphi_{22}(t_f, t) - H\varphi_{12}(t_f, t)]^{-1} [H\varphi_{11}(t_f, t) - \varphi_{21}(t_f, t)]x(t) \\ &+ [\varphi_{22}(t_f, t) - H\varphi_{12}(t_f, t)]^{-1} [Hf_1(t) - Hr(t_f) - f_2(t)] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Las definiciones de $P(t)$ y $s(t)$ aparecen por inspección de (4.21), de esta forma la ley de control óptima es

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}B^T P(t)x(t) - R^{-1}B^T s(t) \\ &\triangleq K(t)x(t) + v(t) \end{aligned} \tag{4.22}$$

donde $K(t)$ es la ganancia de realimentación y $v(t)$ es la señal de comando. Esta señal depende de los parámetros del sistema y la referencia $r(t)$. Un diagrama de la planta y el controlador son mostrados en la fig(4.2)

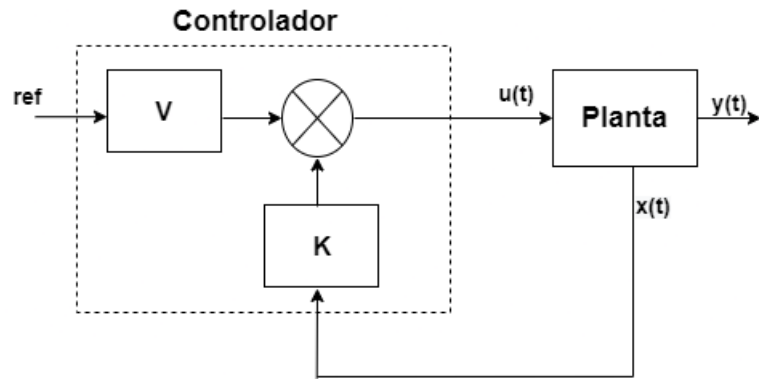


Fig. 4.2: Lazo de control LQR de seguimiento

Para determinar la matriz de transición se empieza con la ecuación

$$p(t) = P(t)x(t) + s(t) \quad (4.23)$$

Diferenciando ambos lados por t se obtiene

$$\dot{p}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) + \dot{s}(t) \quad (4.24)$$

sustituyendo (4.24) en (4.16) se obtiene

$$\begin{aligned} & \left[\dot{P}(t) + Q + P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) \right] x(t) \\ & + \left[\dot{s}(t) + A^T s(t) - P(t)BR^{-1}B^T s(t) - Qr(t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

entonces esto debe ser satisfecho por todo $x(t)$ y $r(t)$, se concluye que

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -Q - P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) \\ \dot{s}(t) &= -[A^T - P(t)BR^{-1}B^T] s(t) + Qr(t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Para obtener las condiciones de borde se tiene de (4.20) y (4.22)

$$\begin{aligned} p(t_f) &= Hx(t_f) - Hr(t_f) \\ &= P(t_f)x(t_f) + s(t_f) \end{aligned} \quad (4.27)$$

ya que estas ecuaciones deben ser satisfechas por todo $x(t_f)$ y $r(t_f)$, las condiciones de

frontera son

$$\begin{aligned}P(t_f) &= H \\s(t_f) &= -Hr(t_f)\end{aligned}\tag{4.28}$$

La expresión de control óptima (4.22) esta expresada en términos de $K(t)$ y $v(t)$, entonces para encontrar los valores, primero se debe resolver (4.26), de esta forma se obtiene los correspondientes $P(t)$ y $s(t)$ integrando de t_0 a t_f usando las condiciones de borde (4.28).

5. CAPÍTULO 5

5.1. Resultados y simulaciones

Antes de empezar la simulación se deben seleccionar los valores adecuados para que el sistema funcione. En primer lugar se desarrolla el sistema de ecuaciones (3.36) en estado estacionario. Se utilizan los siguientes valores de las válvulas $V_{1q} = 10$, $V_{2q} = 40$, $V_{3q} = 50$ y $V_{4q} = 30$, se obtienen los siguientes puntos de equilibrio Luego usando los valores de con-

Punto de operación	Valor m
X_{1q}	29.86
X_{2q}	23.40
X_{3q}	20.96
X_{4q}	19.61
A_q	27.81
C_q	26.03
E_q	21.81
G_q	20.44

Tab. 5.1: Puntos de operación

ductancias, capacitancias y asignando valores a cada válvula se obtienen las correspondientes matrices

La matriz A correspondiente a los estados es:

$$A = \begin{bmatrix} -0,07 & 0 & 0 & 0 & 0,04 & 0,03 & 0 & 0 \\ 0 & -0,08 & 0 & 0 & 0 & 0,04 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & -0,11 & 0 & 0 & 0 & 0,06 & 0,04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,04 & 0 & 0 & 0,04 \\ 0,44 & 0 & 0 & 0 & -1,1 & 0,66 & 0 & 0 \\ 0,33 & 0,66 & 0 & 0 & 0,66 & -1,83 & 0,16 & 0 \\ 0 & 0,66 & 1,38 & 0 & 0 & 0,16 & -2,63 & 0,41 \\ 0 & 0 & 0,83 & 1,2 & 0 & 0 & 0,41 & -2,45 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

