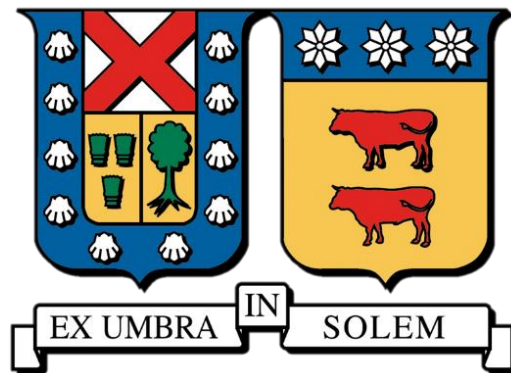


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS, METALURGIA Y
MATERIALES



OPTIMIZACIÓN DE DISEÑO DE MALLAS DE EXTRACCIÓN EN
FUNCIÓN DE VARIABLES GEOMÉTRICAS, GEOMECAÑICAS Y
REOLÓGICAS

JEREMY LUCAS GONZÁLEZ TORRES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO CIVIL DE MINAS

Profesor Guía:

Dr. Sergio Palma

Octubre 2025

Santiago, Chile



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Optimización de diseño de mallas de extracción en función de variables geométricas, geomecánicas y reológicas.

Nombre del candidato(a): Jeremy Lucas González Torres.

Carrera / Grado: Ingeniería Civil de Minas.

Campus: San Joaquín. **Departamento:** Departamento de ingeniería de minas, metalurgia y materiales.

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Sergio Andrés Palma Moya, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 03/11/2025 **Firma:**

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 03/11/2025 **Firma:**

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

A mi querida abuela Sara, a quien considero la persona más inteligente de este mundo, por enseñarme a mantener la calma incluso en los peores momentos y por ser una fuente constante de inspiración; y a mi madre Viky, por su ejemplo de lucha y perseverancia, por enseñarme a seguir mis sueños con esfuerzo y corazón, y por acompañarme con amor incondicional en cada paso de este largo camino.

AGRADECIMIENTOS

En primero lugar, agradecer a mi profesor guía, el Dr. Sergio Palma, no solo por su apoyo en este proceso, sino que también, por las oportunidades brindadas a lo largo de mi carrera universitaria.

A todos y cada uno de los profesores, ayudantes y profesionales de la Universidad Técnica Federico Santa María, por haber sido pilares fundamentales en mi formación profesional.

A mi familia, por el apoyo y amor incondicional entregado. Especialmente a mi abuela, por su inmenso sacrificio y jamás dejar de creer en mí.

A mis padres, por enseñarme el valor del trabajo duro, la honestidad y la moralidad.

A mis queridos amigos, José y Daciel, por sus palabras de aliento y por acompañarme cada vez que lo necesité.

A mis amigos, amigas y compañeros de la universidad, quienes me acompañaron en este largo proceso volviendo momentos difíciles en momentos alegres. Mención especial para Adrián, quién me acompañó durante toda la carrera universitaria desde principio a fin.

Finalmente, a mi pareja Maribel y su familia, por apoyarme durante largos años brindándome apoyo y amor incondicional. Muchas gracias por siempre estar presentes para mí.

RESUMEN

La optimización de las mallas de extracción se ha convertido en un recurso necesario para maximizar la recuperación de mineral y reducir la entrada de dilución en escenarios de *caving* de minería subterránea. En la actualidad, los diseños generalmente se basan en métodos empíricos como el ábaco de **Laubscher** y las curvas de **Kvapil**, métodos que presentan limitaciones al no incorporar variables geométricas, geomecánicas y reológicas que afectan al desarrollo del flujo gravitacional de material fragmentado y desarrollo de las Zonas de Extracción.

La presente investigación busca optimizar el diseño de mallas de extracción a través de la cuantificación de las dimensiones de la Zona de Extracción (EZ) en escenarios de extracción simultánea. Para ello, se utilizó el modelo fisicomatemático de **Morales, Vivanco & Palma (2023)**, implementado mediante el método de elementos finitos en el software COMSOL Multiphysics®, donde se simuló el flujo de material granular cuasi 2D para distintas configuraciones geométricas y condiciones de material.

Se analizó la influencia del distanciamiento entre puntos de extracción (S), ancho del punto de extracción (D_w), diámetro medio de partículas (D_{50}), ángulo de fricción (φ) y magnitud de la velocidad (u_0).

Los resultados permitieron la cuantificación del ancho (W_{EZ}), alto (H_{EZ}) y espaciamiento entre elipsoides de extracción (E_{EZ}), observándose que las variables estudiadas tienen impactos significativos en la geometría de la EZ e interacción entre flujos. Adicionalmente, se desarrolló un modelo matemático predictivo basado en el análisis dimensional que permite relacionar W_{EZ} con los parámetros estudiados, alcanzando un 98,95% de precisión. El modelo desarrollado constituye una herramienta robusta para optimizar el diseño de mallas de extracción, superando limitaciones de los métodos empíricos que tradicionalmente se utilizan en la industria minera.

ABSTRACT

The optimization of extraction layouts has become a necessary strategy to maximize ore recovery and reduce dilution ingress in underground block caving operations. Current designs are predominantly based on empirical methods, such as Laubscher's chart and Kvapil's curves, which present significant limitations as they fail to incorporate key geometric, geomechanical, and rheological variables that govern the gravitational flow of fragmented material and the development of Extraction Zones (EZ).

This research aims to optimize extraction layout design by quantifying the dimensions of the Extraction Zone (EZ) under simultaneous draw conditions. The physico-mathematical model developed by **Morales, Vivanco & Palma (2023)** was implemented using the Finite Element Method (FEM) in COMSOL Multiphysics® software to simulate quasi-2D granular flow across various geometric configurations and material properties.

The influence of draw point spacing (S), draw point width (D_w), mean particle diameter (D_{50}), friction angle (φ), and velocity magnitude (u_0) was rigorously analyzed.

The results enabled the quantification of the extraction zone's width (W_{EZ}), height (H_{EZ}), and the spacing between extraction ellipsoids (E_{EZ}). The study demonstrates that these variables have a significant and quantifiable impact on EZ geometry and flow interaction. Furthermore, a predictive mathematical model was developed based on dimensional analysis, effectively correlating W_{EZ} with the studied parameters and achieving a 98.95% accuracy rate. This model represents a robust and advanced tool for the optimization of extraction layouts, overcoming the limitations inherent in the empirical methods traditionally used in the mining industry.

CONTENIDOS

1	CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	Introducción.....	1
1.2	Objetivos.....	2
1.2.1	Objetivo general	2
1.2.2	Objetivos específicos.....	2
1.3	Alcances	2
2	CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO.....	4
2.1	Block Caving.....	4
2.2	Mallas de extracción	5
2.3	Experiencia previa.....	6
2.4	Modelos analíticos.....	14
2.5	Método de Elementos Finitos (FEM)	19
3	CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	20
3.1	Diseño Geométrico	21
3.2	Variables de Estudio	23
3.3	Configuración de COMSOL Multiphysics®	24
3.4	Simulaciones	25
3.4.1	Caso de estudio N°1: Variación del ancho de puntos de extracción D_w y distanciamiento entre puntos de extracción S	26
3.4.2	Caso de estudio N°2: Variación del diámetro de partícula D_{50}	26
3.4.3	Caso de estudio N°3: Variación del ángulo de fricción φ	27
3.4.4	Caso de estudio N°4: Variación de u_0	27
3.5	Procesamiento de Datos.....	27
3.5.1	Obtención de W_{EZ} , H_{EZ} y E_{EZ}	28
3.5.2	Instantes de Tiempo.....	29
4	CAPÍTULO IV: RESULTADOS.....	30
4.1	Caso de estudio N°1: Influencia del ancho de puntos de extracción D_w y distanciamiento entre puntos de extracción S	30
4.2	Caso de estudio N°2: Variación del diámetro de partícula D_{50}	34
4.3	Caso de estudio N°3: Variación del ángulo de fricción φ	36
4.4	Caso de estudio N°4: Variación de la magnitud de la velocidad u_0	38
4.5	Modelo Matemático	41
4.6	Optimización de Mallas de Extracción.....	44

5	CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	47
6	REFERENCIAS	49
7	ANEXOS	52
7.1	W_{EZ} / H_{EZ} en función de la masa extraída.....	52
7.2	Espaciamiento entre elipsoides de extracción.	54
7.3	Gráficos comparativos.	58
7.4	Códigos Matlab.	60

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1:	Configuración triangular traslapada total (Cavieres et al., 2011).	5
Figura 2.2:	Planta de Malla de Extracción, detalle de labores, Malla tipo Teniente (Cavieres, 2011).	6
Figura 2.3:	Comparación del distanciamiento entre puntos de extracción para flujos interactivos (Kvapil, 1965).	7
Figura 2.4:	Zonas de extracción y movimiento en secuencia de extracción (Kvapil, 1965).	7
Figura 2.5:	Ábaco de Laubscher para determinar espaciamento entre puntos de extracción (Laubscher, 1994).	9
Figura 2.6:	Curva de Laubscher para determinar la Altura de Interacción (Laubscher, 1994).	9
Figura 2.7:	Ancho en función del alto de la IEZ (Castro et al., 2007).	10
Figura 2.8:	Efecto del espaciamento entre puntos de extracción (Reyes et al., 2021)	11
Figura 2.9:	Modelo de Carvallo, Palma y Pulgar (Pulgar et al., 2024)	12
Figura 2.10:	Comparación del ancho y alto de la IMZ a partir de experimentos y simulaciones en 3D, la teoría cinemática de Nedderman (1995) (línea sólida y ecuación) y modelo empírico de Laubscher (1994) (ITASCA, 2024).	13
Figura 2.11:	Esquema conceptual del modelo de Morales, Vivanco & Palma (Adaptado de Morales et al., 2023).	15
Figura 2.12:	Condiciones de borde del modelo (Adaptado de Morales et al., 2023).	18
Figura 2.13:	Comparación entre la IEZ a distintos tiempos de extracción entre los experimentos de Fullard et al. 2019, en color azul, el modelo de Palma y Morales en color negro y el Modelo Cinemático en color rojo (Morales et al., 2023).	18
Figura 2.14:	Discretización por el método de elemento finitos (FEM).	19
Figura 3.1:	Parametrización del diseño de bateas de extracción. Adaptado de López (2016).	21
Figura 3.2:	Diseño de Geometría (vista corte transversal).	22
Figura 3.3:	Diseño de Geometría escalado (vista general).	23
Figura 3.4:	Condiciones de borde del modelo en COMSOL Multiphysics.	25
Figura 3.5:	Simulación con 20 instantes de tiempo que conforman distintas EZ	26
Figura 3.6:	Representación de H_{EZ} , W_{EZ} y E_{EZ}	28
Figura 4.1:	Comparación de elipsoides de extracción para diferentes anchos de puntos de extracción.	31
Figura 4.2:	Gráfico de W_{EZ}/D_{50} vs H_{EZ}/D_{50} para 11 anchos de punto de extracción.	32

Figura 4.3: Comparación de elipsoides de extracción para diferentes distanciamientos entre bateas de extracción.	33
Figura 4.4: Gráfico de W_{EZ}/D_{50} vs H_{EZ}/D_{50} para diferentes distanciamientos entre puntos de extracción.	34
Figura 4.5: Comparación de elipsoides de extracción para diferentes valores de diámetro de partícula.	35
Figura 4.6: Gráfico de W_{EZ}/D_{50} vs H_{EZ}/D_{50} para 50 valores de diámetro medio de partículas.	36
Figura 4.7: Comparación de elipsoides de extracción para distintos valores de ángulo de fricción.	37
Figura 4.8: Gráfico de W_{EZ}/D_{50} vs H_{EZ}/D_{50} para 26 ángulo de fricción.	38
Figura 4.9: Comparación de elipsoides de extracción para distintos valores de la magnitud de la velocidad.	39
Figura 4.10: Gráfico de W_{EZ}/D_{50} vs H_{EZ}/D_{50} para 51 valores de u_0	40
Figura 4.11: Relación entre la razón adimensional W_{EZ}/D_{50} y χ	43
Figura 4.12: Puntos de extracción distanciados de forma optimizada.	45
Figura 4.13: Puntos de extracción distanciados de forma optimizada para ángulo de fricción de 20°	45
Figura 7.1: Gráfico de la altura de la EZ vs masa extraída.	53
Figura 7.2: Gráfico del ancho de la EZ vs masa extraída.	53
Figura 7.3: Gráfico de E_{EZ} en función de S y D_w	54
Figura 7.4: Gráfico de E_{EZ} en función de D_{50}	55
Figura 7.5: Gráfico de E_{EZ} en función de φ	56
Figura 7.6: Gráfico de E_{EZ} en función de u_0	57
Figura 7.7: Gráfico de comparación de D_{50} con resultados de Pulgar et al. (2024).	58
Figura 7.8: Gráfico de comparación de D_{50} con resultados de Carvallo et al. (2024).	58
Figura 7.9: Gráfico de comparación de φ con resultados de Pulgar et al. (2024).	59
Figura 7.10: Gráfico de comparación de φ con resultados de Carvallo et al. (2024).	59

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Dimensiones escaladas (1:100) de bateas en mina Diablo Regimiento, El Teniente (López, 2016).	22
Tabla 2: Parámetros de estudio.	24
Tabla 3: Masa en función del tiempo de extracción.	29
Tabla 4: Parámetros y sus dimensiones.	41
Tabla 5: Valores ejemplificadores para aplicación de modelo propuesto.	44

NOMENCLATURA

D_w	Diámetro del punto de extracción	(m)
D_{50}	Tamaño medio de las partículas	(m)
D_h	Diámetro del volumen del conjunto de partículas	(m)
f	Fuerza impulsora	(N)
f_t	Fuerza resistente	(N)
g	Aceleración de gravedad	(m/s ²)
H	Altura de la batea	(m)
H_{IEZ}	Altura del elipsoide de extracción en tiraje aislado	(m)
H_{EZ}	Altura del elipsoide de extracción en tiraje simultáneo	(m)
u	Componente horizontal de la velocidad de partículas	
v	Componente vertical de la velocidad de partículas	
φ	Ángulo de fricción interna	(°)
IEZ	Zona de Extracción en tiraje aislado	(Pa)
EZ	Zona de Extracción en tiraje simultáneo	(m)
IMZ	Zona de Movimiento Aislada	(Pa)
$\nabla \cdot \sigma$	Divergencia del tensor de esfuerzos	(Pa/m)
P	Presión	(Pa)
ρ	Densidad del material	(kg/m ³)
Q	Flujo volumétrico	(m ³ /s)
S	Espaciamiento teórico entre puntos de extracción	(m)
σ_{xx}	Esfuerzo horizontal plano	(Pa)
σ_{yy}	Esfuerzo vertical plano	(Pa)
σ_{xy}	Esfuerzo de corte plano	(Pa)
T_w	Ancho de la batea de extracción	(m)
u_0	Magnitud de la velocidad de partículas	(m/s)
W_{IEZ}	Ancho de la elipsoide de extracción en tiraje aislado	(m)
W_{EZ}	Ancho de la elipsoide de extracción en tiraje simultáneo	(m)
x	Coordenada horizontal	(m)
y	Coordenada vertical	(m)

Y	Número adimensional de resistencia
Y_0	Número adimensional modelo Morales et al. (2023)

1 CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

La minería subterránea, y en particular los métodos de hundimiento como el *block/panel caving*, han adquirido relevancia en las últimas décadas debido al agotamiento de los yacimientos superficiales y la necesidad de explotar depósitos minerales a mayores profundidades (Eberhardt et al., 2007; Castro et al., 2014). Según datos de COCHILCO (2016), solo el 20.6% de los depósitos evaluados en Chile presenta mineralización económica en superficie, mientras que el 49.9% se ubica a más de 100 metros de profundidad. Esta transición hacia la minería subterránea ha impulsado el desarrollo de técnicas como el *block caving*, que destaca por su capacidad para extraer grandes volúmenes de mineral de manera eficiente y a bajo costo (Gómez & Labbé, 2019).

Uno de los desafíos críticos en la implementación de estos métodos es el diseño óptimo de las mallas de extracción, las cuales determinan la disposición geométrica de los puntos de extracción para maximizar la recuperación del mineral y minimizar la dilución (Laubscher, 1994). Actualmente, herramientas empíricas como las curvas de **Kvapil** y el ábaco de **Laubscher** son ampliamente utilizadas en la industria, pero presentan limitaciones que se pueden resolver a través de los avances actuales obtenidos en el estudio de la teoría del flujo gravitacional (Cavieres, 2011). El trabajo realizado por Morales et al. (2023) ha demostrado que la optimización matemática acoplada a la reología de rocas fracturadas en minería subterránea es una herramienta clave para predecir el flujo gravitacional en condiciones de *caving* y con ello mejorar la eficiencia y seguridad de operaciones mineras.

Investigaciones recientes han demostrado que el comportamiento del flujo granular está influenciado por parámetros como el ángulo de fricción interna, el diámetro característico de las partículas (Carvallo et al., 2024; Pulgar et al., 2024) y la magnitud de la velocidad (Morales et al., 2023). Sin embargo, aún falta desarrollar modelos matemáticos robustos que integren estas variables para optimizar el diseño de mallas de extracción. En este contexto, el uso de simulaciones numéricas avanzadas, como las realizadas con el software COMSOL Multiphysics®, ofrece una alternativa viable para analizar el flujo gravitacional bajo condiciones controladas y reducir la dependencia de metodologías empíricas, permitiendo el uso de pocos recursos de tiempo y computacionales (Jagota et al 2013).

Este estudio se centra en analizar las dimensiones de la elipsoide de extracción en escenarios de extracción simultánea, considerando variables geométricas, geomecánicas y reológicas, con el fin de proponer una herramienta que mejore la eficiencia y seguridad en operaciones mineras de *Caving*, para contribuir al avance en el campo de la minería subterránea mediante la optimización del diseño de mallas de extracción a través de un enfoque basado en simulaciones numéricas y modelamiento matemático.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Optimizar el diseño de mallas de extracción a través de la cuantificación de las dimensiones de la zona de extracción.

1.2.2 Objetivos específicos

Determinar parámetros geométricos, geomecánicos y reológicos que influyen en las dimensiones de la zona de extracción.

Simular el flujo granular cuasi 2D en COMSOL Multiphysics para distintas configuraciones geométricas y condiciones geomecánicas y reológicas.

Relacionar matemáticamente el ancho de la zona de extracción con parámetros que influyen en su tamaño y forma.

1.3 Alcances

Esta memoria se enmarca en el estudio y optimización de las mallas de extracción en minería de *block caving*, enfocándose en el análisis de la zona de extracción. Se incluye la aplicación del modelo matemático que describe el flujo gravitacional en condiciones de *block caving* desarrollado por **Morales et al. (2023)** en simulaciones desarrolladas por el software COMSOL Multiphysics® que utiliza simulaciones numéricas mediante método de elementos finitos (FEM).

Las geometrías (escala 1:100) corresponden a las de un macizo rocoso de 300 m de alto y 400 m de ancho, que incluye 5 puntos de extracción mediante bateas desarrolladas por la parametrización de **Lopez (2016)** para la mina Diablo Regimiento de El Teniente.

El análisis del flujo granular es en condiciones cuasi 2D, considerando como variables el ancho del punto de extracción, distanciamiento entre puntos de extracción, ángulo de fricción, diámetro de partículas, magnitud de la velocidad y tiempo de extracción.

Finalmente, no se incluye una validación experimental directa.

2 CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1 Block Caving

El *block caving* es un método de minería subterránea masiva que hace uso de la gravedad para fragmentar y transportar grandes volúmenes de mineral (Castro et al., 2007). El proceso, transforma la roca sólida inicialmente in situ en una masa rocosa fragmentada, que fluye hacia los puntos de extracción a medida que se extrae por equipos mecanizados desde los puntos de extracción ubicados en niveles inferiores (Castro et al., 2016; Sánchez 2019).

En las minas de *caving* se desarrolla un nivel de socavación en la base del yacimiento y por debajo de este se construye un nivel de producción. Ambos niveles se conectan mediante un conjunto de aberturas llamadas bateas de extracción, los que contienen puntos de extracción, ubicados en la base de las bateas. Luego, se extrae una capa horizontal de mineral del nivel de socavación con el fin de colapsar el yacimiento superior para que el material fragmentado comience a fluir hacia los puntos de extracción. A medida que se extrae mineral fragmentado, el masivo minero continúa rompiéndose y hundiéndose (Douglas, 1992; Heslop, 2000).

En general, estos métodos tienen los costos operativos más bajos y la mayor productividad en minería subterránea. El éxito de la operación depende de las características del flujo gravitacional, el espaciamiento de los puntos de extracción y su ubicación (Brown E.T., 2003). Se sabe que factores de diseño inicial, factores operativos y las propiedades de roca fracturada influyen en el comportamiento del flujo gravitacional en escenarios de *caving* (Kvapil, 1992).

Entre los principales desafíos que incluyen los métodos de Caving se encuentra la correcta definición de las mallas de extracción, las cuales tienen dependencias con respecto al dimensionamiento geométrico, a las propiedades del material y a la reología del material fragmentado. El objetivo de diseñar una correcta malla de extracción se fundamenta en maximizar la recuperación del mineral y minimizar la entrada de estéril (dilución) (Laubscher, 1994).

2.2 Mallas de extracción

En los métodos de explotación *block/panel caving* en minería subterránea, la configuración de las mallas de extracción son un componente clave para una correcta operación minera. **Cavieres et al. (2011)**, ofrecen una metodología para su diseño, que comienza con la determinación de la calidad del macizo rocoso a partir de la clasificación *Rock Mass Rating* y el ancho del punto de extracción para ingresar los valores al Ábaco de **Laubscher (1994)** y así obtener tanto la altura de interacción entre elipsoides como el distanciamiento mínimo y máximo entre puntos de extracción. Luego, en la curva de **Kvapil** se relaciona la altura de interacción con el diámetro teórico del elipsoide de extracción, que con un ajuste mediante la fórmula planteada por **Kvapil** se determina el diámetro real del elipsoide de extracción, el cual tiende a ser un poco menor al teórico.

Una vez determinado el diámetro real del elipsoide de extracción se define la configuración de los elipsoides, que corresponde al arreglo en que se ubican los elipsoides de extracción y definen la malla de extracción. Independiente de la configuración de los elipsoides de extracción, estos se pueden disponer de forma separada, tangente o traslapadas, con configuraciones cuadrangulares, triangulares o mixtas. La configuración del tipo triangular traslapada permite lograr una interacción entre los elipsoides del 100% y eliminar el área intacta (**Figura 2.1**).

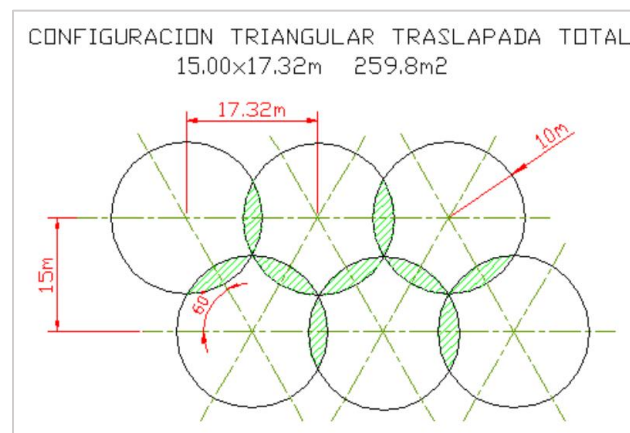


Figura 2.1: Configuración triangular traslapada total (Cavieres et al., 2011).

Finalmente, estableciendo la configuración de la geometría, se incluyen bateas, calles y zanjas para obtener la malla de extracción definitiva, la cual cuenta con el distanciamiento

uniforme de los puntos de extracción, la intersección adecuada entre los flujos granulares y el espacio necesario para asegurar las actividades de las operaciones de carguío y transporte de mineral a través de cargadores LHD.

La malla tipo teniente utiliza como base teórica para su diseño el tipo de configuración triangular. Sus resultados han sido positivos operacionalmente, a tal punto que se ha adoptado para el desarrollo de casi todos los sectores de la Mina El Teniente (**Figura 2.2**).

