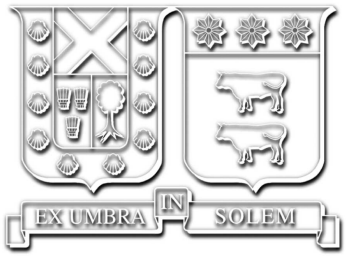
Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Valparaíso, Chile



Implementación en plataforma digital de control CTC-FOC para seguimiento de trayectorias en motor sincrónico de imanes permanentes

Francisco Antonio Muñoz Vargas

2026

Requisito parcial para obtener el título de:
Ingeniero Civil Electricista

Profesor Guía:
Pablo Lezana Illesca
Jorge Juliet Avilés

Valparaíso, octubre, 2026.

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☑ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Implementación en plataforma digital de control CTC-FOC para seguimiento de trayectorias en un motor sincrónico de imanes permanentes

Nombre del candidato(a): Francisco Antonio Muñoz Vargas

Carrera / Grado: Ingeniería Civil Eléctrica

Campus: Casa Central **Departamento:** Ingeniería Eléctrica

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Pablo Lezana Illesca, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente

DEJO CONSTANCIA que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☑ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por **(marcar una opción)**:

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

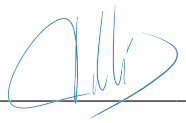
_____

_____

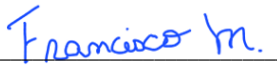
_____

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

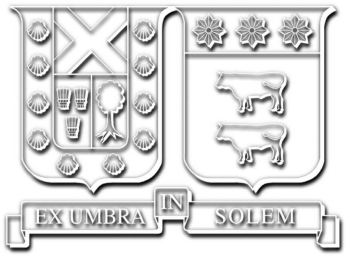
Fecha: 26-10-2026 **Firma:**  Pablo Lezana Illesca

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 23-10-2026 **Firma:** 

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Valparaíso, Chile



Implementación en plataforma digital de control CTC-FOC para seguimiento de trayectorias en motor sincrónico de imanes permanentes

Francisco Antonio Muñoz Vargas

2026

Agradecimientos

A mi madre, María, quien ha sido mi apoyo incondicional en cada etapa de este camino. En los momentos en los que pensé en rendirme, siempre estuvo ahí para recordarme —con una fuerza que muchas veces superó a la mía— que sí era posible continuar. Su apoyo y su fe son una parte esencial de por qué he llegado hoy hasta aquí.

A mi padre, Francisco, por acompañarme con paciencia, firmeza y un apoyo silencioso pero constante. Por enseñarme que la perseverancia vale más que cualquier facilidad y por ofrecer siempre un lugar seguro adonde volver cuando el camino se hacía difícil.

A mi hermana, Angélica, mi amiga y un ejemplo que admiro profundamente. Gracias por tu compañía en mis altibajos, por tu humor, tu claridad y tu cariño incondicional. Verte avanzar me inspira a crecer y esforzarme más.

A mi familia en su conjunto, gracias por la fortuna de haber crecido acompañado por ustedes. Espero, con el tiempo, poder retribuir aunque sea una parte de todo lo que me han dado.

A los profesores del Departamento de Ingeniería Eléctrica, cuyo rigor, dedicación y compromiso marcaron mi formación. Agradezco el tiempo, las oportunidades y la paciencia frente a mis dudas y dificultades.

Índice de Contenidos

Índice de Contenidos I

Índice de Figuras III

Índice de Tablas V

Resumen 1

1. Introducción 2
- 1.1. Objetivos . . . 4
  - 1.1.1. Objetivo general . . . 4
  - 1.1.2. Objetivos específicos . . . 4

2. Marco teórico 5
- 2.1. Máquina sincrónica de imanes permanentes . . . 6
- 2.2. Control vectorial orientado al campo . . . 9
  - 2.2.1. Lazo de control de velocidad . . . 10
- 2.3. Inversores trifásicos . . . 11
  - 2.3.1. Inversor trifásico de fuente de tensión de dos niveles . . . 11
  - 2.3.2. Modulación por vectores espaciales . . . 13
- 2.4. Control por torque calculado . . . 15
  - 2.4.1. Descripción del sistema físico . . . 15
  - 2.4.2. Consideraciones del modelado . . . 15
  - 2.4.3. Deducción dinámica mediante Euler–Lagrange . . . 16
  - 2.4.4. Motivación del CTC . . . 18
  - 2.4.5. Ley de control de torque calculado . . . 18
  - 2.4.6. Extensión con acción integral . . . 21
  - 2.4.7. Discretización e implementación del CTC . . . 23

3. Definición de escenarios y trayectorias de evaluación 25
- 3.1. Propósito y alcance de la evaluación . . . 26
- 3.2. Arquitectura funcional del sistema de evaluación . . . 26
- 3.3. Selección y parametrización de los escenarios articulares . . . 27
  - 3.3.1. Convención angular y parámetros comunes . . . 27
  - 3.3.2. Escenario articular de rodilla . . . 29
  - 3.3.3. Escenario articular de codo . . . 30
- 3.4. Definición de las trayectorias de referencia . . . 32
  - 3.4.1. Trayectoria sinusoidal . . . 32

3.4.2. Trayectoria de mínimo *jerk* . . . 34
3.4.3. Perfil trapezoidal en velocidad . . . 36
3.4.4. Perfiles de contraste cinemático . . . 38
3.5. Restricciones operacionales del esquema CTC–FOC . . . 41
3.5.1. Límites articulares y del error de seguimiento . . . 41
3.5.2. Límites de corriente y torque . . . 43
3.5.3. Límite vectorial de tensión . . . 45
3.5.4. Saturación, anti-enrollamiento y señalización de límites . . . 46
3.6. Metodología y métricas de evaluación . . . 51
3.6.1. Métricas de seguimiento . . . 51
3.6.2. Métricas de esfuerzo del accionamiento . . . 52
3.6.3. Métricas de suavidad cinemática . . . 53

4. Simulación computacional 54
4.1. Parametrización y validación del modelo de la PMSM . . . 54
4.2. Modelo del accionamiento implementado en PLECS . . . 55
4.2.1. Estructura general del modelo . . . 56
4.2.2. Verificación funcional del inversor y del modulador SVPWM . . . 57
4.2.3. Calibración del lazo de corriente . . . 58
4.3. Evaluación de los escenarios articulares . . . 64
4.3.1. Escenario de rodilla . . . 64
4.3.2. Escenario de codo . . . 75
4.4. Síntesis comparativa de los escenarios . . . 86
4.5. Evaluación complementaria de perfiles de contraste cinemático . . . 89
4.5.1. Evaluación complementaria del perfil trapezoidal . . . 89
4.5.2. Rampa suave y trayectorias triangulares . . . 92

5. Implementación experimental 98
5.1. Plataforma y montaje experimental . . . 98
5.1.1. Plataforma digital y etapa de potencia . . . 98
5.1.2. Carga mecánica equivalente . . . 99
5.2. Implementación del control y procedimiento de ensayo . . . 101
5.3. Resultados experimentales . . . 102
5.3.1. Verificación bidireccional del accionamiento . . . 102
5.3.2. Seguimiento de trayectoria de mínimo *jerk* . . . 104
5.3.3. Seguimiento de trayectoria senoidal . . . 108

6. Conclusiones 115

Apéndices 117

A. Diagramas de flujo de la implementación experimental 117
A.1. Lógica supervisora del accionamiento . . . 117
A.2. Procedimiento de alineamiento eléctrico . . . 118
A.3. Ejecución y análisis de los ensayos . . . 119

Bibliografía 120

Índice de Figuras

2.1. Máquinas de imanes permanentes: SPMSM e IPMSM 6
2.2. Control vectorial orientado al campo de una PMSM 9
2.3. Inversor trifásico de fuente de tensión. 12
2.4. Vectores y sectores en el marco $\alpha\beta$ 14
2.5. Prototipo generalizado del banco de ensayos. 15
2.6. Controlador CTC en el lazo de seguimiento articular 18

3.1. Arquitectura del esquema de control CTC–FOC 26
3.2. Movimientos articulares considerados en los escenarios de evaluación. . . 28
3.3. Movimiento de flexión–extensión considerado para la rodilla. 29
3.4. Movimiento de flexión–extensión considerado para el codo. 31
3.5. Perfil sinusoidal utilizado en el escenario de rodilla. 33
3.6. Perfil de mínimo *jerk* utilizado en el escenario de codo. 36
3.7. Perfil trapezoidal en velocidad utilizado en el escenario de rodilla. . . . 38
3.8. Perfiles de contraste cinemático. 42
3.9. Anti-enrollamiento por retrocálculo del CTC. 48
3.10. Anti-enrollamiento de los controladores PI de corriente. 50

4.1. Accionamiento implementado en PLECS 56
4.2. Secuencia simétrica de conmutación SVPWM en el sector I 57
4.3. Tensiones y corriente en la carga (RL) 59
4.4. Lazo de corriente con prealimentación 60
4.5. Respuesta al escalón de los lazos de corriente 61
4.6. Validación del lazo de corriente en PLECS. 63
4.7. Seguimiento de posición en el caso nominal de rodilla. 65
4.8. Seguimiento de velocidad en el caso nominal de rodilla. 66
4.9. Torque articular en el caso nominal de rodilla. 67
4.10. Variables de los ejes d y q en el caso nominal de rodilla. 68
4.11. Seguimiento de posición con masas distales añadidas. 70
4.12. Seguimiento de velocidad con masas distales añadidas. 71
4.13. Errores RMS para los niveles de masa distal añadida. 71
4.14. Torque articular con masas distales añadidas. 72
4.15. Corrientes dq con masas distales añadidas. 73
4.16. Respuesta de la rodilla ante un escalón de torque externo. 75
4.17. Torque articular y corriente de eje q ante una perturbación externa. . . . 75
4.18. Seguimiento de posición en el caso nominal de codo. 77
4.19. Seguimiento de velocidad en el caso nominal de codo. 77
4.20. Torque articular en el caso nominal de codo. 78
4.21. Corrientes dq en el caso nominal de codo. 79

4.22. Torque externo aplicado en el escenario de codo. 80
4.23. Seguimiento de posición ante momento resistivo externo. 81
4.24. Seguimiento de velocidad ante momento resistivo externo. 82
4.25. Errores RMS ante momento resistivo externo. 83
4.26. Torque articular ante momento resistivo externo. 83
4.27. Variables eléctricas ante momento resistivo externo. 85
4.28. Seguimiento de posición y velocidad para el perfil trapezoidal. 90
4.29. Torque articular durante el perfil trapezoidal de rodilla. 91
4.30. Variables de los ejes d y q durante el perfil trapezoidal de velocidad. . . . 91
4.31. Seguimiento de posición para los perfiles de contraste. 93
4.32. Ampliaciones del seguimiento de posición en las trayectorias triangulares. 93
4.33. Seguimiento de velocidad para los perfiles de contraste. 94
4.34. Aceleración para los perfiles de contraste cinemático. 95

5.1. Plataforma digital utilizada en la implementación. 99
5.2. Diseño e implementación del acople mecánico. 100
5.3. Verificación bidireccional del lazo de velocidad. 103
5.4. Variables eléctricas durante la verificación bidireccional. 104
5.5. Seguimiento cinemático de mínimo *jerk* en la configuración base. 105
5.6. Corrientes de fase y torque estimado en la configuración base. 106
5.7. Variables dq durante mínimo *jerk* en la configuración base. 107
5.8. Seguimiento de trayectoria de mínimo *jerk* con distintas cargas 108
5.9. Variables eléctricas para distintas configuraciones de carga. 108
5.10. Variables dq durante mínimo *jerk* para distintas configuraciones de carga. 109
5.11. Seguimiento cinemático de la trayectoria senoidal en la configuración base. 110
5.12. Corrientes de fase y torque estimado durante la trayectoria senoidal. . . . 111
5.13. Variables dq durante la trayectoria senoidal en la configuración base. . . . 112
5.14. Seguimiento cinemático de la trayectoria senoidal con carga adicional. . . 113
5.15. Corrientes de fase y torque estimado con carga 113
5.16. Variables dq durante la trayectoria senoidal con carga adicional. 114

A.1. Diagrama de flujo de la máquina supervisora del accionamiento. 117
A.2. Diagrama de flujo del proceso de alineamiento del rotor. 118
A.3. Flujo general del ensayo experimental 119

Índice de Tablas

2.1. Combinaciones de tensiones de salida del inversor de dos niveles. 12
2.2. Vectores de conmutación del inversor de dos niveles. 13

3.1. Parámetros antropométricos e inerciales del conjunto pierna–pie. 30
3.2. Parámetros antropométricos e inerciales del conjunto antebrazo–mano. . 31
3.3. Intervalos angulares utilizados en los escenarios articulares. 41
3.4. Límites de torque utilizados en los escenarios articulares. 44

4.1. Parámetros de la PMSM. 55
4.2. Bases empleadas para la normalización en sistema por unidad. 55
4.3. Comparación de parámetros de respuesta del lazo de corriente en los ejes d y q. 61
4.4. Puntos característicos de la trayectoria senoidal nominal de rodilla. . . 65
4.5. Parámetros de las masas distales adicionales incorporadas en la planta mecánica. 69
4.6. Puntos característicos de la trayectoria de mínimo *jerk* para codo. . . . 76
4.7. Síntesis de los resultados obtenidos en los escenarios principales. 86
4.8. Métricas de seguimiento para los perfiles de contraste cinemático. . . . 94
4.9. Respuesta máxima localizada alrededor de las transiciones. 96
4.10. Esfuerzo y activación de límites para los perfiles de contraste. 97

5.1. Configuraciones mecánicas utilizadas en los ensayos experimentales. . . 101
5.2. Frecuencias de ejecución y adquisición experimental. 101
5.3. Comparación experimental para la trayectoria de mínimo *jerk*. 109
5.4. Resultados experimentales de la trayectoria senoidal para las parametrizaciones utilizadas en cada configuración. 114

Nomenclatura

Siglas y acrónimos

PMSM	:	*Permanent Magnet Synchronous Motor* (motor síncrono de imanes permanentes).
FOC	:	*Field Oriented Control* (control orientado al campo).
CTC	:	Control por torque calculado.
SVPWM	:	*Space Vector Pulse Width Modulation* (modulación por vectores espaciales).
VSI	:	*Voltage Source Inverter* (inversor de fuente de tensión).
DSP	:	*Digital Signal Processor* (procesador digital de señales).
FPGA	:	*Field Programmable Gate Array*.
ADC	:	*Analog-to-Digital Converter* (convertidor analógico–digital).
RMSE	:	*Root Mean Square Error* (error cuadrático medio).
1–GDL	:	Un grado de libertad.

Símbolos

θ	:	Posición angular articular medida.
θ_d	:	Posición angular articular deseada o de referencia.
$\dot{\theta}$	:	Velocidad angular articular medida.
$\dot{\theta}_d$	:	Velocidad angular articular deseada.
$\ddot{\theta}_d$	:	Aceleración angular articular deseada.
T_J	:	Torque articular, referido al eje de salida del reductor.
T_J^*	:	Torque articular de referencia.
T_m	:	Torque electromagnético del motor, referido al eje del PMSM.
T_m^*	:	Torque de referencia referido al eje del motor.
M_{tot}	:	Inercia equivalente total referida al eje articular.
m	:	Masa equivalente del segmento.
ℓ	:	Distancia desde el eje articular al centro de masa equivalente.
F_v	:	Coeficiente de fricción viscosa.
F_c	:	Coeficiente de fricción de Coulomb.
ε	:	Parámetro de suavizado de la fricción de Coulomb.
N	:	Relación de transmisión mecánica.
η	:	Eficiencia de la transmisión.
$i_d,\ i_q$	:	Corrientes del estator en el sistema de referencia dq.
$i_d^*,\ i_q^*$	:	Referencias de corriente en el sistema dq.
$v_d,\ v_q$	:	Tensiones del estator en el sistema de referencia dq.
V_{dc}	:	Tensión del enlace de continua del inversor.

Resumen

El presente trabajo aborda el desarrollo, simulación, implementación y validación experimental de un esquema de control por torque calculado integrado con control vectorial orientado al campo, aplicado a un motor sincrónico de imanes permanentes. La estrategia propuesta busca generar y seguir trayectorias de posición representativas de movimientos de rehabilitación mediante un banco equivalente de un grado de libertad. Para ello, se desarrolla un modelo mecánico que incorpora efectos inerciales, gravitacionales y disipativos, a partir del cual se calcula una referencia de torque articular que posteriormente se transforma en una consigna de corriente de eje q para el accionamiento eléctrico.

El sistema fue evaluado mediante simulaciones en PLECS, integrando el modelo de la máquina, un inversor trifásico de dos niveles, modulación por vectores espaciales y la estructura de control CTC–FOC. Se analizaron distintos escenarios articulares mediante trayectorias conocidas, tales como perfiles senoidales, de mínimo *jerk*, trapezoidales y perfiles complementarios. Los resultados muestran que el esquema CTC–FOC permite reproducir las trayectorias principales con errores reducidos, manteniendo las demandas de torque y corriente dentro de los márgenes operacionales considerados.

Adicionalmente, se evaluó el comportamiento del sistema frente a variaciones de carga, momentos resistivos externos y referencias con distinto grado de suavidad cinemática. En estos casos, el controlador compensó el aumento de la exigencia mecánica mediante un incremento del torque articular y de la corriente i_q. La comparación entre perfiles mostró que el error de posición caracteriza la fidelidad con que se reproduce una referencia, pero no informa por sí solo sobre el torque y la corriente requeridos ni sobre la brusquedad de sus transiciones. En particular, las discontinuidades de velocidad presentes en las trayectorias triangulares simétrica y asimétrica de retorno rápido produjeron demandas repentinas de torque y activaron su limitador. Por esta razón, el error de seguimiento debe analizarse junto con el esfuerzo del accionamiento y con métricas de regularidad cinemática, como el *jerk*, al seleccionar una trayectoria.

Finalmente, se implementó el esquema de control en la plataforma digital DSP–FPGA. La validación experimental comprendió la operación del accionamiento y el seguimiento de trayectorias de mínimo *jerk* y senoidales, sobre un banco de un grado de libertad, sin interacción con usuarios y utilizando configuraciones base y con discos adicionales conocidos. La implementación evidenció además efectos propios del montaje físico, relacionados con la fricción, la resolución del *encoder*, el ruido de medición y la incertidumbre paramétrica, los cuales no se encuentran completamente representados en el modelo de simulación. En consecuencia, los resultados respaldan la factibilidad técnica del esquema CTC–FOC para seguir trayectorias en una plataforma controlada de un grado de libertad, quedando como trabajo futuro su robustecimiento frente a incertidumbres biomecánicas, cargas variables, sistemas multiarticulares e interacción directa con usuarios.

Capítulo 1

Introducción

El accidente cerebrovascular (ACV) constituye una de las principales causas de discapacidad a nivel mundial. Esta condición provoca deficiencias motoras en el 80 % de los sobrevivientes, permitiendo una recuperación con secuelas menores en solo el 25 % de los casos [1]. La rehabilitación temprana e intensiva es fundamental para promover la recuperación de la movilidad, ya que la repetición sistemática de movimientos específicos permite activar procesos de neuroplasticidad [2], entendidos como la capacidad del sistema nervioso para reorganizarse tras una lesión. Diversos estudios han demostrado que el reaprendizaje motor depende fuertemente de la calidad, precisión y regularidad del movimiento aplicado durante la terapia [3, 4], lo que ha impulsado el desarrollo de tecnologías capaces de entregar ejercicios controlados, seguros y altamente repetitivos.

El torque articular desempeña un rol esencial en la biomecánica del movimiento humano. La magnitud y perfil temporal del torque determinan la asistencia o resistencia aplicada durante una tarea motora y constituyen una referencia fundamental para definir la intensidad del ejercicio y medir el grado de participación activa del paciente.

Sin embargo, las técnicas tradicionales para estimar el torque biológico —como la dinámica inversa del cuerpo humano basada en la captura de movimiento, los modelos matemáticos simplificados o los modelos neuromusculoesqueléticos— presentan limitaciones en costo, complejidad o adaptabilidad [5], dificultando su integración en sistemas portátiles o de bajo costo destinados al entorno clínico. Esto subraya la necesidad de métodos de control capaces de generar perfiles de torque con significado biomecánico sin depender de mediciones externas de alta complejidad.

La robótica de rehabilitación ha surgido como una herramienta eficaz para incrementar la intensidad, precisión y repetitividad de la terapia, superando las limitaciones del entrenamiento manual convencional [6]. Técnicas como asistencia según sea necesario (AAN, por sus siglas en inglés *Assist-As-Needed*) y los enfoques de aprendizaje basado en el error han demostrado favorecer la recuperación motora y promover la neuroplasticidad [7]. Sin embargo, muchos dispositivos clínicos aún operan bajo esquemas de control pasivos o de velocidad fija, restringiendo la capacidad de reproducir movimientos fisiológicamente relevantes. Esto evidencia la necesidad de controladores capaces de regular directamente el torque, proporcionando interacciones más naturales y seguras durante la terapia.