La matriz B correspondiente a las válvulas y caudales es:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0,01 & 0 & -0,017 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,005 & 0 & 0 & 0,0003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0005 \\ 0,10 & 0 & 0 & 0,084 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,073 & -0,002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,002 & -0,004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,002 & -0,013 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

La matriz D correspondiente a las demandas es:

$$D = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La matriz Q correspondiente a los estanques es:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

La matriz R correspondiente a las entradas del sistema es:

$$R = \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Con las matrices A y B calculadas y con la elección adecuada de los valores para las matrices Q y R es posible obtener la ecuación de Riccati en estado estacionario, de esta forma se obtiene la matriz K.

$$K = \begin{bmatrix} 0,018 & 0,027 & 0,034 & 0,041 & 0,002 & 0,001 & 0,001 & 0,01 \\ 0,036 & 0,053 & 0,067 & 0,082 & 0,003 & 0,003 & 0,003 & 0,003 \\ 0,034 & 0,052 & 0,068 & 0,085 & 0,003 & 0,003 & 0,003 & 0,003 \\ -0,528 & -0,456 & -0,792 & -0,954 & 0,011 & -0,001 & -0,035 & -0,038 \\ 0,214 & 1,978 & 0,326 & -0,213 & -0,011 & -0,030 & 0,036 & 0,007 \\ -0,016 & -0,061 & -0,012 & -0,068 & -0,002 & -0,003 & -0,002 & -0,002 \\ -0,006 & -0,011 & 0,0006 & 0,040 & -0,0007 & -0,0007 & -0,0002 & 0,0005 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Notar que al ser un sistema MIMO la matriz K tiene dimensión 7 x 8, las filas corresponden a las entradas del sistema y las columnas corresponden al acueducto y los estanques, entonces

dada la composición que se puede visualizar es posible realizar análisis de sensibilidad y determinar interacciones entre cada variable.

Ahora para implementar un sistema de control, primero hay que analizar si es controlable y observable total o parcialmente. Se analiza primero la matriz de controlabilidad de la ecuación mencionada en (4.5).

$$C_o = [B \ AB \ \dots \ A^7 B] = 8 \quad (5.7)$$

Como el sistema lineal tiene 8 estados y 7 entradas, entonces la matriz de controlabilidad es de dimensión 8 x 56.

Entonces, utilizando Matlab se obtiene

$$\text{rank}[C_o] = 8 \quad (5.8)$$

Como el rango de la matriz de controlabilidad resulta igual al número de estados, se infiere que el sistema es completamente controlable. Por otra parte, la matriz de observabilidad es de acuerdo a la ecuación (4.6)

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^7 \end{bmatrix} = 8 \quad (5.9)$$

La matriz de observabilidad es de dimensión 32 x 8 debido a los 8 estados y 4 salidas. Entonces, utilizando Matlab se obtiene

$$\text{rank}[O_b] = 8 \quad (5.10)$$

El rango de la matriz de observabilidad resulta ser igual al número de estados del sistema, por lo tanto es un sistema completamente observable.

Una vez verificada la controlabilidad y observabilidad se presenta el esquema a simular realizado en Simulink

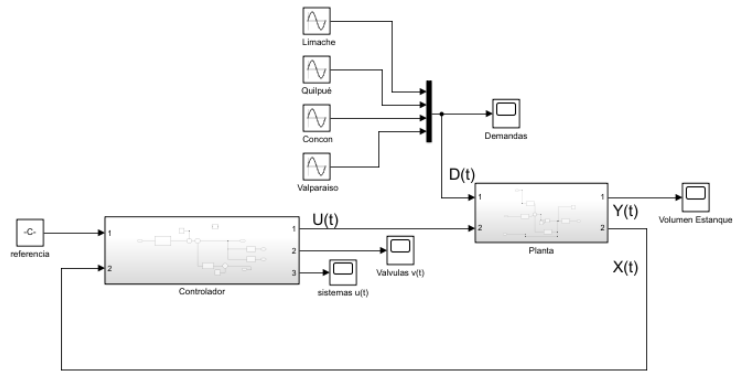


Fig. 5.1: Lazo de control para planta linealizada

Observando la figura (5.1) se presenta el esquema de control sobre el acueducto, siendo el acueducto la planta propiamente tal, esta tiene como entradas las demandas nombradas como $D(t)$ la cual tiene multiplexada las señales sinusoidales de 4 ciudades que son Limache, Quilpué, Concón y Valparaíso. La otra entrada que es $U(t)$ que es la matriz donde están las actuaciones (válvulas y estanques). Se aprecia también las dos salidas las cuales son $Y(t)$ el volumen de los estanques y la realimentación $X(t)$ hacia el controlador.