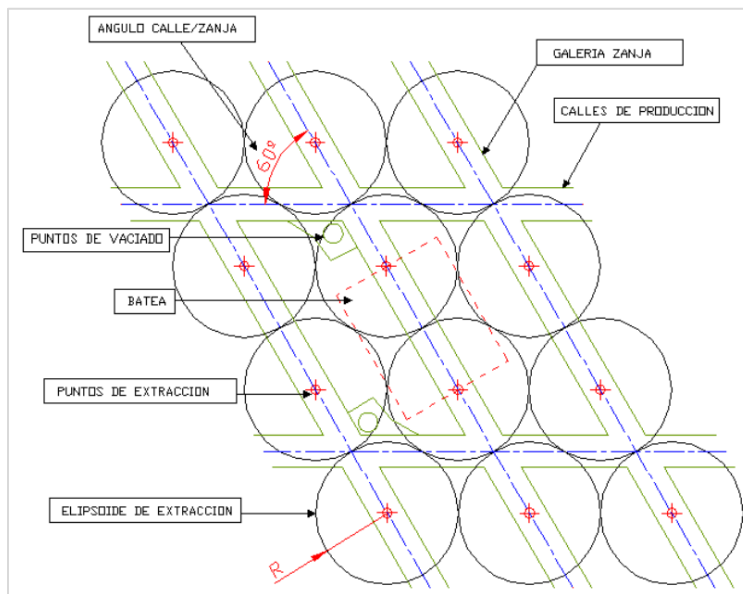


Figura 2.2: Planta de Malla de Extracción, detalle de labores, Malla tipo Teniente (Cavieres, 2011).

2.3 Experiencia previa

El correcto entendimiento del comportamiento del flujo de material granular en minería de *caving* resulta significativo para ayudar a evitar problemas relacionados a estos métodos, y para ello se debe tener la noción de flujo gravitacional, que consiste en el descenso de material fragmentado por acción de la gravedad producto de su extracción (**Kvapil, 1965**). En este contexto, **Kvapil (1965)** realizó uno de los primeros experimentos en modelos bidimensionales para describir el fenómeno de manera cuantitativa y entre sus resultados encontró que el flujo gravitacional de material granular estaba compuesto por una primera zona que correspondía al material extraído, una segunda zona que contenía material sin extraer pero que cambió de posición, y una tercera zona que no cambió de posición. Además, al extraer desde más de un punto de extracción, la distancia horizontal entre las zonas de

movimiento se podía reducir si a su vez se reducía el distanciamiento de los puntos de extracción, hasta encontrar que los flujos podían interactuar (**Figura 2.3**).

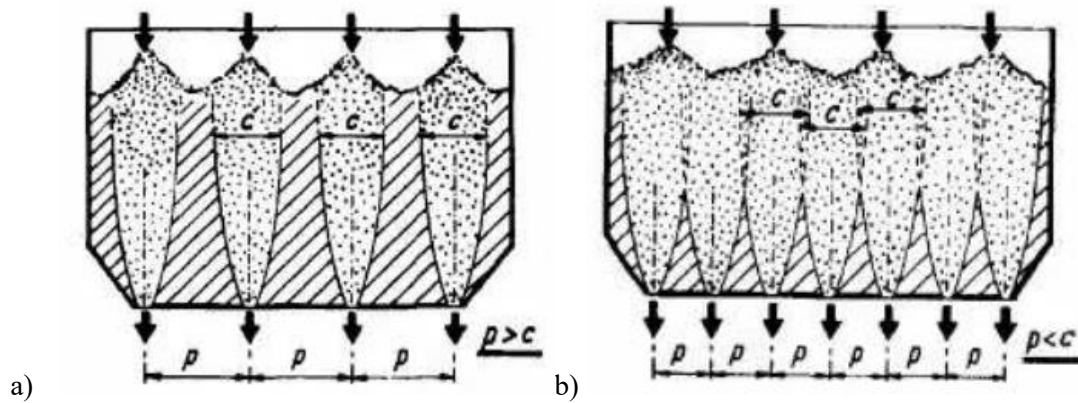


Figura 2.3: Comparación del distanciamiento entre puntos de extracción para flujos interactivos (Kvapil, 1965).

Un año más tarde, **Janelid y Kvapil (1966)** determinaron que la zona compuesta por el material extraído (Zona de Extracción, EZ) y la zona compuesta por el material que se movió producto de la extracción (Zona de Movimiento, MZ) tenían forma de elipsoide, donde la altura y el volumen de la MZ con respecto a la EZ era de 2,5 y 15 veces respectivamente. A su vez, postularon la idea de que la geometría de la EZ tenía una dependencia de factores como el tamaño de la partícula, densidad del mineral, humedad y tasa de extracción. La **Figura 2.4** permite la visualización de la EZ y la MZ.

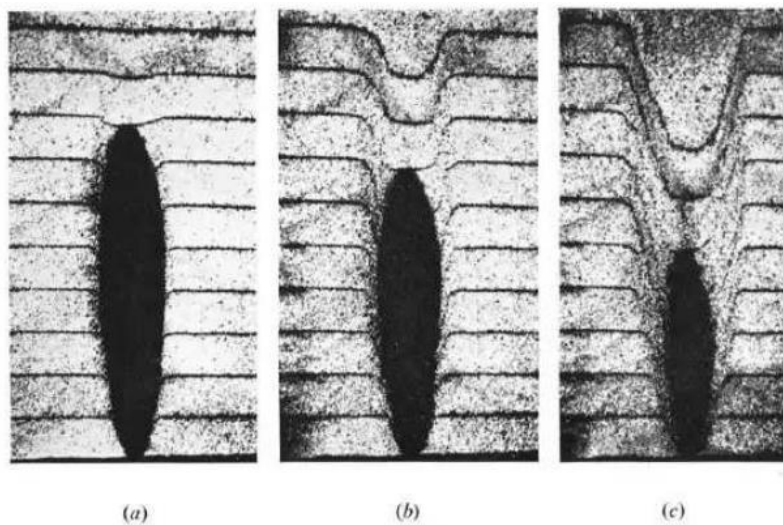


Figura 2.4: Zonas de extracción y movimiento en secuencia de extracción (Kvapil, 1965).

Janelid y Kvapil (1966) identificaron perfiles de distintas velocidades con forma de elipsoides. También observaron que el diámetro de la zona de movimiento se limita a partir de cierta altura y su forma comienza a asemejarse a la de un cilindro, donde el perfil de velocidades se vuelve uniforme.

Halim et al. (2004), para referirse a las zonas de flujo, introducen los conceptos de EZ (Extraction Zone), MZ (Movement Zone), IEZ (Isolated Extraction Zone) e IMZ (Isolated Movement Zone). El término *Isolated* hace referencia al flujo sin interacción desde un punto de extracción.

Laubscher (1994), de acuerdo a los resultados de experimentos que replicaban los trabajos hechos por **Kvapil**, postuló que los flujos interactuaban cuando los puntos de extracción se ubicaban a una distancia menor a 1.5 veces el diámetro de la IMZ, además, indica que el diámetro de la IMZ se expande (aunque según **Trueman et al., 2007**, este resultado no ha sido observado para materiales gruesos) y que el flujo interactivo aumenta al disminuir el espaciamiento entre los puntos de extracción. Con estos resultados, **Laubscher** propone un ábaco capaz de entregar el espaciamiento teórico máximo y mínimo entre puntos de extracción (**Figura 2.5**), además de curvas que proporcionan la altura de interacción entre flujos granulares (**Figura 2.6**) que es equivalente a la altura de extracción propuesta por **Kvapil**. Aunque el Ábaco está orientado para el desarrollo de pequeñas mallas de extracción ha servido para el desarrollo de minas como El Teniente (**Cavieres et al., 2011**).

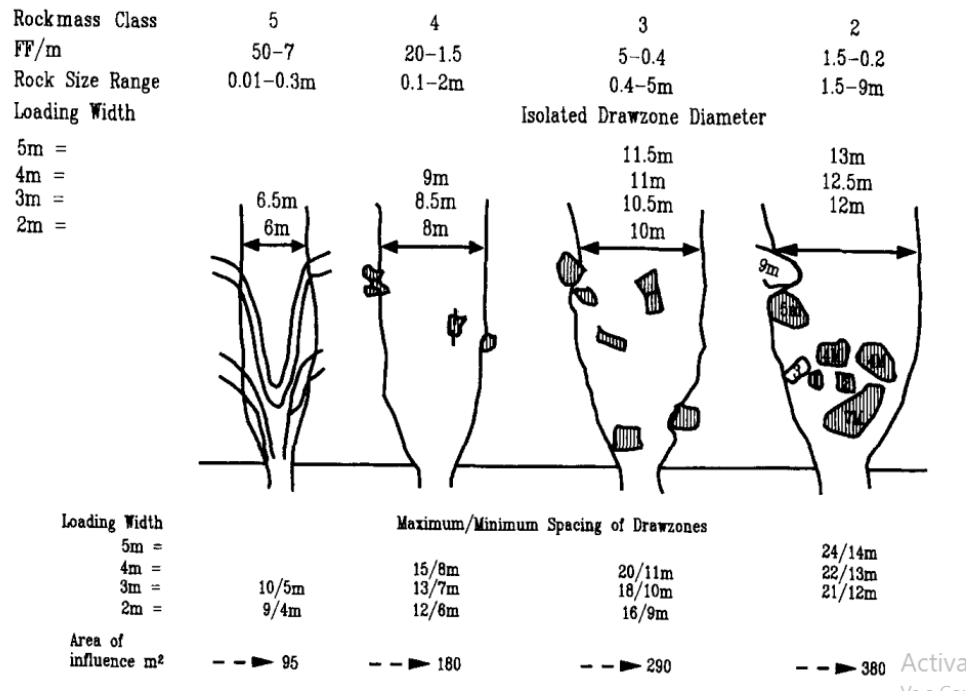


Figura 2.5: Ábaco de Laubscher para determinar espaciamiento entre puntos de extracción (Laubscher, 1994).

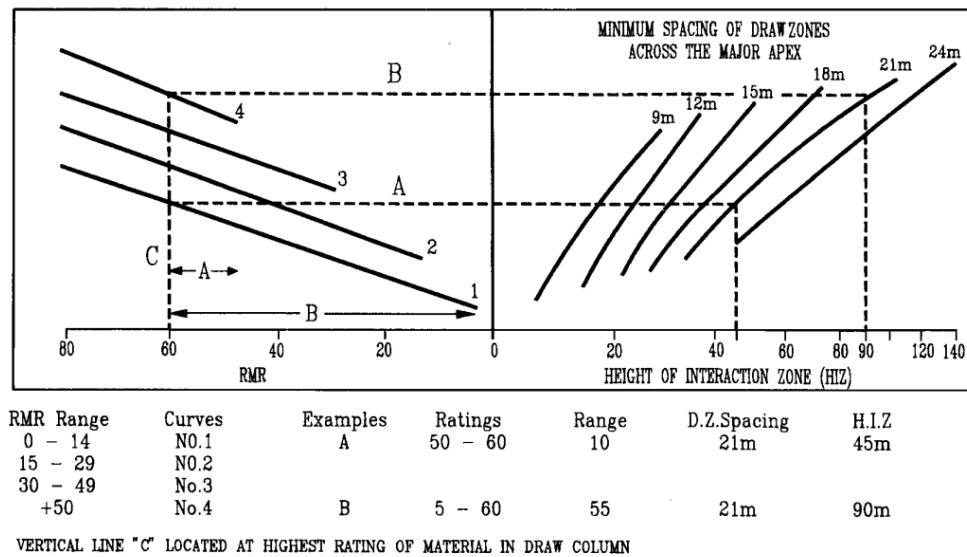


Figura 2.6: Curva de Laubscher para determinar la Altura de Interacción (Laubscher, 1994).

Autores como Peters (1984), Power (2004), Halim et al. (2004), Castro et al. (2007) y Trueman et al. (2007) desarrollaron modelos de gran escala utilizando grava como material granular para estudiar el fenómeno de flujo gravitacional. Peters (1984), concluyó que la

forma de la IEZ tenía importantes dependencias con respecto al ancho del punto de extracción, no así con respecto al diámetro de partículas, y que los flujos interactuaban al tenerse un distanciamiento entre puntos de extracción de 1.14 veces el máximo ancho de la IEZ. **Power (2004)**, por el contrario, concluyó que el tamaño de partículas y la altura de extracción influyen de manera significativa en las dimensiones de la IEZ. **Halim et al. (2004)**, **Castro et al. (2007)** y **Trueman et al. (2007)**, obtuvieron a partir de sus experimentos que el ancho de la IEZ e IMZ crece indefinidamente al extraer mineral de forma continua, la Zona de Extracción no se expande cuando se tiene flujo interactivo, y que la expansión observada en modelos que utilizaron arena como material granular se debía al menor ángulo de fricción de este.

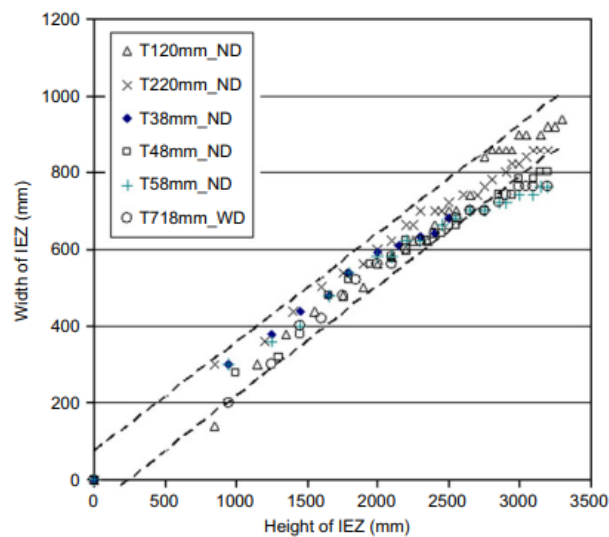


Figura 2.7: Ancho en función del alto de la IEZ (Castro et al., 2007).

Jin et al. (2016) se centraron en analizar cómo diversas variables influyen en las dimensiones de la IEZ, además, analizaron la influencia del tamaño del punto de extracción, la distancia entre puntos de extracción y la interacción entre elipsoides de extracción. Concluyeron que un aumento en el tamaño del punto de extracción reduce la pérdida de mineral, mejorando la eficiencia de recuperación. Un aumento entre la distancia de puntos de extracción genera un aumento en la pérdida de mineral. Finalmente, cuando los puntos de extracción están lo suficientemente cerca en condiciones de extracción simultánea, las zonas de extracción se logran superponer, produciendo un flujo uniforme y una disminución de la formación de zonas residuales, reduciendo la pérdida de mineral.

Melo et al. (2008) proponen nuevo un modelo cinemático para describir el campo de desplazamiento en un material granular donde incorporaron un parámetro que explica el efecto de la dilatancia que ocurre en etapas iniciales de flujo.

Sturla et al. (2022), estudiaron la influencia de parámetros físicos del material granular y del diseño de bateas de extracción en el flujo gravitacional en minería de *block caving*, encontrando que el coeficiente de fricción estática, la resistencia a la rodadura y el ángulo de zanja de bateas de extracción impactan significativamente en la evolución y forma de la IEZ.

Reyes et al. (2021), estudiaron la caracterización de elipsoides de extracción con material cohesivo y obtuvieron que el grado de cohesión y una excesiva movilidad de material influyen en el ancho de la IEZ y que el alto de la IEZ aumenta con la interacción de flujos simultáneos que se distancian a valores menores al ancho de la elipsoide de extracción.

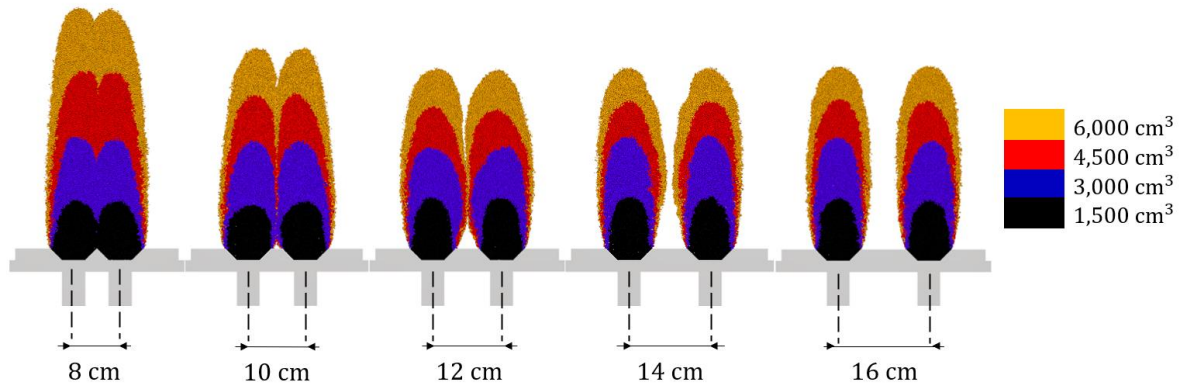


Figura 2.8: Efecto del espaciamiento entre puntos de extracción (Reyes et al., 2021)

Leyton et al. (2022) investigaron los efectos de la secuencialidad y cantidad de puntos de extracción en la IEZ y concluyeron un aumento en la altura y disminución del ancho del elipsoide de extracción en comparación al tiraje aislado, además de relacionar matemáticamente la geometría de la elipsoide de extracción con la masa extraída, tal como se describe en la **ecuación 2.1** y **ecuación 2.2**.

$$H_{IEZ} = \begin{cases} 230m^{0.450}, & 0 \leq m < 0.46 \\ 135m + 100, & m \geq 0.46 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$W_{IEZ} = \begin{cases} 145m^{0.450}, & 0 \leq m < 0.94 \\ 6.60m + 135, & m \geq 0.94 \end{cases} \quad (2.2)$$

En un estudio reciente, llevado a cabo por **Morales et al. (2023)**, proponen un modelo matemático para describir el flujo gravitacional en condiciones de *block caving*, que ha sido validado con experimentos realizados por **Fullard et al. (2019)** obteniendo mejores ajustes en las IEZ y perfiles de velocidad en comparación con otros modelos analíticos.

En 2024, **Carvallo, Palma y Pulgar**, trabajaron en el desarrollo de ábacos de diseño para minería subterránea centrándose en el modelo **Morales et al. (2023)**. Utilizaron simulaciones numéricas mediante el software COMSOL Multiphysics® para analizar el comportamiento del flujo gravitacional en zonas de extracción aislada (IEZ) al variar parámetros como el ángulo de zanja, ángulo de fricción, diámetro de partícula y número adimensional Y_0 . El trabajo realizado buscó reemplazar métodos empíricos como el Ábaco de Laubscher para optimizar la extracción minera, reducir los tiempos de planificación y mejorar la seguridad operativa en procesos de *caving*.

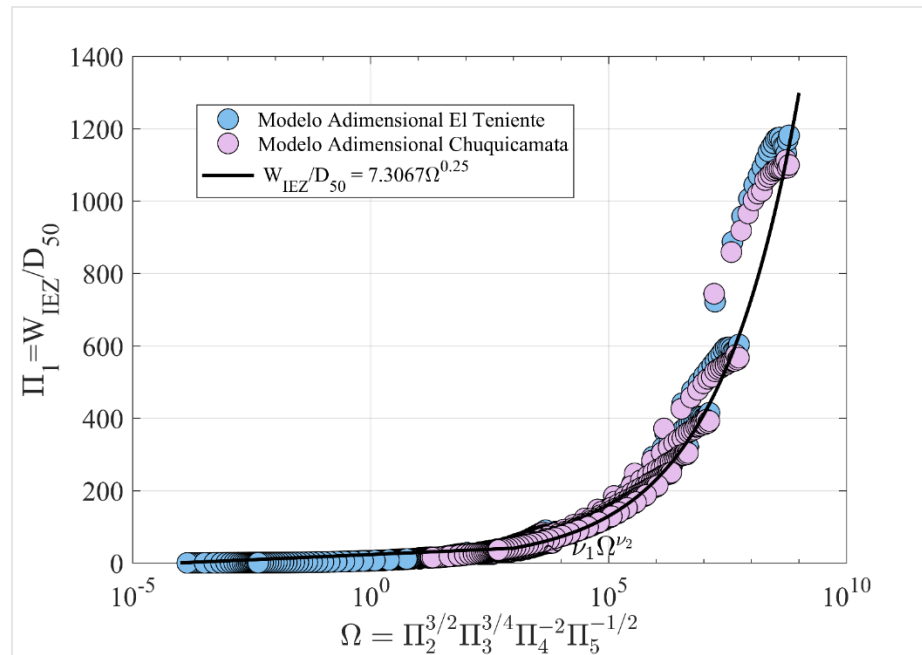


Figura 2.9: Modelo de Carvallo, Palma y Pulgar (Pulgar et al., 2024)

Durante el presente año (2025), **Bocaz & Palma**, cuantificaron el tamaño y evolución de la Zona de Extracción según la secuencia de apertura de puntos de extracción y propiedades del material utilizando la comparación de resultados de datos DEM, FEM y experimentación física. Entre los resultados, encontraron que las dimensiones de las zonas de extracción se ven afectadas por la apertura progresiva de los puntos de extracción, donde se vio reducido

el ancho y aumentado el alto en escenarios donde se tienen múltiples puntos de extracción contiguos.

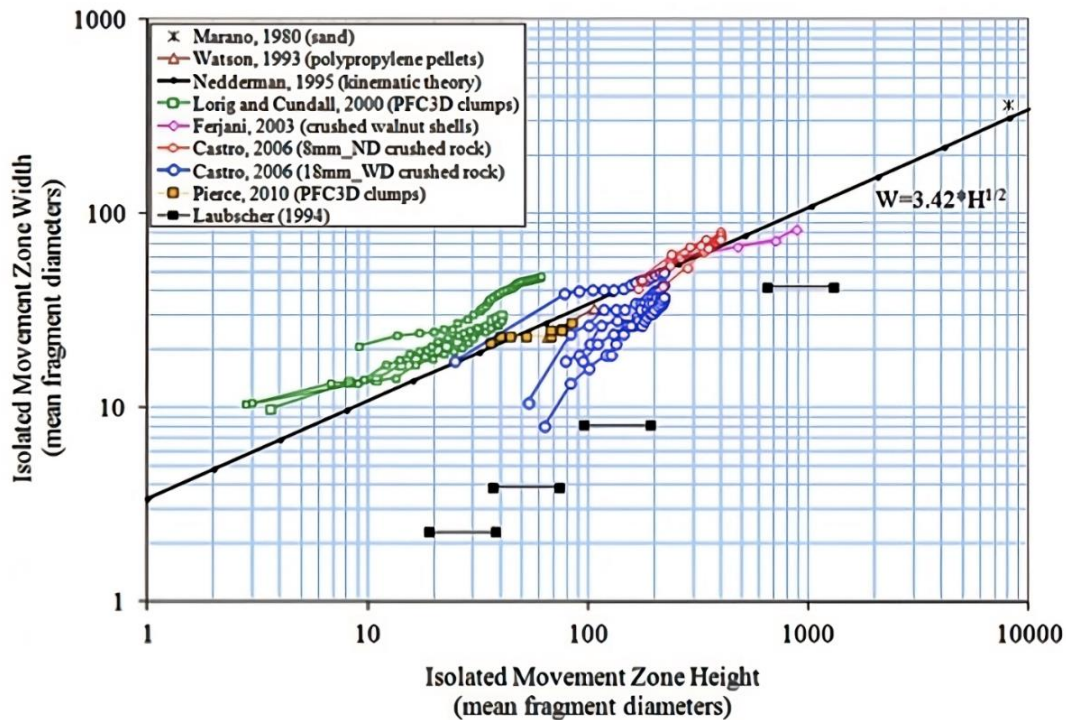


Figura 2.10: Comparación del ancho y alto de la IMZ a partir de experimentos y simulaciones en 3D, la teoría cinemática de Nedderman (1995) (línea sólida y ecuación) y modelo empírico de Laubscher (1994) (ITASCA, 2024).

La comparación gráfica realizada por **ITASCA (2024)** entre resultados de las dimensiones de la Zona de Extracción obtenidas a partir de experimentos y simulaciones 3D con el modelo cinemático de **Nedderman (1995)** y el modelo de **Laubscher (1994)** demostró consistencia con el primer modelo, no así con el segundo, donde el ancho de la *EZ* para materiales gruesos son claramente más estrechos resultando en el desarrollo de Zonas de Extracción Aisladas en la mayoría de los diseños modernos de minería de *caving*, impidiendo la interacción entre flujos de materiales.