Dentro de las tecnologías de actuadores utilizados en robótica de rehabilitación, los motores síncronos de imanes permanentes (*Permanent Magnet Synchronous Machine*,

PMSM) destacan por su alta densidad de potencia, bajo rizado de torque y excelente capacidad de control mediante esquemas de control vectorial orientado al campo (FOC). El desacople entre las corrientes $d - q$ en FOC permite regular el torque del motor mediante la componente i_q, habilitando una traducción precisa entre consignas de torque y esfuerzo aplicado al usuario. Esto posiciona al PMSM como una alternativa adecuada para sistemas de rehabilitación que requieren respuesta rápida, comportamiento dinámico estable y perfiles de torque suaves [8].

A pesar de estos avances, la mayoría de los sistemas de rehabilitación no integra modelos dinámicos articulares en sus controladores, limitando la capacidad de reproducir perfiles de torque fisiológicos. El control por torque calculado (CTC) constituye una estrategia adecuada para abordar esta limitación, ya que incorpora explícitamente el modelo dinámico de la plataforma robótica —incluyendo inercia, gravedad y fricción del mecanismo— para generar el torque necesario en función de la trayectoria deseada. Esto permite imponer movimientos suaves y coherentes con principios biomecánicos y de aprendizaje motor, los cuales son especialmente relevantes en terapias activas o asistidas.

Para evaluar la viabilidad experimental de esta estrategia, es adecuado utilizar una plataforma de un grado de libertad (1-GDL) que emule el comportamiento dinámico de una articulación humana sin requerir el acoplamiento directo a un miembro biológico real. Este enfoque, ampliamente utilizado en investigación [9, 10], permite controlar el rango angular, garantizar la seguridad del ensayo y reproducir trayectorias articulares clínicas sin riesgos para el usuario. De esta forma, se emplea un PMSM con reductor como actuador, cuya salida mecánica se interpreta como la dinámica equivalente de un segmento anatómico rígido dentro de un rango angular clínicamente relevante, lo que permite validar la interacción entre CTC y FOC en condiciones controladas.

Finalmente, la implementación en tiempo real de CTC–FOC requiere una plataforma digital con capacidad de cómputo suficiente para ejecutar algoritmos avanzados con baja latencia. Los procesadores digitales de señal (DSP) y las arquitecturas FPGA permiten tasas de muestreo elevadas y un control preciso de corriente, habilitando la ejecución estable del esquema propuesto.

Este trabajo presenta la implementación y validación experimental de un esquema de control por torque calculado integrado con control vectorial orientado al campo en un motor PMSM, sobre un banco experimental de un grado de libertad destinado al estudio de movimientos articulares de rehabilitación. Se desarrollan y evalúan diferentes trayectorias —senoidales, de mínimo *jerk* y trapezoidales— para analizar el desempeño del sistema ante perfiles cinemáticos representativos de tareas clínicas. Los resultados permiten establecer una base experimental sólida para futuras extensiones hacia sistemas multiarticulares y aplicaciones de rehabilitación orientadas a pacientes.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

Desarrollar e implementar un esquema de control CTC-FOC para un motor sincrónico de imanes permanentes, evaluando su desempeño en el seguimiento de trayectorias de posición mediante simulación y validación experimental, considerando perfiles de movimientos orientados a aplicaciones de rehabilitación.

1.1.2. Objetivos específicos

- Realizar una revisión bibliográfica sobre el control de máquinas sincrónicas de imanes permanentes, estrategias de control de torque calculado y el uso de trayectorias como referencias de movimiento.
- Desarrollar un modelo matemático integrado del sistema que permita generar y evaluar consignas de torque asociadas al seguimiento de trayectorias.
- Evaluar el sistema de control utilizando PLECS, para analizar su desempeño bajo distintos perfiles de trayectoria, considerando métricas de error de seguimiento, esfuerzo de control y la sensibilidad ante variaciones de parámetros.
- Implementar el esquema CTC-FOC en la plataforma digital disponible, utilizando un convertidor de dos niveles.
- Diseñar, ejecutar y analizar ensayos experimentales en un sistema de un grado de libertad con carga emulada, validando los resultados mediante comparación con las simulaciones y realizando ajustes de parámetros cuando corresponda.

Capítulo 2

Marco teórico

En el ámbito de la ingeniería eléctrica moderna, los sistemas de conversión eléctrica en energía mecánica, y viceversa, han adquirido un rol protagónico debido al creciente desarrollo de aplicaciones industriales, de transporte y de generación distribuida. La incorporación de máquinas eléctricas de alto desempeño, junto con el avance en dispositivos semiconductores de potencia y estrategias de control digital, ha permitido desarrollar soluciones cada vez más eficientes, compactas y confiables, acordes con las exigencias actuales de eficiencia energética y sostenibilidad.

Dentro de este escenario, las máquinas sincrónicas de imanes permanentes han logrado consolidarse como una de las tecnologías más relevantes, gracias a su alta densidad de potencia, elevado rendimiento y capacidad de operar en un amplio rango de velocidades. Estas características las convierten en una alternativa especialmente atractiva en aplicaciones de accionamiento eléctrico donde se requiere alta precisión dinámica, seguimiento de trayectorias y regulación de torque.

No obstante, el aprovechamiento de estas capacidades requiere un entendimiento detallado de su comportamiento electromagnético y mecánico, así como de las técnicas de conversión y control que permiten gobernar su operación. En particular, la utilización de esquemas de control avanzados exige disponer de modelos matemáticos adecuados de la máquina y del sistema mecánico acoplado, los cuales constituyen la base para el diseño e implementación de estrategias orientadas al seguimiento preciso de movimiento.

En este contexto, el presente capítulo aborda los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo del trabajo. En primer lugar, se presenta la máquina sincrónica de imanes permanentes y su representación matemática. Posteriormente, se introducen los principios del control vectorial orientado al campo y la etapa de electrónica de potencia asociada al inversor trifásico de dos niveles. Finalmente, se desarrolla el modelo mecánico equivalente y se establecen las bases del control por torque calculado utilizado para el seguimiento de trayectorias articulares.

2.1. Máquina sincrónica de imanes permanentes

La máquina sincrónica de imanes permanentes corresponde a una máquina de corriente alterna en la cual el campo magnético del rotor es producido por imanes permanentes, eliminando la necesidad de devanados de excitación y de alimentación en corriente continua en el rotor. Esta característica reduce pérdidas asociadas a la excitación, mejora la eficiencia global del sistema y favorece una construcción más compacta.

El estator cuenta con un devanado trifásico distribuido en un núcleo ferromagnético laminado, mientras que el rotor incorpora imanes permanentes que generan el campo magnético principal. Según la disposición de dichos imanes, la PMSM puede clasificarse en tipo superficial (SPMSM, *Surface-mounted Permanent Magnet Synchronous Machine*) o interior (IPMSM, *Interior Permanent Magnet Synchronous Machine*), como se ilustra en la Fig. 2.1. Cada una de estas configuraciones presenta ventajas específicas en términos de densidad de potencia, capacidad de debilitamiento de campo y aprovechamiento de la saliencia magnética.

En particular, en este trabajo se utiliza una PMSM NORD IE5+ HYG de 1,1 kW y ocho polos, cuyos imanes permanentes se encuentran alojados en el rotor. Por su configuración, la máquina corresponde a una IPMSM. En este tipo de rotor, los circuitos magnéticos asociados a los ejes d y q presentan reluctancias diferentes, lo que se refleja en los valores identificados $L_d = 25{,}2$ mH y $L_q = 45{,}7$ mH, con una razón de saliencia $L_q/L_d = 1{,}81$. Esta propiedad introduce en la producción de momento una componente asociada a la interacción entre la saliencia del rotor y las corrientes i_d e i_q, denominada momento de reluctancia. Su participación depende de los valores adoptados para ambas componentes de corriente, como se establece posteriormente mediante la ecuación de momento electromagnético.

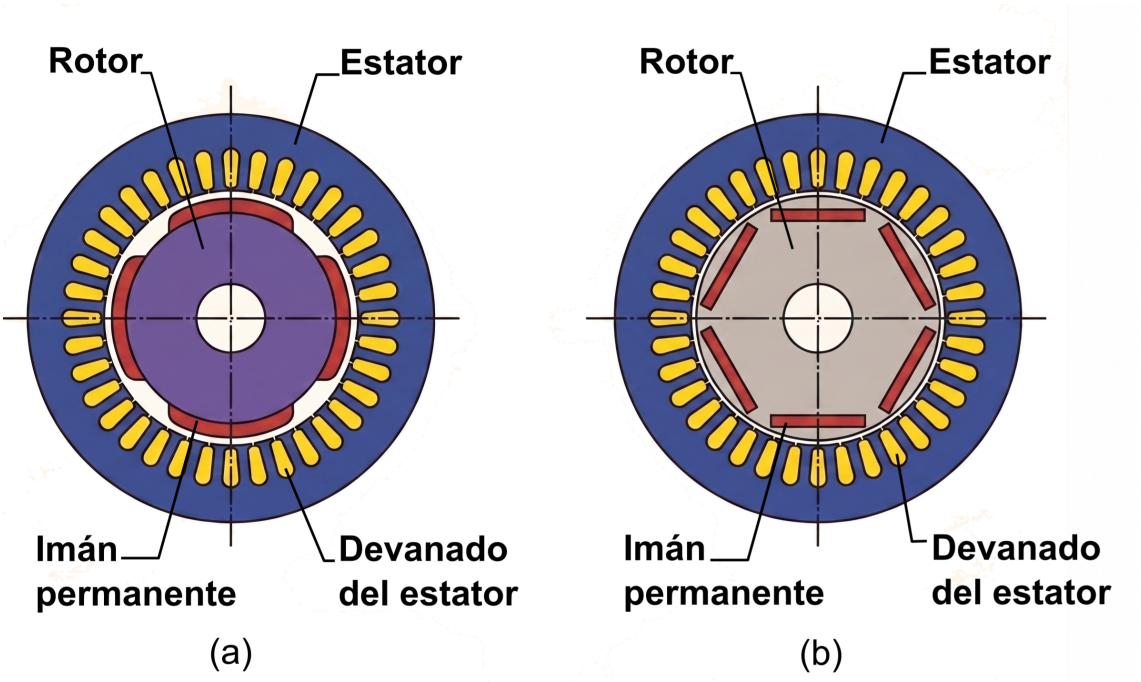


Figura 2.1: Estructura transversal de máquinas de imanes permanentes: (a) imanes superficiales (SPMSM), (b) imanes interiores (IPMSM) [11].

Bajo alimentación trifásica equilibrada, el estator genera un campo magnético giratorio cuya velocidad angular depende de la frecuencia eléctrica de alimentación y del número de polos de la máquina. El rotor, magnetizado permanentemente, tiende a alinearse con dicho campo, desarrollando un momento electromagnético y girando a la velocidad sincrónica impuesta por el campo del estator. A diferencia de la máquina de inducción, la PMSM no presenta deslizamiento en régimen estacionario, lo que la hace especialmente adecuada para aplicaciones de servoaccionamiento y control preciso de velocidad y posición.

El análisis dinámico de la PMSM se fundamenta en la teoría de las máquinas de campo giratorio [12]. Bajo hipótesis clásicas, tales como devanados trifásicos simétricos, ausencia de saturación magnética y pérdidas en el hierro despreciables, es posible representar las variables eléctricas mediante fasores espaciales, lo que permite transformar las magnitudes trifásicas a sistemas de coordenadas de menor dimensión.

Definiendo el fasor espacial de corriente del estator como:

$$\boldsymbol{i_s} = \frac{2}{3}\left(i_a + \boldsymbol{a} i_b + \boldsymbol{a}^2 i_c\right) = i_\alpha + j i_\beta, \qquad \boldsymbol{a} = e^{j2\pi/3}, \tag{2.1}$$

y de manera análoga se definen los fasores espaciales de tensión y enlace de flujo del estator. Con ello, la ecuación de equilibrio eléctrico en un sistema de coordenadas fijas ($\alpha\beta$) queda dada por:

$$\boldsymbol{v_s} = R_s \boldsymbol{i_s} + \frac{d\boldsymbol{\psi_s}}{dt}. \tag{2.2}$$

Si ahora se adopta un marco de referencia giratorio a velocidad angular ω_x, aparece un término adicional asociado al movimiento relativo entre el sistema de referencia y el vector de flujo, obteniéndose:

$$\boldsymbol{v_{s,dq}} = R_s \boldsymbol{i_{s,dq}} + \frac{d\boldsymbol{\psi_{s,dq}}}{dt} + j\,\omega_x\,\boldsymbol{\psi_{s,dq}}. \tag{2.3}$$

Para fines de control, en PMSMs resulta especialmente conveniente expresar las variables en un sistema de coordenadas giratorio orientado con el rotor, es decir, con el eje de simetría magnética de los imanes permanentes. En este marco de referencia, conocido como sistema dq, los enlaces de flujo se expresan como:

$$\psi_d = L_d i_d + \psi_{\mathrm{PM}}, \tag{2.4}$$

$$\psi_q = L_q i_q, \tag{2.5}$$

donde L_d y L_q corresponden a las inductancias en los ejes directo y en cuadratura, respectivamente, e ψ_{PM} representa el flujo concatenado por el estator por efecto de los imanes permanentes.

A partir de estas relaciones, las ecuaciones de tensión de la máquina en el sistema de referencia rotórico pueden escribirse como:

$$v_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_e L_q i_q, \tag{2.6}$$

$$v_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_e \left(L_d i_d + \psi_{\mathrm{PM}}\right). \tag{2.7}$$

donde ω_e corresponde a la velocidad angular eléctrica del rotor.

El momento electromagnético desarrollado por la PMSM queda determinado por:

$$T_e = \frac{3}{2} p \left[\psi_{\text{PM}} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q \right], \tag{2.8}$$

siendo p el número de pares de polos. La expresión (2.8) puede separarse en dos componentes:

$$T_e = T_{\text{PM}} + T_{\text{rel}}, \tag{2.9}$$

donde

$$T_{\text{PM}} = \frac{3}{2} p \psi_{\text{PM}} i_q, \tag{2.10}$$

$$T_{\text{rel}} = \frac{3}{2} p (L_d - L_q) i_d i_q. \tag{2.11}$$

El primer término, T_{PM}, se conoce como momento de excitación y corresponde al momento producido por la interacción entre el flujo de los imanes permanentes y la corriente i_q. El segundo término, T_{rel}, corresponde al momento de reluctancia, el cual es distinto de cero solo si $L_d \neq L_q$, $i_d \neq 0$ e $i_q \neq 0$.

Para la IPMSM utilizada en este trabajo se cumple:

$$L_d - L_q = -20{,}5 \text{ mH}, \tag{2.12}$$

por lo que el momento de reluctancia puede contribuir al momento electromagnético desarrollado. Debido a la saliencia de la máquina, es posible obtener un momento mayor que el correspondiente a $i_d = 0$, manteniendo la misma magnitud de corriente estatórica, mediante una combinación adecuada de las componentes i_d e i_q. La determinación de dicha combinación requiere calcular la distribución de corrientes que maximiza el momento por ampere.

Sin embargo, la estrutura CTC–FOC adoptada en este trabajo no considera esa optimización. En su lugar, se establece $i_d^* = 0$, de modo que el momento solicitado por el controlador externo se traduce directamente en una referencia de corriente i_q^*. Bajo esta condición, la referencia de momento de reluctancia es:

$$T_{\text{rel}}^* = \frac{3}{2} p (L_d - L_q) i_d^* i_q^* = 0, \tag{2.13}$$

y la consigna de momento electromagnético se calcula mediante:

$$T_e^* \approx \frac{3}{2} p \psi_{\text{PM}} i_q^* = k_T i_q^*, \qquad k_T = \frac{3}{2} p \psi_{\text{PM}}. \tag{2.14}$$

De esta manera, aunque la saliencia permanece presente en el modelo eléctrico de la máquina, su contribución al momento no se utiliza en la asignación de las referencias de corriente. La relación anterior permite convertir directamente el momento requerido por el control externo en la referencia i_q^*, manteniendo la estructura del lazo interno FOC.

Finalmente, la dinámica mecánica del sistema puede modelarse mediante:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_e - T_L - B\omega_m, \tag{2.15}$$

donde J es el momento de inercia total referido al eje del motor, ω_m es la velocidad angular mecánica, T_L representa el momento de carga y B es el coeficiente de amortiguamiento rotacional.

El modelo anterior constituye la base para el diseño de estrategias avanzadas de control del accionamiento, ya que permite relacionar explícitamente las variables eléctricas de la máquina con el momento desarrollado y, por consiguiente, con la dinámica mecánica del sistema. En particular, la representación en ejes *dq* resulta fundamental para implementar técnicas de control desacoplado, como el control vectorial orientado al campo, abordado en la siguiente sección.

2.2. Control vectorial orientado al campo

El control vectorial orientado al campo (*Field Oriented Control*, FOC) es una estrategia ampliamente utilizada en accionamientos de alto desempeño, ya que permite regular de manera aproximadamente desacoplada las variables asociadas al flujo y al momento de la máquina. Su fundamento en máquinas sincrónicas radica en transformar las variables trifásicas del estator a un sistema de referencia giratorio solidario al rotor, de modo que el problema de control pueda formularse en términos de componentes d y q cuyo eje d apunte en la misma dirección que el campo del rotor.

En este esquema, la componente i_d se asocia al flujo magnético, mientras que la componente i_q se vincula directamente con la producción de momento electromagnético. De esta forma, el accionamiento puede controlarse de manera análoga a una máquina de corriente continua de excitación independiente, en la cual el flujo y el momento pueden manipularse por separado.

La implementación práctica del FOC considera la medición de las corrientes de estator, su transformación al marco estacionario mediante la transformada de Clarke y posteriormente al marco rotórico mediante la transformada de Park. Una vez obtenidas las componentes i_d e i_q, estas son comparadas con sus referencias y reguladas mediante controladores PI independientes. Las tensiones resultantes en el sistema *dq* son luego transformadas inversamente al sistema trifásico para generar las referencias de tensión aplicadas al inversor de potencia, tal como se muestra en la Fig. 2.2. En la implementa-

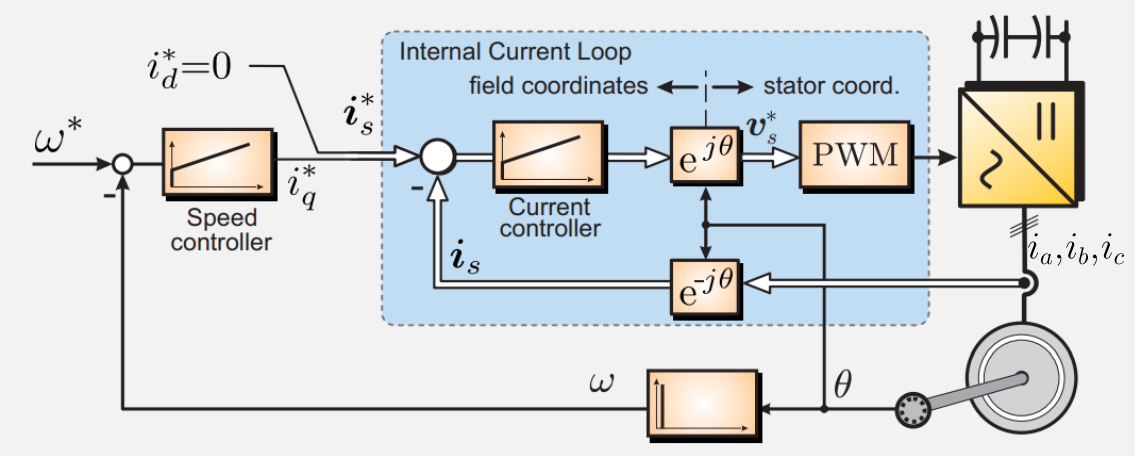


Figura 2.2: Diagrama de bloques representativo del control vectorial orientado al campo para una PMSM [13].

ción considerada, el controlador PI del eje directo recibe la referencia $i_d^* = 0$, mientras que el controlador PI del eje en cuadratura regula i_q respecto de la consigna i_q^*. De acuerdo

con (2.14), esta configuración permite regular el momento electromagnético mediante la corriente de eje q. La procedencia de i_q^* depende del modo de operación: durante las pruebas del lazo de velocidad, esta referencia es generada por el controlador PI de velocidad; durante el seguimiento de trayectorias, se obtiene a partir del momento articular calculado por el CTC.

La estrategia implementada no incorpora máximo momento por ampere (MTPA) ni debilitamiento de campo [14]. Por lo tanto, la referencia i_d^* no se modifica para producir momento de reluctancia ni para reducir el flujo resultante a velocidades elevadas. Estas funciones quedan fuera de la estructura de control evaluada en este trabajo.