Finalmente se tiene la simulación la cual da los siguientes gráficos

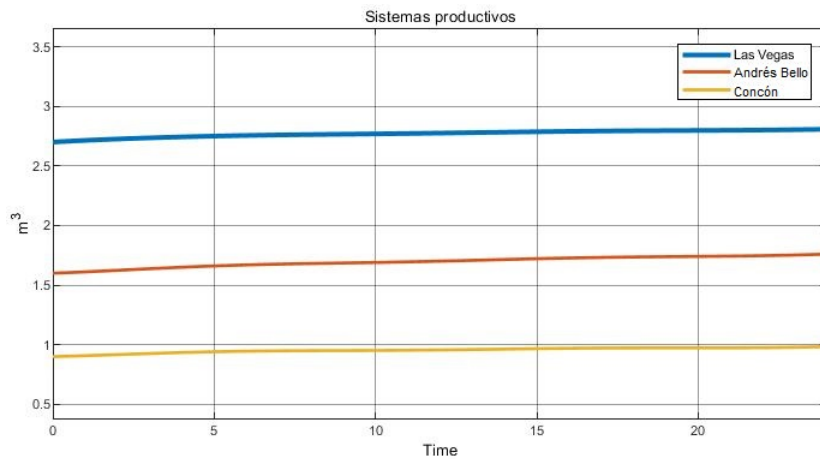


Fig. 5.2: Sistemas productivos en un día de operación

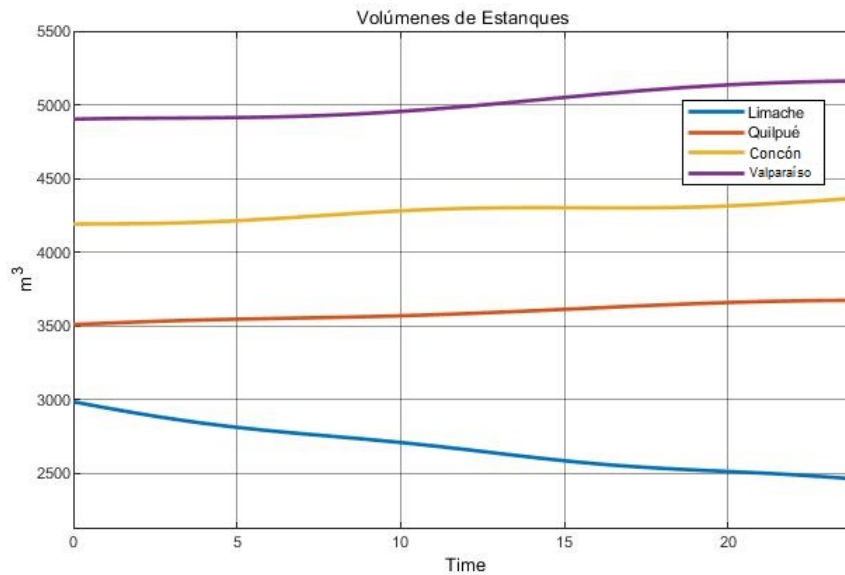


Fig. 5.3: Volúmenes de estanques

De la figura (5.2) se muestra como es el comportamiento de los sistemas productivos a lo largo de un día normal de operación. El sistema productivo Las Vegas funciona en su máxima capacidad esto es en promedio de $2,7[m^3/h]$, esto es esperable ya que este debe alimentar a todo los estanques a lo largo del acueducto y más aún si la demanda aumenta no puede bajar su intensidad durante el día. Por otra parte se puede notar el contraste que existe con los demás caudales. El de Andrés Bello es el mas caro en producir, sin embargo, se requiere su activación en su totalidad, esto quiere decir que el caudal las vegas no es suficiente para suplir dicha demanda y necesita de este sistema productivo adicional para abastecer esos sectores. También ocurre lo mismo al usar el sistema de Concón tratando de alcanzar la máxima capacidad de de producción de agua potable para el acueducto y satisfacer la demanda de agua.

Notar que se agrega adicionalmente en la figura (5.1) la posibilidad de ver los estados de las válvulas del sistema, sin embargo, no es un dato importante a considerar por parte del cliente, es entonces que solo se visualizan el comportamiento de los sistemas en el día de trabajo y volumen de agua de los estanques .

En la figura (5.3) se muestra los volúmenes de los estanques. Se aprecia que el volumen de agua de Valparaíso, Concón y Quilpué tratan de ajustarse y seguir la referencia que fue exigida por el cliente. Notar que en Limache el volumen de agua del estanque disminuye ya que no hay suficiente caudal de agua para seguir el seguimiento.

El algoritmo trata de ajustar al punto que se desea en primera instancia, sin embargo no llega a la referencia esto se debe a ya que el error en estado estacionario no es cero, en consecuencia siempre existirá este tipo de diferencias, para corregir dicha diferencia se le debe agregar una acción integradora [9], es decir, ampliar las matrices de estado y obtener dos ganancias K (una parte integrativa y la otra obtenida por Riccati)

A pesar de esto último la regulación de agua de los estanques se puede considerar lo suficientemente plana como requisito del cliente.

El seguimiento depende mucho de los valores de la planta, las matrices Q y R (notar que se le dieron valores grandes a la matriz R penalizando la amplitud de la señal de control ya que es limitada a valores reales de funcionamiento) y también la demanda del modelo, ya que al ser un modelo linealizado solo se permite tener un correcto funcionamiento en un rango de valores, sino habría que calcular las matrices nuevamente y se tendría nuevos puntos operacionales.