Si bien hay avances significativos en el estudio del fenómeno en sí, aún no se ha desarrollado una herramienta general para el diseño optimizado de mallas de extracción en minería de *caving* con la capacidad de incorporar variables relevantes del flujo gravitacional y reemplazar metodologías empíricas como el mencionado Ábaco de **Laubscher**,

2.4 Modelos analíticos

El comportamiento del flujo gravitacional ha intentado ser descrito correctamente por diversos métodos que se fundamentan en modelos analíticos que describen el sistema mediante valores promedio de sus magnitudes, donde el resultado es la descripción del campo de velocidades producido al descargar material granular desde un punto de extracción.

En este contexto, se postulan dos enfoques principales. El primero describe a los modelos de plasticidad, que se fundamenta en aspectos mecánicos asumiendo un estado tensional crítico e imponen condiciones sobre las componentes del tensor de esfuerzos como es usual en la mecánica de suelos, el principal problema se debe a que conlleva a discontinuidades que no se presentan en los experimentos **Choi et al. (2005)**. El segundo describe cinemáticamente el movimiento de las partículas ignorando el estado tensional y postulando que las partículas se deslizan a través de vacíos generados por la descarga de material, el "Modelo de Difusión de Vacíos" de **Mullins (1972)** explica este fenómeno de forma estocástica, mientras que el Modelo Cinemático de **Nedderman & Tüzün (1978)** describe la relación entre las componentes horizontales y verticales del campo de velocidades. Ambos modelos han sido útiles, pero presentan limitaciones con materiales compactos.

Como alternativa para entender el flujo granular por acción de la gravedad **M. Bazant (2004)** propone el Modelo de Burbujas, el cual asume la existencia de “burbujas” como elementos distribuidos espacialmente encargados de transportar el espacio libre generado por la descarga de material, lo que provoca el desplazamiento del conjunto de partículas como un movimiento difusivo. Este modelo describe el comportamiento de las partículas de acuerdo con la velocidad que predice el Modelo Cinemático de **Nedderman y Tüzün (1978)**.

Posteriormente, **Kamrin et al. (2008)** introducen la Regla de Flujo Estocástico (SFR, por sus siglas en inglés), que extiende el modelo de burbujas abordando condiciones de flujo más amplias, donde se asumen tensiones de estado límite de la plasticidad de Mohr-Coulomb, y que los “puntos” fluyen aleatoriamente en función de desequilibrios de estados tensionales locales. Las predicciones analíticas del SFR concuerdan con simulaciones DEM (Discrete Element Method) para el flujo gravitacional en silos, y el resultado es el mismo que proporciona el Modelo de Burbujas.

Un estudio más reciente, llevado a cabo por **Morales et al. (2023)**, propone un modelo matemático para describir el flujo gravitacional en condiciones de block caving, donde la dinámica está controlada por un número adimensional Y , que se obtiene a partir de la relación entre las fuerzas impulsoras y las resistencias. El modelo ha sido validado con experimentos realizados por **Fullard et al. (2019)** con uno y dos puntos de extracción, obteniendo mejores ajustes en las IEZ y perfiles de velocidad en comparación con el modelo cinemático.

En el modelo de **Morales et al. (2023)** se describe el esquema sugerido por el modelo de vacíos a partir de la segunda Ley de Newton (2.3). En este sentido, el grupo de rocas forma un volumen de diámetro D_h que se desplazará cuando la fuerza impulsora f sea mayor que la fuerza resistente f_t que se desarrolla en la interfaz con el medio estático. El esquema descrito puede ser observado en la **Figura 2.11**.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \sum F = f + f_t \quad (2.3)$$

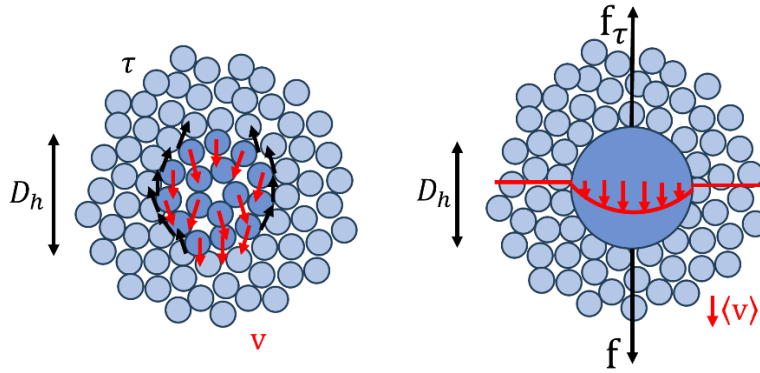


Figura 2.11: Esquema conceptual del modelo de Morales, Vivanco & Palma (Adaptado de Morales et al., 2023).

En este estado, el comportamiento es friccional, por lo que, suponen que la fuerza resistente (equivalente a la fricción interna del material) f_t es equivalente a $\mu P/D_h$, donde μ es el coeficiente de fricción y P es la presión. Además, la fuerza impulsora, que se calcula como la diferencia entre la divergencia del tensor de esfuerzos y la fuerza de gravedad que actúa sobre la densidad del material, queda descrita por $f = \nabla \cdot \sigma - \rho g$. De esta forma, para que el movimiento del conjunto de partículas ocurra, se requiere que $\|\nabla \cdot \sigma - \rho g\| \geq \mu P / D_h$.

Con la finalidad de encapsular aquellas fuerzas que resisten al movimiento, se define el número adimensional Y ,

$$Y = \frac{D_{50} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g}\|}{\mu P} \quad (2.4)$$

Donde, el movimiento de partículas ocurre cuando

$$Y \geq Y_0, \text{ donde } Y = D_{50} / D_h \quad (2.5)$$

La fuerza de fricción puede contribuir viscosidades asociadas al desplazamiento relativo entre rocas vecinas, entonces, si $Y > Y_0$ se incorpora un término del orden de $32\nu\rho\mathbf{V}/D_h^2$ donde ν tiene unidades de m^2/s y se interpreta como una viscosidad cinemática. Así, la ecuación de movimiento para un conjunto de partículas movilizadas se puede describir mediante,

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} - \frac{\mu P}{D_h} \hat{\mathbf{V}} - \frac{32\nu\rho}{D_h^2} \mathbf{V} \quad (2.6)$$

Donde para escalas de tiempo mayor que $D_h^2/32\nu$, $\hat{\mathbf{V}} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g})/\|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g}\|$. A partir de esto se obtiene entonces que la densidad de flujo para el grupo de rocas movilizadas es,

$$\mathbf{j} = -\frac{D_h^2}{32\nu} \chi(-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}) \quad (2.7)$$

La introducción de la función $\chi = \chi(Y_0/Y)$, que depende de variables adimensionales, y si interpretación corresponde a la ocurrencia o no ocurrencia del desplazamiento de partículas. La ecuación que se obtiene corresponde a una analogía de la Ley de Darcy, pero incorporando un esfuerzo de fluencia de la siguiente forma:

$$\chi = \begin{cases} 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{Y_0}{Y}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{Y_0}{Y}\right)^4, & \text{si } Y \geq Y_0 \\ 0, & \text{si } Y < Y_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Para aplicar la ecuación al flujo de rocas en *block caving*, se debe resolver la ecuación (2.7) asumiendo una relación entre las componentes del tensor de esfuerzos. Según **Kamrin et al. (2008)**, el esfuerzo principal mayor ocurre en la vertical cuando se tiene un estado de empuje

activo donde las partículas se desplazan en la dirección favorecida por la gravedad. De esta forma,

$$\sigma_{xx} = -\rho gh(1 - \sin \phi), \quad \sigma_{yy} = -\rho gh(1 + \sin \phi), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (2.9)$$

Incorporando lo anterior, el cociente de los números adimensionales Y/Y_0 , definidos en la **ecuación (2.4)** y la **ecuación (2.5)** se obtiene que las componentes de la **ecuación (2.7)** son,

$$u = -u_0 \chi \left[\frac{\partial h}{\partial x} (1 - \sin \phi) \right] \quad (2.10)$$

$$v = -u_0 \chi \left[\frac{\partial h}{\partial y} (1 + \sin \phi) + 1 \right] \quad (2.9)$$

Donde,

$$u_0 = \frac{D_{50}^2}{32Y_0^2\nu} g \quad \text{y} \quad h = \frac{P}{\rho g} \quad (2.10)$$

Estas últimas 3 ecuaciones fueron resueltas usando el método de elementos finitos en el software COMSOL Multiphysics® asumiendo un estado incompresible donde $(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$ para reproducir los experimentos de Fullard, asumiendo las siguientes condiciones de borde que se ilustran en la **Figura 2.12**:

- Velocidad horizontal nula en las paredes verticales del contenedor.
- Velocidad vertical nula en la base del contenedor.
- Presión nula en la parte superior del contenedor.
- Velocidad descendente en los puntos de extracción.

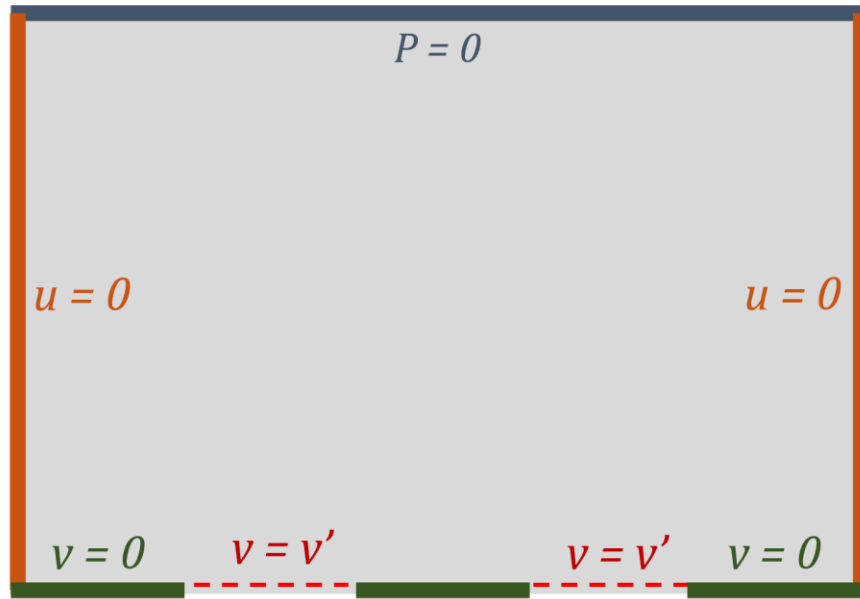


Figura 2.12: Condiciones de borde del modelo (Adaptado de Morales et al., 2023).

El resultado fue un mejor ajuste de la IEZ (Figura 2.13) y del campo de velocidades en la vertical comparado con el modelo cinemático. Si bien el modelo no es completamente perfecto, logra ser un avance importante entre los estudios que se tienen hasta ahora para reproducir el comportamiento del flujo de material granular para minería de *caving*.

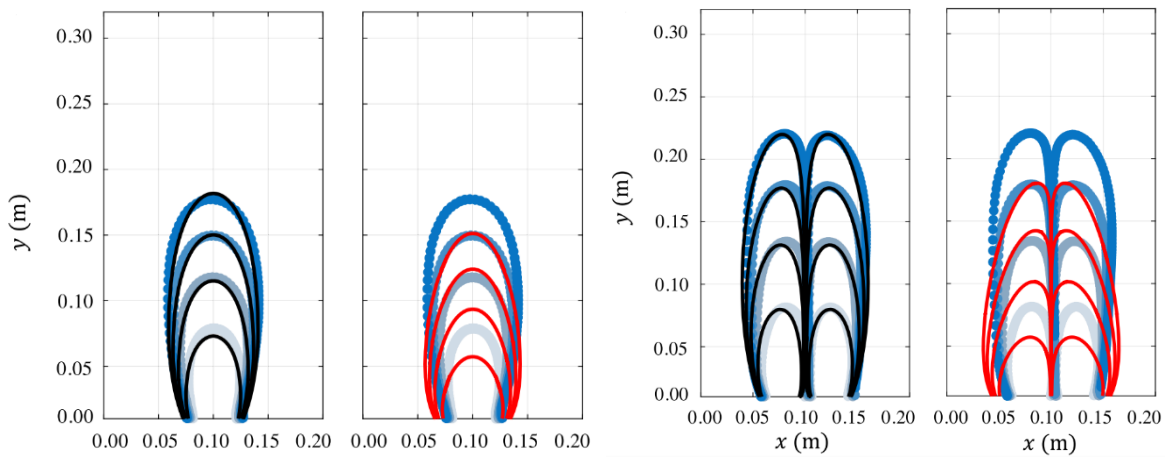


Figura 2.13: Comparación entre la IEZ a distintos tiempos de extracción entre los experimentos de Fullard et al. 2019, en color azul, el modelo de Palma y Morales en color negro y el Modelo Cinemático en color rojo (Morales et al., 2023).

2.5 Método de Elementos Finitos (FEM)

El Método de Elementos Finitos (FEM) es una técnica numérica que permite resolver problemas complejos de ingeniería y ciencias aplicadas, tal como el flujo de fluidos o el movimiento de materiales granulares. El principio fundamental consiste en dividir un dominio continuo en un conjunto de subdominios discretos (Jagota et al., 2013; J. N. Oden, 2005)

Con la discretización se generan “elementos” (subdominios discretos) y “nodos” (ubicados en los vértices de los elementos). La función de los nodos es la de actuar como puntos de referencia donde se aproximan las soluciones de las variables del fenómeno, como velocidad, presión o temperatura. En los nodos, las soluciones de las ecuaciones se calculan mediante métodos numéricos para luego interpolar los resultados hacia dentro de los elementos usando funciones de forma (Douglas et al., 2009; Fuentes et al., 2015).

FEM, permite modelar fenómenos dependientes del tiempo y espacio a partir de los grados de libertad. En función de las soluciones locales se genera una solución global sobre la cual se aplican condiciones de borde (Lozovski et al., 2018). Por ello, el método es ampliamente utilizado en áreas como la fluidodinámica y el estudio de flujos granulares.

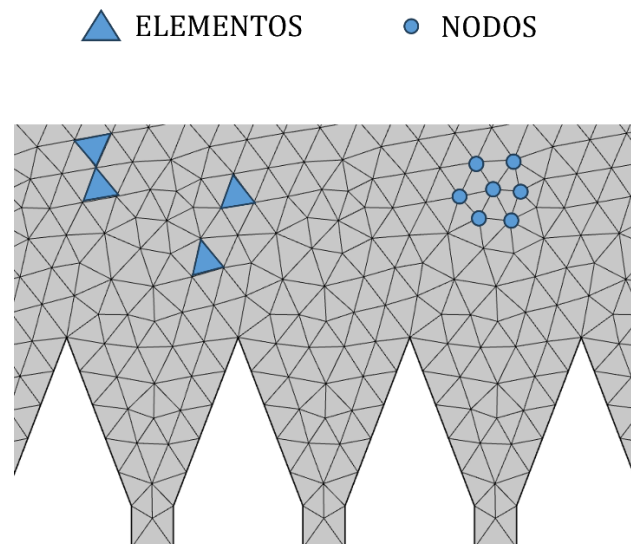


Figura 2.14: Discretización por el método de elemento finitos (FEM).

3 CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

En este capítulo se describen los parámetros y la configuración de los casos de estudio para cuantificar las dimensiones de los elipsoides de extracción durante extracción simultánea (W_{EZ} , H_{EZ}) y el espaciamiento entre elipsoides de extracción (E_{EZ}) en escenarios de *block caving*.

Para reproducir el *block caving* se desarrolló la configuración geométrica a escala (1:100) del macizo rocoso fragmentado y de las bateas de extracción dentro del software COMSOL Multiphysics®. Se incorporaron propiedades de roca fracturada y del flujo del material granular, que son parámetros que afectan a la geometría de la *EZ* y por ende a la E_{EZ} . De esta manera, en este estudio se analiza la influencia del ancho del punto de extracción (D_w), distanciamiento entre puntos de extracción (S), ángulo de fricción de partículas (ϕ), diámetro de partículas (D_{50}) y magnitud de la velocidad (u_0).

Los experimentos se realizaron mediante simulaciones y modelado en el software COMSOL Multiphysics®, donde se aplicó el conjunto de ecuaciones descritas por **Morales et al., (2023)** para entornos de *block caving*, quienes lograron un mejor ajuste en las curvas de extracción y campos de velocidades en comparación a otros modelos que intentan describir el flujo gravitacional.

Los resultados obtenidos a partir de las simulaciones computacionales son tratados mediante códigos para el análisis de datos en el software MATLAB®, dichos códigos tienen el objetivo de cuantificar las dimensiones de la *EZ* y el espacio que se genera entre ellas (E_{EZ}).

Finalmente, esta metodología tiene como objetivo desarrollar un modelo matemático capaz de permitir la optimización de mallas de extracción.

3.1 Diseño Geométrico

En métodos de explotación de block *caving*, se tiene una gran columna de mineral en proceso de fragmentación. En la base de esta columna se desarrollan bateas de extracción, que conecta el nivel de hundimiento con el nivel de extracción (Douglas, 1992).

López (2016), detalla que una batea de extracción se puede parametrizar por 8 variables, tal como se ilustra en la **Figura 3.1**:

- L : Largo de batea.
- H : Alto de batea.
- T_w : Ancho superior de batea
- T_h : Largo superior de batea
- D_w : Ancho inferior de batea o ancho punto de extracción o ancho de zanja.
- D_h : Alto punto de extracción o alto de zanja.
- α : Ángulo de zanja.
- β : Ángulo de Crown Pillar.

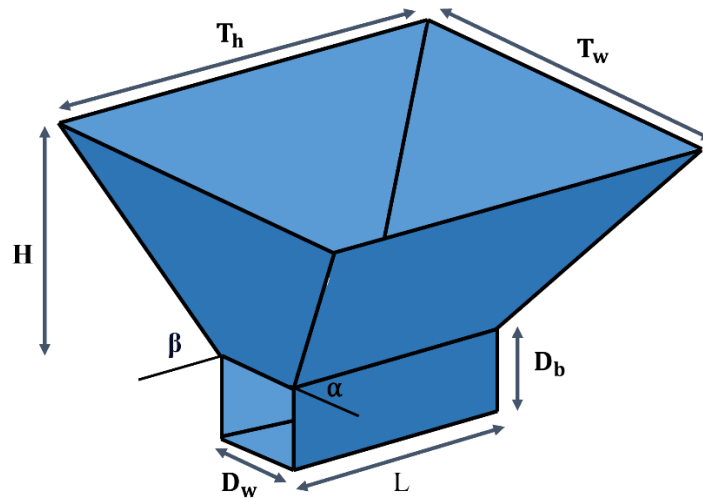


Figura 3.1: Parametrización del diseño de bateas de extracción. Adaptado de López (2016).

Los valores de las dimensiones de los parámetros a utilizar para el desarrollo de las bateas de extracción son los correspondientes a la Mina Diablo Regimiento de El Teniente presentados

por **López (2016)**, quien los obtuvo a partir de un estudio de las bateas de extracción utilizadas para minas de *block/panel caving* de CODELCO, los valores seleccionados fueron escalados (1:100) y se presentan en la **Tabla 1**.

Tabla 1: Dimensiones escaladas (1:100) de bateas en mina Diablo Regimiento, El Teniente (López, 2016).

Mina	L (m)	H (m)	T_w (m)	T_h (m)	D_w (m)	D_b (m)	α (°)	B (°)
Diablo Regimiento, El Teniente.	0.14	0.16	0.163	0.34	0.045	0.04	70°	58°

El esquema en el que se desarrolló este estudio corresponde a un modelo bidimensional. Por simplificación, se utilizó un corte transversal para la modelación de las bateas de extracción, que tomó en cuenta el ángulo de zanja (α) correspondiente a 70°. Con los anterior, el flujo granular se realiza desde la base de las bateas de extracción, más específicamente, desde el segmento correspondiente al diámetro del punto de extracción D_w , observado en la **Figura 3.2**.

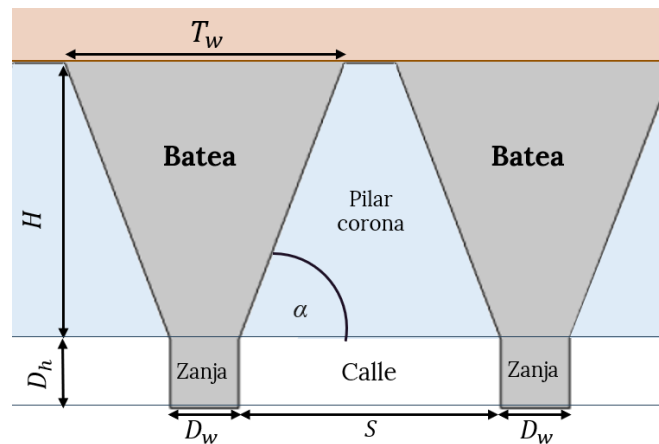


Figura 3.2: Diseño de Geometría (vista corte transversal).

Luego, se incorporó la columna de mineral fragmentado que tiene dimensiones de 3 m de alto y 4 m de ancho (dimensiones escaladas 1:100), la cual representa el masivo minero. El modelo cuenta con 10 bateas de extracción ubicadas en la base de la columna de mineral, de las cuales solo 5 se encontraron operativas para la simulación del flujo gravitacional.

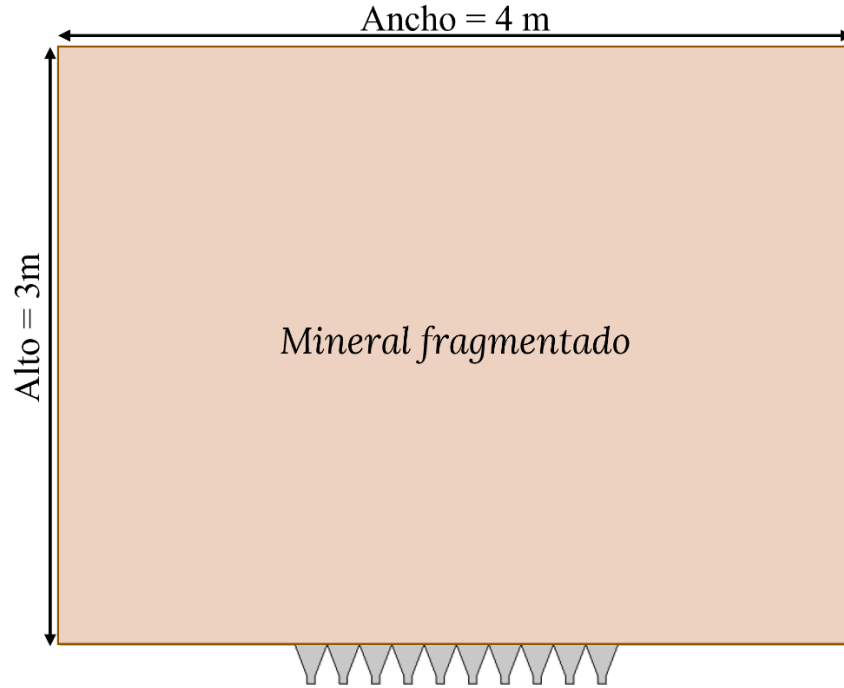


Figura 3.3: Diseño de Geometría escalado (vista general).

3.2 Variables de Estudio

El objetivo de este estudio fue analizar y cuantificar la influencia de variables sobre el alto y ancho de los elipsoides de extracción en escenario de extracciones simultáneas, además del espaciamiento generado entre elipsoides de extracción (E_{EZ}). Las variables elegidas fueron seleccionadas a partir de los estudios de autores descritos en el marco teórico y tienen un impacto relevante sobre la forma del elipsoide de extracción y el flujo gravitacional.

Las variables incorporadas al estudio tienen relación directa con la geometría de las mallas de extracción, propiedades de roca fracturada y del flujo del material granular. En este contexto, se incluyen para el análisis el ancho del punto de extracción (D_w), distanciamiento entre puntos de extracción (S), ángulo de fricción de partículas (φ), diámetro de partículas (D_{50}) y magnitud de la velocidad (u_0). Estas, se presentan en la **Tabla 2**, donde se observan los valores fijos y rangos en los que se hicieron variar los parámetros del estudio. Además, se debe tener en cuenta que cuando uno de los parámetros se mantiene variable, los demás permanecen constantes.