2.2.1. Lazo de control de velocidad

Al operar con $i_d^* = 0$, la producción de momento electromagnético queda determinada por la corriente de eje q, según (2.14). Al sustituir esta relación en la dinámica mecánica (2.15), se obtiene:

$$J\frac{d\omega_m}{dt} = k_T i_q - T_L - B\omega_m. \tag{2.16}$$

Por lo tanto, el controlador de velocidad no actúa directamente sobre las tensiones del inversor, sino que genera la referencia de corriente i_q^* necesaria para modificar el momento electromagnético. Definiendo el error de velocidad como:

$$e_\omega(t) = \omega_m^*(t) - \omega_m(t), \tag{2.17}$$

la referencia entregada al lazo interno puede expresarse mediante:

$$i_q^*(t) = \mathrm{sat}_{[-i_{q,\mathrm{máx}},\, i_{q,\mathrm{máx}}]}\left[k_{p,\omega}e_\omega(t) + k_{i,\omega}\int_0^t e_\omega(\tau)\,d\tau\right], \tag{2.18}$$

donde $k_{p,\omega}$ y $k_{i,\omega}$ son las ganancias del controlador PI y $i_{q,\mathrm{máx}}$ limita el momento electromagnético solicitado. Debido a esta saturación, la implementación debe incorporar una acción anti-enrollamiento que impida la acumulación del término integral cuando la referencia de corriente alcanza dicho límite.

En este trabajo, el PI de velocidad se utiliza durante las pruebas destinadas a verificar la respuesta mecánica del accionamiento. En los ensayos de seguimiento de trayectoria, este controlador se desconecta y el control por torque calculado (CTC), descrito en detalle en la sección 2.4, pasa a determinar el momento articular de referencia T_J^*. Para ello, utiliza la posición, velocidad y aceleración articulares deseadas, θ_d, $\dot{\theta}_d$, $\ddot{\theta}_d$, respectivamente, junto con la posición articular medida θ y la velocidad articular estimada $\dot{\theta}$.

Para convertir el momento articular solicitado en una referencia de corriente del motor, se consideran la relación de transmisión N, definida como la razón entre la velocidad angular del motor y la velocidad angular articular, y la eficiencia mecánica η de la transmisión. Bajo la condición $i_d^* = 0$, la referencia de corriente se obtiene mediante:

$$i_q^* = \frac{T_J^*}{\eta N k_T}. \tag{2.19}$$

El cambio entre el control de velocidad y el seguimiento mediante CTC ocurre en el bloque que genera i_q^*; los controladores de corriente en ejes dq, las transformaciones de coordenadas y la modulación del inversor permanecen en la misma estructura.

Tanto en el modo de control de velocidad como en el modo de seguimiento mediante CTC, el FOC constituye el lazo interno encargado de regular i_d e i_q. Sus controladores generan las referencias de tensión v_d^* y v_q^*, las cuales deben ser sintetizadas en los terminales del motor mediante una etapa de conversión DC–AC. Esta función es realizada por el inversor trifásico de potencia, descrito en la sección siguiente.

2.3. Inversores trifásicos

En electrónica de potencia, los inversores corresponden a convertidores estáticos encargados de transformar energía eléctrica desde una fuente de corriente continua hacia una salida de corriente alterna con amplitud y frecuencia controlables. Esta capacidad los hace especialmente relevantes en sistemas de accionamiento eléctrico, ya que permiten alimentar máquinas de corriente alterna, tales como máquinas de inducción y máquinas sincrónicas, con tensiones ajustadas a los requerimientos dinámicos de la aplicación.

En términos generales, los inversores trifásicos pueden clasificarse de acuerdo con la naturaleza de su fuente de entrada. Por una parte, los inversores de fuente de corriente (*Current Source Inverters*, CSI) operan a partir de una corriente continua regulada. Por otra parte, los inversores de fuente de tensión (*Voltage Source Inverters*, VSI) utilizan una tensión continua estabilizada, normalmente obtenida mediante un rectificador y un enlace de continua con condensador de almacenamiento.

Debido a su simplicidad estructural y amplia adopción industrial, los inversores VSI constituyen la topología predominante en aplicaciones de control de máquinas eléctricas en el rango de baja y media potencia. Por su parte, los inversores CSI resultan atractivos en determinadas aplicaciones de alta potencia debido a la facilidad con que ciertas configuraciones permiten la regeneración de energía, particularmente cuando las energías de frenado alcanzan valores elevados.

2.3.1. Inversor trifásico de fuente de tensión de dos niveles

El inversor trifásico de fuente de tensión de dos niveles se alimenta desde un bus DC, proveniente de un rectificador y un condensador de enlace de continua (*DC-link*), cuya función es almacenar energía y reducir la variación de la tensión de entrada. A partir de este enlace, la energía es conmutada mediante seis dispositivos semiconductores distribuidos en tres ramas, denominadas piernas, cada una asociada a una fase de salida.

En cada pierna, los interruptores superior e inferior operan de forma complementaria; sin embargo, debido a que las conmutaciones de los dispositivos semiconductores no son instantáneas, es necesario introducir un intervalo de tiempo entre el apagado de un interruptor y el encendido del dispositivo complementario, conocido como tiempo muerto (*dead time*). Este tiempo debe seleccionarse de manera que el interruptor que se encontraba conduciendo se apague completamente antes de ordenar el encendido del interruptor complementario, evitando así una conducción simultánea que produzca un cortocircuito directo del bus DC.

El punto medio de cada rama se conecta a una de las fases de la carga, como se ilustra en la Fig. 2.3. De este modo, la tensión de cada polo del inversor respecto al terminal negativo del enlace continuo, denotado por N_{inv}, puede tomar dos niveles, 0 o V_{DC}. En consecuencia, las tensiones entre fases pueden asumir los valores $-V_{DC}$, 0 y V_{DC}, según el

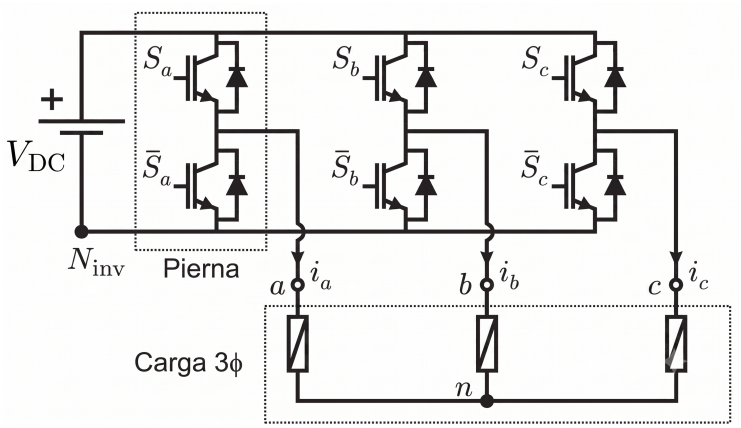


Figura 2.3: Inversor trifásico de fuente de tensión de dos niveles [15].

estado de conmutación de las piernas.

Para representar los estados de conmutación, se define una variable binaria $S_x \in \{0, 1\}$, con $x \in \{a, b, c\}$, donde el valor 1 representa el estado asociado a la conducción del interruptor superior de la rama y el valor 0 el estado asociado a la conducción del interruptor inferior de cada rama. El tiempo muerto introducido entre ambas condiciones modifica los instantes en que ocurren las transiciones de conmutación, pero no los dos estados definidos para cada pierna. Bajo esta representación, la tensión de salida en cada fase puede expresarse como:

$$v_{xN_{\mathrm{inv}}} = S_x V_{\mathrm{DC}}, \qquad x \in \{a, b, c\}. \tag{2.20}$$

Dado que existen tres piernas con dos estados posibles cada una, el inversor presenta un total de ocho estados de conmutación, los cuales se detallan en la Tabla 2.1. Dos de ellos corresponden a vectores nulos, mientras que los seis restantes generan vectores activos de tensión. Estas combinaciones permiten sintetizar tensiones alternas mediante estrategias adecuadas de modulación.

Tabla 2.1: Combinaciones de tensiones de salida del inversor de dos niveles.

Estados de conmutación			**Tensiones de salida**			**Tensiones de línea**		
S_a	S_b	S_c	$v_{aN_{\mathrm{inv}}}$	$v_{bN_{\mathrm{inv}}}$	$v_{cN_{\mathrm{inv}}}$	v_{ab}	v_{bc}	v_{ca}
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	V_{DC}	0	$-V_{\mathrm{DC}}$	V_{DC}
0	1	0	0	V_{DC}	0	$-V_{\mathrm{DC}}$	V_{DC}	0
0	1	1	0	V_{DC}	V_{DC}	$-V_{\mathrm{DC}}$	0	V_{DC}
1	0	0	V_{DC}	0	0	V_{DC}	0	$-V_{\mathrm{DC}}$
1	0	1	V_{DC}	0	V_{DC}	V_{DC}	$-V_{\mathrm{DC}}$	0
1	1	0	V_{DC}	V_{DC}	0	0	V_{DC}	$-V_{\mathrm{DC}}$
1	1	1	V_{DC}	V_{DC}	V_{DC}	0	0	0

Para generar tensiones trifásicas con bajo contenido armónico y amplitud controlada, resulta necesario definir una estrategia de modulación que determine la secuencia temporal

de los estados de conmutación del inversor. Entre las distintas alternativas disponibles, la modulación por ancho de pulso constituye la técnica más utilizada debido a su eficiencia y facilidad de implementación digital.

2.3.2. Modulación por vectores espaciales

La modulación por vectores espaciales (*Space Vector Pulse Width Modulation*, SVPWM) es una técnica que permite aproximar el vector de tensión de referencia mediante la combinación temporal de los estados de conmutación disponibles en un inversor trifásico de dos niveles durante cada período de modulación. Su formulación se basa en representar las tensiones trifásicas mediante un vector espacial, también denominado fasor espacial, en el plano $\alpha\beta$, similar a lo presentado en (2.1), lo que permite una interpretación geométrica directa del proceso de síntesis de tensiones.

En este plano, los ocho estados de conmutación del inversor se asocian a ocho vectores espaciales: seis vectores activos, distribuidos sobre los vértices de un hexágono regular, y dos vectores nulos ubicados en el origen, tal como se ilustra en la Fig. 2.4. Los componentes de estos vectores en el marco de referencia estacionario se detallan en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2: Vectores de conmutación del inversor de dos niveles.

Estados de conmutación			**Vector**	**Componentes** $\alpha\beta$	
S_a	S_b	S_c		v_α	v_β
0	0	0	V_0 (nulo)	0	0
1	0	0	V_1	$\frac{2}{3}V_{\mathrm{DC}}$	0
1	1	0	V_2	$\frac{1}{3}V_{\mathrm{DC}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}V_{\mathrm{DC}}$
0	1	0	V_3	$-\frac{1}{3}V_{\mathrm{DC}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}V_{\mathrm{DC}}$
0	1	1	V_4	$-\frac{2}{3}V_{\mathrm{DC}}$	0
0	0	1	V_5	$-\frac{1}{3}V_{\mathrm{DC}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}V_{\mathrm{DC}}$
1	0	1	V_6	$\frac{1}{3}V_{\mathrm{DC}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}V_{\mathrm{DC}}$
1	1	1	V_7 (nulo)	0	0

Los seis vectores activos poseen igual magnitud y se encuentran separados angularmente en 60°, cumpliéndose que:

$$|\boldsymbol{v}_i| = \frac{2}{3}V_{\mathrm{DC}}, \quad i = 1, \ldots, 6. \tag{2.21}$$

El objetivo de la técnica consiste en reproducir, en promedio durante un período de conmutación T_s, un vector de referencia $\boldsymbol{v}_{\mathbf{ref}}$ mediante la aplicación secuencial de los dos vectores activos adyacentes al sector donde se ubica dicho vector y de los vectores nulos.

Matemáticamente, para el caso en que el vector de referencia se encuentra en el sector definido por los vectores activos $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$, esta síntesis puede expresarse como:

$$T_s\boldsymbol{v}_{\mathrm{ref}} = T_1\boldsymbol{v}_1 + T_2\boldsymbol{v}_2 + T_{00}\boldsymbol{v}_0 + T_{07}\boldsymbol{v}_7, \tag{2.22}$$

donde T_1 y T_2 corresponden a los tiempos de aplicación de los vectores activos $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$, respectivamente. Por otro lado, T_{00} y T_{07} corresponden a los tiempos asociados a los vectores nulos $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{v}_7$.

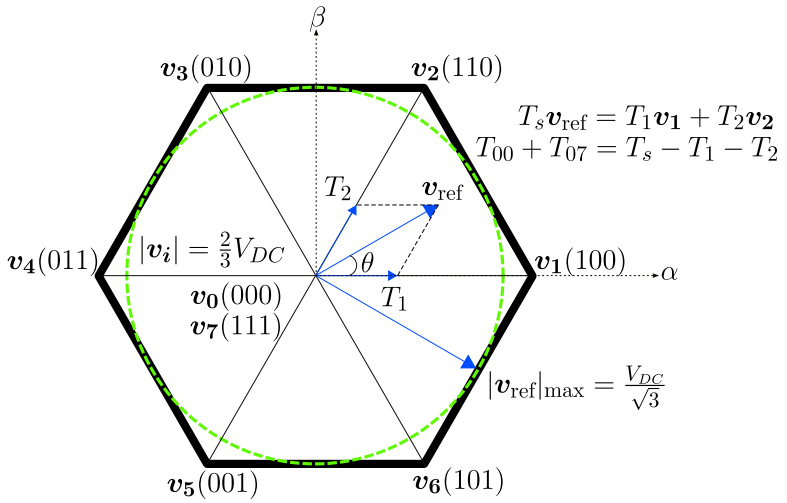


Figura 2.4: Diagrama de vectores activos, vectores nulos y definición de sectores en el marco de referencia $\alpha\beta$.

Dado que los vectores nulos se ubican en el origen del plano $\alpha\beta$, se cumple que:

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_7 = \mathbf{0}, \tag{2.23}$$

por lo que la expresión (2.22) se reduce a:

$$T_s\boldsymbol{v}_{\text{ref}} = T_1\boldsymbol{v}_1 + T_2\boldsymbol{v}_2. \tag{2.24}$$

Los tiempos de aplicación dentro de un período de conmutación satisfacen

$$T_s = T_1 + T_2 + T_{00} + T_{07}. \tag{2.25}$$

Por lo tanto, el tiempo total asignado a los vectores nulos queda dado por:

$$T_{00} + T_{07} = T_s - T_1 - T_2. \tag{2.26}$$

En una implementación simétrica, el tiempo nulo total se distribuye por igual entre ambos vectores nulos:

$$T_{00} = T_{07} = \frac{T_s - T_1 - T_2}{2}. \tag{2.27}$$

Suponiendo que el vector de referencia se encuentra en un sector genérico k del hexágono y que forma un ángulo interno θ respecto del vector $\boldsymbol{v_k}$, con $0 \leq \theta \leq \pi/3$, los tiempos de aplicación de los vectores activos adyacentes pueden calcularse como:

$$T_1 = \frac{\sqrt{3}T_s|\boldsymbol{v}_{\text{ref}}|}{V_{\text{DC}}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right), \tag{2.28}$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{3}T_s|\boldsymbol{v}_{\text{ref}}|}{V_{\text{DC}}} \sin(\theta). \tag{2.29}$$

Para una referencia trifásica sinusoidal balanceada en régimen estacionario, el vector de referencia gira en el plano $\alpha\beta$ manteniendo una magnitud constante. En este caso,

la máxima magnitud que permite mantener el vector dentro del hexágono durante una revolución completa queda determinada por el radio de la circunferencia inscrita:

$$|\boldsymbol{v}_{\text{ref}}|_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{DC}}}{\sqrt{3}}. \tag{2.30}$$

En comparación con una modulación PWM senoidal sin inyección de secuencia cero, cuyo límite lineal para una referencia sinusoidal corresponde a $V_{\text{DC}}/2$, la SVPWM permite incrementar en un 15,47 % la máxima magnitud de la referencia sinusoidal sintetizable para un mismo valor de V_{DC}.

2.4. Control por torque calculado

2.4.1. Descripción del sistema físico

El banco de ensayos para este trabajo corresponde a un manipulador de un grado de libertad (1-GDL), compuesto por un motor sincrónico de imanes permanentes acoplado rígidamente a una transmisión mecánica, junto con una carga mecánica equivalente asociada al comportamiento dinámico de un miembro anatómico.

La coordenada generalizada del sistema se define como el ángulo articular θ, medido en el eje de salida de la transmisión. Bajo esta convención, la posición del rotor del motor se relaciona con la coordenada articular mediante:

$$\theta_m = N\theta, \qquad \omega_m = N\dot{\theta}, \tag{2.31}$$

donde θ_m y ω_m corresponden a la posición y velocidad mecánica del rotor, respectivamente. La Fig. 2.5 muestra un esquema generalizado del conjunto PMSM–reductor–carga.

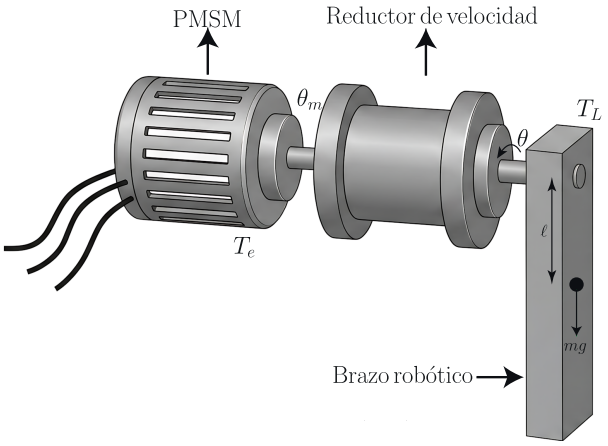


Figura 2.5: Prototipo generalizado del banco de ensayos. Adaptado de [16].

2.4.2. Consideraciones del modelado

Para formular el análisis dinámico y la ley de control, se adoptan las siguientes consideraciones:

- Transmisión rígida: se desprecian la elasticidad torsional, las holguras y las resonancias mecánicas del conjunto motor–reductor–carga.
- Inercia equivalente constante: el conjunto motor–reductor–carga se representa mediante una transmisión rígida de relación fija y una carga articular cuya distribución de masa permanece invariable respecto al eje de giro. Bajo estas condiciones, la inercia total referida al eje de salida, denotada por M_{tot}, es positiva y constante, independientemente de la posición angular [17].
- Movimiento planar: el sistema se restringe a un único grado de libertad rotacional descrito mediante la coordenada articular θ.
- Momento perturbador equivalente: los momentos externos y las diferencias entre la dinámica real y el modelo nominal que pueden representarse como un torque aditivo requerido al eje articular se agrupan en $d(t)$.

2.4.3. Deducción dinámica mediante Euler-Lagrange

La deducción dinámica se realiza mediante el formalismo de Euler–Lagrange para sistemas mecánicos sujetos a fuerzas generalizadas no conservativas [18–20]. El manipulador de 1–GDL se describe mediante la coordenada generalizada θ, con velocidad $\dot{\theta}$ y aceleración $\ddot{\theta}$.

La energía cinética asociada a la inercia equivalente del sistema se expresa como:

$$K(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} M_{\text{tot}} \dot{\theta}^2, \tag{2.32}$$

donde M_{tot} corresponde a la inercia equivalente referida al eje de salida de la transmisión.

Tomando $\theta = 0$ como la configuración de mínima energía potencial, la energía potencial gravitacional de una masa equivalente m, cuyo centro de masa se encuentra a una distancia ℓ del eje articular, queda dada por:

$$P(\theta) = mg\ell\,(1 - \cos\theta)\,. \tag{2.33}$$

El Lagrangiano se define como la diferencia entre las energías cinética y potencial:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\dot{\theta}) - P(\theta). \tag{2.34}$$

Aplicando el formalismo de Euler–Lagrange con fuerzas generalizadas no conservativas, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = T_J - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}} - d(t), \tag{2.35}$$

donde T_J es el torque articular aplicado, $\mathcal{R}$ es el potencial de disipación asociado a la fricción. El término $d(t)$ es un momento perturbador equivalente referido al eje articular. Este término agrupa los momentos externos y las diferencias entre la dinámica real y el modelo nominal que pueden representarse como un torque generalizado aditivo. Con la convención de signos adoptada, un valor positivo de $d(t)$ se opone a T_J.

Para representar la fricción se adopta el siguiente torque disipativo referido al eje articular:

$$f(\dot{\theta}) = F_v \dot{\theta} + F_c \tanh\left(\frac{\dot{\theta}}{\varepsilon}\right), \tag{2.36}$$

donde $F_v > 0$ es el coeficiente de fricción viscosa, $F_c > 0$ es la magnitud de la fricción de Coulomb y $\varepsilon > 0$ es el parámetro de suavizado, con unidades de velocidad angular. Por tanto, el argumento $\dot{\theta}/\varepsilon$ es adimensional.