6. CAPÍTULO 6

6.1. Conclusiones

En este trabajo de título se plantea como objetivo principal desarrollar un modelo de optimización de la empresa ESVAL, dicho modelo contempla las ciudades del Gran Valparaíso incluyendo la ciudad de Limache. La utilidad de la optimización es lograr planes de acción a ejecutar por los operarios de la sala de control de ESVAL. Al no disponer de una optimización adecuada se toman decisiones de forma reactiva y esto tiene consecuencias en el caudal de agua que deben ir a los estanques. Dicho de otro modo, el viaje de los caudales de agua no son instantáneos desde los puntos de producción, por lo que deben considerarse los tiempos de activación e inyección de agua al acueducto, esto es no dejar que un estanque se vacíe o no sobrepasar los límites máximos de cada uno de ellos. Por otra parte, el exceso de agua ocasiona costos operacionales considerables para la empresa y esta agua que no logra llegar a los estanques debe ir directo al mar. ESVAL al ser un monopolio natural tiene la obligación de saber manejar este recurso escaso hídrico.

Respecto al algoritmo de optimización se pensó en utilizar control óptimo para resolver problemas dinámicos, a través de los ejemplos se ve como funciona y los resultados que se obtienen en diferentes situaciones, sin embargo al plantearse a un problema mas complejo este se vuelve mas complicado de realizar y el costo computacional es mas elevado, en consecuencia se elige otra estrategia de resolución que es LQR con seguimiento. Debido al usar este nuevo método se comienza a hacer el modelo del acueducto que es la planta a controlar, con la idea de presentar y dar a entender como los sistemas productivos interactúan en el sistema que se llama acueducto, y a partir de aquí, obtener la respuesta del sistema y contrastar con lo que llevan haciendo los operarios de ESVAL hasta el día de hoy en la sala de control operacional.

Para el modelo del acueducto se tiene una versión simplificada del sistema real ya que

al tener de un acueducto con 132 estanques componiéndola resulta una tarea imposible de abordar en este trabajo, se realiza varias reuniones con el cliente para llevar este sistema a lo mas simple posible, y obtener un modelo concreto para trabajar, en consecuencia, se realiza dicha simplificación que se ve reflejada en este trabajo.

El algoritmo utilizado es una versión de control óptimo, el cual es el control LQR con seguimiento de referencia. Para esta implementación se linealizaron las ecuaciones no lineales del sistema y se obtuvieron también los puntos operacionales. Luego se implementa mediante código MATLAB y simulación en Simulink el lazo de control de la planta y el controlador. Las dificultades se presentan en la elección de los valores de las matrices R y Q puesto que se realizan varias pruebas para sintonizar de formar óptima los valores de estas matrices.

En este proyecto el cliente tiene dos requisitos para la simulación, ellos son tener una regulación de volumen de agua lo mas plana posible y que al iniciar un día de operación (se considera que se parte de las 06:00 hrs y termine al otro día a las 06:00 hrs) siga la referencia de esta forma asegurar que los estanques no tengan un volumen bajo al inicio del día.

Los resultados obtenidos en la simulación son los que se esperan en un día normal de operación, puesto que el sistema productivo las Vegas de menor costo es la principal fuente y esta debe estar permanentemente encendida, dicho caudal alimenta estanques de los cuales los otros dos sistemas no pueden hacer. Es esperable por parte del cliente que este sistema no se apague entonces el algoritmo de control indica que así debe ser, siempre a su máxima capacidad trabajando. Por otra parte, el sistema productivo de Andrés Bello el cual alimenta el estanque de Limache, se puede ver que no es lo suficiente para realizar un seguimiento a pesar de estar en su máxima capacidad, pero no es lo suficientemente crítico para que el estanque se vacíe y alcance un umbral de baja señal y por consiguiente ponga en problemas a los clientes finales, sin embargo se debe buscar una estrategia para llenar los estanques de la ciudad. En cuanto al sistema de Concón actúa dependiendo de las demandas en Valparaíso y en Concón propiamente tal, es entonces que funciona de forma adecuada a las demandas implicadas del modelo.

Ahora hablando de las válvulas siendo una componente variable en todo el día de operación e influyente para los caudales de entrada a cada estanque, esta como se menciona anteriormente el comportamiento de estas no son importante para el cliente al momento de visualizar las gráficas, sin embargo es posible ver que estas no llegan a cerrarse y siempre están abiertas

en la simulación.

El modelo esta aislado del sistema de predicción el cual se debe alimentar a este sistema, en consecuencia, solo están simuladas las demandas de prueba que tienen forma de ondas sinusoidales. También cabe destacar que el modelo tiene la capacidad de ser ampliado y esto el cliente lo tiene presente, ya que se espera la implementación de más estanques al acueducto y también los posibles sistemas productivos que puedan tener a futuro.

6.1.1. Trabajo Futuro

Al finalizar este proyecto de título quedan varias aristas del proyecto a concretar entre ellas se destacan:

- Programar en python el mismo modelo propuesto en Matlab/ simulink, esto es debido a que se debe implementar bajo código open source para la conexión con Google Cloud, al modelo de predicción de demanda de agua y a los servidores propiamente tal.
- Implementación de una interfaz usuario para la visualización de las gráficas en Excel (software mas usado en ESVL) o mediante la realización de un propio dashboard en python.
- Continuar con la investigación sobre control óptimo y lograr una implementación acorde a sistemas reales con restricciones.
- Ampliar el modelo a más estanques, esto implicaría ampliar el diagrama circuital descrito en este trabajo.