Tabla 2: Parámetros de estudio.

Parámetros				
Variable	Valor	Rango	Δ Valor	Unidad
D_{50}	0.0025	0.0001 – 0.0050	0.0001	m
φ	36	20 - 45	1	°
D_w	0.04	0.04 – 0.05	0.01	m
S	0.153	0.123 – 0.193	0.01	m
u_0	0.1	0.050 – 0.150	0.002	m/s

El valor fijo de S fue ajustado con el objetivo de permitir que los elipsoides de extracción pudieran interactuar o bien se espaciaron. El valor de D_w se seleccionó para ajustarse a S y cumplir con el mismo objetivo (analizar la interacción de las Zonas de Extracción).

Para D_{50} , se utilizó el rango de valores presentados por **Castro et al. (2020)** en un estudio de cuantificación de tensiones verticales durante el flujo gravitacional en *block caving*. El rango de valores del ángulo de fricción (φ) pertenece al rango de valores presentados por **Hoek & Bray (1981)** para distintos tipos de suelo. Los valores de la magnitud de la velocidad (u_0) para las simulaciones y su posterior análisis fueron seleccionados a partir del análisis de sensibilidad de **Morales et al. (2023)**.

3.3 Configuración de COMSOL Multiphysics®

En COMSOL Multiphysics® se diseñó el modelo en el cual se llevaron a cabo las simulaciones. El modelo corresponde al descrito en el **título 3.1**, donde se presentaron los parámetros y geometrías de las bateas de extracción junto a la columna de mineral fragmentado.

El software, mediante el método de elemento finitos (FEM) discretiza el modelo y resuelve las ecuaciones (2.8) y (2.9) descritas por el modelo de **Morales et al. (2023)**.

Se impusieron las condiciones de borde y flujo que corresponden a las descritas por **Morales et al. (2023)** que responden a las siguientes:

- Velocidad horizontal nula en las paredes horizontales del modelo ($u = 0$).

- Velocidad vertical nula en la base del modelo ($v = 0$).
- Presión nula en la cara superior del modelo ($P = 0$).
- Velocidad descendente en los puntos de extracción ($v = v'$).

Estas condiciones quedan ilustradas en la **Figura 3.4** para el modelo utilizado en este estudio.

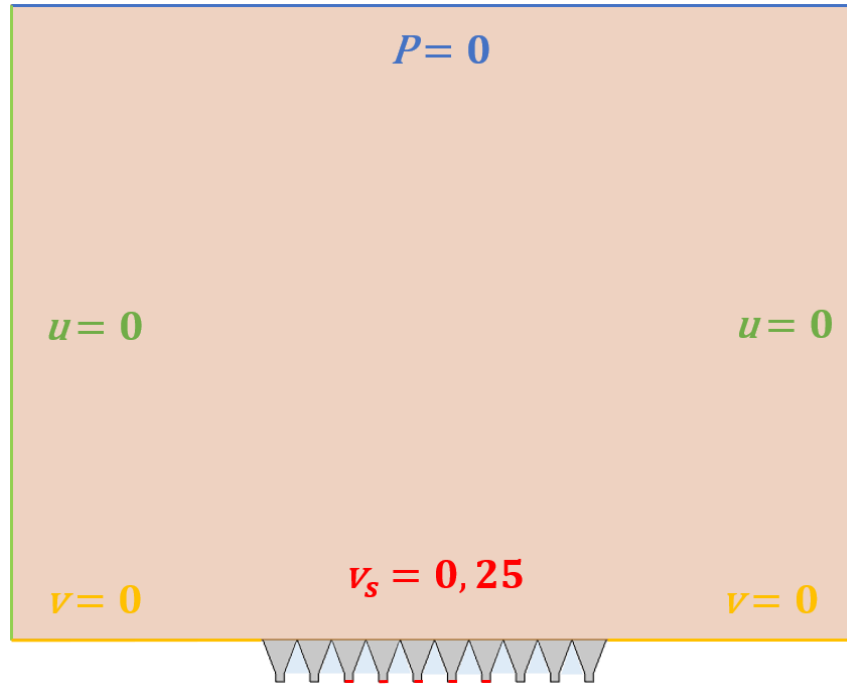


Figura 3.4: Condiciones de borde del modelo en COMSOL Multiphysics.

3.4 Simulaciones

La utilización de COMSOL Multiphysics® permitió llevar a cabo las simulaciones en su totalidad. El software incluye herramientas de simplificación para realizar simulaciones. Los casos de estudio se simularon mediante barrido paramétrico, permitiendo disminuir la complejidad de cada caso de estudio y reducir los costos de tiempo total de simulación. Además, se configuró el trazado de partículas de elipsoides de extracción para 20 instantes de tiempo diferentes (**Figura 3.5**) que van desde $t_1 = 0,25$ s hasta $t_{20} = 5$ s, generando 20 *EZ* por cada punto de extracción y permitiendo obtener un aumento en la cantidad de resultados. La cantidad de resultados se cuantifica en un total de 21.500 datos de W_{EZ} , 21.500 datos de H_{EZ} y 17.200 distintos valores de E_{EZ} .

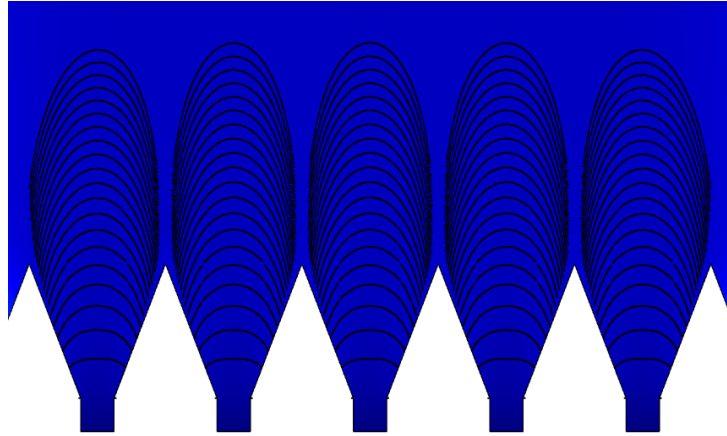


Figura 3.5: Simulación con 20 instantes de tiempo que conforman distintas EZ.

Se desarrollaron 4 casos de estudio. Durante los casos de estudio, solo variaron los parámetros propuestos para cada caso, mientras que los demás permanecieron constantes de acuerdo con la **Tabla 2**.

3.4.1 Caso de estudio N°1: Variación del ancho de puntos de extracción D_w y distanciamiento entre puntos de extracción S .

El caso de estudio N°1 consistió en simular el flujo gravitacional para distintos valores de ancho de puntos de extracción D_w y distintos valores de distanciamiento entre puntos de extracción S .

Para S se simulaban 8 valores que van desde $S = 0,123$ m hasta $S = 0,193$ m, en pasos de $\Delta S = 0,01$ m. Luego, para cada valor de S se simulaban 11 valores de D_w desde $D_w = 0,040$ m hasta $D_w = 0,050$ m en pasos de $\Delta D_w = 0,001$ m. De este caso de estudio se obtuvo un total de 88 simulaciones.

3.4.2 Caso de estudio N°2: Variación del diámetro de partícula D_{50} .

El caso de estudio N°2 consistió en simular el flujo gravitacional para 50 valores de diámetro de partícula D_{50} , obteniéndose un total de 50 simulaciones. Se hizo variar el ángulo de fricción desde $D_{50} = 0,0001$ m hasta $D_{50} = 0,0050$ m en pasos de $\Delta D_{50} = 0,0001$ m.

3.4.3 Caso de estudio N°3: Variación del ángulo de fricción φ .

El caso de estudio N°3 consistió en simular el flujo gravitacional para 26 valores de ángulo de fricción φ desde 20° hasta 45° , con intervalos de $\Delta\varphi = 1^\circ$, obteniéndose un total de 26 simulaciones.

3.4.4 Caso de estudio N°4: Variación de u_0 .

Finalmente, el caso de estudio N°4 consistió en simular el flujo gravitacional para 50 valores de la magnitud de la velocidad (u_0), obteniéndose un total de 50 simulaciones que van desde $u_0 = 0,050$ m/s hasta $u_0 = 0,150$ m/s con intervalos de $\Delta u_0 = 0,002$.

3.5 Procesamiento de Datos

El procesamiento de datos comienza con la exportación de los resultados en archivo .txt de cada simulación desarrollada en COMSOL Multiphysics®. Los archivos (.txt) exportados contienen la información precisa de la posición bidimensional (es decir, en los ejes x e y) de cada partícula que encierra cada una de las distintas EZ para cada uno de los 20 instantes de tiempo generados para 5 segundos totales.

Luego, mediante el uso de MATLAB® se procesaron los resultados obtenidos a partir de COMSOL Multiphysics®. El propósito consistió en obtener las dimensiones de W_{EZ} y H_{EZ} de cada una de las EZ , junto a los espaciamientos E_{EZ} generados entre cada uno de los 5 elipsoides de extracción de cada simulación de variable. Las dimensiones se guardaron en archivos .xlsx en Microsoft Excel, en donde, además, se calculó el promedio de las dimensiones, entregando valores representativos.

El siguiente paso consistió en graficar W_{EZ} vs H_{EZ} en función de los parámetros estudiados mediante MATLAB®. La E_{EZ} en función de las variables estudiadas también fueron graficadas e incluidas en el **Anexo 7.2**. Además, dentro del mismo software se procesaron los resultados para realizar un análisis estadístico de los resultados.

Finalmente, nuevamente con el uso de MATLAB® se realizó un análisis de datos más detallado para la creación del modelo matemático que relaciona el ancho del elipsoide de extracción (W_{EZ}) con su alto y los parámetros estudiados ($H_{EZ}, D_w, S, D_{50}, \varphi, u_0, t$).

3.5.1 Obtención de W_{EZ} , H_{EZ} y E_{EZ} .

Para obtener las dimensiones de W_{EZ} y H_{EZ} se utilizó la posición de cada partícula en cada EZ , donde W_{EZ} corresponde a la diferencia entre el mayor (X_2) y menor (X_1) valor en el *eje x*, de acuerdo con la **ecuación 3.1**. Luego, H_{EZ} corresponde al valor más positivo en el *eje y* (Y), de acuerdo con la **ecuación 3.2**. Lo previamente descrito, para cada elipsoide de extracción.

$$W_{EZ} = X_2 - X_1 \quad (3.1)$$

$$H_{EZ} = Y \quad (3.2)$$

Luego, para obtener E_{EZ} , se definió que $X_{i,n}$ y $X_{i+1,n}$ corresponden a valores en el *eje x*, donde i e $i+1$ son el menor y mayor valor entre cada n -elipsoide generado. De esta forma:

$$E_{EZ} = X_{i+1,n} - X_{i,n+1} \quad (3.3)$$

En resumen, lo anterior queda ilustrado en la **Figura 3.6**.

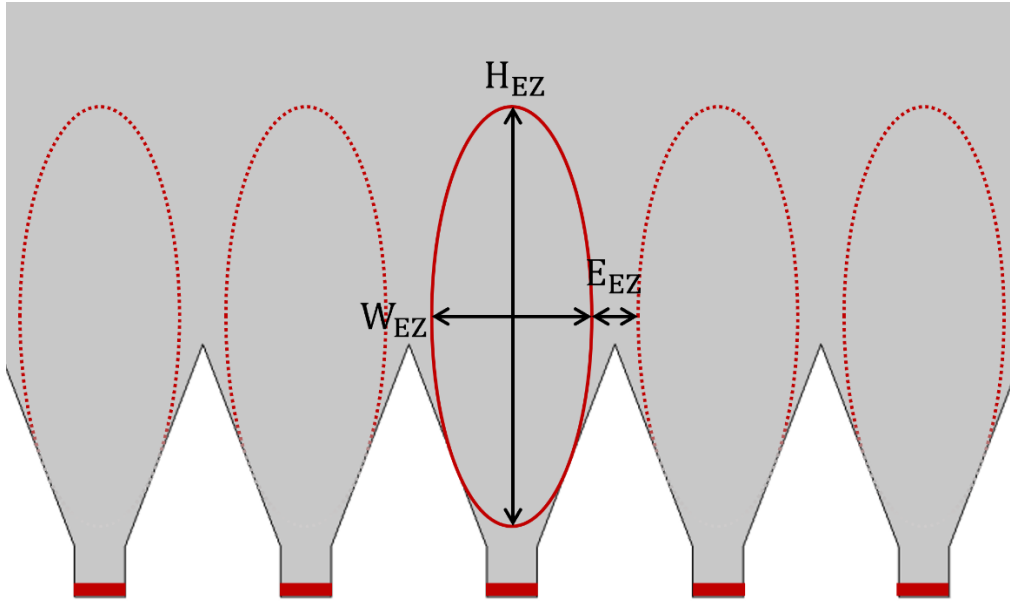


Figura 3.6: Representación de H_{EZ} , W_{EZ} y E_{EZ} .

3.5.2 Instantes de Tiempo

El software COMSOL Multiphysics® se configuró para obtener resultados de 20 instantes de tiempo distintos. Cada instante de tiempo tiene por significado una cantidad de masa extraída. La cantidad de masa extraída se puede calcular a partir la **ecuación (3.4)**, que representa el caudal que atraviesa un área a una velocidad determinada. Luego, incorporando una densidad del material de 2.600 kg/m^3 y el tiempo de extracción, se obtiene la masa extraída a partir de la **ecuación (3.5)**, que es representativa para cada instante de tiempo.

$$Q = V_0 * A \quad (3.4)$$

$$m = \rho * V_0 * A * t \quad (3.5)$$

Donde:

$$\rho = 2.600 \text{ kg/m}^3.$$

$$V_0 = 0,25 \text{ m/s}.$$

$$A = D_w^2 = 0,0016 \text{ m}^2.$$

t = instante de tiempo de 0,25 s hasta 5,00 s.

Luego, la masa extraída en función del tiempo de extracción se observa en la **Tabla 3**.

Tabla 3: Masa en función del tiempo de extracción.

t (s)	m (kg)	t (s)	m (kg)
0,25	0,26	2,75	2,86
0,50	0,52	3,00	3,12
0,75	0,78	3,25	3,38
1,00	1,04	3,50	3,64
1,25	1,30	3,75	3,90
1,50	1,56	4,00	4,16
1,75	1,82	4,25	4,42
2,00	2,08	4,50	4,68
2,25	2,34	4,75	4,94
2,50	2,60	5,00	5,20

4 CAPÍTULO IV: RESULTADOS

Los resultados que se obtuvieron a partir de las simulaciones numéricas permitieron cuantificar las dimensiones de la Zona de Extracción en escenarios de extracción simultánea. Dichos resultados, además, permitieron revelar interacciones físicas entre las variables estudiadas. En esta sección se discuten los hallazgos y cuáles son sus implicancias para el diseño de mallas de extracción.

4.1 Caso de estudio N°1: Influencia del ancho de puntos de extracción D_w y distanciamiento entre puntos de extracción S .

Se analizó la influencia tanto del ancho del punto de extracción como del distanciamiento entre bateas de extracción en la geometría de la EZ .

En la **Figura 4.1** se observan los resultados obtenidos al variar el ancho el punto de extracción para $D_w/D_{50} = 16$ y $D_w/D_{50} = 20$, respectivamente. Luego, en la **Figura 4.2** se observa el gráfico de W_{EZ} vs H_{EZ} normalizados por el tamaño medio de partícula (D_{50}). Se graficaron las dimensiones de la EZ para cada uno de los valores de ancho de puntos de extracción, durante los 20 instantes de masa extraída.

Aumentar el ancho del punto de extracción (D_w) resultó en un aumento tanto del alto (H_{EZ}) como del ancho (W_{EZ}) de las zonas de extracción (**Figura 4.1** y **Figura 4.2**). Este hallazgo se contrapone a los resultados reportados por autores como **Castro et al. (2007)**, quienes exponen que la variación del ancho del punto de extracción no tiene un efecto significativo en la geometría de las zonas de extracción. De forma similar, **Reyes et al. (2021)**, concluyen que esta variable tiene una influencia menor o secundaria sobre las geometrías de las zonas de flujo, reafirmando los resultados de **Castro et al. (2007)**. Dichos resultados corresponden a escenarios de extracción aislada y simultánea.

El resultado encontrado, donde D_w influye en el H_{EZ} y W_{EZ} es consistente con el desarrollo de la física del flujo granular bajo condiciones de confinamiento e interacción. Un aumento del ancho del punto de extracción (D_w) permite reducir la restricción geométrica al inicio del flujo, logrando que una mayor cantidad de volumen de material sea capaz de movilizarse a partir de etapas más tempranas. Esto, permite generar elipsoides de extracción más amplios. La restricción debido al espacio limitado producido por la interacción lateral entre los flujos

contiguos constriñe el material, forzando al material a continuar su flujo en una segunda etapa de crecimiento caracterizada por la expansión elipsoidal en la dirección vertical, aumentando la H_{EZ} .

La limitante del crecimiento en la dirección horizontal de la W_{EZ} generada para masas que superan los 3,64 kg y $D_w/D_{50} = 18.4$ otro claro ejemplo de la transición producida desde un estado de flujo pseudo-aislado a uno más bien interactivo, donde la interacción entre zonas de extracción contiguas produce un campo de esfuerzos de compresión que limitan la dilatación lateral e inducen la dilatación vertical.

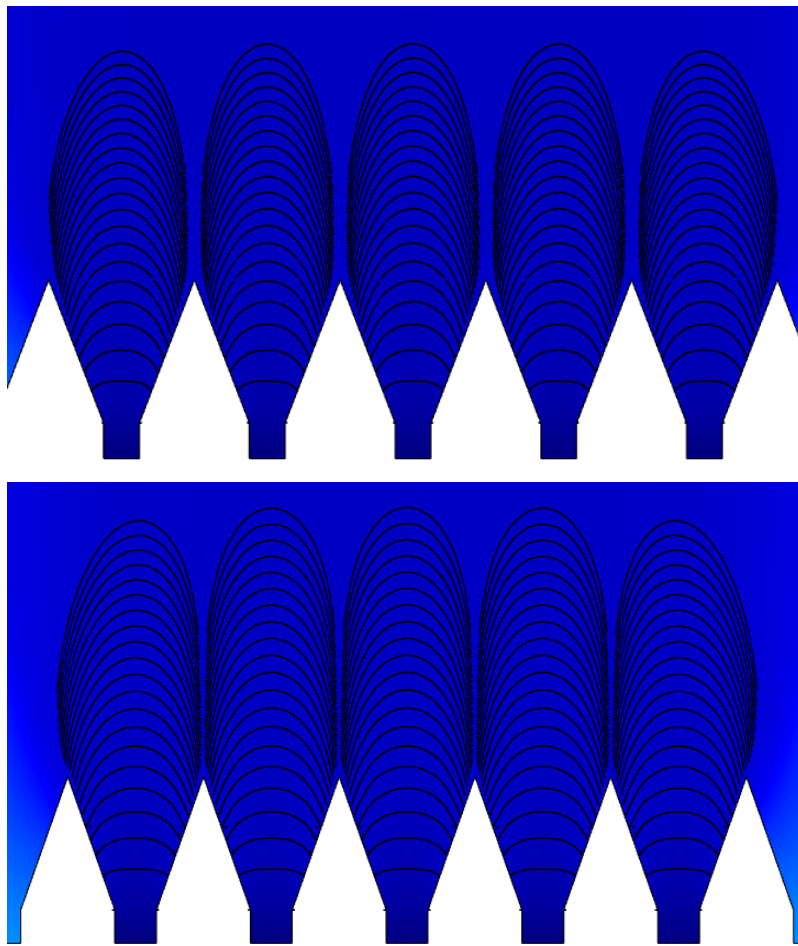


Figura 4.1: Comparación de elipsoides de extracción para diferentes anchos de puntos de extracción.

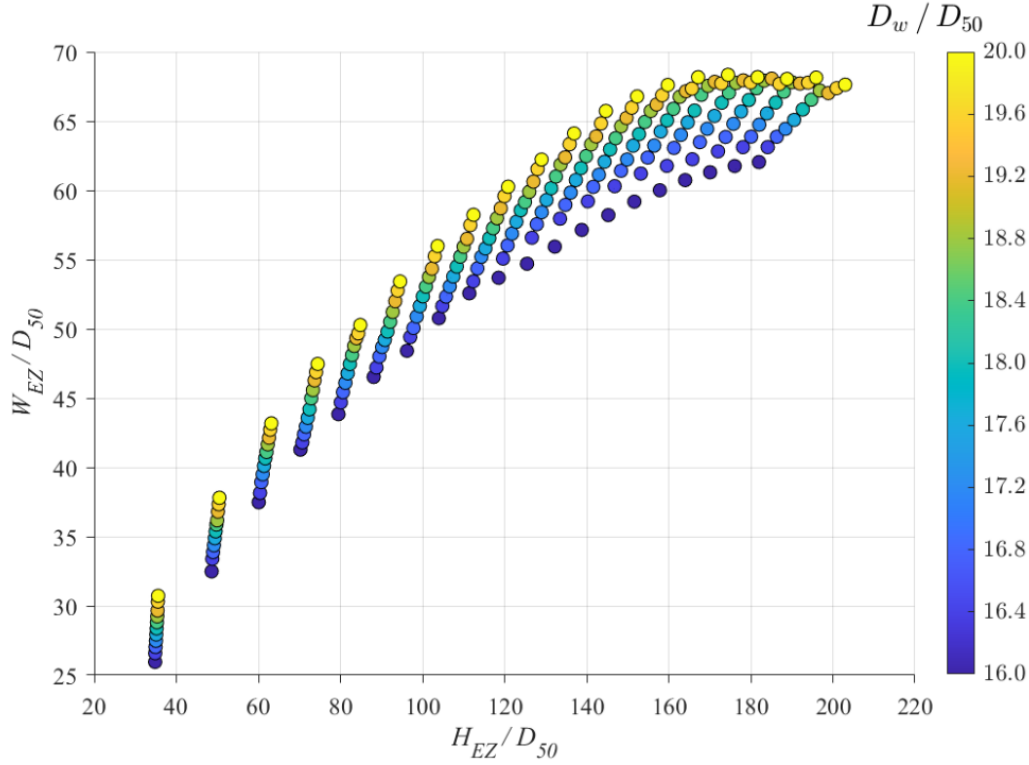


Figura 4.2: Gráfico de $\frac{W_{EZ}}{D_{50}}$ vs $\frac{H_{EZ}}{D_{50}}$ para 11 anchos de punto de extracción.

Posteriormente, se analizaron los resultados obtenidos por la variación del distanciamiento entre puntos de extracción. en la **Figura 4.3** se observan los resultados obtenidos para $S/D_{50} = 49.2$ y $S/D_{50} = 77.2$, respectivamente, donde $D_{50} = 0.0025$ m. También se graficaron los resultados de W_{EZ} vs H_{EZ} normalizados por el tamaño medio de partícula (D_{50}). En la **Figura 4.4** se observan las dimensiones de la EZ para los 8 distanciamientos entre puntos de extracción en los 20 instantes de masa extraída.

El análisis de la variación del distanciamiento entre puntos de extracción revela que este parámetro es el principal gobernante en la transición desde regímenes de flujo aislados e interactivos. Un aumento de S reduce la interacción entre flujos (**Figura 4.3**), permitiendo el desarrollo de las zonas de extracción como en escenarios de tiraje aislado. Los gráficos de los valores de ancho (W_{EZ}) y alto (H_{EZ}) normalizados (**Figura 4.4**) permiten identificar, en instantes de mayor masa extraída, tres regímenes: 1) Comportamiento del flujo aislado ($S/D_{50} \geq 61,2$), donde las dimensiones de las Zonas de Extracción son independientes y no se ven afectada por pares, 2) Transición al flujo interactivo ($61,2 \geq S/D_{50} \geq 53,2$) donde se

observa que existe una competencia entre la expansión natural de W_{EZ} y el confinamiento,

3) Flujo interactivo ($S/D_{50} \leq 53,2$) donde se aprecia el confinamiento horizontal. El valor de transición hacia el flujo interactivo $S/D_{50} = 53,2$ que ocurre para masas superiores a los 2,08 kg se ajusta con mayor precisión al rango de $S/D_{50} = 48 - 56$ para masas entre 1 – 3 kg presentado por **Reyes et al. (2021)**, lo que demuestra ventajas de modelos fisicomatemáticos por sobre aproximaciones de modelos puramente empíricos. El valor umbral de transición constituye un parámetro crítico de diseño que permite adecuar intencionalmente el balance entre la recuperación de mineral favorecida por la interacción de los flujos y la dilución que se ve favorecida por el aislamiento.