La formulación clásica de Rayleigh utiliza un potencial cuadrático para representar fricción viscosa lineal. En este trabajo se emplea su extensión a leyes disipativas no lineales dependientes de la velocidad [21, 22]. El potencial $\mathcal{R}$ se define de manera que:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}} = f(\dot{\theta}), \tag{2.37}$$

mientras que el torque de fricción que actúa sobre el sistema corresponde a $-f(\dot{\theta})$, como se establece en (2.35).

El potencial se obtiene integrando (2.36) respecto de la velocidad angular:

$$\mathcal{R}(\dot{\theta}) = \int_0^{\dot{\theta}} f(\nu)\, d\nu, \tag{2.38}$$

$$= \int_0^{\dot{\theta}} \left[F_v \nu + F_c \tanh\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right) \right] d\nu, \tag{2.39}$$

$$= \frac{1}{2} F_v \dot{\theta}^2 + F_c \varepsilon \ln\left[\cosh\left(\frac{\dot{\theta}}{\varepsilon}\right) \right], \tag{2.40}$$

donde se ha seleccionado la constante de integración de modo que $\mathcal{R}(0) = 0$. El potencial $\mathcal{R}$ tiene unidades de potencia, mientras que su derivada respecto de $\dot{\theta}$ tiene unidades de torque.

El carácter disipativo del modelo puede comprobarse mediante:

$$f(\dot{\theta})\dot{\theta} = F_v \dot{\theta}^2 + F_c \dot{\theta} \tanh\left(\frac{\dot{\theta}}{\varepsilon}\right) \geq 0. \tag{2.41}$$

Por lo tanto, el torque $-f(\dot{\theta})$ extrae energía mecánica del sistema.

Además, para $\dot{\theta} \neq 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \tanh\left(\frac{\dot{\theta}}{\varepsilon}\right) = \operatorname{sgn}(\dot{\theta}), \tag{2.42}$$

recuperándose el modelo ideal de fricción viscosa más Coulomb. La regularización mediante la tangente hiperbólica elimina la discontinuidad en velocidad nula, pero no representa fricción estática, efecto Stribeck ni holgura mecánica. En particular, el modelo establece $f(0) = 0$.

A partir de (2.34), los términos asociados al Lagrangiano en (2.35) resultan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = M_{\text{tot}} \ddot{\theta}, \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell \sin\theta. \tag{2.44}$$

Utilizando además la relación disipativa definida en (2.37) y sustituyendo estos términos en (2.35), se obtiene la ecuación de movimiento:

$$M_{\text{tot}} \ddot{\theta} + mg\ell \sin\theta + F_v \dot{\theta} + F_c \tanh\left(\frac{\dot{\theta}}{\varepsilon}\right) = T_J - d(t). \tag{2.45}$$

La ecuación (2.45) constituye el modelo mecánico equivalente de 1–GDL empleado para sintetizar el controlador por torque calculado. En la condición nominal, $d(t) = 0$, el modelo contiene las contribuciones inercial, gravitacional, viscosa y de Coulomb regularizada.

2.4.4. Motivación del CTC

Las trayectorias consideradas para rehabilitación se definen dentro de límites establecidos de posición, velocidad, aceleración y torque. Para seguir estas referencias, el controlador debe calcular el torque requerido por la inercia equivalente, la gravedad y la fricción del sistema mecánico.

El control vectorial orientado al campo regula las corrientes i_d e i_q del PMSM, pero el lazo de corriente no determina por sí mismo el torque mecánico requerido para seguir una trayectoria articular. Sin una compensación basada en el modelo, los efectos de la gravedad, la inercia y la fricción se manifiestan como errores de posición o velocidad, a partir de los cuales un controlador externo debe modificar la referencia i_q^*.

La estrategia adoptada combina un generador de trayectoria con un controlador por torque calculado. El generador proporciona las referencias cinemáticas del movimiento deseado, mientras que el CTC utiliza estas señales, junto con la posición θ y la velocidad $\dot{\theta}$ realimentadas, para determinar el momento articular de referencia T_J^* a partir del modelo dinámico descrito por (2.45). De esta forma, la acción de control incorpora un término inercial anticipativo, la compensación de los efectos gravitacionales y de fricción, y la corrección de los errores de posición y velocidad.

El torque T_J^* se refiere posteriormente al eje del motor mediante la relación de transmisión y la eficiencia mecánica, y se transforma en una referencia de corriente i_q^*. El lazo interno FOC regula entonces i_q respecto de esta referencia, mientras mantiene $i_d^* = 0$.

2.4.5. Ley de control de torque calculado

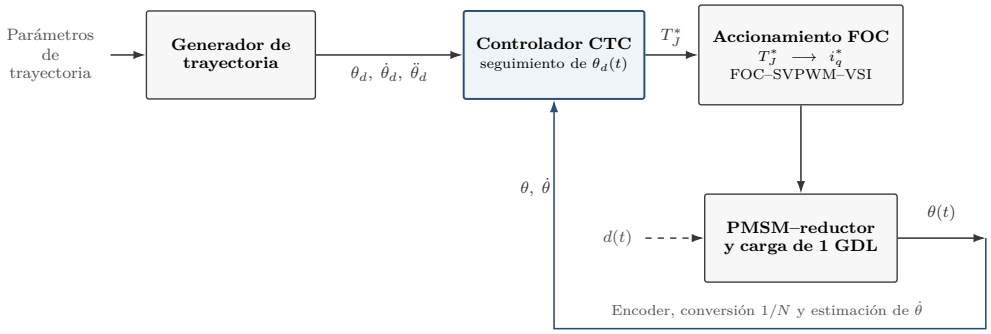


Figura 2.6: Ubicación del controlador CTC en el lazo general de seguimiento de trayectoria articular.

La Fig. 2.6 muestra la ubicación del CTC en el lazo general de seguimiento de trayectoria articular. El generador de trayectoria recibe los parámetros que definen el movimiento deseado, tales como el intervalo angular y la duración o frecuencia, según el perfil seleccionado. A partir de estos parámetros y del tiempo transcurrido, evalúa las expresiones cinemáticas correspondientes para obtener la posición deseada $\theta_d(t)$, la velocidad $\dot{\theta}_d(t)$ y

la aceleración $\ddot{\theta}_d(t)$. Por lo tanto, la velocidad y la aceleración deseadas no corresponden a referencias independientes, sino que se determinan a partir del mismo perfil de movimiento que define la posición. Las trayectorias consideradas y sus formulaciones matemáticas se desarrollan en la sección 3.4.

El CTC recibe estas señales junto con la posición articular medida $\theta(t)$ y la velocidad estimada $\dot{\theta}(t)$, y calcula el torque articular de referencia T_J^*. Esta consigna se convierte en i_q^*, respecto de la cual el lazo interno FOC regula la corriente i_q. El momento perturbador equivalente $d(t)$, definido en (2.35), actúa directamente sobre el subsistema mecánico.

El controlador por torque calculado se diseña para cancelar, bajo el modelo nominal, los términos gravitacional y de fricción de (2.45), y para imponer una dinámica lineal al error de seguimiento.

Definiendo el error articular como:

$$e = \theta_d - \theta, \tag{2.46}$$

sus derivadas quedan dadas por:

$$\dot{e} = \dot{\theta}_d - \dot{\theta}, \qquad \ddot{e} = \ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}. \tag{2.47}$$

Para la condición nominal se establece la siguiente dinámica de segundo orden:

$$\ddot{e} + 2\zeta\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e = 0, \tag{2.48}$$

donde $\omega_n > 0$, expresada en rad/s, es la frecuencia natural. Para un valor fijo de ζ, un aumento de ω_n reduce los tiempos de subida y establecimiento de la respuesta. Por su parte, $\zeta > 0$ es el factor de amortiguamiento adimensional: $0 < \zeta < 1$ produce una respuesta subamortiguada, $\zeta = 1$ una respuesta críticamente amortiguada y $\zeta > 1$ una respuesta sobreamortiguada.

La ecuación (2.48) establece el comportamiento requerido para el error, pero todavía no determina el torque que debe producir el accionamiento. Al sustituir esta dinámica en la segunda relación de (2.47) y despejar $\ddot{\theta}$, se obtiene la aceleración que debería desarrollar el sistema en la condición nominal:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_d + 2\zeta\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e. \tag{2.49}$$

La expresión (2.49) contiene una componente anticipativa, dada por $\ddot{\theta}_d$, y dos componentes de realimentación asociadas a los errores de velocidad y posición. A partir de esta estructura se define la aceleración virtual:

$$v = \ddot{\theta}_d + \frac{k_d}{M_{\text{tot}}}\dot{e} + \frac{k_p}{M_{\text{tot}}}e. \tag{2.50}$$

El término $\ddot{\theta}_d$ establece la aceleración requerida por la trayectoria, mientras que $(k_d/M_{\text{tot}})\,\dot{e}$ y $(k_p/M_{\text{tot}})\,e$ corrigen las desviaciones de velocidad y posición, respectivamente. Los cocientes k_d/M_{tot} y k_p/M_{tot} tienen dimensiones de inverso de tiempo e inverso de tiempo al cuadrado, respectivamente, es decir, unidades de 1/s y 1/s^2. De este modo, al multiplicarlos por $\dot{e}$ y e, respectivamente, ambos términos poseen unidades de aceleración angular, al igual que $\ddot{\theta}_d$. Su relación con ζ y ω_n se obtiene posteriormente al comparar los coeficientes de la dinámica de lazo cerrado.

Para convertir la aceleración virtual en una referencia de torque, la ecuación mecánica (2.45) se escribe de forma compacta como:

$$M_{\text{tot}}\ddot{\theta} + g(\theta) + f(\dot{\theta}) = T_J - d(t), \tag{2.51}$$

donde el término gravitacional se define como:

$$g(\theta) = mg\ell \sin\theta, \tag{2.52}$$

y $f(\dot{\theta})$ corresponde al modelo de fricción definido en (2.36).

A partir de (2.51), el torque articular de referencia se define como:

$$T_J^* = M_{\text{tot}}v + g(\theta) + f(\dot{\theta}). \tag{2.53}$$

En (2.53), el término $M_{\text{tot}}v$ corresponde al torque requerido para producir la aceleración virtual, $g(\theta)$ compensa el torque gravitacional modelado y $f(\dot{\theta})$ compensa el torque de fricción modelado. El momento perturbador $d(t)$ no se incluye en la ley de control porque se considera desconocido; por esta razón, su efecto permanece en la dinámica del error.

Para deducir la dinámica del error se supone que el lazo interno FOC reproduce la referencia de torque articular, es decir, $T_J = T_J^*$. Esta igualdad corresponde a la aproximación nominal empleada en la síntesis del CTC.

Sustituyendo (2.53) en (2.51), se obtiene:

$$M_{\text{tot}}\ddot{\theta} + g(\theta) + f(\dot{\theta}) = M_{\text{tot}}v + g(\theta) + f(\dot{\theta}) - d(t), \tag{2.54}$$

$$M_{\text{tot}}\ddot{\theta} = M_{\text{tot}}v - d(t), \tag{2.55}$$

$$\ddot{\theta} = v - \frac{d(t)}{M_{\text{tot}}}. \tag{2.56}$$

Por lo tanto, la igualdad $M_{\text{tot}}\ddot{\theta} = M_{\text{tot}}v$ se obtiene únicamente cuando $d(t) = 0$. Si $d(t) \neq 0$, el momento perturbador modifica la aceleración articular respecto de la aceleración virtual v.

Utilizando (2.47) y (2.56), se obtiene:

$$\ddot{e} = \ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}, \tag{2.57}$$

$$= \ddot{\theta}_d - v + \frac{d(t)}{M_{\text{tot}}}, \tag{2.58}$$

$$= \ddot{\theta}_d - \left[\ddot{\theta}_d + \frac{k_d}{M_{\text{tot}}}\dot{e} + \frac{k_p}{M_{\text{tot}}}e\right] + \frac{d(t)}{M_{\text{tot}}}, \tag{2.59}$$

$$= -\frac{k_d}{M_{\text{tot}}}\dot{e} - \frac{k_p}{M_{\text{tot}}}e + \frac{d(t)}{M_{\text{tot}}}. \tag{2.60}$$

Reordenando los términos, la dinámica del error queda dada por:

$$\ddot{e} + \frac{k_d}{M_{\text{tot}}}\dot{e} + \frac{k_p}{M_{\text{tot}}}e = \frac{d(t)}{M_{\text{tot}}}. \tag{2.61}$$

De forma equivalente:

$$M_{\text{tot}}\ddot{e} + k_d\dot{e} + k_p e = d(t). \tag{2.62}$$

La ecuación (2.62) presenta la estructura de un sistema rotacional inercia–amortiguador–resorte. En esta representación, M_{tot}, k_d y k_p corresponden a la inercia, el amortiguamiento y la rigidez equivalentes de la dinámica del error, respectivamente. Por lo tanto, estos parámetros determinan la respuesta del error de seguimiento frente al momento perturbador $d(t)$.

En ausencia de perturbaciones, $d(t) = 0$, la ecuación (2.61) se reduce a la dinámica homogénea establecida en (2.48). Por comparación de coeficientes, las ganancias se seleccionan como:

$$k_d = 2\zeta\omega_n M_{\text{tot}}, \qquad k_p = \omega_n^2 M_{\text{tot}}. \tag{2.63}$$

La deducción anterior supone seguimiento nominal de torque, $T_J = T_J^*$. En la implementación física, el ancho de banda finito del lazo de corriente, las saturaciones y las diferencias paramétricas producen una desviación entre ambos torques. Sus efectos mecánicos pueden representarse como parte del momento perturbador equivalente, mientras que el ruido y la cuantización permanecen asociados a las señales de medición.

2.4.6. Extensión con acción integral

La dinámica (2.62) muestra que un momento perturbador constante $d(t) = d_0$ produce, bajo el controlador CTC–PD, un error estacionario dado por:

$$e_{\text{ss}} = \frac{d_0}{k_p}. \tag{2.64}$$

Por lo tanto, la acción proporcional no elimina completamente el error producido por un momento constante, por una diferencia paramétrica o por una componente de fricción no incluida en el modelo nominal.

Para eliminar este error se incorpora la integral del error de posición:

$$e_{\text{int}}(t) = \int_0^t e(\sigma)\, d\sigma, \qquad e_{\text{int}}(0) = 0. \tag{2.65}$$

La aceleración virtual se redefine como:

$$v = \ddot{\theta}_d + \frac{k_d}{M_{\text{tot}}}\dot{e} + \frac{k_p}{M_{\text{tot}}}e + \frac{k_i}{M_{\text{tot}}}e_{\text{int}}, \tag{2.66}$$

donde k_i es la ganancia integral. El término $(k_i/M_{\text{tot}})\, e_{\text{int}}$ modifica la referencia de aceleración mientras exista una acumulación del error de posición.

Aplicando el mismo procedimiento utilizado para obtener (2.61), la dinámica del error queda dada por:

$$\ddot{e} + \frac{k_d}{M_{\text{tot}}}\dot{e} + \frac{k_p}{M_{\text{tot}}}e + \frac{k_i}{M_{\text{tot}}}e_{\text{int}} = \frac{d(t)}{M_{\text{tot}}}. \tag{2.67}$$

Para una perturbación constante $d(t) = d_0$, el estado estacionario satisface:

$$\dot{e}_{\text{ss}} = \ddot{e}_{\text{ss}} = 0. \tag{2.68}$$

Además, para que e_{int} permanezca constante debe cumplirse $e_{\text{ss}} = 0$. Al sustituir estas condiciones en (2.67), se obtiene:

$$e_{\text{ss}} = 0, \qquad e_{\text{int,ss}} = \frac{d_0}{k_i}. \tag{2.69}$$

Por lo tanto, la acción integral elimina el error estacionario frente a un momento perturbador constante, siempre que el sistema permanezca estable y el accionamiento no alcance sus límites de torque, corriente o tensión.

Para analizar la estabilidad se definen los estados:

$$x_1 = e, \qquad x_2 = \dot{e}, \qquad x_3 = e_{\text{int}}. \tag{2.70}$$

Considerando que $\dot{e}_{\text{int}} = e$, la representación de estado queda dada por:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{k_p}{M_{\text{tot}}} & -\dfrac{k_d}{M_{\text{tot}}} & -\dfrac{k_i}{M_{\text{tot}}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M_{\text{tot}}} \\ 0 \end{bmatrix} d(t). \tag{2.71}$$

Para estudiar la estabilidad interna se considera $d(t) = 0$. El polinomio característico de la matriz del sistema es:

$$\chi_A(s) = \det(sI - A) = s^3 + \frac{k_d}{M_{\text{tot}}} s^2 + \frac{k_p}{M_{\text{tot}}} s + \frac{k_i}{M_{\text{tot}}}. \tag{2.72}$$

De acuerdo con el criterio de Routh–Hurwitz [23], las raíces de $\chi_A(s)$ se encuentran en el semiplano izquierdo si:

$$k_d > 0, \qquad k_p > 0, \qquad k_i > 0, \qquad k_d k_p > M_{\text{tot}} k_i. \tag{2.73}$$

Para parametrizar las ganancias se adopta un polinomio compuesto por un par de polos de segundo orden y un tercer polo real:

$$\chi_d(s) = \left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)(s + \omega_i), \tag{2.74}$$

donde $\omega_n > 0$ y $\zeta > 0$ determinan el par de polos de segundo orden, mientras que $\omega_i > 0$ establece la ubicación del tercer polo.

Al expandir (2.74), se obtiene:

$$\chi_d(s) = s^3 + (2\zeta\omega_n + \omega_i)\, s^2 + \left(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n\omega_i\right) s + \omega_n^2\omega_i. \tag{2.75}$$

Comparando los coeficientes de $\chi_d(s)$ con los de $\chi_A(s)$, las ganancias resultan:

$$k_d = M_{\text{tot}}\,(2\zeta\omega_n + \omega_i), \tag{2.76}$$

$$k_p = M_{\text{tot}}\left(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n\omega_i\right), \tag{2.77}$$

$$k_i = M_{\text{tot}}\omega_n^2\omega_i. \tag{2.78}$$

Esta parametrización permite modificar separadamente la frecuencia natural, el amortiguamiento y la ubicación del tercer polo. La selección:

$$\zeta = 1, \qquad \omega_i = \omega_n, \tag{2.79}$$

constituye el caso particular:

$$\chi_d(s) = (s + \omega_n)^3. \tag{2.80}$$

Para este caso, las ganancias se reducen a:

$$k_d = 3\omega_n M_{\text{tot}}, \qquad k_p = 3\omega_n^2 M_{\text{tot}}, \qquad k_i = \omega_n^3 M_{\text{tot}}. \tag{2.81}$$

La raíz triple reduce la selección de las tres ganancias a un único parámetro ω_n. Aunque esta elección ubica los tres polos en el semiplano izquierdo para $\omega_n > 0$, restringe la capacidad de modificar independientemente el amortiguamiento y la ubicación del polo integral. Por esta razón, se considera un caso particular de (2.74) y no una condición necesaria para la sintonía del controlador.

En este trabajo se adopta esta condición como criterio de diseño, con el propósito de reducir los grados de libertad de sintonía y simplificar la parametrización y el ajuste del CTC.

2.4.7. Discretización e implementación del CTC

Para la implementación digital, la acción integral se discretiza mediante la transformación bilineal de Tustin. Esta transformación aproxima la integral del error mediante la regla trapezoidal. Definiendo $T_{s,\text{CTC}}$ como el periodo de ejecución del lazo CTC, se obtiene:

$$e_{\text{int}}[k] = e_{\text{int}}[k-1] + \frac{T_{s,\text{CTC}}}{2}\left(e[k] + e[k-1]\right). \tag{2.82}$$

La implementación digital introduce diferencias respecto de la dinámica continua empleada para seleccionar las ganancias. La magnitud de estas diferencias depende de la relación entre el periodo de ejecución del controlador y la ubicación de los polos deseados.

Sean λ_j, con $j = 1, 2, 3$, las raíces del polinomio característico deseado $\chi_d(s)$. Se define:

$$\omega_{p,\text{máx}} = \max_{j=1,2,3} |\lambda_j|, \tag{2.83}$$

donde $\omega_{p,\text{máx}}$ representa la magnitud del polo deseado de mayor módulo, expresada en s^{-1}.

Para mantener una separación temporal entre la ejecución digital y la dinámica deseada, se adopta el siguiente criterio de diseño:

$$\omega_{p,\text{máx}} T_{s,\text{CTC}} \leq 0{,}1. \tag{2.84}$$

La cantidad de ejecuciones contenidas en el intervalo característico $1/\omega_{p,\text{máx}}$ queda dada por:

$$N_{\text{muestras}} = \frac{1/\omega_{p,\text{máx}}}{T_{s,\text{CTC}}} = \frac{1}{\omega_{p,\text{máx}} T_{s,\text{CTC}}}. \tag{2.85}$$

Por lo cual, el criterio (2.84) establece al menos diez ejecuciones del controlador en dicho intervalo característico. Esta desigualdad se utiliza como criterio práctico de discretización y no constituye, por sí sola, una demostración de estabilidad del sistema muestreado.