7. ANEXOS

Códigos en Matlab

A continuación se presentan los códigos utilizados para los ejemplos descritos para control óptimo y para el control LQR

Ejemplo 1

```
clc, clear all
syms s t punto_1 p1(t) x1(t) x2(t)
%parametros
alpha=4;
r=1;
%matriz
%x1 %p1
A=[ 0 1;
    alpha 0
    ];
matriz=inv(s*eye(2)-A);
%demanda 1
d1=sin(2*pi*t/5)+1;
B=[-laplace(d1,t,s);punto_1];
N=vpa(matriz*B,6);
%filas de interes
fila1=vpa(subs(ilaplace(N(1,:),s,t),5),6);
% se encuentra los puntos
[sol1]=vpasolve(fila1==0,punto_1,[1e-5]);
punto1=vpa(sol1,6);
```

```

B1=[-laplace(d1,t,s);punto1];
N1=vpa(matriz*B1,6);

% funciones x1(t) p1(t)
x_1=(ilaplace(N1(1,:),s,t)+r);
p_1=(ilaplace(N1(2,:),s,t));
%tiempo
t=0:0.05:5;
%graficos
figure(1)
plot(t,subs(x_1,t));
grid on,xlabel('t'),ylabel('altura'),title('Altura de agua')
legend('X1');
figure(2)
plot(t,subs(p_1,t));
grid on,xlabel('t'),ylabel('m3'),title('fuente de distribucion'),
legend('u1(t)');
%costo
costo=vpa(trapz(t,(subs(p_1,t).^2+alpha*(subs(x_1,t)-r).^2))*0.5);
disp(['El costo es: ',num2str(round(double(costo),4))]);

```

Ejemplo 2

```

function funcion_estanque(v1,v2,alpha,beta)
syms s t k m p1(t) p2(t) x1(t) x2(t)

%matriz 4x4
A=[
-v1*v2/(v1 + v2) v1*v2/(v1 + v2) 1/beta^2*v1^2/(v1 + v2)^2+1 1/beta^2*v1
*v2/(v1 + v2)^2;
v1*v2/(v1 + v2) -v1*v2/(v1 + v2) 1/beta^2*v1*v2/(v1 + v2)^2 1/beta^2*v2
^2/(v1 + v2)^2+1;

```

```

alpha 0 v1*v2/(v1 + v2) -v1*v2/(v1 + v2)
0 alpha -v1*v2/(v1 + v2) v1*v2/(v1 + v2)];
cb=1; %condicion de borde x(0)=x(5)=1
matriz=inv(s*eye(4)-A);
d1=sin(2*pi*t/5)+1;
d2=cos(2*pi*t/5)+1;
B=[-laplace(d1,t,s);-laplace(d2,t,s);k;m];
N=matriz*B;
fila1=ilaplace(N(1,:),s,t);
fila2=ilaplace(N(2,:),s,t);
[sol1,sol2]=solve( vpa(subs(fila1,5))==0, vpa(subs(fila2,5))==0,k,m);
punto1=vpa(sol1); % punto p1
punto2=vpa(sol2); % punto p2
B1=[-laplace(d1,t,s);-laplace(d2,t,s);punto1;punto2];
N1=matriz*B1;
x_1=(ilaplace(N1(1,:),s,t)+cb);
x_2=(ilaplace(N1(2,:),s,t)+cb);
p_1=(ilaplace(N1(3,:),s,t));
p_2=(ilaplace(N1(4,:),s,t));
%graficos
t=0:0.05:5;
figure(1)
plot(t,subs(x_1,t),t,subs(x_2,t));
grid on,xlabel('t'),ylabel('altura'),title('Altura de agua de estanques')
legend('X1','X2');
figure(2)
plot(t,(1/beta^2)*(subs(p_1,t)*v1/(v1+v2)+subs(p_2,t)*v2/(v1+v2)),t,subs(
    p_1,t),t,subs(p_2,t));
grid on,xlabel('t'),ylabel('m3'),title('fuentes de distribucion'),legend(
    'u0(t)','u1(t)','u2(t)');

```

```

%integracion numerica
costo=vpa(trapz(t,((v1/(v1+v2)*subs(p_1,t)+v2/(v1+v2)*subs(p_2,t)).^2*1/
    beta^2 +subs(p_1,t).^2+subs(p_2,t).^2 +alpha*(subs(x_1,t)-1).^2+alpha
    *(subs(x_2,t)-1).^2))*0.5);

%costo real
costo_r=vpa(trapz(t,(abs((v1/(v1+v2)*subs(p_1,t)+v2/(v1+v2)*subs(p_2,t)))
    *1/beta +abs(subs(p_1,t))+abs(subs(p_2,t)))));
disp(['El costo es: ',num2str(round(double(costo),4))]);
disp(['El costo real es: ',num2str(round(double(costo_r),4))]);
end