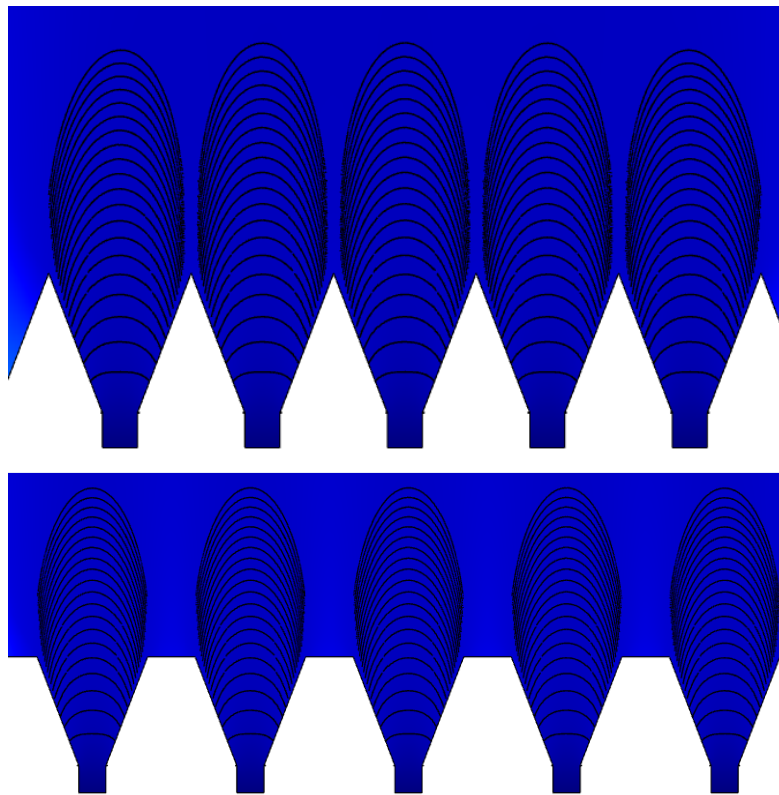


Figura 4.3: Comparación de elipsoides de extracción para diferentes distanciamientos entre bateas de extracción.

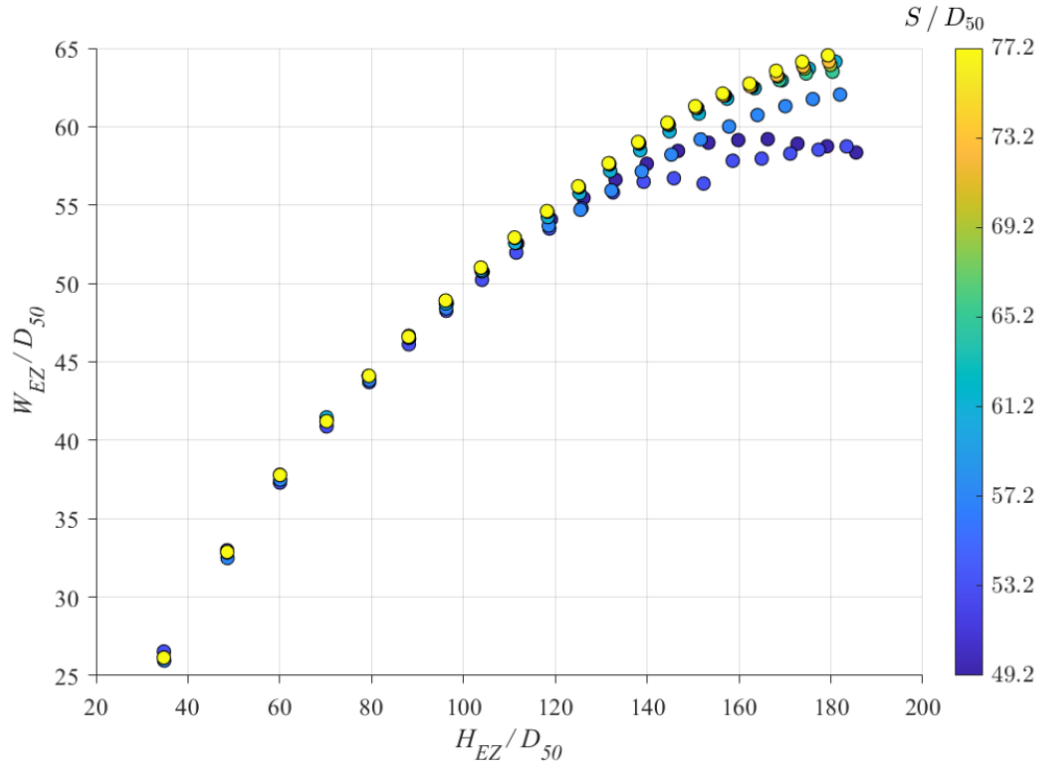


Figura 4.4: Gráfico de $\frac{W_{EZ}}{D_{50}}$ vs $\frac{H_{EZ}}{D_{50}}$ para diferentes distanciamientos entre puntos de extracción.

4.2 Caso de estudio N°2: Variación del diámetro de partícula D_{50} .

En este caso de estudio, se analizaron las dimensiones de la EZ en función del diámetro de partículas.

En la **Figura 4.5** se observan los resultados obtenidos para $D_{50} = 0.0001$ (m) y $D_{50} = 0.005$ (m), respectivamente. Para este caso, también se graficaron los resultados de W_{EZ} vs H_{EZ} normalizados por el tamaño medio de partícula (D_{50}), de 50 valores de diámetro medio de partículas, en 20 instantes de masa extraída, los que se visualizan en la **Figura 4.6**.

La influencia del diámetro de partícula (D_{50}) en la forma de la Zona de Extracción tiene un efecto fundamental. Un aumento en el tamaño de las partículas promueve el desarrollo de EZ s más anchas y menos altas (**Figura 4.5**). Esto, puede ser explicado por el efecto de arco

para el flujo granular de materiales gruesos, donde se tienen esfuerzos verticales reducidos, promoviendo el flujo en la horizontal, obteniéndose zonas de flujo más difusas y con menor grado de confinamiento en la dirección vertical. La normalización de W_{EZ}/D_{50} vs H_{EZ}/D_{50} (**Figura 4.6**) resalta el colapso entre las curvas, clasificando D_{50} como una variable escalable y clave, coincidiendo con lo propuesto por **Morales et al. (2023)** a través del número adimensional Y .

Estos resultados son consistentes con lo descrito por autores como **Carvallo et al. (2024)**, **Pulgar et al. (2024)** y **Laubscher (1994)**, donde el diámetro y alto de las zonas de extracción se puede interpretar en función del tamaño medio de las partículas o la fragmentación del material.

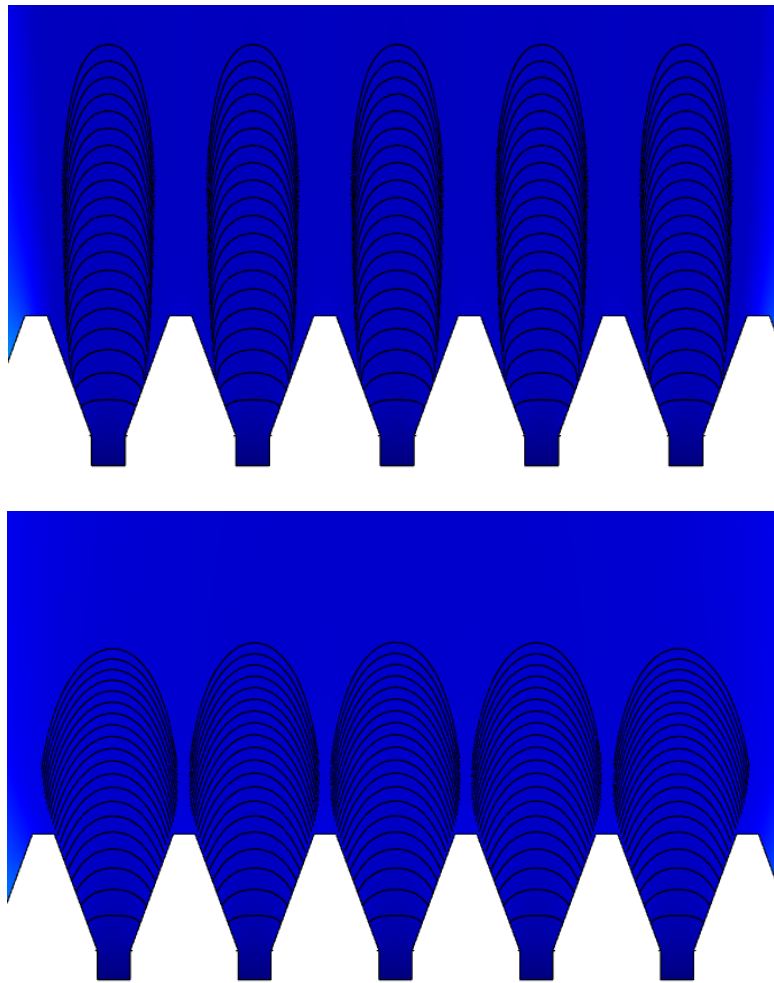


Figura 4.5: Comparación de elipsoides de extracción para diferentes valores de diámetro de partícula.

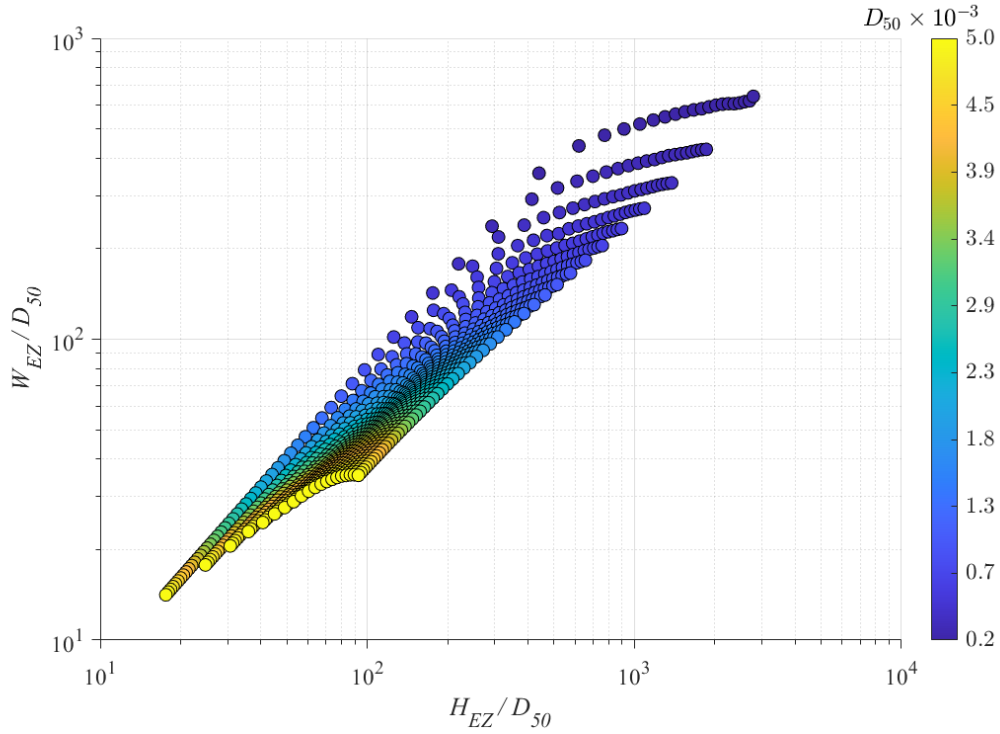


Figura 4.6: Gráfico de $\frac{W_{EZ}}{D_{50}}$ vs $\frac{H_{EZ}}{D_{50}}$ para 50 valores de diámetro medio de partículas.

4.3 Caso de estudio N°3: Variación del ángulo de fricción φ

En tercer lugar, se analizó la influencia del ángulo de fricción φ sobre las dimensiones de la EZ.

En la **Figura 4.7** se observa la comparación entre los resultados obtenidos para $\varphi = 20^\circ$ y $\varphi = 45^\circ$, respectivamente. Por otra parte, se graficaron los resultados de W_{EZ} vs H_{EZ} normalizados por el tamaño medio de partícula (D_{50}), esto, para los 26 valores de ángulo de fricción en cada uno de los 20 instantes de masa extraída (**Figura 4.8**).

El ángulo de fricción (φ) demostró una alta influencia. El aumento de φ genera EZs estrechas y altas (**Figura 4.7** y **Figura 4.8**). Materiales con un alto grado de fricción interna son capaces de ofrecer una mayor resistencia a esfuerzos cortantes y deformaciones laterales, actuando como canales de flujo en la dirección vertical, que ofrece menor resistencia por la acción de la gravedad. Los resultados son coherentes con los principios de la mecánica de suelos que ofrecen Mohr-Coulomb, además, son coherentes con los resultados obtenidos por autores como **Carvallo et al. (2024)** y **Pulgar et al. (2024)**, quienes concluyen una relación inversa

entre el alto y ancho de las Zonas de Extracción al variar el ángulo de fricción, donde, a medida que el parámetro aumenta, también lo hace H_{IEZ} en extracción aislada.

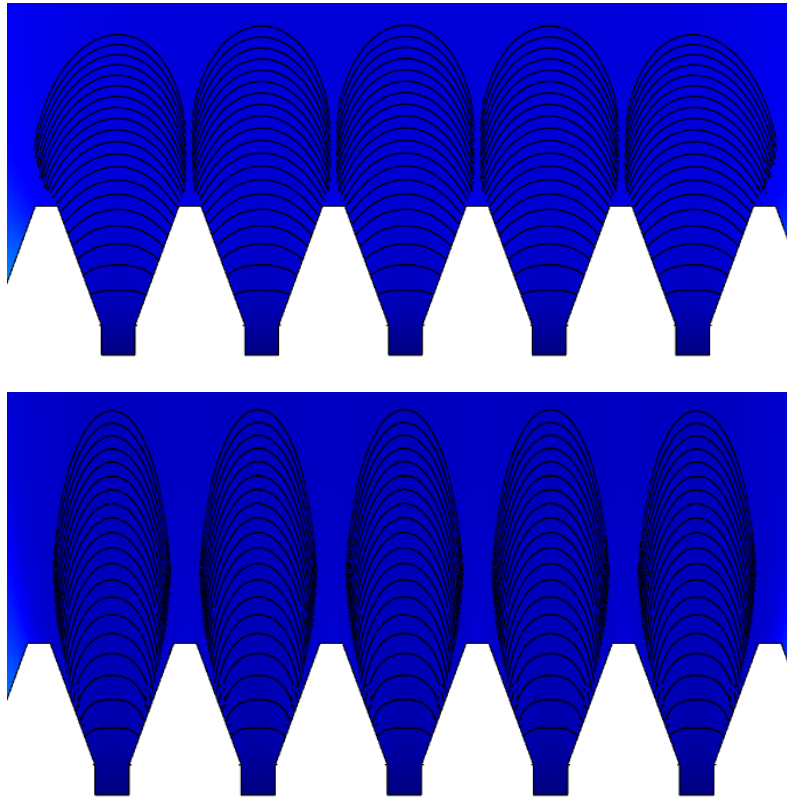


Figura 4.7: Comparación de elipsoides de extracción para distintos valores de ángulo de fricción.

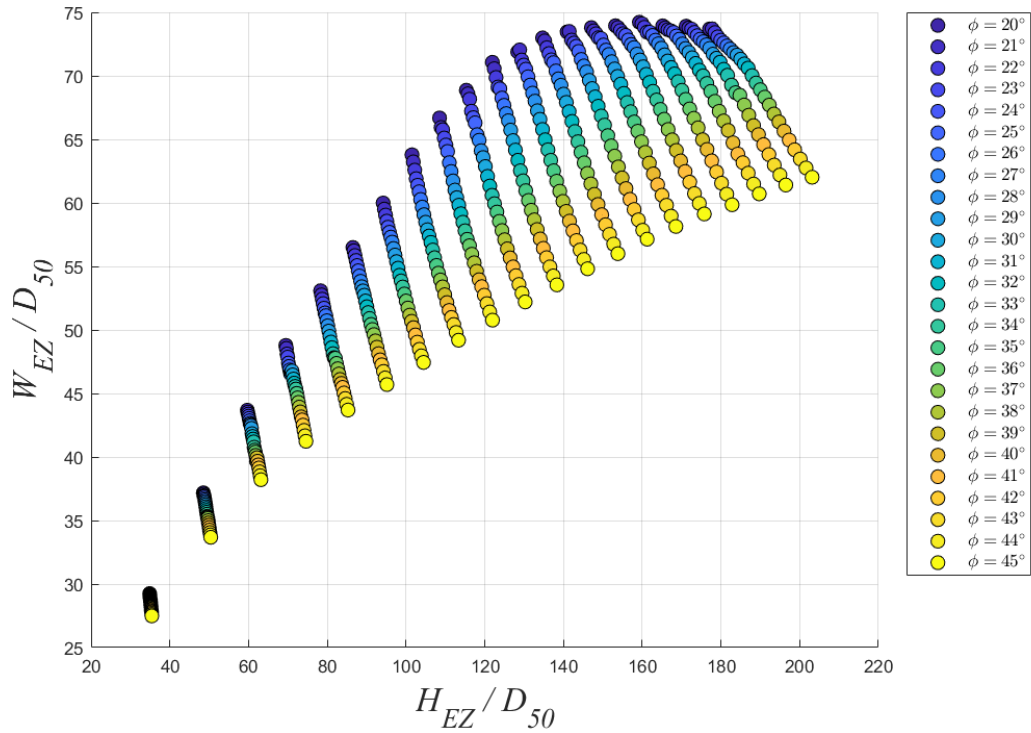


Figura 4.8: Gráfico de $\frac{W_{EZ}}{D_{50}}$ vs $\frac{H_{EZ}}{D_{50}}$ para 26 ángulo de fricción.

4.4 Caso de estudio N°4: Variación de la magnitud de la velocidad u_0 .

En cuarto lugar, se analizó la influencia de distintos valores de la magnitud de la velocidad sobre la geometría de la EZ. En la **Figura 4.9** se observa la comparación entre los resultados obtenidos para $u_0 = 0.05$ y $u_0 = 0.15$, respectivamente. Finalmente, se graficó W_{EZ} vs H_{EZ} normalizados por el tamaño medio de partícula (D_{50}) para los resultados de 51 valores de u_0 en los 20 instantes de masa extraída (**Figura 4.10**).

La magnitud de la velocidad (u_0) demostró ser una variable con un grado de influencia moderada. Para mayores velocidades de u_0 , se obtienen Zonas de Extracción más altas y estrechas (**Figura 4.9** y **Figura 4.10**). El análisis sugirió que este efecto se puede atribuir a que tasas de extracción mayores reducen el tiempo para redistribuir los esfuerzos y permitir la relajación del material que circunda, favoreciendo la canalización de flujo de manera vertical y directa sobre zonas de flujo con mayor amplitud. La tendencia de W_{EZ} para volverse constante para velocidades de extracción que superan los 0,07 m/s y masas grandes sugirieron

la posible existencia de un límite reológico donde las dimensiones de la *EZ* es capaz de responder al confinamiento en la geometría y a su vez a las propiedades del material, y con un menor grado a las tasas de extracción.

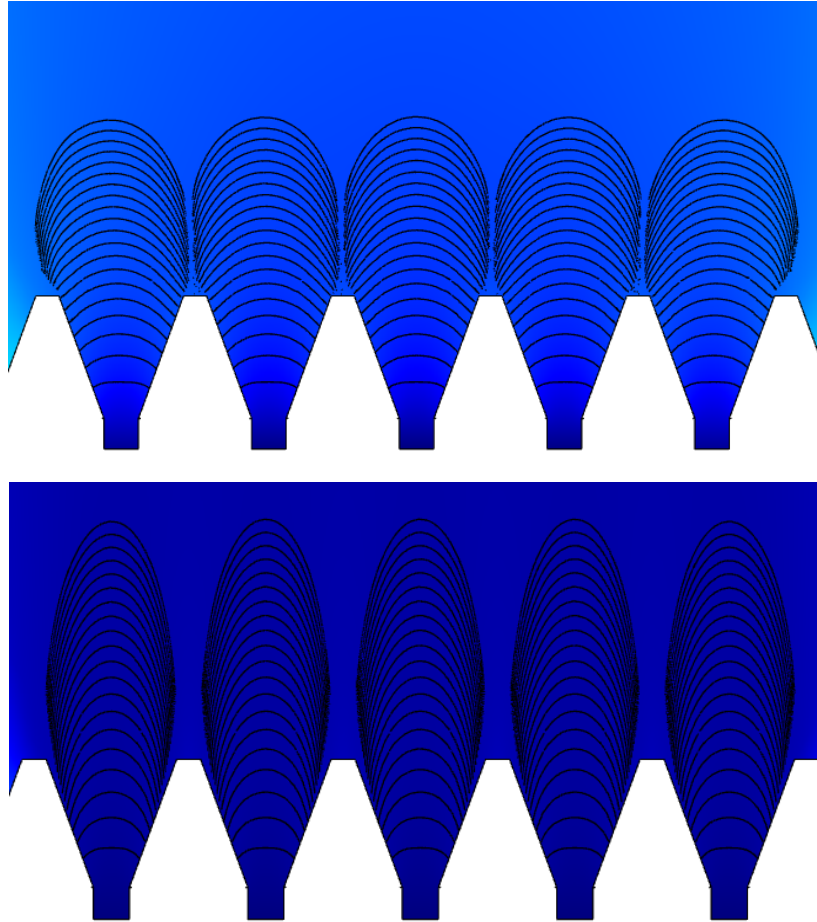


Figura 4.9: Comparación de elipsoides de extracción para distintos valores de la magnitud de la velocidad.

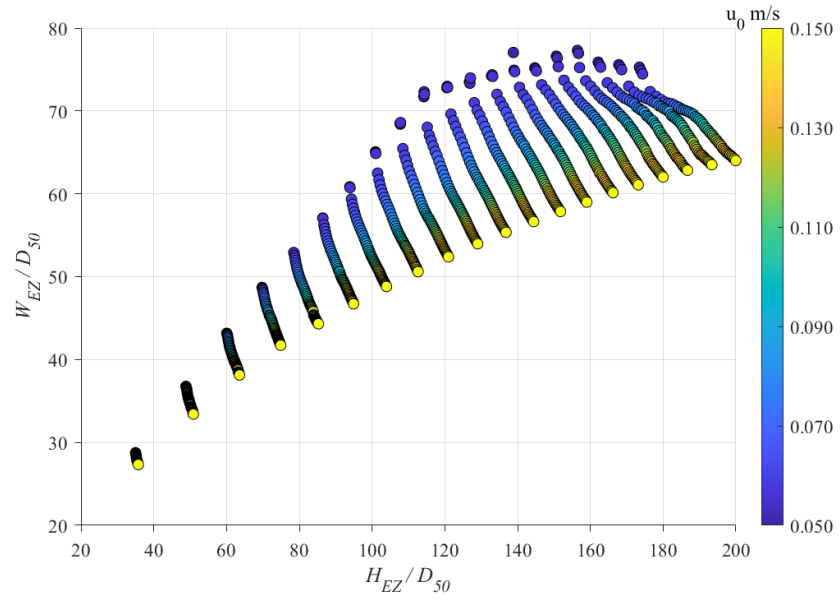


Figura 4.10: Gráfico de $\frac{W_{EZ}}{D_{50}}$ vs $\frac{H_{EZ}}{D_{50}}$ para 51 valores de u_0 .