Para el caso particular:

$$\chi_d(s) = (s + \omega_n)^3, \tag{2.86}$$

los tres polos se encuentran en $-\omega_n$, por lo que:

$$\omega_{p,\text{máx}} = \omega_n. \tag{2.87}$$

En consecuencia, el criterio de muestreo se reduce a:

$$\omega_n T_{s,\mathrm{CTC}} \leq 0{,}1. \tag{2.88}$$

En la implementación experimental, la interrupción principal y el lazo interno FOC se ejecutan a 10 kHz. El CTC utiliza un factor de decimación $D_{\mathrm{CTC}} = 10$, por lo que su frecuencia y periodo de ejecución corresponden a:

$$f_{\mathrm{CTC}} = \frac{f_{\mathrm{ISR}}}{D_{\mathrm{CTC}}} = \frac{10\,\mathrm{kHz}}{10} = 1\,\mathrm{kHz}, \qquad T_{s,\mathrm{CTC}} = 1\,\mathrm{ms}. \tag{2.89}$$

Por lo tanto, para esta implementación, el criterio (2.84) requiere:

$$\omega_{p,\mathrm{máx}} \leq 100\,\mathrm{rad/s}. \tag{2.90}$$

El término derivativo se calcula a partir de las velocidades deseada y medida:

$$\dot{e}[k] = \dot{\theta}_d[k] - \dot{\theta}[k]. \tag{2.91}$$

Esta relación proviene directamente de la derivada del error $e = \theta_d - \theta$, por lo que es válida en todo el intervalo angular considerado por el modelo y no depende de una linealización alrededor de un punto de operación. La velocidad deseada $\dot{\theta}_d[k]$ se obtiene analíticamente del generador de trayectoria, mientras que $\dot{\theta}[k]$ corresponde a la velocidad obtenida mediante el sistema de medición y estimación.

Este procedimiento evita diferenciar numéricamente la posición para calcular $\dot{e}[k]$. Sin embargo, el término derivativo conserva el ruido y el retardo presentes en la estimación de $\dot{\theta}[k]$. Además, aunque la expresión sigue siendo válida cuando el error se encuentra lejos de cero, el torque calculado puede alcanzar los límites del accionamiento. En esa condición deja de cumplirse la dinámica lineal nominal empleada en la síntesis del controlador.

A partir de (2.82), la referencia de torque articular en tiempo discreto queda dada por:

$$\begin{aligned} T_J^*[k] = M_{\mathrm{tot}}\ddot{\theta}_d[k] + k_d\left(\dot{\theta}_d[k] - \dot{\theta}[k]\right) + k_p e[k] \\ + k_i e_{\mathrm{int}}[k] + g\left(\theta[k]\right) + f\left(\dot{\theta}[k]\right). \end{aligned} \tag{2.92}$$

La expresión anterior conserva la estructura de la ley continua e incorpora el término inercial, la compensación gravitacional, la compensación de fricción y las acciones proporcional, derivativa e integral.

La ecuación (2.92) representa la referencia de torque articular calculada antes de aplicar los límites del accionamiento. Previo a su conversión en i_q^*, esta referencia debe limitarse de acuerdo con las restricciones de torque y corriente establecidas para el sistema. Si la acción integral se encuentra habilitada y la saturación permanece activa, debe incorporarse un mecanismo anti-enrollamiento asociado al CTC para evitar la acumulación de $e_{\mathrm{int}}[k]$.

Capítulo 3

Definición de escenarios y trayectorias de evaluación

El modelo mecánico de 1–GDL y la estrategia de control CTC–FOC desarrollados en el capítulo anterior constituyen la base para definir los escenarios utilizados posteriormente en la simulación. En este capítulo se establecen las configuraciones articulares consideradas, las trayectorias de referencia, las restricciones operacionales del accionamiento y las métricas empleadas para evaluar su desempeño.

Los escenarios se formulan en el eje de salida de la transmisión mediante la coordenada articular θ. Esta convención permite describir movimientos de flexión–extensión y relacionar las variables cinemáticas articulares con las variables mecánicas del rotor mediante la razón de transmisión N. Por su parte, la conversión entre el momento desarrollado por el motor y el momento aplicado en el eje articular considera tanto N como la eficiencia mecánica η.

De esta manera, las trayectorias articulares pueden procesarse mediante el CTC para obtener referencias de momento compatibles con el accionamiento PMSM y con la estructura de control CTC–FOC.

Las trayectorias sinusoidal y de mínimo *jerk* se adoptan como referencias principales para los escenarios de rodilla y codo, respectivamente. Asimismo, se incluye una trayectoria trapezoidal en velocidad como evaluación complementaria y se incorporan perfiles de contraste cinemático para analizar el efecto de diferentes grados de suavidad sobre el seguimiento y la demanda del accionamiento.

Las definiciones presentadas en este capítulo preceden a la implementación del modelo computacional y a la obtención de resultados. La construcción del accionamiento en PLECS, las condiciones de simulación y la evaluación de los casos de estudio se presentan conjuntamente en el Capítulo 4.

3.1. Propósito y alcance de la evaluación

El propósito de los escenarios es evaluar la respuesta del esquema CTC–FOC frente a referencias articulares con diferentes características cinemáticas y mecánicas. Para ello, se consideran variables asociadas a la precisión de seguimiento, el torque articular solicitado, la corriente requerida por el motor y la suavidad temporal del movimiento.

La representación utilizada corresponde a un sistema equivalente de un grado de libertad en el plano sagital. Por consiguiente, el modelo no reproduce la totalidad de la dinámica musculoesquelética ni la interacción entre múltiples articulaciones. Su función es proporcionar un entorno controlado en el cual sea posible modificar el rango angular, la duración del movimiento, la inercia equivalente, la contribución gravitacional y las perturbaciones externas aplicadas sobre el eje articular.

Los movimientos considerados se inspiran en tareas de flexión–extensión empleadas en rehabilitación motora. Sin embargo, el análisis desarrollado corresponde a una evaluación de ingeniería sobre un modelo equivalente y no constituye una validación clínica ni determina límites terapéuticos para un usuario específico. Los valores de posición, velocidad, torque y corriente se emplean como parámetros de los casos de estudio y deben permanecer dentro de las restricciones operacionales establecidas para el accionamiento.

3.2. Arquitectura funcional del sistema de evaluación

La Fig. 3.1 presenta la arquitectura funcional del esquema CTC–FOC empleado para evaluar el seguimiento de trayectorias articulares. El generador de trayectoria proporciona las señales deseadas de posición, velocidad y aceleración, θ_d, $\dot{\theta}_d$ y $\ddot{\theta}_d$, respectivamente. A partir de estas referencias y de las variables articulares realimentadas, el controlador por torque calculado determina la referencia de momento articular T_J^*.

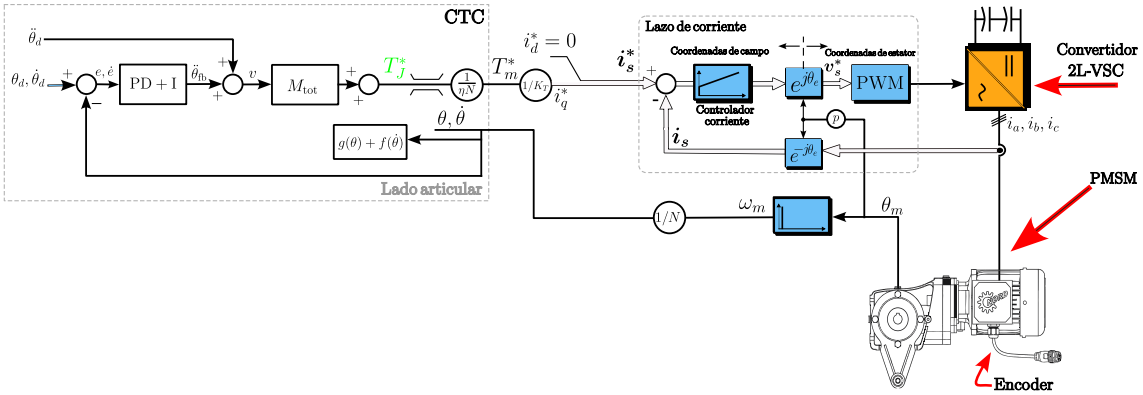


Figura 3.1: Arquitectura funcional del esquema de control CTC–FOC y relación entre las variables articulares y las variables del eje del motor.

La referencia de momento articular se transforma en una referencia de momento en el eje del motor considerando la relación de transmisión N y la eficiencia mecánica η. Posteriormente, se convierte en la referencia de corriente del eje q mediante:

$$T_m^* = \frac{T_J^*}{\eta N}, \qquad i_q^* = \frac{T_m^*}{k_T} = \frac{T_J^*}{\eta N k_T}. \tag{3.1}$$

donde T_m^* es la referencia de momento electromagnético en el eje del motor y k_T es la constante de momento definida en (2.14).

El lazo interno FOC regula i_q respecto de esta referencia y mantiene $i_d^* = 0$. Las referencias de tensión obtenidas en los ejes dq se transforman al marco estacionario y son sintetizadas mediante el modulador SVPWM y el inversor trifásico de dos niveles.

La posición mecánica del rotor θ_m, obtenida mediante el *encoder*, y la velocidad mecánica estimada ω_m se convierten en variables articulares mediante:

$$\theta = \frac{\theta_m}{N}, \qquad \dot{\theta} = \frac{\omega_m}{N}. \tag{3.2}$$

En paralelo, la posición mecánica del rotor permite determinar el ángulo eléctrico utilizado en las transformaciones del FOC:

$$\theta_e = p\theta_m + \theta_{e,0}, \tag{3.3}$$

donde p es el número de pares de polos y $\theta_{e,0}$ representa el desfase eléctrico determinado durante el alineamiento de la máquina. De esta forma, la misma medición del *encoder* permite cerrar tanto el lazo externo de seguimiento articular como las transformaciones de coordenadas del lazo interno FOC.

3.3. Selección y parametrización de los escenarios articulares

El sistema equivalente de 1–GDL permite representar diferentes movimientos articulares mediante la modificación de los parámetros mecánicos de la carga y de la trayectoria de referencia. En este trabajo se consideran dos configuraciones principales: flexión–extensión de rodilla y flexión–extensión de codo. Ambas se describen mediante la coordenada articular θ, medida en el eje de salida de la transmisión.

La Fig. 3.2 ilustra de manera esquemática los movimientos considerados. Aunque las dos articulaciones se representan mediante el mismo modelo dinámico general, cada escenario utiliza parámetros diferentes de masa equivalente, posición del centro de masa, inercia, rango angular y trayectoria de referencia.

3.3.1. Convención angular y parámetros comunes

La posición articular se define respecto de la configuración de mínima energía potencial del modelo equivalente. De acuerdo con la convención adoptada en el Capítulo 2, se establece $\theta = 0$ cuando el centro de masa equivalente se encuentra verticalmente bajo el eje articular. Bajo esta definición, el momento gravitacional queda representado por:

$$g(\theta) = m_{\text{eq}} g \ell_{\text{eq}} \sin\theta, \tag{3.4}$$

donde m_{eq} es la masa equivalente movilizada y ℓ_{eq} es la distancia entre el eje articular y el centro de masa equivalente.

Esta convención corresponde a la configuración mecánica adoptada para el modelo de 1–GDL y no constituye una definición anatómica general para todas las posiciones posibles del miembro humano. En las ecuaciones dinámicas, las variables angulares se expresan en radianes.

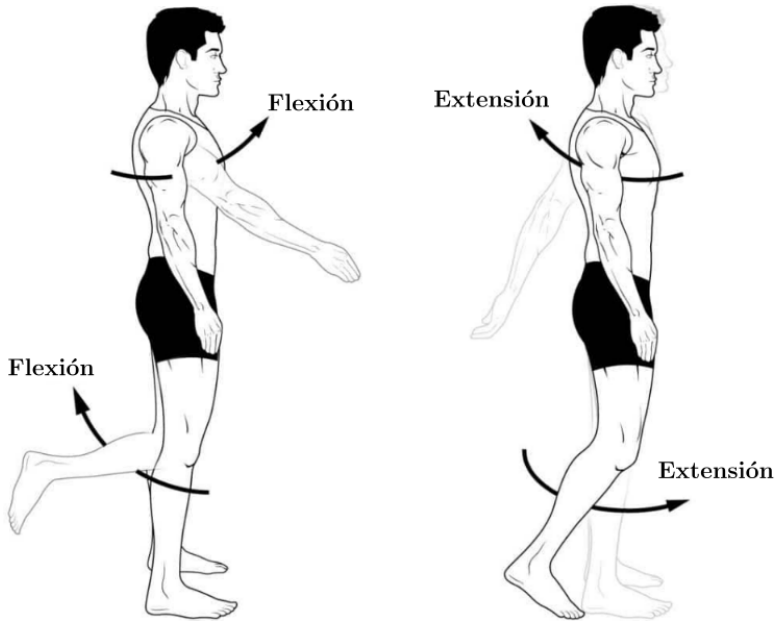


Figura 3.2: Representación esquemática de los movimientos de flexión–extensión considerados para las articulaciones de codo y rodilla. Adaptado de [24].

Los parámetros antropométricos se estiman para un individuo adulto de referencia con masa corporal $M_{\text{prom}} = 80$ kg y estatura $H_{\text{prom}} = 1{,}78$ m. Las fracciones de masa corporal, las relaciones entre longitud segmentaria y estatura, las posiciones de los centros de masa y los radios de giro se obtienen de las proporciones reportadas en [25].

Para un conjunto compuesto por n segmentos anatómicos, la masa y la posición de su centro de masa equivalente se determinan mediante:

$$m_{\text{eq}} = \sum_{r=1}^{n} m_r, \qquad \ell_{\text{eq}} = \frac{\sum_{r=1}^{n} m_r \ell_r}{\sum_{r=1}^{n} m_r}, \tag{3.5}$$

donde m_r es la masa del segmento r y ℓ_r es la distancia entre su centro de masa y el eje articular.

La inercia propia de cada segmento respecto de su centro de masa se calcula a partir de su radio de giro:

$$I_{G,r} = m_r \left(k_{G,r} L_r\right)^2, \tag{3.6}$$

donde L_r es la longitud del segmento y $k_{G,r}$ es el radio de giro respecto del centro de masa, normalizado por la longitud segmentaria.

Aplicando el teorema de ejes paralelos, la inercia del segmento respecto del eje articular queda dada por:

$$I_{O,r} = I_{G,r} + m_r \ell_r^2. \tag{3.7}$$

El momento de inercia equivalente del conjunto movilizado corresponde a:

$$I_{\text{seg}} = \sum_{r=1}^{n} I_{O,r} = \sum_{r=1}^{n} \left[m_r \left(k_{G,r} L_r\right)^2 + m_r \ell_r^2 \right]. \tag{3.8}$$

Desde el punto de vista del modelo dinámico completo, la inercia equivalente referida al eje articular puede expresarse como:

$$M_{\text{tot}} = I_{\text{seg}} + J_{\text{red,out}} + N^2 J_m, \tag{3.9}$$

donde $J_{\text{red,out}}$ es la inercia equivalente del reductor referida al eje de salida y J_m es la inercia del rotor. La contribución I_{seg} se particulariza para cada escenario articular en las subsecciones siguientes.

3.3.2. Escenario articular de rodilla

El escenario de rodilla se representa mediante un sistema rotacional de 1–GDL en el plano sagital. El segmento movilizado comprende la pierna, definida anatómicamente como la porción comprendida entre la rodilla y el tobillo, y el pie. El movimiento evaluado corresponde a la flexión–extensión de la rodilla, como se ilustra en la Fig. 3.3.

Para el modelo equivalente se adopta un rango de movimiento de 140° entre la extensión completa y la máxima flexión considerada. De acuerdo con la referencia angular definida previamente, la configuración de extensión completa corresponde a $\theta = 0°$, mientras que el sentido positivo de la coordenada articular corresponde a la flexión. La máxima flexión considerada se alcanza en $\theta = 140°$.

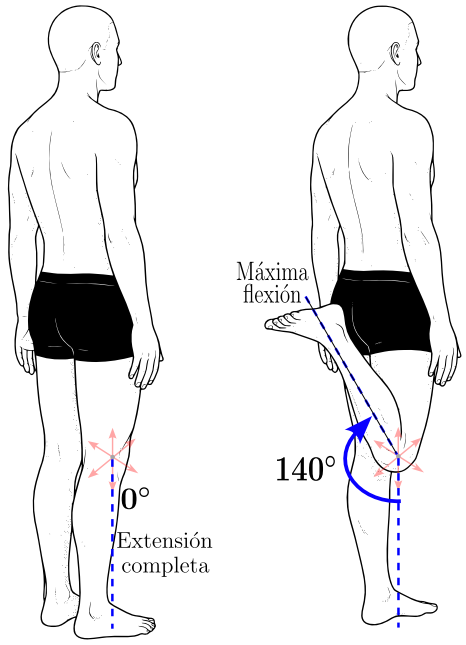


Figura 3.3: Representación referencial del movimiento de flexión–extensión considerado para el escenario de rodilla. La extensión completa corresponde a $\theta = 0°$, mientras que la máxima flexión considerada se alcanza en $\theta = 140°$, definiendo un rango total de movimiento de $\theta = 140°$. Adaptado de [26].

Los parámetros del conjunto pierna–pie se calculan utilizando las proporciones antropométricas indicadas en la Subsección 3.3.1. La Tabla 3.1 resume las masas, longitudes, posiciones de los centros de masa y propiedades inerciales obtenidas.

Tabla 3.1: Parámetros antropométricos e inerciales del conjunto pierna–pie.

Descripción	Notación	Aproximación	Valor
Estimación de la masa corporal			
Masa pierna	m_{pierna}	$0{,}0465\, M_{\text{prom}}$	$3{,}72\,\text{kg}$
Masa pie	m_{pie}	$0{,}0145\, M_{\text{prom}}$	$1{,}16\,\text{kg}$
Masa total equivalente	m_{rod}	$m_{\text{pierna}} + m_{\text{pie}}$	$4{,}88\,\text{kg}$
Longitudes estimadas de los segmentos			
Longitud pierna	L_{pierna}	$0{,}246\, H_{\text{prom}}$	$0{,}438\,\text{m}$
Longitud pie	L_{pie}	$0{,}152\, H_{\text{prom}}$	$0{,}271\,\text{m}$
Centro de masa del segmento respecto de la rodilla			
COM pierna	ℓ_{pierna}	$0{,}433\, L_{\text{pierna}}$	$0{,}190\,\text{m}$
COM pie	ℓ_{pie}	$L_{\text{pierna}} + 0{,}5\, L_{\text{pie}}$	$0{,}573\,\text{m}$
COM combinado	ℓ_{rod}	$\dfrac{m_{\text{pierna}}\ell_{\text{pierna}} + m_{\text{pie}}\ell_{\text{pie}}}{m_{\text{rod}}}$	$0{,}281\,\text{m}$
Radios de giro			
Radio de giro pierna	$k_{G,\text{pierna}}$	Winter [25]	0,302
Radio de giro pie	$k_{G,\text{pie}}$	Winter [25]	0,475
Inercia			
Central pierna	$I_{G,\text{pierna}}$	$m_{\text{pierna}}\,(k_{G,\text{pierna}} L_{\text{pierna}})^2$	$0{,}0651\,\text{kg m}^2$
Central pie	$I_{G,\text{pie}}$	$m_{\text{pie}}\,(k_{G,\text{pie}} L_{\text{pie}})^2$	$0{,}0192\,\text{kg m}^2$
Pierna respecto de la rodilla	$I_{O,\text{pierna}}$	$I_{G,\text{pierna}} + m_{\text{pierna}}\ell_{\text{pierna}}^2$	$0{,}1988\,\text{kg m}^2$
Pie respecto de la rodilla	$I_{O,\text{pie}}$	$I_{G,\text{pie}} + m_{\text{pie}}\ell_{\text{pie}}^2$	$0{,}4002\,\text{kg m}^2$
Equivalente pierna–pie	$I_{\text{seg}}^{\text{rod}}$	$I_{O,\text{pierna}} + I_{O,\text{pie}}$	$0{,}5990\,\text{kg m}^2$

El escenario de rodilla utiliza una masa equivalente de 4,88 kg, un centro de masa ubicado a 0,281 m del eje articular y un momento de inercia del conjunto movilizado de $0{,}5990\ \text{kg m}^2$.

3.3.3. Escenario articular de codo

El escenario de codo se representa mediante un sistema rotacional de 1–GDL en el plano sagital. El segmento movilizado comprende el antebrazo y la mano, mientras que el brazo se considera fijo durante el movimiento. El movimiento evaluado corresponde a la flexión–extensión del codo, como se muestra en la Fig. 3.4.

Para este escenario se adopta un rango de movimiento de 150° entre la extensión completa y la máxima flexión considerada. De acuerdo con la referencia angular definida previamente, la configuración de extensión completa corresponde a $\theta = 0°$, mientras que el sentido positivo de la coordenada articular corresponde a la flexión. La máxima flexión considerada se alcanza en $\theta = 150°$.