```

Ejemplo 3

```

function acueducto(v1,v2,alpha1,alpha2,beta)
syms s t punto_1 punto_2 punto_3 punto_4 p1(t) p2(t) x1(t) x2(t)
%conductancias
gb=1;
gc=1;
gd=1;
%matriz
%x1 %x2 %x3 %x4 %p1 %p2 %p3 %p4
% la matriz A es de 8x8
A=[
-(v1*gb+v1*gc)/(v1+gb+gc) 0 gb*v1/(v1+gb+gc) gc*v1/(v1+gb+gc) 1 0 0 0;
0 -v2*gd/(v2+gd) 0 -v2*gd/(v2+gd) 0 1 0 0;
v1*gb/(v1+gb+gc) 0 -(gb*v1+gc*gb)/(v1+gb+gc) gc*gb/(v1+gb+gc) 0 0 1/
    beta^2 0;
v1*gc/(v1+gb+gc) v2*gd/(v2+gd) gb*gc/(v1+gb+gc) -((v1*gc+gb*gc)/(v1+gb+
    gc) + gd*v2/(v2+gd)) 0 0 0 0;
alpha1 0 0 0 (v1*gb+v1*gc)/(v1+gb+gc) 0 -(v1*gb)/(v1+gb+gc) -(v1*gc)/(

```

```

v1+gb+gc);
0 alpha1 0 0 0 v2*gd/(v2+gd) 0 -v2*gd/(v2+gd);
0 0 alpha2 0 -gb*v1/(v1+gb+gc) 0 (gb*v1+gc*gb)/(v1+gb+gc) -gb*gc/(v1+gb
+gc);
0 0 0 alpha2 -gc*v1/(v1+gb+gc) -gd*v2/(v2+gd) -gc*gb/(v1+gb+gc) -((v1*
gc+gb*gc)/(v1+gb+gc)+gd*v2/(v2+gd))
];
cb1=1; %condicion de borde x1(0)=x2(5)=1
cb2=2; %condicion de borde x3(0)=x4(5)=2
matriz=inv(s*eye(8)-A);
%demandas
d1=sin(2*pi*t/5)+1;
d2=cos(2*pi*t/5)+1;

%vector B
B=[-laplace(d1,t,s);-laplace(d2,t,s);0;0;punto_1;punto_2;punto_3;punto_4
];

N=vpa(matriz*B,6);

%filas de interes de la matriz N
fila1=vpa(subs(ilaplace(N(1,:),s,t),5),6);
fila2=vpa(subs(ilaplace(N(2,:),s,t),5),6);
fila3=vpa(subs(ilaplace(N(3,:),s,t),5),6);
fila4=vpa(subs(ilaplace(N(4,:),s,t),5),6);

[sol1,sol2,sol3,sol4]=vpasolve(fila1==0,fila2==0,fila3==0,fila4==0,
punto_1,punto_2,punto_3,punto_4,[1e-5,1e-5,1e-5,1e-5]);
punto1=vpa(sol1,6); % punto p1
punto2=vpa(sol2,6); % punto p2

```

```

punto3=vpa(sol3,6); % punto p3
punto4=vpa(sol4,6); % punto p4

B1=[-laplace(d1,t,s);-laplace(d2,t,s);0;0;punto1;punto2;punto3;punto4];
N1=vpa(matriz*B1,6);

x_1=ilaplace(N1(1,:),s,t)+cb1;
x_2=ilaplace(N1(2,:),s,t)+cb1;
x_3=ilaplace(N1(3,:),s,t)+cb2;
x_4=ilaplace(N1(4,:),s,t)+cb2;
p_1=ilaplace(N1(5,:),s,t);
p_2=ilaplace(N1(6,:),s,t);
p_3=ilaplace(N1(7,:),s,t);
p_4=ilaplace(N1(8,:),s,t);

%tiempo
t=0:0.05:5;

%graficos
figure(1)
plot(t,subs(x_1,t),t,subs(x_2,t));
grid on,xlabel('t'),ylabel('altura'),title('Altura de agua'),legend('
    estanque 1','estanque 2');

figure(2)
plot(t,(1/beta^2)*subs(p_3,t),t,subs(p_1,t),t,subs(p_2,t));
grid on,xlabel('t'),ylabel('m3'),title('fuentes de distribucion'),legend(
    'u0(t)','u1(t)','u2(t)');

%costo real
costo_r=vpa(trapz(t,(abs(subs(p_3,t))*1/beta +abs(subs(p_1,t))+abs(subs(

```

```
    p_2,t))));  
disp(['El costo real es: ',num2str(round(double(costo_r),4))])  
end
```