4.5 Modelo Matemático

Con el objetivo de desarrollar un modelo matemático capaz de optimizar el diseño de las mallas de extracción mediante la cuantificación de las dimensiones de la *EZ* en función de los parámetros estudiados, se propone un modelo empírico que se basa en el análisis dimensional. La función que describe el modelo es de la siguiente forma:

$$W_{EZ} = f (H_{EZ}, S, D_w, D_{50}, \varphi, u_0, t) \quad (4.1)$$

Donde, W_{EZ} es el ancho del elipsoide de extracción, S el distanciamiento entre puntos de extracción, D_w el ancho del punto de extracción, D_{50} el diámetro medio de partículas, φ el ángulo de fricción, u_0 la magnitud de la velocidad y t el tiempo.

Para desarrollar el modelo matemático se realizó un el análisis dimensional a partir del teorema de Π -Buckingham, que establece que cualquier ecuación física que involucre ‘n’ variables puede reducirse a una ecuación equivalente que involucra ‘n-k’ grupos adimensionales, llamados términos Π , donde ‘k’ corresponde a la cantidad de dimensiones.

Las ‘n’ variables físicas y sus dimensiones fundamentales se presentan en la **Tabla 4**.

Tabla 4: Parámetros y sus dimensiones.

Parámetro	Símbolo	Unidad	Dimensión
Altura EZ	H_{EZ}	m	L
Ancho EZ	W_{EZ}	m	L
Diámetro medio de Partícula	D_{50}	m	L
Ángulo de Fricción	φ	°	-
Ancho de Punto de Extracción	D_w	m	L
Distancia entre Puntos de Extracción	S	m	L
Tiempo de Extracción	t	s	T
Magnitud de la velocidad	u_0	m/s	LT ⁻¹

A partir del teorema de Π -Buckingham se identificaron 6 grupos adimensionales.

$$\Pi_1 = \frac{W_{EZ}}{D_{50}}, \quad \Pi_2 = \frac{H_{EZ}}{D_{50}}, \quad \Pi_3 = \varphi, \quad \Pi_4 = \frac{D_w}{D_{50}}, \quad \Pi_5 = \frac{S}{D_{50}}, \quad \Pi_6 = \frac{u_0 t}{D_{50}} \quad (4.2)$$

De esta forma, la **ecuación 4.1** toma la forma de la **ecuación 4.3**, donde se incorporan los grupos adimensionales propuestos.

$$\frac{W_{EZ}}{D_{50}} = f\left(\frac{H_{EZ}}{D_{50}}, \varphi, \frac{D_w}{D_{50}}, \frac{S}{D_{50}}, \frac{u_0 t}{D_{50}}\right) \quad (4.3)$$

En MATLAB®, se combinaron los grupos adimensionales mediante multiplicaciones y coeficientes de ajuste que minimizan la suma de los errores cuadráticos entre los valores de los resultados simulados y predictivos. Del ajuste, se obtuvo la **ecuación 4.4**,

$$\chi = a_1 \Pi_2^{a_2} \Pi_3^{a_3} \Pi_4^{a_4} \Pi_5^{a_5} \Pi_6^{a_6} \quad (4.4)$$

Donde los coeficientes de ajuste corresponden a:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4177 \\ 0.3802 \\ -0.3505 \\ 0.2067 \\ 0.3205 \\ -0.0118 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los grupos adimensionales y los coeficientes de ajuste (simplificados) obtenidos en la **ecuación 4.4**, se obtiene la **ecuación 4.5**, donde el parámetro de interés corresponde al ancho del elipsoide de extracción representado en función de parámetros que influyen en su dimensión.

$$\frac{W_{EZ}}{D_{50}} = 1,4 \left(\frac{H_{EZ}}{D_{50}} \right)^{2/5} \varphi^{-3/10} \frac{D_w}{D_{50}}^{1/5} \frac{S}{D_{50}}^{3/10} \frac{u_0 t}{D_{50}}^{-1/100} \quad (4.5)$$

Los exponentes del modelo permiten determinar la influencia y sensibilidad de cada variable en el ancho de la W_{EZ} . La altura de la Zona de Extracción y el espaciamiento entre puntos de extracción tienen impactos positivos, confirmando que son las variables principales que generan la expansión lateral de la Zona de Extracción. Su naturaleza decreciente (exponentes menores que 1) indica que, para incrementos sucesivos de las variables, se producen ganancias cada vez menores de la longitud del ancho de los elipsoides de extracción, comportamiento típico de sistemas físicos en los que existen una aproximación o tendencia hacia estados saturados o limitados geoméricamente.

El ángulo de fricción se comporta como un factor clave de estabilidad, con un impacto negativo pero moderado, destacando la necesidad de caracterizaciones geomecánicas precisas del material fragmentado in situ para controlar de mejor manera la formación de arcos.

El diámetro del punto de extracción genera una influencia ligeramente positiva, una abertura de mayor área permite tener un control más preciso del volumen movilizado inicialmente, mitigando la formación de arcos que restringen el flujo.

La longitud de extracción ($u_0 t$) tiene efectos insignificantes, lo que permite comprender que el ancho de la zona de extracción tiene mayores dependencias del diseño y propiedades del material fragmentado, y no de la cantidad de mineral extraído.

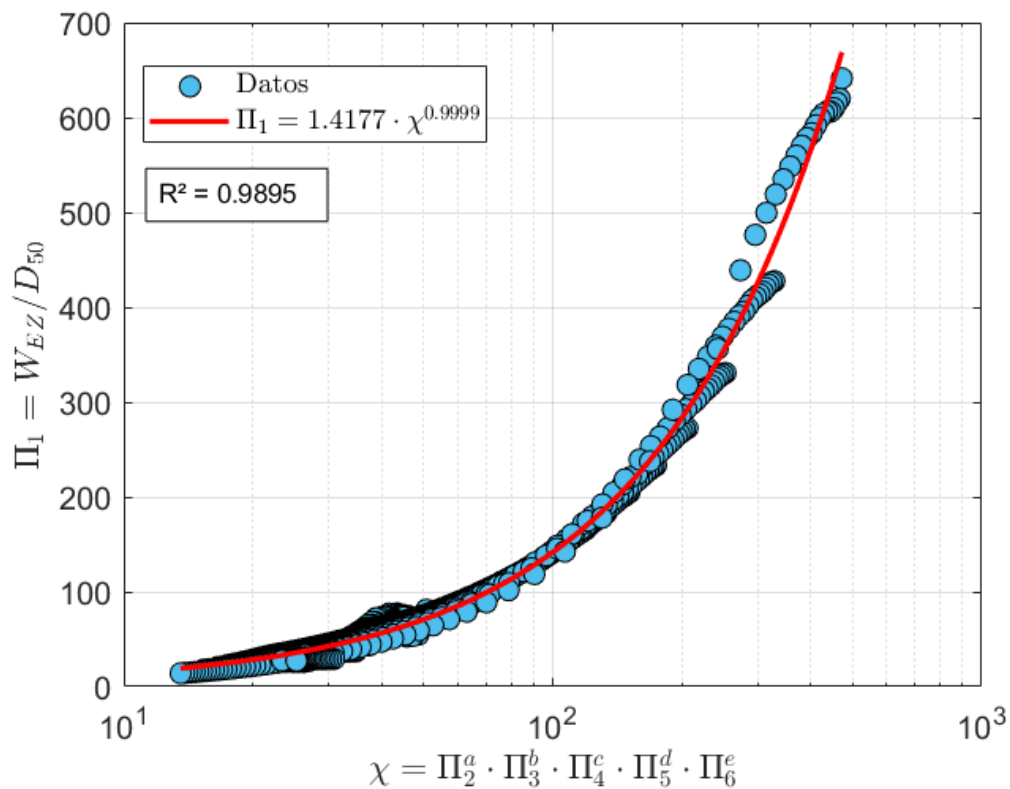


Figura 4.11: Relación entre la razón adimensional W_{EZ}/D_{50} y χ .

El modelo es capaz ajustarse al 98.95% a los datos, lo que demuestra una alta confiabilidad para integrarse al diseño y optimización de mallas de extracción, permitiendo reducir los

tiempos de planificación a partir de los parámetros de entrada como el diámetro medio de partículas, ángulo de fricción, diámetros de puntos de extracción, distanciamiento entre puntos de extracción y magnitud de la velocidad.

4.6 Optimización de Mallas de Extracción

Una malla de extracción optimizada es aquella capaz de permitir que las Zonas de Extracción queden distanciadas de forma suficiente para interactuar lo necesario con el objetivo de recuperar el mineral de forma controlada, evitando colapsos, concentración de esfuerzos, formación de pilares, *hang-ups*, bloqueos y/o dilución.

La **ecuación 4.5** permitió predecir el distanciamiento óptimo entre puntos de extracción a partir de valores que caracteriza el mineral fragmentado, geometrías de diseño y el comportamiento del material en condiciones de *block caving*.

Se definieron valores representativos para cada uno de los parámetros de entrada, detallados en la **Tabla 5**. Se debe tener en cuenta que el distanciamiento entre puntos de extracción (S), como valor de entrada, es solo un valor tentativo que posteriormente se ve alterado por el resultado de interés entrega el modelo matemático (W_{EZ}). Con esto, el distanciamiento óptimo entre puntos de extracción se ajusta a la diferencia entre el ancho de la zona de extracción y el ancho del punto de extracción, es decir, $S' = W_{EZ} - D_w$. Dicho de otra forma, la suma del ancho del punto de extracción y el distanciamiento entre puntos de extracción debe ser igual al ancho de la zona de extracción, $W_{EZ} = D_w + S'$.

Tabla 5: Valores ejemplificadores para aplicación de modelo propuesto.

Variable	Valor de la variable
H_{EZ} (m)	23
D_{50} (m)	1
φ°	36
D_w (m)	4.5
S (m)	15.3
u_0 (m/s)	0.1
t (s)	5

Integrando los valores a la **ecuación 4.5**, se obtiene que $W_{EZ} = 18.12$ (m), por lo que, el distanciamiento óptimo entre puntos de extracción es igual a $S' = 13.62$ (m), que se puede observar en la **Figura 4.12**.

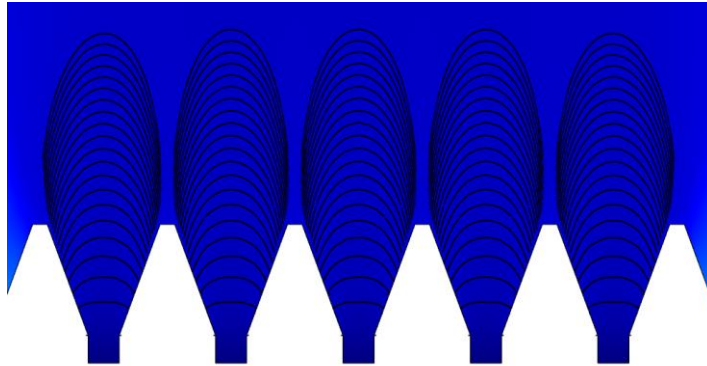


Figura 4.12: Puntos de extracción distanciados de forma optimizada.

Se evaluó un escenario donde el ángulo de fricción del mineral fragmentado posee un ángulo de fricción $\varphi = 20^\circ$, aumentando W_{EZ} . Bajo estas condiciones las zonas de extracción se vuelven más anchas, por lo que, el distanciamiento óptimo entre puntos de extracción aumenta a $S' = 17.77$ (m). El resultado de esta ejemplificación se observa en la **Figura 4.13**.

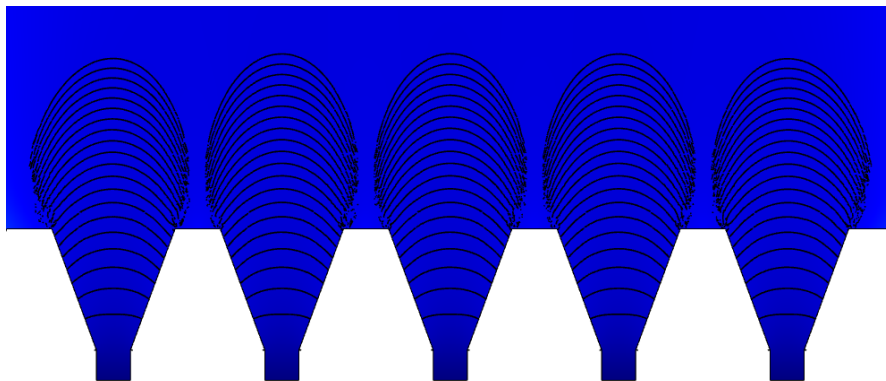


Figura 4.13: Puntos de extracción distanciados de forma optimizada para ángulo de fricción de 20° .

La predicción del distanciamiento óptimo entre puntos de extracción no solo permite disminuir tiempos de trabajo, sino que también, permite optimizar el diseño de mallas de extracción, logrando que la interacción entre Zonas de Extracción sea capaz de aumentar la

recuperación de mineral, disminuir la entrada de dilución, optimizar los costos de operación asociados al diseño y aumentar la eficiencia operacional.

5 CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se desarrollaron simulaciones computacionales mediante el método de elementos finitos usando el modelo de Morales, Vivanco & Palma (2023) que describe física-matemáticamente el flujo gravitacional en condiciones de *Caving*.

Se obtuvo que un distanciamiento entre puntos de extracción inferior a 53,2 veces el tamaño medio de partículas limita el crecimiento horizontal de la *EZ*.

Se obtuvo W_{EZ} aumenta para mayores valores de distanciamiento entre puntos de extracción y/o tamaño medio de partículas. De forma contraria, W_{EZ} disminuye para mayores valores de ángulo de fricción y/o magnitud de la velocidad.

De los parámetros analizados, al aumentar el valor del distanciamiento entre puntos de extracción, ángulo de fricción o la magnitud de la velocidad, se genera un aumento en el distanciamiento entre los elipsoides de extracción. De forma contraria, al aumentar el valor del ancho del punto de extracción o el diámetro de las partículas, se genera una disminución en el distanciamiento entre elipsoides de extracción.

En general, a medida que aumenta el tiempo de extracción de material, aumentan las dimensiones de la *EZ* y disminuye el distanciamiento generado entre elipsoides de extracción.

El software de simulación por FEM, COMSOL Multiphysics®, permite realizar simulaciones en breves períodos de tiempo (2 minutos aproximadamente) aun cuando no se tienen altos recursos computacionales.

Se obtiene un modelo matemático robusto que permite optimizar el diseño de mallas de extracción con alta precisión mediante el cálculo del ancho de la zona de extracción a través de propiedades geométricas, geomecánicas y reológicas. Se espera que esta herramienta sea capaz actualizar modelos similares preexistentes, además de reemplazar las curvas de Kvapil y el Ábaco de Laubscher, usados actualmente para el diseño de mallas de extracción.

Se recomienda validar las predicciones del modelo matemático mediante el desarrollo de simulaciones computacionales con otros métodos de simulación numérica y experimentos de laboratorio a escala, bidimensionales y tridimensionales, utilizando los mismos parámetros y variaciones.

Se sugiere realizar simulaciones en función de otros parámetros que influyen en las dimensiones de las zonas de extracción.

Finalmente, se recomienda estudiar la relación entre zonas de movimiento y zonas de extracción en escenarios de múltiples puntos de extracción. Esto, con la finalidad de comparar modelos de diseño y determinar la distancia óptima entre dichos puntos, que contribuirá a una mayor eficiencia maximizando el diseño del sistema.

6 REFERENCIAS

1. Bazant, M. Z. (2004). *A Theory of Cooperative Diffusion in Dense Granular Flows*.
2. Bocaz, C. J. (2025). *Cuantificación del tamaño de la zona de extracción para distintas secuencias en minería de caving*. Tesis para optar al título de Ingeniero Civil de Minas y grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Metalúrgica, Universidad Técnica Federico Santa María, Santiago, Chile.
3. Biblioteca del Congreso Nacional. (2023). *Impactos socioeconómicos de la minería en Chile*.
https://obtienearchivo.bcn.cl/obtienearchivo?id=repositorio/10221/34140/1/Informe_N_04_23_Impactos_socioeconomicos_de_la_mineria_en_Chile.pdf
4. Brown, E. T. (2007). *Block caving geomechanics* (2nd ed.). Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre, University of Queensland.
<https://cir.nii.ac.jp/crid/1130000797110086016.bib?lang=en>
5. Carvallo, C. (2024) *Desarrollo de ábaco de diseño basado en nuevo modelo fisicomatemático para minería de caving en división el teniente*. [Tesis de pregrado, Universidad Técnica Federico Santa María].
6. Castro, R., Gómez, R., Pierce, M., & Canales, J. (2020). Experimental quantification of vertical stresses during gravity flow in block caving. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 127. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2020.104237>
7. Castro, R. L., Fuenzalida, M. A., & Lund, F. (2014). Experimental study of gravity flow under confined conditions. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 67, 164–169. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2014.01.013>
8. Castro, R., Trueman, R., & Halim, A. (2007). A study of isolated draw zones in block caving mines by means of a large 3D physical model. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 44(6), 860–870.
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2007.01.001>
9. Cavieres, P. (2011). *Dimensionamiento de mallas de extracción, bateas recolectoras y pilar corona para método panel caving en roca primaria, El Teniente*.
10. Choi, J., Kudrolli, A., & Bazant, M. (2005). *Velocity profile of granular flows inside silos and hoppers*.
11. COCHILCO. (2024). *Informe de producción y precios del cobre 2024*. Comisión Chilena del Cobre. <https://www.cochilco.cl>
12. COCHILCO. (2016). *Franjas metalogénicas de los Andes Centrales: blancos clave para la exploración minera*.
13. CODELCO - Corporación Nacional del Cobre. (2024). División Chuquicamata.
<https://www.codelco.com/operaciones/chuquicamata/division-chuquicamata>
14. Consejo Minero. (2024). *Cifras actualizadas de la minería*.

15. Eberhardt. (2007). Transition from Surface to Underground Mining - Understanding Complex Rock Mass Interactions Through the Integration of Mapping, Monitoring and Numerical Modelling Data. *Australian Centre for Geomechanics, The University of Western Australia*.
16. Fullard, L. A., Breard, E. C. P., Davies, C. E., Godfrey, A. J. R., Fukuoka, M., Wade, A., Dufek, J., & Lube, G. (2019). The dynamics of granular flow from a silo with two symmetric openings. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 475(2221). <https://doi.org/10.1098/rspa.2018.0462>
17. Gómez, R., & Labbé, E. (2019). An option for the change to massive underground mining: The current Chilean methodology of block caving. *Boletín Geológico y Minero*, 130(1), 181–198. <https://doi.org/10.21701/bolgeomin.130.1.011>
18. Halim, A., Castro, R., & Trueman, R. (2004). *3D large scale physical modelling for studying interactive drawing and drawpoint spacing in Block Caving Mines*. Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre, The University of Queensland.
19. Hoek, E., & Bray, J. D. (1981). *Rock slope engineering*. CRC press.
20. Hustrulid, W. (2008). *Sublevel caving-past and future* (Issue 11).
21. Jagota, V., Preet, A., Sethi, S., & Kumar, K. (2013). Finite Element Method: An Overview. *Walailak Journal of Science and Technology*, 10(1). <http://wjst.wu.ac.th>
22. Janelid, I., & Kvapil, R. (1966). *SUBLEVEL CAVING*. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* (Vol. 3). Pergamon Press Ltd.
23. Jin, A., Sun, H., Ma, G., Gao, Y., Wu, S., & Meng, X. (2016). A study on the draw laws of caved ore and rock using the discrete element method. *Computers and Geotechnics*, 80, 59–70. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2016.06.016>
24. Jin, A., Sun, H., Wu, S., & Gao, Y. (2017). Confirmation of the upside-down drop shape theory in gravity flow and development of a new empirical equation to calculate the shape. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 92, 91–98. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2016.12.005>
25. Kamrin, K. N. (2007). *Stochastic and Deterministic Models for Dense Granular Flow*.
26. Kvapil, R. (1965). Gravity flow of granular materials in Hopper and bins. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* (Vol. 2). Pergamon Press.
27. Kvapil, R. (2004). *Gravity Flow in Sublevel and Panel Caving - a Common Sense Approach*. Luleå University of Technology.
28. Laubscher. (1994). *Cave mining-the state of the art*.
29. Litwiniszyn, J. (1958). Statistical methods in the mechanics of granular bodies. *Rheologica Acta*, 1(2), 146–150. <https://doi.org/10.1007/BF01968857>
30. López, S. (2016). *Estudio Experimental de Colgaduras*.
31. Marano, G. (1980). The interaction between adjacent draw points in free flowing materials and it application to mining. *Chamber of Mines Journal*, 22, 25–32.

32. Mullins, W. W. (1974). Experimental Evidence for the Stochastic Theory of Particle Flow Under Gravity. In *Powder Technology* (Vol. 9).
33. ITASCA. (2024). *MassFlow Theory and Background — Itasca Software 9.0 documentation*. https://docs.itascacg.com/itasca900/massflow/enginemassflow/doc/manual/massflow_theory/massflow_theory.html?node7105
34. Melo, F., Vivanco, F., Fuentes, C., & Apablaza, V. (2008). Kinematic model for quasi static granular displacements in block caving: Dilatancy effects on drawbody shapes. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 45(2), 248–259. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2007.07.005>
35. Minería Chilena. (2023). *Minería subterránea: en la búsqueda de mayor producción*. <https://www.mch.cl/negocios-industria/mineria-subterranea-en-la-busqueda-de-mayor-produccion/>
36. Mullins, W. W. (1972). Stochastic Theory of Particle Flow under Gravity. *Journal of Applied Physics*, 43(2), 665–678. <https://doi.org/10.1063/1.1661175>
37. Nedderman, R. M., & Tüzün, U. (1978). *A Kinematic Model for the Flow of Granular Materials*.
38. Palma, S., & Morales, R. (2023). *Modelo matemático para el flujo de rocas en minería de block caving*.
39. Peters, D. C. (1984). Physical modeling of the draw behavior of broken rock in caving. *Colorado School of Mines Quarterly*, 79(1), 1.
40. Portal Minero Ediciones. (2006). *MANUAL GENERAL DE MINERIA Y METALURGIA*.
41. Power, G. R. (2004). Modelling granular flow in caving mines: large scale physical modelling and full scale experiments.
42. Pulgar, S. (2024) *Aplicación de modelo fisico-matemático para la creación de un ábaco de diseño con datos de chuquicamata subterránea*. [Tesis de pregrado, Universidad Técnica Federico Santa María].
43. Sánchez, V., Castro, R. L., & Palma, S. (2019). Gravity flow characterization of fine granular material for Block Caving. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 114, 24–32. <https://doi.org/10.1016/J.IJRMMS.2018.12.011>
44. Sturla, M. (2022). Influencia de parámetros físicos del material granular y del diseño de bateas de extracción en el flujo gravitacional en minería de block caving.
45. Trueman, R., Castro, R., & Halim, A. (2007). *Study of multiple draw-zone interaction in block caving mines by means of a large 3D physical model*. En *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*.
46. Trueman, R., Castro, R., & Halim, A. (2008). Study of multiple draw-zone interaction in block caving mines by means of a large 3D physical model. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 45(7), 1044–1051. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2007.11.002>

7 ANEXOS

7.1 W_{EZ} / H_{EZ} en función de la masa extraída.

A partir de los resultados obtenidos de ancho y alto de elipsoides de extracción en tiraje simultáneo, junto a las masas extraídas, se evaluó cualitativamente la relación entre las variables mencionadas.

Las masas utilizadas fueron las determinadas en el **título 3.5.2**. Al graficar la altura y ancho de la zona de extracción respecto a las masas calculadas, se obtiene la **Figura 7.1** y **Figura 7.2**.

Los resultados obtenidos de altura de las zonas de extracción vs masa extraída señalaron un crecimiento potencial en los primeros segmentos, y un crecimiento lineal en los segmentos posteriores. La configuración de parámetros puede generar que la altura del elipsoide de extracción varíe en hasta un 28%. El ancho de las Zonas de Extracción presentó crecimientos potenciales en sus primeros segmentos, para luego volverse segmentos lineales limitados en sus crecimientos, en este caso, la configuración de parámetros puede generar que el ancho del elipsoide de extracción varíe en hasta un 58%.

El hecho de que W_{EZ} sea más sensible que H_{EZ} confirma que el ancho está más sujeta a las condiciones de contorno e interacción entre los flujos.