Los parámetros del conjunto antebrazo–mano se calculan a partir de las proporciones antropométricas reportadas en [25]. Los resultados se presentan en la Tabla 3.2.

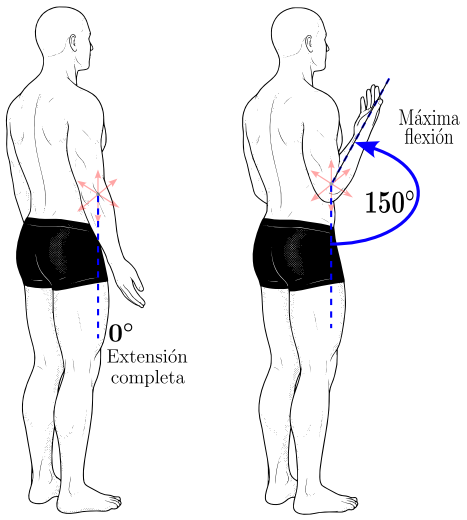


Figura 3.4: Representación referencial del movimiento flexión–extensión considerado para el escenario de codo. La extensión completa corresponde a $\theta = 0°$, mientras que la máxima flexión considerada se alcanza en $\theta = 150°$, definiendo un rango total de movimiento de $\theta = 150°$. Adaptado de [27].

Tabla 3.2: Parámetros antropométricos e inerciales del conjunto antebrazo–mano.

Descripción	**Notación**	**Aproximación**	**Valor**
Estimación de la masa corporal			
Antebrazo	m_{anteb}	$0{,}016\, M_{\text{prom}}$	1,28 kg
Mano	m_{mano}	$0{,}006\, M_{\text{prom}}$	0,48 kg
Total equivalente	m_{codo}	$m_{\text{anteb}} + m_{\text{mano}}$	1,76 kg
Longitudes estimadas de los segmentos			
Antebrazo	L_{anteb}	$0{,}146\, H_{\text{prom}}$	0,260 m
Mano	L_{mano}	$0{,}108\, H_{\text{prom}}$	0,192 m
Centro de masa del segmento respecto del codo			
Antebrazo	ℓ_{anteb}	$0{,}430\, L_{\text{anteb}}$	0,112 m
Mano	ℓ_{mano}	$L_{\text{anteb}} + 0{,}506\, L_{\text{mano}}$	0,357 m
Combinado	ℓ_{codo}	$\dfrac{m_{\text{anteb}}\ell_{\text{anteb}} + m_{\text{mano}}\ell_{\text{mano}}}{m_{\text{codo}}}$	0,179 m
Radios de giro			
Antebrazo	$k_{G,\text{anteb}}$	Winter [25]	0,303
Mano	$k_{G,\text{mano}}$	Winter [25]	0,297
Inercia			
Central antebrazo	$I_{G,\text{anteb}}$	$m_{\text{anteb}}\,(k_{G,\text{anteb}} L_{\text{anteb}})^2$	$0{,}007\,94\,\text{kg m}^2$
Central mano	$I_{G,\text{mano}}$	$m_{\text{mano}}\,(k_{G,\text{mano}} L_{\text{mano}})^2$	$0{,}001\,57\,\text{kg m}^2$
Antebrazo respecto del codo	$I_{O,\text{anteb}}$	$I_{G,\text{anteb}} + m_{\text{anteb}}\ell_{\text{anteb}}^2$	$0{,}023\,92\,\text{kg m}^2$
Mano respecto del codo	$I_{O,\text{mano}}$	$I_{G,\text{mano}} + m_{\text{mano}}\ell_{\text{mano}}^2$	$0{,}062\,79\,\text{kg m}^2$
Equivalente antebrazo–mano	$I_{\text{seg}}^{\text{codo}}$	$I_{O,\text{anteb}} + I_{O,\text{mano}}$	$0{,}086\,71\,\text{kg m}^2$

El escenario de codo utiliza una masa equivalente de 1,76 kg, un centro de masa ubicado a 0,179 m del eje articular y un momento de inercia del conjunto movilizado de 0,08671 $\mathrm{kg\,m^2}$.

3.4. Definición de las trayectorias de referencia

Una vez definidos los parámetros mecánicos de los escenarios articulares, corresponde establecer las trayectorias utilizadas como referencias de posición. Los perfiles seleccionados presentan diferentes características de periodicidad, duración y suavidad cinemática, lo que permite analizar su influencia sobre el seguimiento y la demanda del accionamiento.

Las referencias se expresan en la coordenada articular θ. Para cada perfil, el generador de trayectoria calcula conjuntamente la posición deseada $\theta_d(t)$, la velocidad deseada $\dot{\theta}_d(t)$ y la aceleración deseada $\ddot{\theta}_d(t)$. En las trayectorias suaves, estas últimas se obtienen mediante derivación analítica de la posición. Para los perfiles definidos por tramos, las expresiones cinemáticas se establecen en cada intervalo y sus discontinuidades se identifican explícitamente.

En la implementación, las expresiones de cada trayectoria se evalúan en línea durante cada ejecución del CTC, utilizando los instantes $t_k = kT_{s,\mathrm{CTC}}$, con $T_{s,\mathrm{CTC}} = 1$ ms. Por lo tanto, las señales cinemáticas no se obtienen mediante diferenciación numérica de la posición. En los perfiles triangulares simétrico y asimétrico, la aceleración se establece igual a cero en el interior de cada tramo lineal, mientras que los cambios instantáneos de velocidad se conservan como discontinuidades de la referencia.

3.4.1. Trayectoria sinusoidal

La trayectoria sinusoidal se utiliza como referencia principal del escenario de rodilla debido a su carácter periódico y a la continuidad de sus variables cinemáticas [28]. Su posición deseada se define como:

$$\theta_d(t) = \theta_0 + A\sin(\omega t + \phi), \tag{3.10}$$

donde θ_0 es la posición angular central, A es la amplitud, $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular, f es la frecuencia del movimiento y ϕ es la fase inicial.

El intervalo angular descrito por la trayectoria queda determinado por:

$$\theta_{d,\mathrm{mín}} = \theta_0 - A, \qquad \theta_{d,\mathrm{máx}} = \theta_0 + A. \tag{3.11}$$

La velocidad y la aceleración deseadas se obtienen analíticamente derivando (3.10):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_d(t) &= A\omega\cos(\omega t + \phi), \\ \ddot{\theta}_d(t) &= -A\omega^2\sin(\omega t + \phi). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por tanto, sus magnitudes máximas corresponden a:

$$\left|\dot{\theta}_d\right|_{\mathrm{máx}} = A\omega, \qquad \left|\ddot{\theta}_d\right|_{\mathrm{máx}} = A\omega^2. \tag{3.13}$$

La velocidad alcanza su máxima magnitud cuando la trayectoria cruza la posición central, mientras que la aceleración alcanza sus extremos en los puntos de inversión del

movimiento. Esta relación permite determinar anticipadamente las exigencias cinemáticas asociadas a una selección dada de amplitud y frecuencia.

Para ilustrar las características del perfil se considera un ciclo de la trayectoria utilizada posteriormente en el escenario nominal de rodilla. Los parámetros seleccionados son:

$$\theta_0 = \frac{7\pi}{18}\ \text{rad}, \qquad A = \frac{7\pi}{18}\ \text{rad}, \qquad f = 0{,}2\ \text{Hz}, \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}\ \text{rad}, \qquad T = \frac{1}{f} = 5\ \text{s}. \tag{3.14}$$

Con estos parámetros, la referencia utilizada para generar la Fig. 3.5 queda dada por:

$$\theta_d(t) = \frac{7\pi}{18}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)\right], \qquad 0 \le t \le 5\ \text{s}. \tag{3.15}$$

La trayectoria comienza en $\theta_d(0) = 0$ rad, alcanza $\theta_d(2{,}5\ \text{s}) = \frac{7\pi}{9}$ rad, correspondiente al extremo del rango de flexión considerado y retorna a $\theta_d(0) = 0$ rad. Las máximas

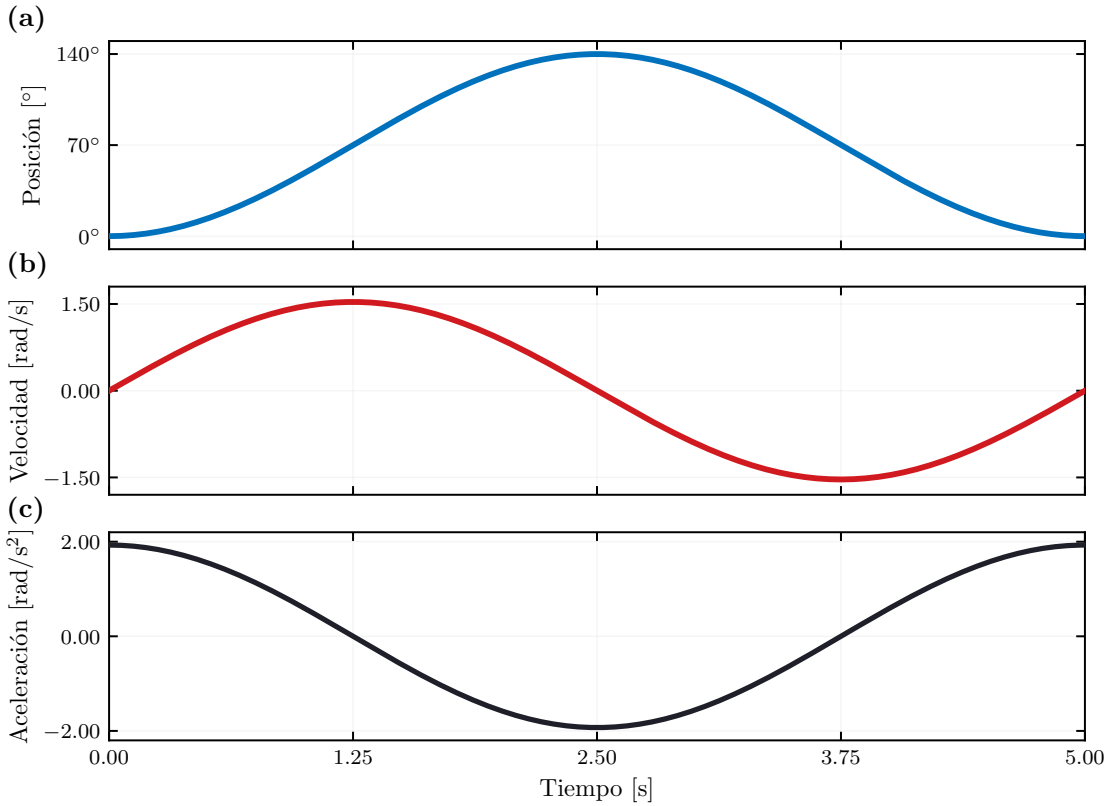


Figura 3.5: Perfil cinemático de un ciclo de la trayectoria sinusoidal para el escenario de rodilla: (a) posición angular, (b) velocidad angular y (c) aceleración angular.

magnitudes de velocidad y aceleración para este ejemplo son:

$$\left|\dot{\theta}_d\right|_{\text{máx}} = 1{,}536\ \text{rad/s}, \qquad \left|\ddot{\theta}_d\right|_{\text{máx}} = 1{,}929\ \text{rad/s}^2. \tag{3.16}$$

El perfil genera un movimiento periódico sin discontinuidades en posición, velocidad o aceleración. Por esta razón, se emplea como referencia representativa de una movilización continua de flexión–extensión.

3.4.2. Trayectoria de mínimo *jerk*

La trayectoria de mínimo *jerk* se utiliza como referencia principal del escenario de codo. El *jerk* corresponde a la variación temporal de la aceleración y, para el movimiento angular considerado, se expresa como la tercera derivada de la posición, $\dddot{\theta}_d(t)$, con unidades de rad/s^3.

Por lo tanto, valores elevados de *jerk* se asocian a cambios rápidos de aceleración, mientras que su reducción favorece transiciones cinemáticas más suaves.

Este perfil describe un movimiento de punto a punto y se obtiene minimizando el funcional asociado al cuadrado del *jerk* [29]:

$$\mathcal{J}_{\text{jerk}} = \int_0^T \left[\frac{d^3\theta_d(t)}{dt^3}\right]^2 dt, \tag{3.17}$$

sujeto a condiciones de posición, velocidad y aceleración en los extremos del movimiento:

$$\begin{aligned} &\theta_d(0) = \theta_{\text{ini}}, \quad \theta_d(T) = \theta_{\text{fin}}, \\ &\dot{\theta}_d(0) = 0, \qquad \dot{\theta}_d(T) = 0, \\ &\ddot{\theta}_d(0) = 0, \qquad \ddot{\theta}_d(T) = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

La minimización de (3.17) conduce a una trayectoria cuya sexta derivada es nula. La posición deseada puede representarse mediante un polinomio de quinto orden. Definiendo el tiempo normalizado y el desplazamiento total como:

$$s = \frac{t}{T}, \qquad \Delta\theta = \theta_{\text{fin}} - \theta_{\text{ini}}, \qquad 0 \le s \le 1, \tag{3.19}$$

se propone:

$$\theta_d(t) = \theta_{\text{ini}} + \Delta\theta\, q(s), \qquad q(s) = \sum_{r=0}^{5} a_r s^r. \tag{3.20}$$

Las condiciones de frontera expresadas en términos de $q(s)$ son:

$$\begin{aligned} &q(0) = 0, \quad q'(0) = 0, \quad q''(0) = 0, \\ &q(1) = 1, \quad q'(1) = 0, \quad q''(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

En (3.21), las primas indican derivación respecto del tiempo normalizado s. Las tres primeras condiciones establecen $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. En consecuencia, el polinomio normalizado se reduce a:

$$q(s) = a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5. \tag{3.22}$$

Al evaluar $q(1) = 1$, $q'(1) = 0$ y $q''(1) = 0$, se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_3 + a_4 + a_5 &= 1, \\ 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &= 0, \\ 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 &= 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Estas ecuaciones pueden expresarse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

cuya solución es:

$$a_3 = 10, \qquad a_4 = -15, \qquad a_5 = 6. \tag{3.25}$$

De esta manera, la trayectoria de posición queda definida por:

$$\theta_d(t) = \theta_{\text{ini}} + \Delta\theta \left(10s^3 - 15s^4 + 6s^5\right), \qquad s = \frac{t}{T}. \tag{3.26}$$

La velocidad, la aceleración y el *jerk* deseados se obtienen analíticamente:

$$\dot{\theta}_d(t) = \frac{\Delta\theta}{T} \left(30s^2 - 60s^3 + 30s^4\right), \tag{3.27a}$$

$$\ddot{\theta}_d(t) = \frac{\Delta\theta}{T^2} \left(60s - 180s^2 + 120s^3\right), \tag{3.27b}$$

$$\dddot{\theta}_d(t) = \frac{\Delta\theta}{T^3} \left(60 - 360s + 360s^2\right). \tag{3.27c}$$

El perfil comienza y termina en reposo, con velocidad y aceleración nulas. La posición presenta una evolución sigmoidal, la velocidad tiene forma de campana y la aceleración cambia de signo durante el movimiento. El *jerk* permanece acotado, aunque no es nulo en los extremos, puesto que esta condición no forma parte de las restricciones establecidas en (3.18).

Para ilustrar el perfil se utiliza la referencia correspondiente al escenario nominal de codo:

$$\theta_{\text{ini}} = 0 \text{ rad}, \qquad \theta_{\text{fin}} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}, \qquad \Delta\theta = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}, \qquad T = 5 \text{ s}. \tag{3.28}$$

Para esta selección, la velocidad alcanza su valor máximo en $t = T/2 = 2{,}5$ s, mientras que los extremos de aceleración ocurren en:

$$t = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{6} T. \tag{3.29}$$

Las máximas magnitudes cinemáticas resultan:

$$\begin{aligned} \left|\dot{\theta}_d\right|_{\text{máx}} &= \frac{15}{8} \frac{|\Delta\theta|}{T} = 0{,}982 \text{ rad/s}, \\ \left|\ddot{\theta}_d\right|_{\text{máx}} &= \frac{10\sqrt{3}}{3} \frac{|\Delta\theta|}{T^2} = 0{,}605 \text{ rad/s}^2, \\ \left|\dddot{\theta}_d\right|_{\text{máx}} &= 60 \frac{|\Delta\theta|}{T^3} = 1{,}257 \text{ rad/s}^3. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Para $t \geq T$, la referencia se mantiene en θ_{fin}, con velocidad y aceleración deseadas iguales a cero.

La Fig. 3.6 muestra la evolución de la posición, la velocidad y la aceleración correspondientes a esta parametrización. Se observa la evolución sigmoidal de la posición, el perfil de campana de la velocidad y las fases de aceleración y desaceleración del movimiento.

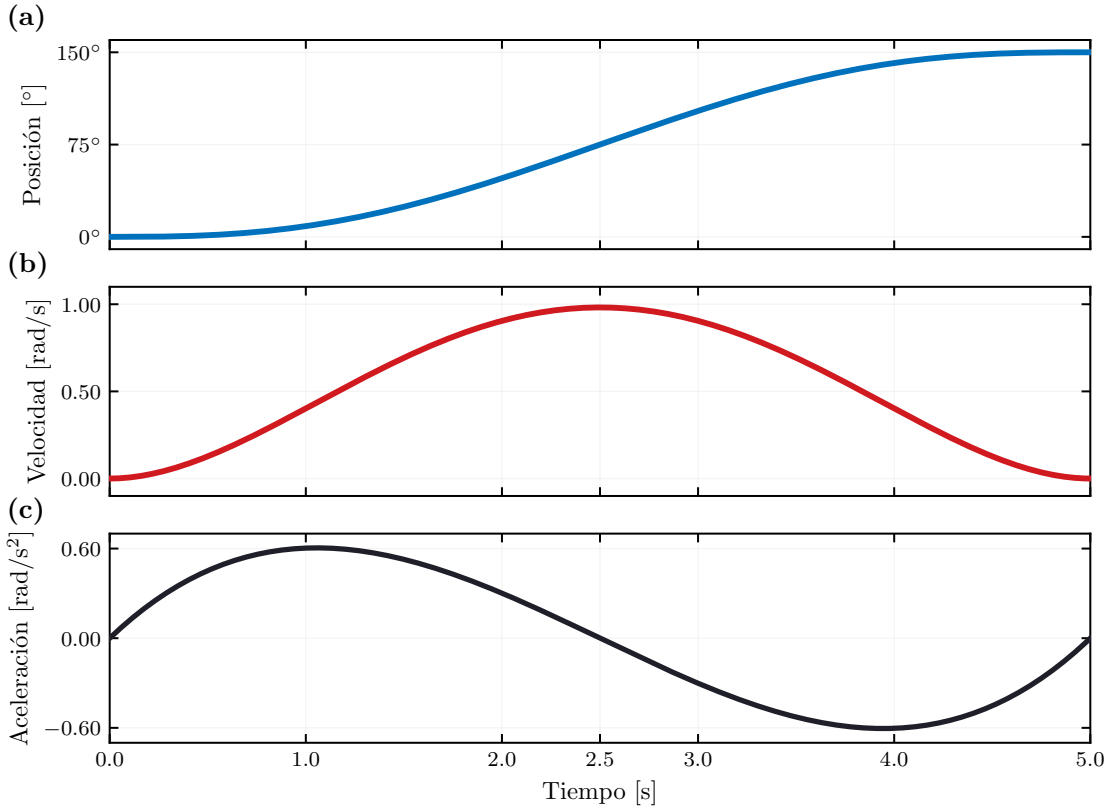


Figura 3.6: Perfil cinemático de la trayectoria de mínimo *jerk* utilizada en el escenario de codo: (a) posición angular, (b) velocidad angular y (c) aceleración angular.

3.4.3. Perfil trapezoidal en velocidad

El perfil trapezoidal en velocidad se considera como una referencia complementaria para el escenario de rodilla [30]. A diferencia de la trayectoria sinusoidal, este perfil divide el desplazamiento en tres fases: aceleración constante, velocidad constante y desaceleración constante. Esta estructura permite evaluar el desempeño del esquema CTC–FOC frente a una referencia definida por tramos y con transiciones entre condiciones cinemáticas diferentes.