Código LQR

```
clc, clear all
syms s t X1 X2 X3 X4
format short

clear all,clc
syms t Aq Cq Eq Gq X1 X2 X3 X4
format short
%valvulas punto operaci0n
V1q=10;
V2q=40;
V3q=50;
V4q=30;
% capacitancia estanques
c1=100;
c2=150;
c3=200;
c4=250;
% capacitancia acueducto
ca=10;
cb=10;
cc=10;
cd=10;
%conductancias
Gb=20;
Gc=15;
Gd=10;
Ge=10;
Gf=25;
```

```

Gg=15;
Gh=20;

% puntos de operacion
u0q=2.7;
u1q=1.6;
u2q=0.9;
d1q=6;
d2q=7;
d3q=8.5;
d4q=10;

%punto de operacion
ecu1=(Aq*Gb*V1q+Cq*Gc*V1q)/(Gc+V1q+Gc)-X1*(Gb*V1q+Gc*V1q)/(Gb+V1q+Gc)+u1q
-d1q;
ecu2=(Cq*Gd*V2q+Eq*Ge*V2q)/(Gd+V2q+Ge)-X2*(Gd*V2q+Ge*V2q)/(Gd+V2q+Ge)-d2q
;
ecu3=(Eq*Gf*V3q+Gq*Gg*V3q)/(Gf+V3q+Gg)-X3*(Gf*V3q+Gg*V3q)/(Gf+V3q+Gg)+u2q
-d3q;
ecu4=Gq*Gh*V4q/(Gh+V4q)-X4*(Gh*V4q)/(Gh+V4q)-d4q;
ecu5=u0q-Aq*(Gb*V1q+Gb*Gc)/(Gb+V1q+Gc)+ (X1*Gb*V1q+Cq*Gb*Gc)/(Gb+V1q+Gc);
ecu6=(Aq*Gb*Gc+X1*V1q*Gc)/(Gb+V1q+Gc)+(X2*Gd*V2q+Eq*Ge*Gd)/(Gd+V2q+Ge)-Cq
*((Gc*V1q+Gb*Gc)/(Gb+V1q+Gc)+(V2q*Gd+Gd*Ge)/(Gd+V2q+Ge));
ecu7=(Cq*Gd*Ge+X2*V2q*Ge)/(Gd+V2q+Ge)+(X3*Gf*V3q+Gq*Gf*Gg)/(Gf+V3q+Gg)-Eq
*((Ge*V2q+Gd*Ge)/(Gd+V2q+Ge)+(V3q*Gf+Gf*Gg)/(Gf+V3q+Gg));
ecu8=(Eq*Gf*Gg+X3*V3q*Gg)/(Gf+V3q+Gg)+ X4*Gh*V4q/(Gh+V4q)-Gq*((Gg*V3q+Gf*
Gg)/(Gf+V3q+Gg)+(V4q*Gh)/(Gh+V4q));
[s1,s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8]=solve(ecu1==0,ecu2==0,ecu3==0,ecu4==0,ecu5==0,
ecu6==0,ecu7==0,ecu8==0,X1,X2,X3,X4,Aq,Cq,Eq,Gq);

X1q=vpa(s1,6);

```

```

X2q=vpa(s2,6);
X3q=vpa(s3,6);
X4q=vpa(s4,6);
Aq=vpa(s5,6);
Cq=vpa(s6,6);
Eq=vpa(s7,6);
Gq=vpa(s8,6);

% variable de estado
% delta_x1 delta_x2 delta_x3 delta_x4 delta_A delta_C delta_E delta_G
A=[-1/c1*(Gb*V1q+Gc*V1q)/(Gb+V1q+Gc) 0 0 0 1/c1*(Gb*V1q)/(Gb+V1q+Gc) 1/c1
*(Gc*V1q)/(Gb+V1q+Gc) 0 0;
0 -1/c2*(Gd*V2q+Ge*V2q)/(Gd+V2q+Ge) 0 0 0 1/c2*(Gd*V2q)/(Gd+V2q+Ge)
1/c2*(Ge*V2q)/(Gd+V2q+Ge) 0;
0 0 -1/c3*(Gf*V3q+Gg*V3q)/(Gf+V3q+Gg) 0 0 0 1/c3*(Gf*V3q)/(Gf+V3q+Gg)
1/c3*(Gg*V3q)/(Gf+V3q+Gg);
0 0 0 -1/c4*(Gh*V4q)/(Gh+V4q) 0 0 0 1/c4*(Gh*V4q)/(Gh+V4q);
1/ca*(Gb*V1q)/(Gb+V1q+Gc) 0 0 0 -1/ca*(Gb*V1q+Gb*Gc)/(Gb+V1q+Gc) 1/ca
*(Gb*Gc)/(Gb+V1q+Gc) 0 0;
1/cb*(Gc*V1q)/(Gb+V1q+Gc) 1/cb*(Gd*V2q)/(Gd+V2q+Ge) 0 0 1/cb*(Gb*Gc)
/(Gb+V1q+Gc) -1/cb*((Gc*V1q+Gb*Gc)/(Gb+V1q+Gc)+(Gd*V2q+Ge*Gd)/(Gd
+V2q+Ge)) 1/cb*(Ge*Gd)/(Gd+V2q+Ge) 0;
0 1/cc*(Ge*V2q)/(Gd+V2q+Ge) 1/cc*(Gf*V3q)/(Gf+V3q+Gg) 0 0 1/cc*(Gd*
Ge)/(Gd+V2q+Ge) -1/cc*((Gf*V3q+Gf*Gg)/(Gf+V3q+Gg)+(Ge*V2q+Ge*Gd)
/(Gd+V2q+Ge)) 1/cc*(Gf*Gg)/(Gf+V3q+Gg);
0 0 1/cd*(Gg*V3q)/(Gf+V3q+Gg) 1/cd*(Gh*V4q)/(Gh+V4q) 0 0 1/cd*(Gf*
Gg)/(Gf+V3q+Gg) -1/cd*((Gg*V3q+Gf*Gg)/(Gf+V3q+Gg)+(V4q*Gh)/(Gh+
V4q))];

%matriz caudal
% delta_u0 delta_u1 delta_u2 delta_v1 delta_v2 delta_v3 delta_v4
B=[0 1/c1 0 1/c1*((Gb+Gc)*(Aq*Gb+Cq*Gc-X1q*Gb-X1q*Gc)/(Gb+Gc+V1q)^2) 0 0