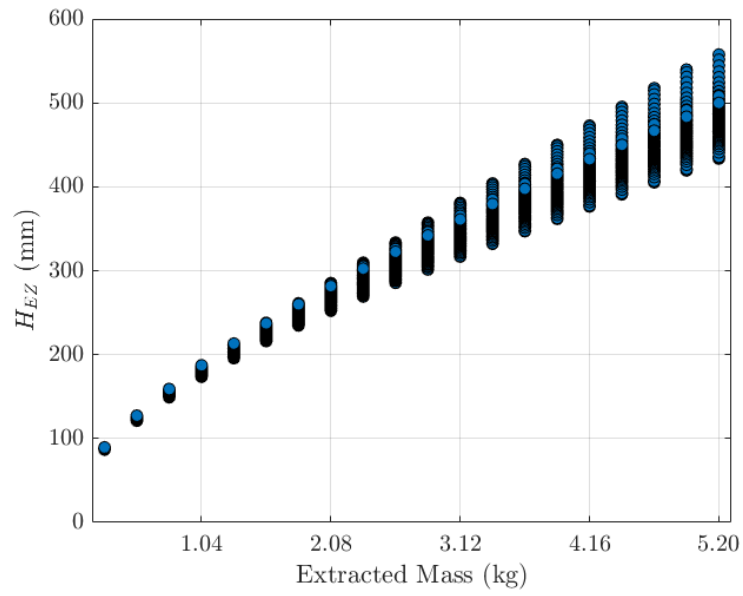


Figura 7.1: Gráfico de la altura de la EZ vs masa extraída.

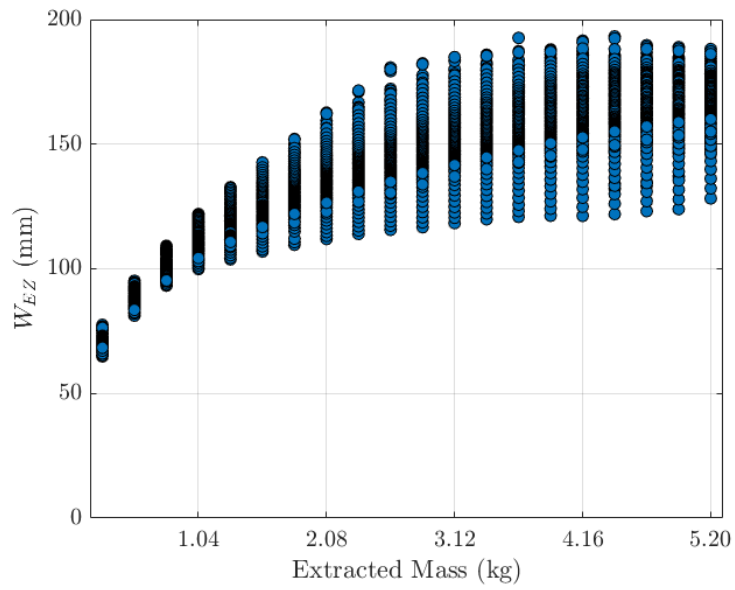


Figura 7.2: Gráfico del ancho de la EZ vs masa extraída.

7.2 Espaciamiento entre elipsoides de extracción.

Caso de estudio N°1: Variación del ancho de puntos de extracción D_w y distanciamiento entre bateas de extracción S .

En la **Figura 7.3** se graficaron los resultados de 20 instantes de masa extraída de cada uno de 11 los valores de distanciamiento entre puntos de extracción (*eje-x superior*) v/s 8 valores de ancho de puntos de extracción (*eje-x inferior*).

Se observa que el valor del espaciamiento aumenta en promedio en un 19,4% a medida que aumenta el distanciamiento entre puntos de extracción, y de forma contraria, el valor del espaciamiento disminuye en promedio en un 4,21% a medida que aumenta el ancho de punto de extracción, dando cuenta de una correlación positiva y negativa para cada caso.

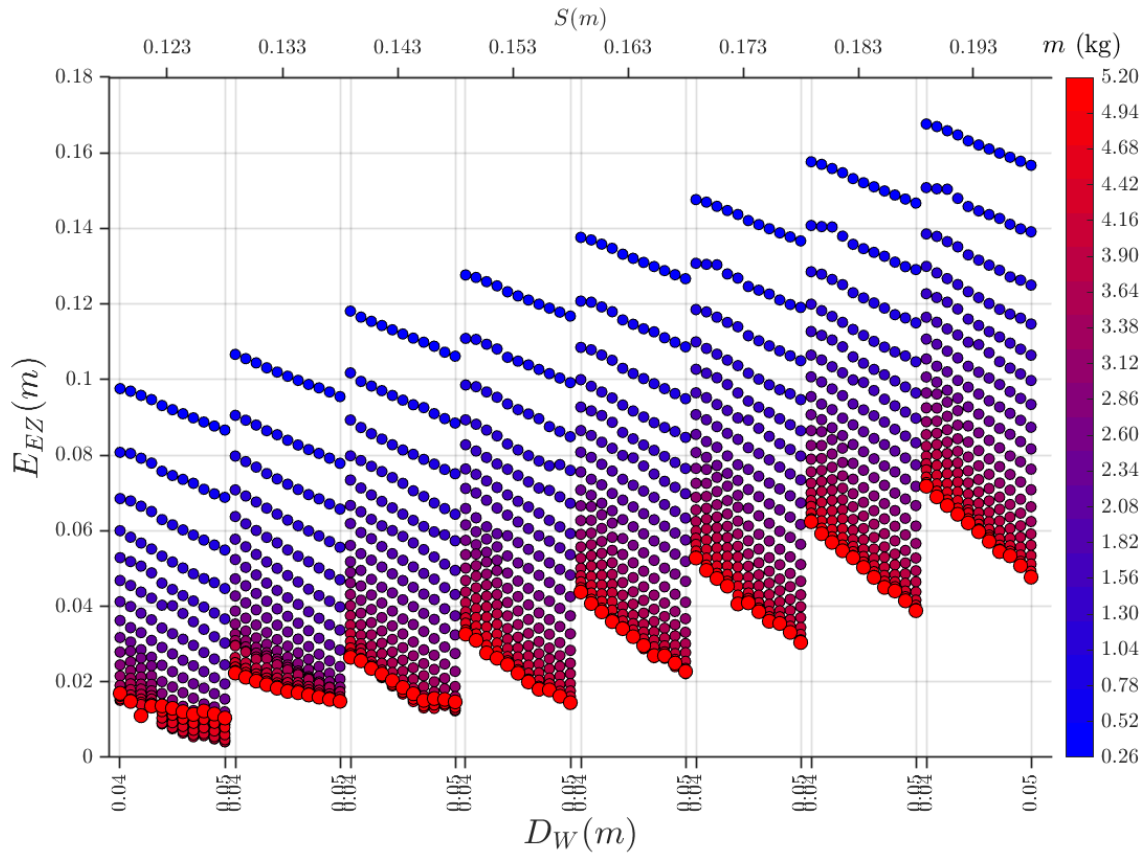


Figura 7.3: Gráfico de E_{EZ} en función de S y D_w .

Caso de estudio N°2: Variación del diámetro de partícula D_{50} .

Se graficaron los resultados obtenidos para los 20 instantes de masa extraída para 50 valores de diámetro de partículas (Figura 7.4). Se observó que el espaciamiento entre elipsoides de extracción disminuye en promedio en un 1,59% a medida que aumenta el diámetro de partículas. Si bien un aumento mínimo del diámetro de partículas no genera un cambio drástico en el valor del espaciamiento entre elipsoides de extracción, se debe tener en cuenta que entre el mínimo y máximo valor de D_{50} , para el máximo instante de masa extraída, existe una variación porcentual de -307,46%, lo que sugiere que tener distribuciones granulométricas muy irregulares puede afectar en gran medida al diseño de las mallas de extracción.

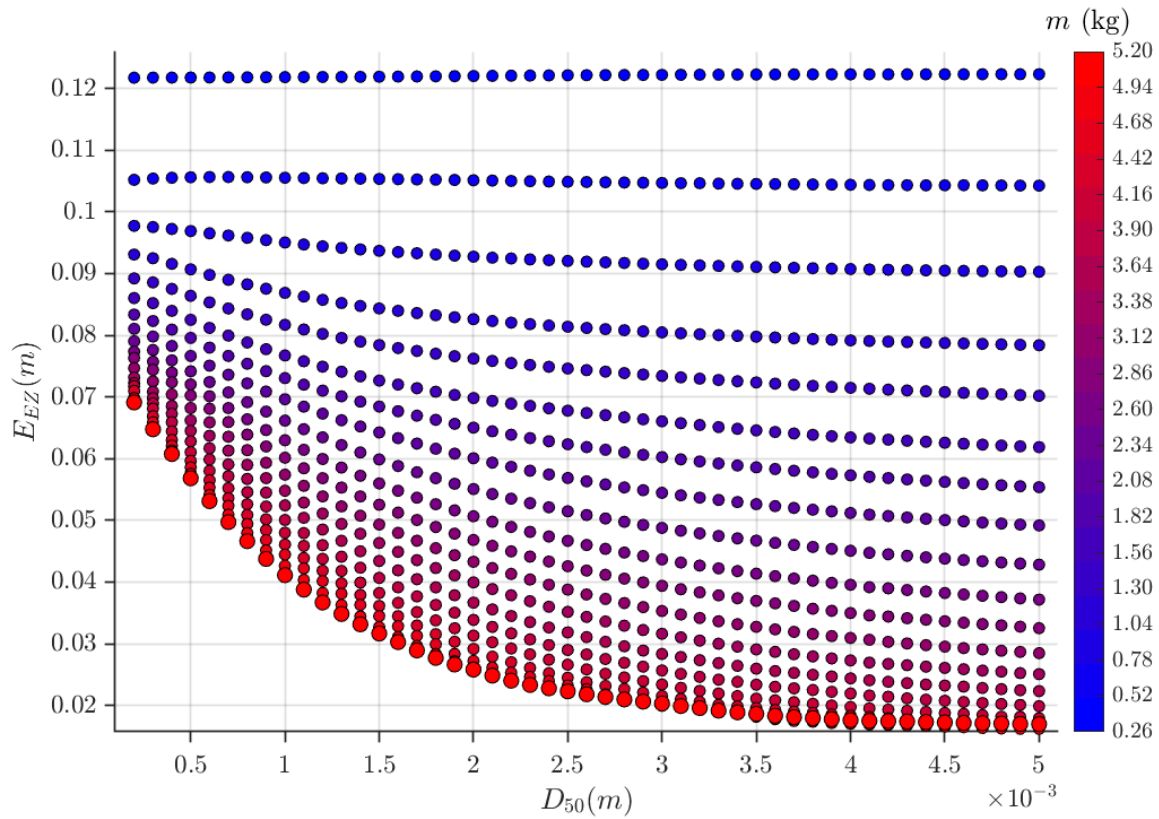


Figura 7.4: Gráfico de E_{EZ} en función de D_{50} .

Caso de estudio N°3: Variación del ángulo de fricción φ .

Se graficaron los resultados obtenidos para los 20 instantes de tiempo para 26 valores de ángulo de fricción (**Figura 7.5**). Se observó que el valor del espaciamiento aumenta en promedio en un 4,12% a medida que aumenta el ángulo de fricción. Cabe mencionar, que un cambio drástico en el valor del ángulo de fricción, desde 20° a 45° puede generar una variación porcentual de 75,6% en el distanciamiento entre elipsoides de extracción durante el mayor instante de masa extraída. Por consiguiente, este parámetro debe considerarse crítico en el diseño de mallas de extracción, especialmente en macizos rocosos donde la heterogeneidad con respecto a esta variable afecta directamente al desarrollo de la EZ.

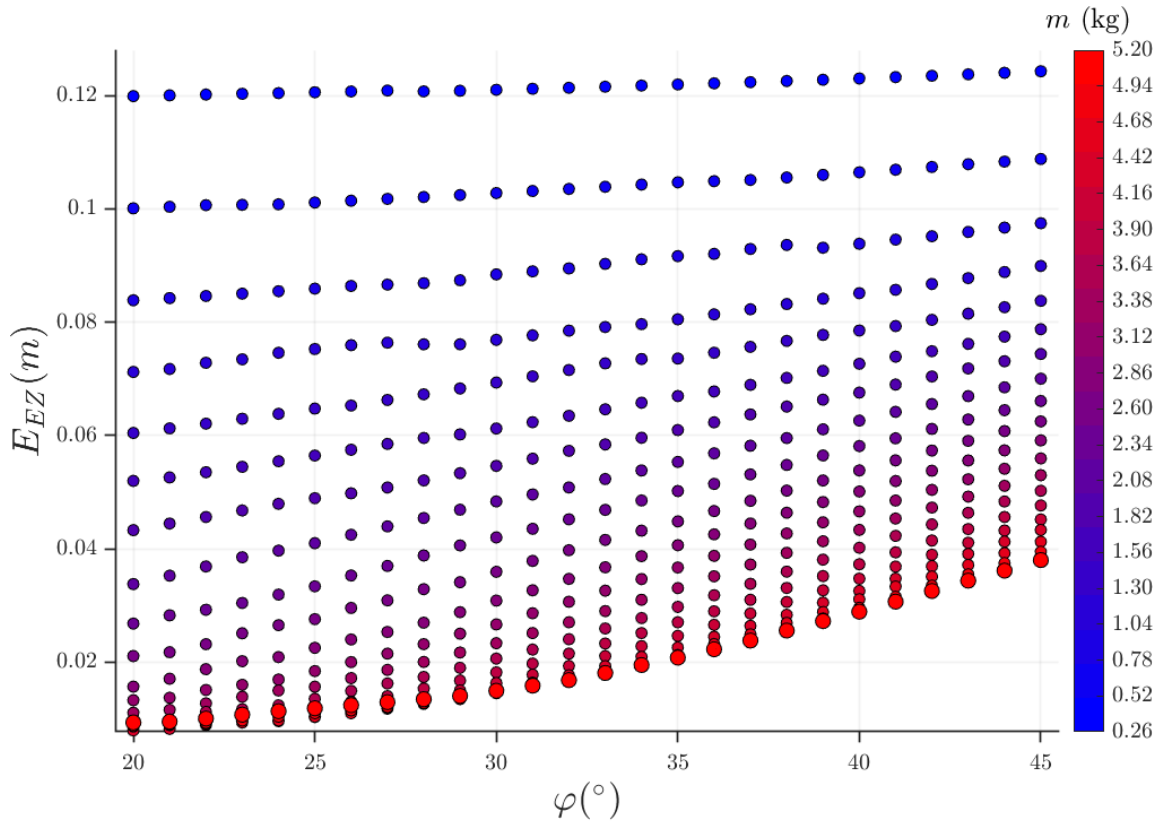


Figura 7.5: Gráfico de E_{EZ} en función de φ .

Caso de estudio N°4: Variación de la magnitud de la velocidad u_0 .

Finalmente, se graficaron los resultados para 51 valores de u_0 en 20 instantes de masa extraída (**Figura 7.6**). Se observa de manera general que el valor del espaciamento aumenta en promedio en un 2,20% a medida que aumenta la magnitud de la velocidad.

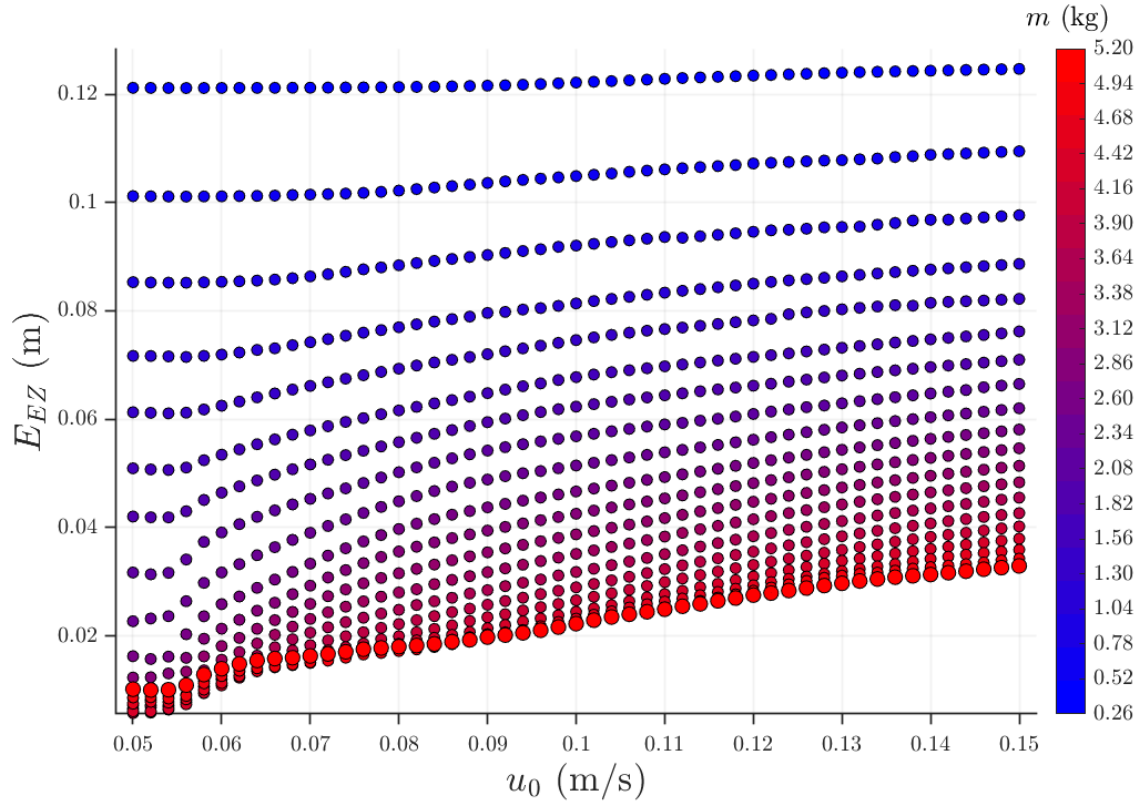


Figura 7.6: Gráfico de E_{EZ} en función de u_0 .

7.3 Gráficos comparativos.

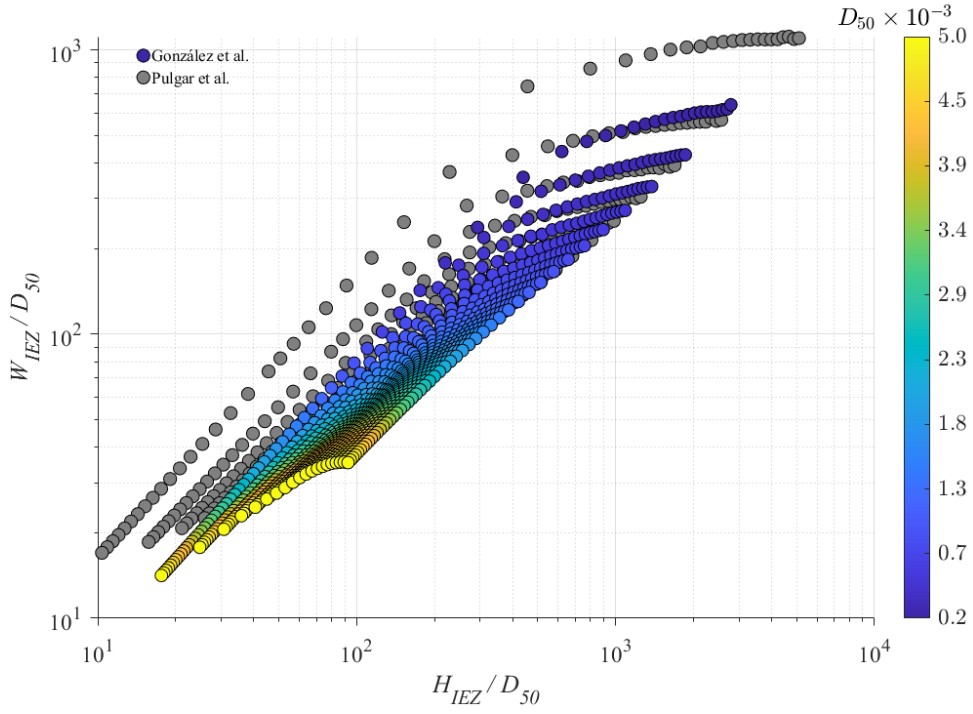


Figura 7.7: Gráfico de comparación de D_{50} con resultados de Pulgar et al. (2024).

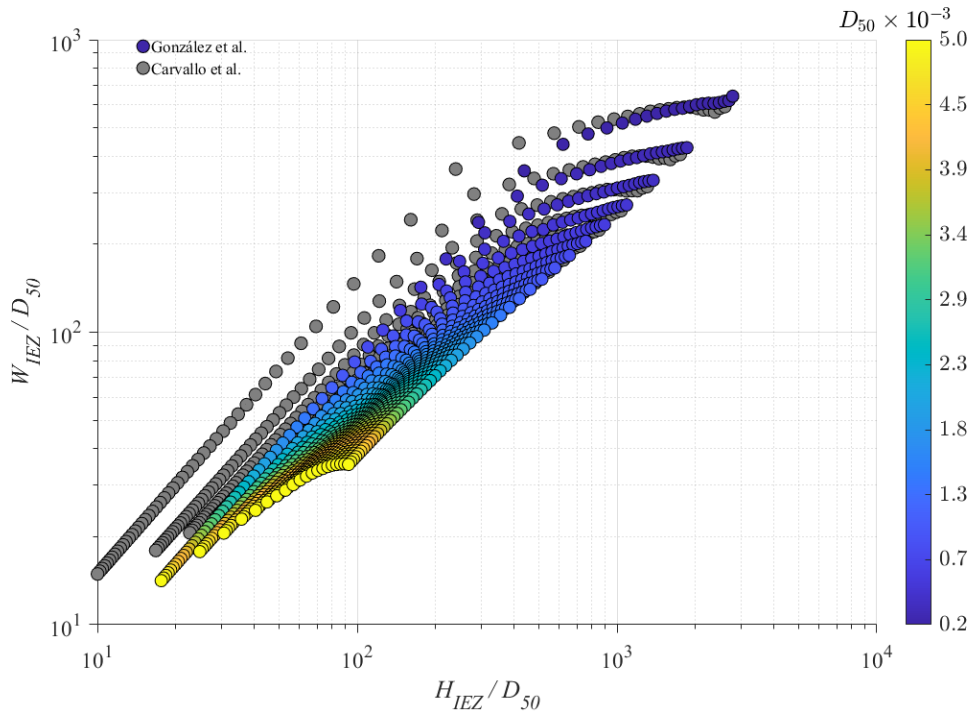


Figura 7.8: Gráfico de comparación de D_{50} con resultados de Carvallo et al. (2024).

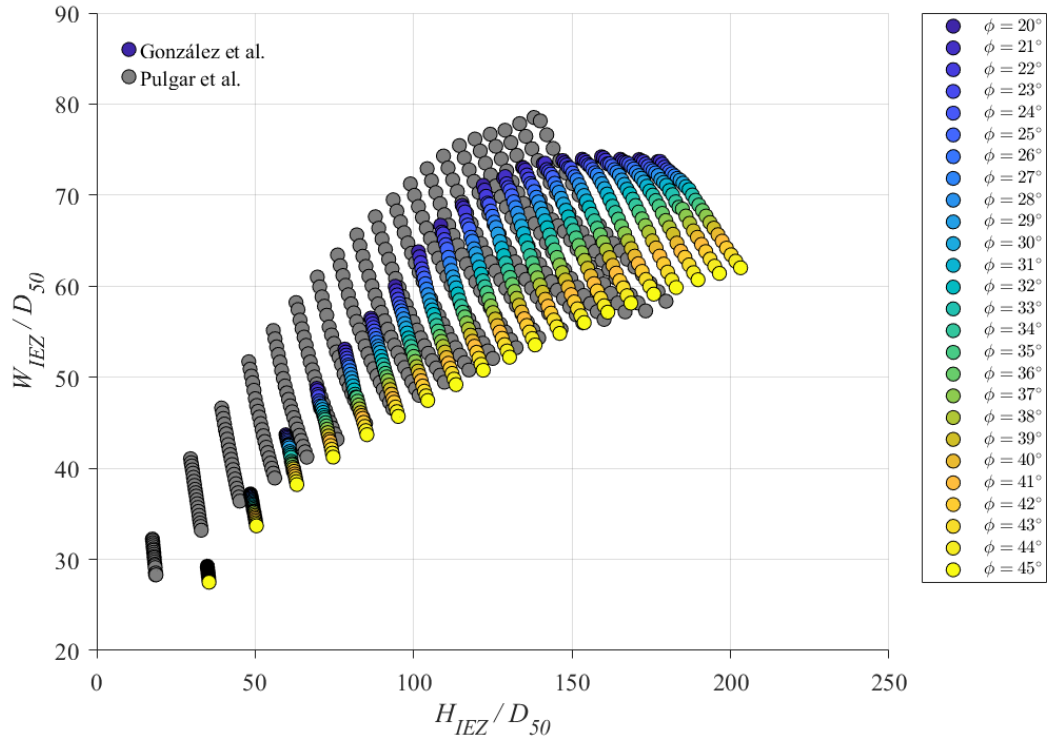


Figura 7.9: Gráfico de comparación de ϕ con resultados de Pulgar et al. (2024).