Sean t_a, t_c y t_d las duraciones de las fases de aceleración, velocidad constante y desaceleración, respectivamente. La duración total del movimiento queda dada por:

$$T = t_a + t_c + t_d. \tag{3.31}$$

Definiendo el desplazamiento angular como:

$$\Delta\theta = \theta_{\text{fin}} - \theta_{\text{ini}}, \tag{3.32}$$

se define velocidad de crucero ω_c como la velocidad constante alcanzada durante la fase central del perfil, de duración t_c. Su valor se determina imponiendo que el área bajo el perfil de velocidad sea igual a $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\omega_c t_a + \omega_c t_c + \frac{1}{2}\omega_c t_d. \tag{3.33}$$

Por lo tanto:

$$\omega_c = \frac{\Delta\theta}{t_c + \dfrac{t_a + t_d}{2}} = \frac{2\Delta\theta}{t_a + 2t_c + t_d}. \tag{3.34}$$

Los coeficientes de aceleración y desaceleración se definen como:

$$\alpha_a = \frac{\omega_c}{t_a}, \qquad \alpha_d = \frac{\omega_c}{t_d}. \tag{3.35}$$

La velocidad de referencia queda definida por tramos mediante:

$$\dot{\theta}_d(t) = \begin{cases} \alpha_a t, & 0 \le t < t_a, \\ \omega_c, & t_a \le t < t_a + t_c, \\ \omega_c - \alpha_d \left(t - t_a - t_c\right), & t_a + t_c \le t < T, \\ 0, & t \ge T. \end{cases} \tag{3.36}$$

Integrando (3.36), se obtiene la posición de referencia asociada al perfil:

$$\theta_d(t) = \begin{cases} \theta_{\text{ini}} + \dfrac{1}{2}\alpha_a t^2, & 0 \le t < t_a, \\ \theta_{\text{ini}} + \dfrac{1}{2}\omega_c t_a + \omega_c (t - t_a), & t_a \le t < t_a + t_c, \\ \theta_{\text{ini}} + \omega_c \left(\dfrac{t_a}{2} + t_c\right) + \omega_c \tau - \dfrac{1}{2}\alpha_d \tau^2, & t_a + t_c \le t < T, \\ \theta_{\text{fin}}, & t \ge T, \end{cases} \tag{3.37}$$

donde:

$$\tau = t - t_a - t_c. \tag{3.38}$$

Por otro parte, derivando por tramos la referencia de velocidad, la aceleración asociada al perfil resulta:

$$\ddot{\theta}_d(t) = \begin{cases} \alpha_a, & 0 \le t < t_a, \\ 0, & t_a \le t < t_a + t_c, \\ -\alpha_d, & t_a + t_c \le t < T, \\ 0, & t \ge T. \end{cases} \tag{3.39}$$

Las expresiones anteriores garantizan continuidad de posición y velocidad en los cambios de fase, así como el cumplimiento de $\theta_d(T) = \theta_{\text{fin}}$ y $\dot{\theta}_d(T) = 0$. Sin embargo, la aceleración presenta discontinuidades en los instantes que delimitan las diferentes fases. En consecuencia, el *jerk* es nulo dentro de cada intervalo, pero no se encuentra definido como una función ordinaria en los instantes de transición.

Para ilustrar el perfil se utiliza la referencia correspondiente a la evaluación complementaria del escenario de rodilla:

$$\begin{aligned} \theta_{\text{ini}} &= 0 \text{ rad}, & \theta_{\text{fin}} &= \frac{7\pi}{9} \text{ rad}, \\ \Delta\theta &= \frac{7\pi}{9} \text{ rad}, & t_a &= 1{,}0 \text{ s}, \\ t_c &= 2{,}5 \text{ s}, & t_d &= 1{,}5 \text{ s}, \\ T &= 5{,}0 \text{ s}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Para esta parametrización, la velocidad de crucero y los coeficientes de aceleración y desaceleración corresponden a:

$$\begin{aligned} \omega_c &= 0{,}6516 \text{ rad/s}, \\ \alpha_a &= 0{,}6516 \text{ rad/s}^2, \\ \alpha_d &= 0{,}4344 \text{ rad/s}^2. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Debido a que $t_a \neq t_d$, las magnitudes de aceleración y desaceleración son diferentes, aunque ambas fases producen el cambio de velocidad requerido. La posición alcanza 18,667° al finalizar la fase de aceleración y 112° al concluir la fase de velocidad constante. Posteriormente, el sistema desacelera hasta alcanzar 140° con velocidad nula en $t = T$.

La Fig. 3.7 muestra la evolución de la posición, la velocidad y la aceleración correspondientes a esta parametrización. Las líneas verticales identifican los cambios entre las fases de aceleración, velocidad constante y desaceleración.

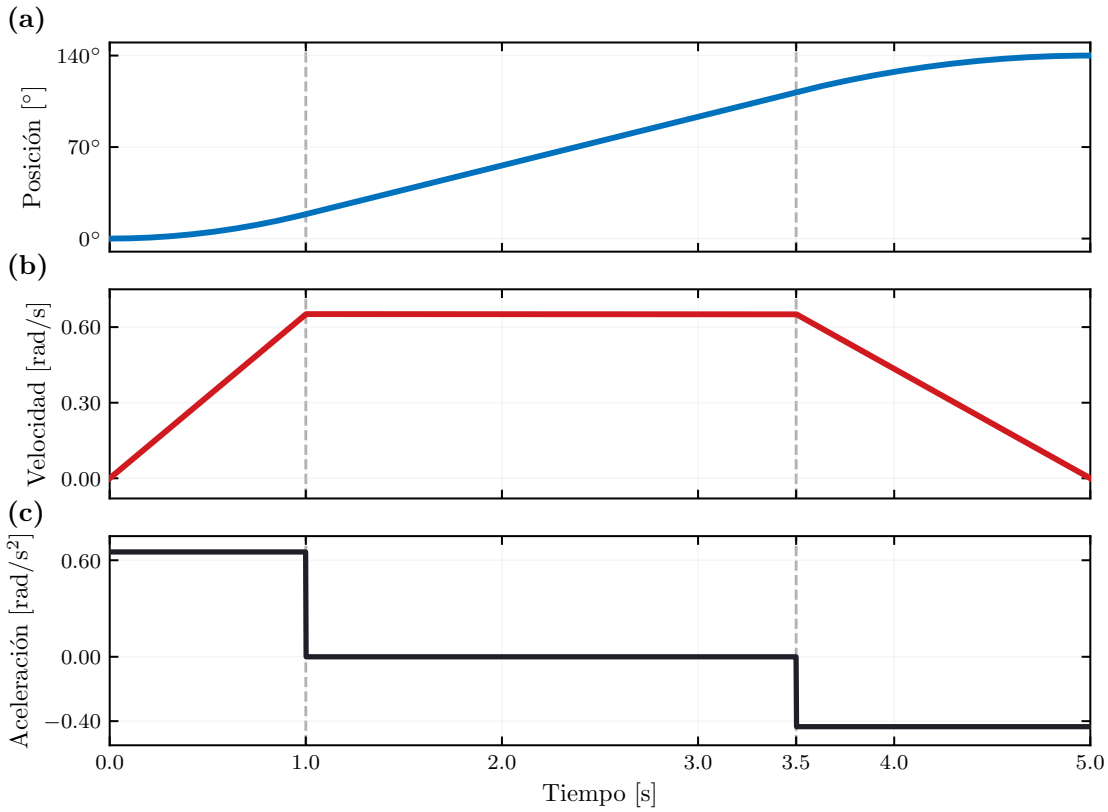


Figura 3.7: Perfil cinemático de la trayectoria trapezoidal en velocidad utilizada en el escenario de rodilla: (a) posición angular, (b) velocidad angular y (c) aceleración angular.

3.4.4. Perfiles de contraste cinemático

Además de las trayectorias principales, se consideran tres perfiles adicionales para contrastar el efecto de la suavidad cinemática sobre el seguimiento y la demanda del accionamiento: rampa suave, trayectoria triangular simétrica y trayectoria triangular asimétrica

de retorno rápido. Estos perfiles se utilizan como señales de prueba y no se proponen como referencias principales para tareas de rehabilitación.

Los tres perfiles describen periódicamente el intervalo angular comprendido entre:

$$\theta_{\text{mín}} = \theta_0 - A, \qquad \theta_{\text{máx}} = \theta_0 + A, \qquad \Delta\theta = \theta_{\text{máx}} - \theta_{\text{mín}} = 2A. \tag{3.42}$$

Para su formulación se define el tiempo normalizado periódico:

$$s(t) = \frac{t}{T} - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor, \qquad 0 \le s < 1, \tag{3.43}$$

donde T es el periodo completo del movimiento. Los parámetros comunes utilizados son:

$$\theta_0 = \frac{7\pi}{18}\ \text{rad}, \qquad A = \frac{7\pi}{18}\ \text{rad}, \qquad \theta_{\text{mín}} = 0\ \text{rad}, \qquad \theta_{\text{máx}} = \frac{7\pi}{9}\ \text{rad}, \qquad T = 5\ \text{s}. \tag{3.44}$$

3.4.4.a. Rampa suave

La rampa suave se construye concatenando dos interpolaciones polinómicas de quinto orden. Durante la primera mitad del periodo, la referencia se desplaza desde $\theta_{\text{mín}}$ hasta $\theta_{\text{máx}}$; durante la segunda, retorna hasta $\theta_{\text{mín}}$.

Definiendo:

$$\xi = \begin{cases} 2s, & 0 \le s < \dfrac{1}{2}, \\ 2\left(s - \dfrac{1}{2}\right), & \dfrac{1}{2} \le s < 1, \end{cases} \tag{3.45}$$

y utilizando el polinomio:

$$q(\xi) = 10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5, \tag{3.46}$$

la posición deseada queda dada por:

$$\theta_d(t) = \begin{cases} \theta_{\text{mín}} + \Delta\theta\, q(\xi), & 0 \le s < \dfrac{1}{2}, \\ \theta_{\text{máx}} - \Delta\theta\, q(\xi), & \dfrac{1}{2} \le s < 1. \end{cases} \tag{3.47}$$

Sus derivadas analíticas corresponden a:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_d(t) &= \begin{cases} \dfrac{2\Delta\theta}{T} q'(\xi), & 0 \le s < \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{2\Delta\theta}{T} q'(\xi), & \dfrac{1}{2} \le s < 1, \end{cases} \\ \ddot{\theta}_d(t) &= \begin{cases} \dfrac{4\Delta\theta}{T^2} q''(\xi), & 0 \le s < \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{4\Delta\theta}{T^2} q''(\xi), & \dfrac{1}{2} \le s < 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Este perfil mantiene continuidad de posición, velocidad y aceleración tanto en la inversión del movimiento como entre periodos sucesivos. Para la parametrización utilizada, la máxima magnitud de velocidad corresponde a:

$$\left|\dot{\theta}_d\right|_{\text{máx}} = 1{,}833\ \text{rad/s}. \tag{3.49}$$

3.4.4.b. Trayectoria triangular simétrica

La trayectoria triangular simétrica describe desplazamientos lineales alternados entre los extremos del intervalo angular:

$$\theta_d(t) = \begin{cases} \theta_{\text{mín}} + 2\Delta\theta\, s, & 0 \le s < \dfrac{1}{2}, \\ \theta_{\text{máx}} - 2\Delta\theta \left(s - \dfrac{1}{2} \right), & \dfrac{1}{2} \le s < 1. \end{cases} \tag{3.50}$$

La velocidad deseada es constante dentro de cada tramo:

$$\dot{\theta}_d(t) = \begin{cases} \dfrac{2\Delta\theta}{T}, & 0 \le s < \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{2\Delta\theta}{T}, & \dfrac{1}{2} \le s < 1. \end{cases} \tag{3.51}$$

Para los parámetros de (3.44), su magnitud es:

$$\left| \dot{\theta}_d \right| = 0{,}977 \text{ rad/s}. \tag{3.52}$$

Dentro de cada tramo lineal se cumple $\ddot{\theta}_d = 0$. Sin embargo, la velocidad cambia instantáneamente de signo en los puntos de inversión, por lo que la aceleración no se encuentra definida como una función ordinaria en dichos instantes.

3.4.4.c. Trayectoria triangular asimétrica de retorno rápido

La trayectoria triangular asimétrica distribuye de manera desigual el periodo entre los movimientos de avance y retorno. Definiendo ρ como la fracción del periodo asignada al desplazamiento desde $\theta_{\text{mín}}$ hasta $\theta_{\text{máx}}$, la posición deseada se expresa mediante:

$$\theta_d(t) = \begin{cases} \theta_{\text{mín}} + \Delta\theta \dfrac{s}{\rho}, & 0 \le s < \rho, \\ \theta_{\text{máx}} - \Delta\theta \dfrac{s - \rho}{1 - \rho}, & \rho \le s < 1. \end{cases} \tag{3.53}$$

La velocidad deseada es constante dentro de cada tramo y queda dada por:

$$\dot{\theta}_d(t) = \begin{cases} \dfrac{\Delta\theta}{\rho T}, & 0 \le s < \rho, \\ -\dfrac{\Delta\theta}{(1-\rho)T}, & \rho \le s < 1. \end{cases} \tag{3.54}$$

En la implementación se utiliza:

$$\rho = 0{,}85. \tag{3.55}$$

El avance utiliza 4,25 s, mientras que el retorno se realiza en 0,75 s. Las velocidades correspondientes son:

$$\dot{\theta}_{d,\text{avance}} = 0{,}575 \text{ rad/s}, \qquad \dot{\theta}_{d,\text{retorno}} = -3{,}258 \text{ rad/s}. \tag{3.56}$$

Dentro de cada tramo lineal se cumple $\ddot{\theta}_d = 0$. No obstante, en las uniones entre ambos tramos la velocidad cambia de manera discontinua, por lo que la aceleración no se encuentra definida como una función ordinaria en dichos instantes. En la implementación discreta se asigna $\ddot{\theta}_d = 0$ dentro de cada tramo y no se intenta representar numéricamente la componente impulsiva asociada a estas discontinuidades de velocidad. De este modo, se evita introducir en la compensación inercial del CTC un término cuya magnitud dependería directamente del periodo de muestreo.

La asimetría introducida mediante $\rho = 0{,}85$ concentra el retorno en solo el 15 % del periodo. En consecuencia, la magnitud de velocidad durante el retorno es considerablemente mayor que durante el avance y la mayor exigencia cinemática se concentra en las transiciones entre ambos tramos.

La Fig. 3.8 reúne las variables cinemáticas de los tres perfiles considerados. La rampa suave mantiene continuidad de posición, velocidad y aceleración, mientras que las trayectorias triangular simétrica y triangular asimétrica mantienen continuidad de posición, pero presentan cambios instantáneos de velocidad en sus puntos de inversión. En estos dos últimos casos, la aceleración nula representada corresponde únicamente al interior de cada tramo lineal y no a los instantes de transición.

3.5. Restricciones operacionales del esquema CTC–FOC

La evaluación del esquema CTC–FOC se realiza dentro de restricciones asociadas al movimiento articular, la capacidad mecánica de la transmisión, la corriente admisible del motor y la tensión disponible en el inversor. Estas restricciones delimitan la región en la cual las referencias de trayectoria pueden materializarse sin producir saturaciones sostenidas ni exceder los valores operacionales establecidos para el accionamiento.

Se distinguen límites operacionales y límites absolutos. Los primeros definen la región utilizada para ejecutar los casos de estudio, mientras que los segundos representan cotas que no deben superarse durante la operación del sistema. Los valores adoptados corresponden a criterios de ingeniería aplicados al modelo equivalente y no constituyen límites clínicos para un usuario específico.

3.5.1. Límites articulares y del error de seguimiento

Los movimientos de referencia se restringen a los intervalos angulares definidos para cada escenario articular:

$$\theta_{\text{mín}}^{(j)} \leq \theta_d(t) \leq \theta_{\text{máx}}^{(j)}, \tag{3.57}$$

donde el superíndice j identifica la articulación considerada. Los límites utilizados se resumen en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: Intervalos angulares utilizados en los escenarios articulares.

Escenario	$\boldsymbol{\theta}_{\textbf{mín}}$	$\boldsymbol{\theta}_{\textbf{máx}}$	**Sentido positivo**
Rodilla	0°	140°	Flexión
Codo	0°	150°	Flexión

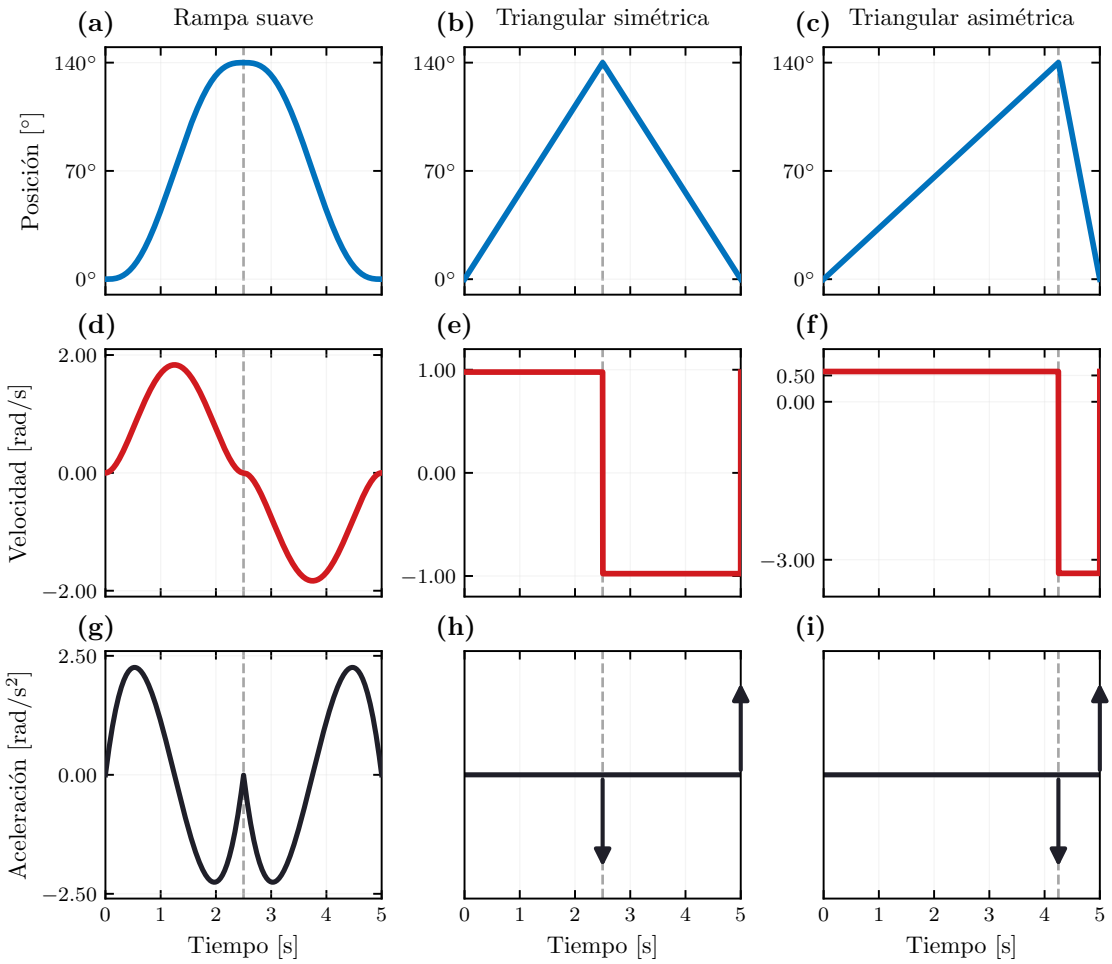


Figura 3.8: Perfiles de contraste cinemático utilizados en la evaluación: posición, velocidad y aceleración para (a,d,g) rampa suave, (b,e,h) trayectoria triangular simétrica y (c,f,i) trayectoria triangular asimétrica de retorno rápido.

Estos intervalos corresponden al dominio utilizado para parametrizar las referencias y no representan límites anatómicos universales. Asimismo, su cumplimiento no equivale por sí solo a la presencia de topes mecánicos ni de una función independiente de detención.

Los errores de posición y velocidad utilizados por el CTC se definen como:

$$e_\theta = \theta_d - \theta, \qquad e_{\dot\theta} = \dot\theta_d - \dot\theta. \tag{3.58}$$

Para evitar que desviaciones transitorias elevadas produzcan contribuciones proporcional y derivativa excesivas, estas señales se limitan mediante:

$$\begin{aligned} \bar e_\theta &= \mathrm{sat}_{[-\delta_{\theta,\mathrm{lím}},\,\delta_{\theta,\mathrm{lím}}]}\left(e_\theta\right), \\ \bar e_{\dot\theta} &= \mathrm{sat}_{[-\delta_{\dot\theta,\mathrm{lím}},\,\delta_{\dot\theta,\mathrm{lím}}]}\left(e_{\dot\theta}\right). \end{aligned} \tag{3.59}$$

En el modelo computacional se emplean:

$$\delta_{\theta,\mathrm{lím}} = 10^\circ = 0{,}1745 \text{ rad}, \qquad \delta_{\dot\theta,\mathrm{lím}} = 45^\circ/\mathrm{s} = 0{,}7854 \text{ rad/s}. \tag{3.60}$$

En la implementación, el término proporcional del CTC utiliza el error de posición limitado $\bar{e}_\theta$, mientras que el término derivativo utiliza el error de velocidad limitado $\bar{e}_{\dot{\theta}}$. La predicción de la variable integral se obtiene igualmente a partir de $\bar{e}_\theta$, de acuerdo con la discretización presentada en (2.82).