```

```

0;
0 0 0 0 1/c2*((Gd+Ge)*(Cq*Gd+Eq*Ge-X2q*Gd-X2q*Ge)/(Gd+Ge+V2q)^2) 0 0 ;
0 0 1/c3 0 0 1/c3*((Gf+Gg)*(Eq*Gf+Gq*Gg-X3q*Gf-X3q*Gg)/(Gf+Gg+V3q)^2)
0;
0 0 0 0 0 0 1/c4*(Gh*(Gq*Gh-X4q*Gh)/(Gh+V4q)^2);
1/ca 0 0 1/ca*((Gb+Gc)*(X1q*Gb-Aq*Gb)/(Gb+V1q+Gc)^2+Gd*Gc*(Aq-Cq)/(Gb+
V1q+Gc)^2) 0 0 0;
0 0 0 1/cb*((Gb+Gc)*(X1q*Gc-Cq*Gc)/(Gb+V1q+Gc)^2+Gb*Gc*(Cq-Aq)/(Gb+V1q
+Gc)^2) 1/cb*((Ge+Gd)*(X2q*Gd-Cq*Gd)/(Gd+V2q+Ge)^2+Ge*Gd*(Cq-Eq)/(
Gd+V2q+Ge)^2) 0 0;
0 0 0 0 1/cc*((Gd+Ge)*(X2q*Ge-Eq*Ge)/(Gd+V2q+Ge)^2+Gd*Ge*(Eq-Cq)/(Gd+
V2q+Ge)^2) 1/cc*((Gf+Gg)*(X3q*Gf-Eq*Gf)/(Gf+V3q+Gg)^2+Gg*Gf*(Eq-Gq
)/(Gf+V3q+Gg)^2) 0;
0 0 0 0 0 1/cd*((Gf+Gg)*(X3q*Gg-Gq*Gg)/(Gf+V3q+Gg)^2+Gf*Gg*(Gq-Eq)/(Gf
+V3q+Gg)^2) 1/cd*(Gh*(X4q*Gh-Gq*Gh)/(Gh+V4q)^2)];
A=double(A);
B=double(B);
C=[c1 0 0 0 0 0 0 0;
0 c2 0 0 0 0 0 0;
0 0 c3 0 0 0 0 0;
0 0 0 c4 0 0 0 0];
%matriz Q
di1=[100 1000 100 1000 100 100 10 10];
Q=diag(di1);
%matriz R
di2=[20000 10000 10000 100 1 10 100];
R=diag(di2);
%matriz de demanda
D1=[1/c1 0 0 0;
0 1/c2 0 0;

```

```
0 0 1/c3 0;  
0 0 0 1/c4;  
0 0 0 0;  
0 0 0 0;  
0 0 0 0;  
0 0 0 0];
```

```
%lqr
```

```
[K,S,P]=lqr(A,B,Q,R);
```

```
%condicion inicial
```

```
pto_opx=[X1q;X2q;X3q;X4q;Aq;Cq;Eq;Gq];
```

```
pto_opx=double(pto_opx);
```

```
pto_opuv=[u0q;u1q;u2q;V1q;V2q;V3q;V4q];
```

Bibliografía

- [1] Desafíos Tecnológicos USM <<https://www.desafio tecnologicos.usm.cl/memorias-multidisciplinarias>>. [Último acceso: 16 Septiembre 2019]
- [2] Memoria Anual, ESVAL, 2019. 27 - 30p.
- [3] SIMMONS, G. F. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas. 2a. ed. Madrid. McGraw-Hill. 528 - 551p.
- [4] KIRK, D. E. Optimal Control Theory: An introduction, New York, Dover Publications, Abril 2004, 219 - 233p.
- [5] ZILL, D. G., CULLEN, M. R. Differential equations with boundary-value problems. 7a ed, Brooks/Cole, Cengage Learning, Enero 2009, 361p
- [6] DELGADO M. Métodos geométricos en problemas de control óptimo singulares: fundamentos y aplicaciones. Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, Mayo 2004.
- [7] GOODWIN, G. C., GRAEBE, S. F., SALGADO, M. E. Control System Design. Prentice Hall, New Jersey, 2001, 52 - 54p.
- [8] ZHIRABO, A.N. Analysis of Observability and Controllability of Nonlinear Dynamic Systems by Linear Methods, East State Technical University, Vladivostok, Mayo 25, 2009.
- [9] MALKAPURE, H. G., CHIDAMBARAM, M. Comparison of Two Methods of Incorporating an Integral Action in Linear Quadratic Regulator, Indian Institute of Technology Madras, Marzo, 2014
- [10] Kwakernaak, H. and Sivan, R. Linear Optimal Control Systems. Wiley. 1977