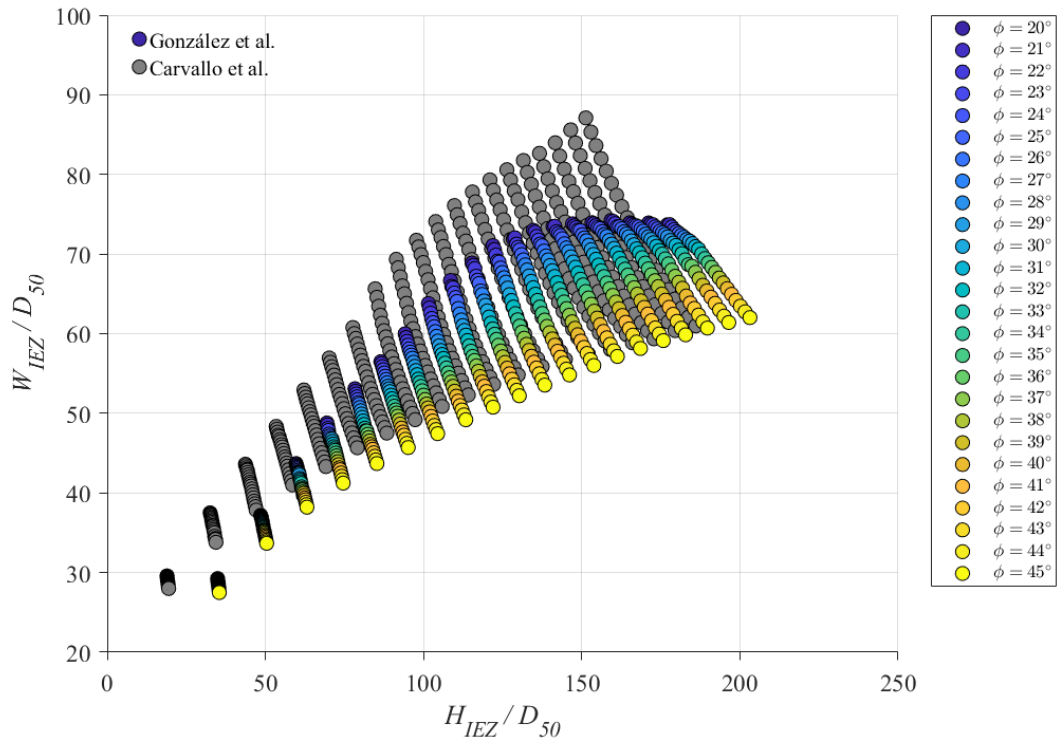


Figura 7.10: Gráfico de comparación de ϕ con resultados de Carvallo et al. (2024).

7.4 Códigos Matlab.

Código de extracción de W_{EZ} , H_{EZ} y E_{EZ} .

El siguiente código fue utilizado en el software MATLAB® para obtener las dimensiones de las EZs y el espaciamiento generado entre zonas de extracción a partir de los archivos .txt exportados desde COMSOL Multiphysics®.

```
clear all;
close all;
clc;

% Configuración inicial
desktopDir = fullfile(getenv('USERPROFILE'), 'Desktop');
textoDir   = fullfile(desktopDir, 'texto');

if ~isfolder(textoDir)
    error('La carpeta "%s" no existe.', textoDir);
end

txtFiles = dir(fullfile(textoDir, '*.txt'));
if isempty(txtFiles)
    error('No se encontraron archivos .txt en "%s".', textoDir);
end

fprintf('\n=== Archivos encontrados ===\n');
for k = 1:numel(txtFiles)
    fprintf('  %s\n', txtFiles(k).name);
end

finalTable = table();

for fileIdx = 1:numel(txtFiles)
    fname = txtFiles(fileIdx).name;
    fullFileName = fullfile(txtFiles(fileIdx).folder, fname);

    try
        data = dlmread(fullFileName);
    catch
        warning('Error leyendo %s. Saltando...', fname);
        continue;
    end

    x = data(:,1);
```

```

y = data(:,2);
N = numel(x);

% Verificar mínimo de puntos
if N < 5
    warning('%s: muy pocos puntos (%d).', fname, N);
    continue;
end

% --- CLUSTER CON K-MEANS (k = 5) ---
k = 5;
opts = statset('MaxIter',1000, 'Display','off');
[labels, centroids] = kmeans([x y], k, 'Replicates',5, 'Options',opts);

% Calcular límites de cada elipsoide
limits = zeros(k,4); % [xmin, xmax, ymin, ymax]
centersX = zeros(k,1);
heights = zeros(k,1); % Almacenará las alturas H de cada cluster

for i = 1:k
    xi = x(labels==i);
    yi = y(labels==i);

    % Cálculo de W (como en código 2)
    limits(i,:) = [min(xi), max(xi), min(yi), max(yi)];
    centersX(i) = mean(xi);

    % Cálculo de H (como en código 1 - máximo Y del cluster)
    heights(i) = max(yi);
end

% Ordenar por posición X del centroide
[~, order] = sort(centersX);
limits = limits(order, :);
heights = heights(order);

% Anchos (W) - diferencia entre xmax y xmin para cada cluster
W = limits(:,2) - limits(:,1);

% Espaciamientos (no negativos)
D = zeros(k-1,1);
for i = 1:k-1
    gap = limits(i+1,1) - limits(i,2);
    D(i) = max(0, gap);
end

```

```

    % Crear fila para la tabla
    fileNumber = str2double(regexp(fname, '\d+', 'match', 'once'));

    % Nombres de variables dinámicas (se mantienen para el procesamiento
    interno)
    varNames = ['FileName', 'FileNumber', ...
                arrayfun(@(i) sprintf('W%d', i), 1:k, 'UniformOutput', false),
    ...
                arrayfun(@(i) sprintf('H%d', i), 1:k, 'UniformOutput', false),
    ...
                arrayfun(@(i) sprintf('Dist_E%dE%d', i, i+1), 1:k-
1, 'UniformOutput', false)];

    % Valores para la tabla (W1..Wk, H1..Hk, Distancias)
    values = [W' heights' D'];
    newRow = [{fname}, fileNumber, num2cell(values)];

    % Convertir a tabla y añadir (todas las columnas)
    newRowTbl = cell2table(newRow, 'VariableNames', varNames);
    finalTable = [finalTable; newRowTbl];
end

% Ordenar por número de archivo
finalTable = sortrows(finalTable, 'FileNumber');

% Seleccionar solo las columnas específicas para el Excel de salida
% Columna 2: FileNumber
% Columna 5: W2 (tercer W)
% Columna 10: H5 (quinto H)
selectedColumns = finalTable(:, [2, 5, 10]);

% Renombrar las columnas para mayor claridad
selectedColumns.Properties.VariableNames = {'FileNumber', 'W3', 'H3'};

% Mostrar en consola (todas las columnas)
format longG
disp(finalTable)

% Mostrar las columnas seleccionadas
fprintf('\n=== Columnas seleccionadas para exportación ===\n');
disp(selectedColumns)

% Guardar solo las columnas seleccionadas
outName = 'resultados_seleccionados.xlsx';
writetable(selectedColumns, outName);

```

```
fprintf('\nDatos guardados en "%s" (solo columnas FileNumber, W2 y H5)\n',  
outName);
```

Código de gráficos de W_{EZ} vs H_{EZ} .

El siguiente código se utilizó para obtener los gráficos de W_{EZ} vs H_{EZ} (normalizados) en función de los parámetros estudiados. Cabe mencionar que W_{EZ} y H_{EZ} se deben encontrar ordenados dentro de un archivos .xlsx.

```
clear all;  
close all;  
clc;  
  
% Código completo para procesar y graficar datos de un archivo Excel  
archivo_excel = 'Estudio 1 HW Dw.xlsx';  
  
% 1. Leer todas las hojas del archivo Excel  
hojas = sheetnames(archivo_excel);  
numHojas = length(hojas);  
tablas = cell(numHojas, 1);  
  
for i = 1:numHojas  
    nombre_hoja = hojas{i};  
    tabla = readtable(archivo_excel, 'Sheet', nombre_hoja);  
    tablas{i} = tabla;  
end  
  
% 2. Procesar los datos (normalizar Ancho y Altura)  
W = cell(1, numHojas);  
H = cell(1, numHojas);  
Dw = linspace(0.040, 0.050, numHojas); % Reemplazar con valores reales si  
es necesario  
  
for i = 1:numHojas  
    W{i} = tablas{i}.Ancho / 0.0025;  
    H{i} = tablas{i}.Altura / 0.0025;  
end  
  
% 3. Configurar la gráfica  
numCurvas = numHojas;  
cmap = parula(numCurvas);  
  
figure;
```

```

hold on;

% 4. Graficar todos los conjuntos de datos usando scatter para asignar
color
for i = 1:numCurvas
    scatter(H{i}, W{i}, 60, Dw(i)*ones(size(H{i})), ...
        'filled', 'MarkerEdgeColor', [0 0 0], 'LineWidth', 0.5);
end

% 5. Personalizar el gráfico
xlabel('H_{EZ} / D_{50}', ...
    'FontName', 'Times New Roman', ...
    'FontAngle', 'italic', ...
    'FontSize', 30);

ylabel('W_{EZ} / D_{50}', ...
    'FontName', 'Times New Roman', ...
    'FontAngle', 'italic', ...
    'FontSize', 30);

% 6. Barra de color (leyenda) - MODIFICADO PARA NORMALIZAR POR 0.0025
colormap(parula);
cb = colorbar('eastoutside');
cb.Ticks = linspace(min(Dw), max(Dw), 11);

% Normalizar los valores de los ticks por 0.0025
cb.TickLabels = arrayfun(@(x) sprintf('%.1f', x / 0.0025), cb.Ticks,
'UniformOutput', false);
cb.TickLabelInterpreter = 'latex';
cb.FontSize = 14;

% 7. Agregar título en la parte superior del colorbar (MODIFICADO)
cb_pos = cb.Position;
x_text = cb_pos(1) + cb_pos(3)/2;
y_text = cb_pos(2) + cb_pos(4) + 0.02;

annotation('textbox', [x_text-0.05, y_text, 0.1, 0.04], ...
    'String', '$D_{w} \setminus, / \setminus, D_{50}$', ... % CAMBIADO PARA REFLEJAR LA
NORMALIZACIÓN
    'Interpreter', 'latex', ...
    'FontSize', 18, ...
    'EdgeColor', 'none', ...
    'HorizontalAlignment', 'center', ...
    'VerticalAlignment', 'middle');

% 8. Estética: quitar borde superior y derecho

```

```

set(gca, 'Box', 'off');           % quita las 4 líneas del borde del gráfico
set(gca, 'TickDir', 'out');       % ticks hacia fuera
grid on;                         % mantener la cuadrícula
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14);

% 9. Tamaño de la figura
set(gcf, 'Position', [100, 100, 1200, 800]);

hold off;

```

Código obtención de E_{EZ} .

El siguiente código se utilizó para extraer el espaciamiento entre las zonas de extracción (E_{EZ}) a partir de los archivos .txt exportados desde COMSOL Multiphysics®.

```

clear all;
close all;
clc;

% Configuración inicial
desktopDir = fullfile(getenv('USERPROFILE'), 'Desktop');
textoDir   = fullfile(desktopDir, 'texto');

if ~isfolder(textoDir)
    error('La carpeta "%s" no existe.', textoDir);
end

txtFiles = dir(fullfile(textoDir, '*.txt'));
if isempty(txtFiles)
    error('No se encontraron archivos .txt en "%s".', textoDir);
end

fprintf('\n=== Archivos encontrados ===\n');
for k = 1:numel(txtFiles)
    fprintf('  %s\n', txtFiles(k).name);
end

finalTable = table();

for fileIdx = 1:numel(txtFiles)
    fname = txtFiles(fileIdx).name;
    fullFileName = fullfile(txtFiles(fileIdx).folder, fname);

```

```

try
    data = dlmread(fullFileName);
catch
    warning('Error leyendo %s. Saltando...', fname);
    continue;
end

x = data(:,1);
y = data(:,2);
N = numel(x);

% Verificar mínimo de puntos
if N < 5
    warning('%s: muy pocos puntos (%d).', fname, N);
    continue;
end

% --- CLUSTER CON K-MEANS (k = 5) ---
k = 5;
% Inicialización aleatoria fija para reproducibilidad
opts = statset('MaxIter',1000, 'Display','off');
[labels, centroids] = kmeans([x y], k, 'Replicates',5, 'Options',opts);

% Calcular límites de cada elipsoide
limits = zeros(k,4); % [xmin, xmax, ymin, ymax]
centersX = zeros(k,1);
for i = 1:k
    xi = x(labels==i);
    yi = y(labels==i);
    limits(i,:) = [min(xi), max(xi), min(yi), max(yi)];
    centersX(i) = mean(xi);
end

% Ordenar por posición X del centroide
[~, order] = sort(centersX);
limits = limits(order, :);

% Anchos y alturas
W = limits(:,2) - limits(:,1);
H = limits(:,4) - limits(:,3);

% Espaciamientos (no negativos)
D = zeros(k-1,1);
for i = 1:k-1
    gap = limits(i+1,1) - limits(i,2);
    D(i) = max(0, gap);
end

```

```

end

% Crear fila para la tabla
fileNumber = str2double(regexpi(fname, '\d+', 'match', 'once'));
values = [W' H' D'];
varNames = ['FileName', 'FileNumber', ...
            arrayfun(@(i) sprintf('W%d', i), 1:k, 'UniformOutput', false),
...
            arrayfun(@(i) sprintf('H%d', i), 1:k, 'UniformOutput', false),
...
            arrayfun(@(i) sprintf('Dist_E%dE%d', i, i+1), 1:k-
1, 'UniformOutput', false)];

newRow = [{fname}, fileNumber, num2cell(values)];
newRowTbl = cell2table(newRow, 'VariableNames', varNames);

finalTable = [finalTable; newRowTbl]; %#ok<AGROW>
end

% Ordenar y mostrar
finalTable = sortrows(finalTable, 'FileNumber');
format longG
disp(finalTable)

% Guardar
outName = 'ellipsoids_kmeans_results.xlsx';
writetable(finalTable, outName);
fprintf('\nDatos guardados en "%s"\n', outName);

```

Código gráfico E_{EZ} en función de los parámetros estudiados.

El siguiente código se utilizó para graficar E_{EZ} en función de los parámetros estudiados. El archivo de origen corresponde a un archivo .xlsx que contiene el espaciamiento generado entre elipsoides de extracción.

```

% Cargar datos desde el archivo Excel
filename = 'C:\Users\particular\Desktop\MEMORIA\excels\Estudio 3 - para
graficar con valores promedio PHI.xlsx';
sheet = 'Sheet1';

% Leer los datos
data = readtable(filename, 'Sheet', sheet);

```

```

% Extraer valores
phi = data.Phi;
T_data = table2array(data(:, 2:21));
num_espaciamientos = size(T_data, 2);

% Valores de masa para la leyenda (según lo solicitado)
masas_kg = [0.26, 0.52, 0.78, 1.04, 1.30, 1.56, 1.82, 2.08, 2.34, 2.60, ...
            2.86, 3.12, 3.38, 3.64, 3.9, 4.16, 4.42, 4.68, 4.94, 5.20];

% Configurar formato LaTeX para el texto
set(groot, 'defaultAxesTickLabelInterpreter','latex');
set(groot, 'defaultTextInterpreter','latex');

% Crear figura
fig = figure('Color', 'white', 'Position', [100 100 1200 800]);

% Eje principal
ax1 = axes('Position', [0.1 0.2 0.6 0.65]);
hold on;

% --- Colormap personalizado (azul → rojo) ---
cmap_T = [linspace(0, 1, num_espaciamientos)' linspace(0, 0,
num_espaciamientos)' linspace(1, 0, num_espaciamientos)']; % Azul → Rojo

% Graficar con estilo similar al código 2
for j = 1:num_espaciamientos
    plot(phi, T_data(:,j), 'o', ...
        'Color', cmap_T(j,:), ...
        'MarkerFaceColor', cmap_T(j,:), ...
        'MarkerEdgeColor', 'k', ...           % Contorno negro
        'MarkerSize', 6, ...
        'LineWidth', 0.5);
end

% Resaltar el último valor con tamaño mayor
plot(phi, T_data(:, num_espaciamientos), 'o', ...
    'Color', cmap_T(num_espaciamientos,:), ...
    'MarkerFaceColor', cmap_T(num_espaciamientos,:), ...
    'MarkerEdgeColor', 'k', ...
    'MarkerSize', 8, ...
    'LineWidth', 0.5);

hold off;

% Agregar grilla

```

```

grid on;

% Estética del eje
set(ax1, 'FontSize', 12, ...
        'FontName', 'Arial', ...
        'LineWidth', 1, ...
        'TickDir', 'out', ...
        'Box', 'off', ...
        'TickLabelInterpreter', 'latex', ...
        'XGrid', 'on', 'YGrid', 'on', ...
        'GridLineStyle', '-', ...
        'GridAlpha', 0.1, ...
        'GridColor', [0.5 0.5 0.5]);

% Etiquetas con notación matemática
xlabel('$\varphi (^{\circ})$', 'fontsize',20,'interpreter','latex');
ylabel('$E_{EZ}(m)$', 'fontsize',20,'interpreter','latex');

% Ajustar límites
xlim([min(phi)-0.5, max(phi)+0.5]);
ylim([min(T_data(:))*0.97, max(T_data(:))*1.03]);

% Crear barra de color (colorbar) como leyenda con los valores de masa
colormap(ax1, cmap_T);
cb = colorbar(ax1, 'eastoutside');
cb.Ticks = linspace(0, 1, num_espaciamientos);
cb.TickLabels = arrayfun(@(x) sprintf('%.2f', x), masas_kg,
'UniformOutput', false);
cb.TickLabelInterpreter = 'latex';
cb.FontSize = 12;

% Agregar título en la parte superior del colorbar
cb_pos = cb.Position;
x_text = cb_pos(1) + cb_pos(3)/2;
y_text = cb_pos(2) + cb_pos(4) + 0.02;

annotation('textbox', [x_text, y_text, 0.1, 0.03], ...
        'String', '$m$ (kg)', ...
        'Interpreter', 'latex', ...
        'FontSize', 15, ...
        'EdgeColor', 'none', ...
        'HorizontalAlignment', 'center');

% Ajustar posición del eje principal para hacer espacio para la leyenda
ax1.Position(3) = 0.6;

```

```
% Configurar tipografía para todos los elementos
set(findall(fig, 'Type', 'text'), 'FontName', 'Arial', 'FontWeight',
'normal');
set(findall(fig, 'Type', 'axes'), 'FontName', 'Arial', 'FontWeight',
'normal');

hold off;
```

Código modelo matemático propuesto.

El código corresponde al utilizado para el desarrollo del modelo matemático.

```
clear all;
close all;
clc;

% Cargar datos desde el archivo Excel
data = readtable('Resultados H_ez en función de.xlsx');

% Extracción de variables
W_ez = data.W_ez;      % Ancho del elipsoide (m)
H_ez = data.H_ez;      % Alto del elipsoide (m)
phi = deg2rad(data.phi); % Ángulo de fricción (radianes)
D50 = data.D50;        % Diámetro de partículas (m)
S = data.S;            % Espaciado entre puntos (m)
Dw = data.Dw;          % Ancho de extracción (m)
u0 = data.u0;          % Velocidad de extracción (m/s)
t = data.t;            % Tiempo de extracción (s)

% Adimensionalización (Grupos Pi)
Pi1 = W_ez ./ D50;      % Variable dependiente (W_ez/D50)
Pi2 = H_ez ./ D50;      % Relación altura/diámetro
Pi3 = phi;              % Ángulo de fricción (adimensional)
Pi4 = S ./ D50;         % Espaciado relativo
Pi5 = Dw ./ D50;        % Ancho de extracción relativo
Pi6 = (u0 .* t) ./ D50; % Tiempo de extracción adimensional

% Definir variable independiente combinada  $\chi$  con los exponentes dados
chi = (Pi2.^(0.4)) .* (Pi3.^(-0.3)) .* (Pi4.^(0.2)) .* (Pi5.^(0.3)) .*
(Pi6.^(-0.01));

% Modelo no lineal:  $Pi1 = k * \chi^m$ 
model = @(params, xdata) params(1) * (xdata.^params(2));
```

```

% Parámetros iniciales [k, m] y ajuste
params0 = [1, 0.25]; % Valores iniciales (k=1, m=0.25)
options = optimoptions('lsqcurvefit', 'Algorithm', 'levenberg-marquardt',
'Display', 'iter');
[params, resnorm, ~, exitflag, output] = lsqcurvefit(model, params0, chi,
Pi1, [], [], options);

% Extraer parámetros ajustados
k = params(1);
m = params(2);

% Función final ajustada
fprintf('Función ajustada (no lineal):\n');
fprintf('Pi1 = %.4f *  $\chi^{%.4f}$ \n', k, m);
fprintf('Donde  $\chi = (Pi2^{0.4}) * (Pi3^{-0.3}) * (Pi4^{0.4}) * (Pi5^{0.3}) * (Pi6^{-0.01})$ \n');

% Predicciones del modelo
Pi1_pred = k * (chi.^m);

% Cálculo de R²
SS_res = sum((Pi1 - Pi1_pred).^2);
SS_tot = sum((Pi1 - mean(Pi1)).^2);
R2 = 1 - (SS_res / SS_tot);
fprintf('R² = %.4f\n', R2);

%% Gráfico con eje X logarítmico y eje Y lineal (MODIFICADO)
figure;
semilogx(chi, Pi1, 'o', 'MarkerFaceColor', [0.3010 0.7450 0.9330], ...
'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerSize', 8);
hold on;

% Curva ajustada
chi_teo = linspace(min(chi), max(chi), 100);
Pi1_teo = k * (chi_teo.^m);
semilogx(chi_teo, Pi1_teo, 'r-', 'LineWidth', 2);

% Etiquetas y estilo
xlabel('$\chi = \Pi_{2}^{a} \cdot \Pi_{3}^{b} \cdot \Pi_{4}^{c} \cdot \Pi_{5}^{d} \cdot \Pi_{6}^{e}$', ...
'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\Pi_1 = W_{EZ}/D_{50}$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
legend('Datos', ['$\Pi_1 = ' num2str(k, '%.4f') ' \cdot \chi^{' num2str(m, '%.4f') '}$'], ...
'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best');

```

```

grid on;
set(gca, 'FontSize', 12);

% Añadir texto con parámetros
annotation('textbox', [0.15, 0.65, 0.3, 0.1], 'String', ...
    sprintf('R² = %.4f', R2), ...
    'FitBoxToText', 'on', 'BackgroundColor', 'w', 'FontSize', 10);

%% Gráfico adicional: Valores reales vs predichos (X logarítmico, Y lineal)
figure;
semilogx(Pi1, Pi1_pred, 'o', 'MarkerFaceColor', [0.3010 0.7450 0.9330], ...
    'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerSize', 8);
hold on;
semilogx([min(Pi1), max(Pi1)], [min(Pi1), max(Pi1)], 'r--', 'LineWidth',
2);
xlabel('$\Pi_{1,real} = W_{ez}/D_{50}$ (Escala Logarítmica)',
'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\Pi_{1,pred}$ (Escala Lineal)', 'Interpreter', 'latex',
'FontSize', 14);
title('Comparación: Valores Reales vs Predichos', 'FontSize', 16);
legend('Datos', 'Línea de 45°', 'Location', 'best');
grid on;
set(gca, 'FontSize', 12);

```