Cuando los errores reales superan las cotas definidas en (3.60), las contribuciones proporcional y derivativa dejan de aumentar con ellos. La limitación del error de posición también acota el valor incorporado en cada actualización de la integral, aunque no impide que esta continúe acumulándose si la desviación persiste.

Estas limitaciones modifican únicamente las señales utilizadas para calcular la acción de control. Su superación no genera por sí misma una alarma ni una detención automática del accionamiento. La saturación de la referencia de torque y el mecanismo anti-enrollamiento asociado a la acción integral se describen en la subsección 3.5.4.

3.5.2. Límites de corriente y torque

La referencia de corriente entregada al FOC se limita considerando conjuntamente sus componentes en los ejes d y q. Para ello, se define su magnitud como:

$$I_{\mathrm{ref,pu}} = \sqrt{\left(i^*_{d,\mathrm{pu}}\right)^2 + \left(i^*_{q,\mathrm{pu}}\right)^2}. \tag{3.61}$$

Cuando esta magnitud supera el límite seleccionado $I_{\mathrm{lím,pu}}$, ambas componentes se escalan mediante:

$$\begin{bmatrix} i^*_{d,\mathrm{lím,pu}} \\ i^*_{q,\mathrm{lím,pu}} \end{bmatrix} = \frac{I_{\mathrm{lím,pu}}}{I_{\mathrm{ref,pu}}} \begin{bmatrix} i^*_{d,\mathrm{pu}} \\ i^*_{q,\mathrm{pu}} \end{bmatrix}, \qquad I_{\mathrm{ref,pu}} > I_{\mathrm{lím,pu}}. \tag{3.62}$$

Este procedimiento limita la magnitud de la referencia sin modificar su dirección en el plano dq. En el modo CTC se establece $i^*_{d,\mathrm{pu}} = 0$, por lo que la restricción se reduce a un límite sobre $|i^*_{q,\mathrm{pu}}|$.

La base de corriente corresponde al valor *peak* de la corriente nominal:

$$I_b = \sqrt{2} I_{\mathrm{n,rms}} = \sqrt{2}\,(2{,}10\ \mathrm{A}) = 2{,}97\ \mathrm{A}. \tag{3.63}$$

En el modelo computacional se adopta un límite operacional de referencia de 1,5 pu y un límite absoluto de 2,0 pu:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{op}} &= 1{,}5\ \mathrm{pu} = 4{,}45\ \mathrm{A_{peak}}, \\ I_{\mathrm{abs}} &= 2{,}0\ \mathrm{pu} = 5{,}94\ \mathrm{A_{peak}}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

El segundo valor equivale a 4,20 $\mathrm{A_{rms}}$, correspondiente a la corriente máxima considerada para la máquina. El límite operacional se utiliza durante los casos de estudio, mientras que el límite absoluto constituye la cota superior de la referencia de corriente.

Bajo la condición $i^*_d = 0$, el torque electromagnético de referencia se calcula mediante:

$$T^*_m = k_T i^*_q = k_T I_b i^*_{q,\mathrm{pu}}, \tag{3.65}$$

donde $k_T = 1{,}6829$ Nm/A. En consecuencia, los límites de corriente anteriores corresponden aproximadamente a:

$$T_{m,\mathrm{op}} = 7{,}50 \text{ Nm}, \qquad T_{m,\mathrm{abs}} = 10{,}00 \text{ Nm}. \tag{3.66}$$

El torque desarrollado por el motor se refleja al eje articular de acuerdo con:

$$T_J = \eta N T_m. \tag{3.67}$$

Para los reductores helicoidales, la eficiencia mecánica satisface $0 < \eta \leq 1$. Sin embargo, el bloque *Ideal Gear* utilizado en PLECS modela una transmisión ideal, es decir, sin pérdidas mecánicas. En consecuencia, para el modelo computacional se adopta:

$$\eta_{\mathrm{sim}} = 1. \tag{3.68}$$

Para $N = 10{,}22$, la capacidad de torque operacional proyectada desde el motor hacia el eje de salida corresponde a:

$$T^{\mathrm{sim}}_{J,\mathrm{motor,op}} = \eta_{\mathrm{sim}}\, N\, T_{m,\mathrm{op}} = 1(10{,}22)(7{,}50) = 76{,}65 \text{ Nm}. \tag{3.69}$$

Este valor supera el torque máximo mecánico especificado en la placa del reductor. Por esta razón, la capacidad eléctrica del motor no determina por sí sola el límite admisible en el eje de salida. El límite mecánico máximo indicado para la transmisión corresponde a:

$$|T_J| \leq T_{\mathrm{red,max}} = 52 \text{ Nm}. \tag{3.70}$$

Dentro de esta cota mecánica se establecen límites particulares para cada escenario de evaluación, según se resume en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4: Límites de torque utilizados en los escenarios articulares.

Condición	**Límite de torque**	**Carácter del límite**
Escenario de rodilla	45 Nm	Evaluación
Escenario de codo	15 Nm	Evaluación
Transmisión	52 Nm	Máximo mecánico de placa

Por tanto, el límite efectivo para cada escenario queda determinado por:

$$T^{(j)}_{J,\mathrm{lím}} = \mathrm{mín}\left(T^{(j)}_{J,\mathrm{máx}}, T_{\mathrm{red,max}}, \eta_{\mathrm{sim}}\, N\, T_{m,\mathrm{op}}\right). \tag{3.71}$$

Con los valores adoptados, se obtiene:

$$T^{(\mathrm{rodilla})}_{J,\mathrm{lím}} = 45 \text{ Nm}, \qquad T^{(\mathrm{codo})}_{J,\mathrm{lím}} = 15 \text{ Nm}. \tag{3.72}$$

La saturación se aplica sobre la referencia de torque articular calculada por el controlador CTC, antes de convertirla en torque del motor y en la referencia de corriente:

$$T^{*}_{J,\mathrm{sat}} = \mathrm{sat}_{\left[-T^{(j)}_{J,\mathrm{lím}},\, T^{(j)}_{J,\mathrm{lím}}\right]}\left(T^{*}_{J,\mathrm{unsat}}\right). \tag{3.73}$$

Los valores de 45 Nm y 15 Nm corresponden a límites de diseño empleados para evaluar los escenarios considerados y no a límites terapéuticos validados. El tratamiento de la acción integral cuando la referencia de torque alcanza alguno de estos límites se presenta en la subsección 3.5.4.

3.5.3. Límite vectorial de tensión

Las tensiones comandadas en los ejes d y q se obtienen sumando, en cada eje, la salida del respectivo controlador de corriente y el término de desacoplo correspondiente:

$$v_{d,\mathrm{cmd}} = v_{d,\mathrm{PI}} + v_{d,\mathrm{ff}}, \qquad v_{q,\mathrm{cmd}} = v_{q,\mathrm{PI}} + v_{q,\mathrm{ff}}. \tag{3.74}$$

La magnitud del vector de tensión comandado se define como:

$$V_{\mathrm{cmd}} = \sqrt{v_{d,\mathrm{cmd}}^2 + v_{q,\mathrm{cmd}}^2}. \tag{3.75}$$

Aunque el hexágono formado por los vectores activos delimita la región de vectores de tensión sintetizables mediante SVPWM, en este trabajo se adopta un límite circular independiente de la orientación del vector. Este límite corresponde al radio de la circunferencia inscrita en el hexágono:

$$V_{\mathrm{lím}} = \frac{V_{\mathrm{DC}}}{\sqrt{3}}. \tag{3.76}$$

Esta elección garantiza que el vector de tensión permanezca dentro de la región sintetizable para cualquier orientación y permite implementar la saturación mediante un único factor de escalamiento aplicado simultáneamente a las componentes d y q. Alternativamente, podría aprovecharse la región comprendida entre la circunferencia inscrita y los límites del hexágono mediante una saturación dependiente del ángulo del vector, aumentando la tensión disponible en determinadas orientaciones a costa de una mayor complejidad de implementación.

El vector de tensión aplicado debe satisfacer la restricción:

$$v_{d,\mathrm{sat}}^2 + v_{q,\mathrm{sat}}^2 \leq V_{\mathrm{lím}}^2. \tag{3.77}$$

Geométricamente, esta condición implica que los valores admisibles en cada eje no son constantes ni independientes, sino que dependen de la tensión utilizada por el otro eje:

$$|v_d| \leq \sqrt{V_{\mathrm{lím}}^2 - v_q^2}, \qquad |v_q| \leq \sqrt{V_{\mathrm{lím}}^2 - v_d^2}. \tag{3.78}$$

Por esta razón, las componentes v_d y v_q no se saturan individualmente mediante límites rectangulares. Cuando $V_{\mathrm{cmd}} > V_{\mathrm{lím}}$, ambas componentes se escalan utilizando un mismo factor:

$$\kappa_v = \begin{cases} 1, & V_{\mathrm{cmd}} \leq V_{\mathrm{lím}}, \\ \dfrac{V_{\mathrm{lím}}}{V_{\mathrm{cmd}}}, & V_{\mathrm{cmd}} > V_{\mathrm{lím}}. \end{cases} \tag{3.79}$$

Las tensiones aplicadas a la transformación inversa quedan dadas por:

$$\begin{bmatrix} v_{d,\mathrm{sat}} \\ v_{q,\mathrm{sat}} \end{bmatrix} = \kappa_v \begin{bmatrix} v_{d,\mathrm{cmd}} \\ v_{q,\mathrm{cmd}} \end{bmatrix}. \tag{3.80}$$

Como ambas componentes se multiplican por el mismo factor, la saturación conserva la orientación del vector de tensión:

$$\operatorname{atan2}\left(v_{q,\mathrm{sat}}, v_{d,\mathrm{sat}}\right) = \operatorname{atan2}\left(v_{q,\mathrm{cmd}}, v_{d,\mathrm{cmd}}\right). \tag{3.81}$$

Un criterio diferente podría priorizar una de las componentes durante la saturación, modificando con ello la orientación del vector de tensión. En este trabajo no se establece prioridad entre los ejes d y q, por lo que se adopta el escalamiento común definido mediante κ_v.

La transformación inversa de Park conserva la magnitud del vector, por lo que:

$$\sqrt{v_\alpha^2 + v_\beta^2} = \sqrt{v_{d,\mathrm{sat}}^2 + v_{q,\mathrm{sat}}^2} \leq V_{\mathrm{lím}}. \tag{3.82}$$

En el modelo computacional se emplean:

$$V_{\mathrm{DC}} = 537{,}40\ \mathrm{V}, \qquad V_b = 262{,}91\ \mathrm{V_{peak}}. \tag{3.83}$$

Por lo tanto, el límite de tensión en unidades físicas y por unidad corresponde a:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{lím}} &= \frac{537{,}40}{\sqrt{3}} = 310{,}27\ \mathrm{V_{peak}}, \\ V_{\mathrm{lím,pu}} &= \frac{V_{\mathrm{lím}}}{V_b} = 1{,}18\ \mathrm{pu}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Con el límite circular adoptado, el índice de modulación definido respecto de $V_{\mathrm{lím}}$ satisface:

$$m_{\mathrm{SVPWM}} = \frac{\sqrt{v_\alpha^2 + v_\beta^2}}{V_{\mathrm{lím}}} \leq 1. \tag{3.85}$$

Cuando la saturación permanece activa, el inversor no puede sintetizar completamente la tensión comandada por el esquema de control. Esta condición genera un error de seguimiento en i_d e i_q, o incrementa el error existente, produciendo una diferencia entre el torque solicitado y el torque desarrollado.

3.5.4. Saturación, anti-enrollamiento y señalización de límites

3.5.4.a. Jerarquía de las saturaciones

Las restricciones desarrolladas anteriormente actúan en diferentes niveles del esquema CTC–FOC. La referencia de torque articular se limita a la salida del CTC; posteriormente, la referencia de corriente se restringe antes de ingresar a los controladores de corriente, y las tensiones comandadas se limitan antes de la transformación inversa y del SVPWM. Esta secuencia puede representarse mediante:

$$T_{J,\mathrm{unsat}}^* \longrightarrow T_{J,\mathrm{sat}}^* \longrightarrow T_m^* \longrightarrow i_q^* \longrightarrow \boldsymbol{i}_{dq,\mathrm{lím}}^* \longrightarrow \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{cmd}} \longrightarrow \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{sat}}. \tag{3.86}$$

La saturación limita el valor aplicado al subsistema siguiente, pero no modifica por sí misma los estados internos del controlador que generó la referencia. Cuando el valor calculado por un controlador con acción integral difiere del valor que puede aplicarse debido

a la saturación, el término integral puede continuar acumulándose mientras la actuación permanece limitada. Este fenómeno, conocido como enrollamiento, puede degradar la respuesta transitoria del sistema.

La limitación vectorial de corriente corresponde a una operación algebraica sobre la referencia y carece de dinámica propia. Por el contrario, el CTC y los controladores PI de corriente incorporan acciones integrales, por lo que requieren mecanismos anti-enrollamiento asociados a sus respectivas saturaciones.

3.5.4.b. Anti-enrollamiento del CTC

La limitación del error de posición definida en (3.59) acota el valor incorporado en cada actualización de la integral, pero no impide que esta continúe acumulándose cuando la saturación de torque permanece activa. Por esta razón, el CTC incorpora un mecanismo anti-enrollamiento por retrocálculo (*back-calculation*).

En primer lugar, se obtiene una estimación del estado integral mediante la aproximación trapezoidal:

$$e_{\mathrm{int,pred}}[k] = e_{\mathrm{int}}[k-1] + \frac{T_{s,\mathrm{CTC}}}{2}\left(\bar{e}_\theta[k] + \bar{e}_\theta[k-1]\right). \tag{3.87}$$

A partir de esta estimación, la ley CTC calcula la referencia de torque articular antes de aplicar la saturación:

$$\begin{aligned} T^*_{J,\mathrm{unsat}}[k] = {} & M_{\mathrm{tot}}\ddot{\theta}_d[k] + k_d\bar{e}_{\dot{\theta}}[k] + k_p\bar{e}_\theta[k] + k_i e_{\mathrm{int,pred}}[k] \\ & + g(\theta[k]) + f(\dot{\theta}[k]). \end{aligned} \tag{3.88}$$

Esta referencia se limita de acuerdo con (3.73). La discrepancia introducida por la saturación se define como:

$$\Delta T_{\mathrm{sat}}[k] = T^*_{J,\mathrm{sat}}[k] - T^*_{J,\mathrm{unsat}}[k]. \tag{3.89}$$

A partir de esta diferencia, el estado integral se corrige mediante:

$$e_{\mathrm{int}}[k] = e_{\mathrm{int,pred}}[k] + \frac{\alpha_{\mathrm{aw}}}{k_i}\Delta T_{\mathrm{sat}}[k], \qquad \alpha_{\mathrm{aw}} = \frac{T_{s,\mathrm{CTC}}}{\tau_{\mathrm{aw}}}, \tag{3.90}$$

donde $\tau_{\mathrm{aw}} > 0$ corresponde a la constante de tiempo del mecanismo anti-enrollamiento y k_i es la ganancia integral del CTC.

El esquema discreto del mecanismo anti-enrollamiento descrito se muestra en la Fig. 3.9.

Cuando no existe saturación, $T^*_{J,\mathrm{sat}}[k] = T^*_{J,\mathrm{unsat}}[k]$, por lo que $\Delta T_{\mathrm{sat}}[k] = 0$ y el estado integral evoluciona únicamente de acuerdo con la integración trapezoidal de (3.87). En cambio, cuando la referencia de torque calculada excede el límite establecido, el término de retrocálculo modifica el estado integral de acuerdo con la diferencia entre la referencia calculada y la referencia limitada por la saturación.

El objetivo de esta corrección no es llevar el estado integral a cero ni reducir necesariamente su magnitud. El retrocálculo modifica progresivamente la memoria integral de

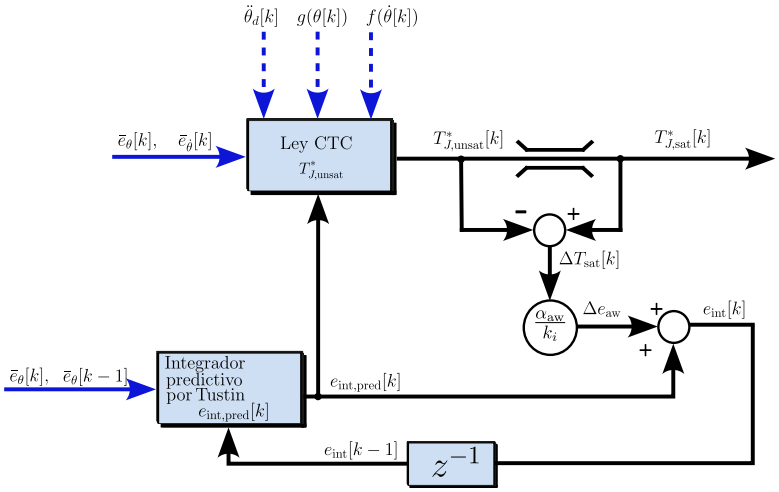


Figura 3.9: Esquema discreto del mecanismo anti-enrollamiento por retrocálculo implementado en el CTC.

acuerdo con la discrepancia introducida por la saturación, permitiendo que evolucione hacia un valor consistente con el punto de operación y con el límite de torque impuesto. De esta forma, se evita que el estado continúe acumulándose como si la referencia de torque no estuviese limitada.

Una alternativa consiste en congelar el estado integral mientras la saturación permanece activa. Sin embargo, dicho criterio únicamente detiene su actualización y no modifica el valor previamente acumulado. En el esquema adoptado, la diferencia $T^*_{J,\text{sat}} - T^*_{J,\text{unsat}}$ proporciona información sobre la magnitud y el sentido de la saturación, permitiendo corregir progresivamente el estado almacenado y favorecer la recuperación del controlador cuando desaparece la limitación.

El valor corregido $e_{\text{int}}[k]$ se almacena como estado del controlador y se utiliza en la siguiente ejecución del CTC. Por lo tanto, la corrección por retrocálculo actualiza la memoria integral sin recalcular la referencia de torque dentro de la misma muestra.

Para las evaluaciones en PLECS se emplea:

$$\tau_{\text{aw}} = 10 \text{ ms}. \tag{3.91}$$

Dado que en el modelo de simulación $T^{\text{sim}}_{s,\text{CTC}} = 100\ \mu\text{s}$, se obtiene:

$$\alpha^{\text{sim}}_{\text{aw}} = \frac{T^{\text{sim}}_{s,\text{CTC}}}{\tau_{\text{aw}}} = 0{,}01. \tag{3.92}$$

Por tanto, la corrección asociada a la saturación se incorpora progresivamente en ejecuciones sucesivas del controlador. La constante τ_{aw} corresponde a un parámetro de implementación, cuya adecuación se evalúa mediante la evolución del estado integral y la recuperación del controlador al abandonar la saturación.

3.5.4.c. Anti-enrollamiento de los controladores de corriente

Los controladores PI de corriente utilizan una estructura anti-enrollamiento diferente de la empleada por el CTC. Para cada eje $x \in \{d, q\}$, la realización discreta utiliza una

acción equivalente asociada a la tensión saturada como entrada de la estructura $C_x^{-1}(z) - c_{\infty,x}^{-1}$, encargada de actualizar el estado interno del controlador.

En el FOC implementado, la salida del PI no se aplica directamente al inversor. Antes de la saturación se incorpora el término de prealimentación correspondiente, de manera que:

$$\boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{cmd}}[k] = \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{PI}}[k] + \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{ff}}[k]. \tag{3.93}$$

La limitación de tensión se aplica sobre este vector total, puesto que corresponde a la referencia que posteriormente debe sintetizar el inversor. De acuerdo con (3.80), se obtiene:

$$\boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{sat}}[k] = \kappa_v[k]\, \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{cmd}}[k]. \tag{3.94}$$

La discrepancia introducida por esta saturación se define como:

$$\Delta\boldsymbol{v}_{\mathrm{sat}}[k] = \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{sat}}[k] - \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{cmd}}[k]. \tag{3.95}$$

A partir de esta diferencia se determina la acción PI equivalente que se realimenta a la estructura anti-enrollamiento:

$$\boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{PI,eq}}[k] = \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{PI}}[k] + \Delta\boldsymbol{v}_{\mathrm{sat}}[k]. \tag{3.96}$$

Sustituyendo (3.93) y (3.95), se obtiene de forma equivalente:

$$\boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{PI,eq}}[k] = \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{sat}}[k] - \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{ff}}[k]. \tag{3.97}$$

Por componentes:

$$\begin{aligned} v_{d,\mathrm{PI,eq}}[k] &= v_{d,\mathrm{sat}}[k] - v_{d,\mathrm{ff}}[k], \\ v_{q,\mathrm{PI,eq}}[k] &= v_{q,\mathrm{sat}}[k] - v_{q,\mathrm{ff}}[k]. \end{aligned} \tag{3.98}$$

La estructura resultante se ilustra en la Fig. 3.10.

Los términos de prealimentación permanecen fuera de la dinámica interna de los controladores PI. Su presencia en (3.97) se debe únicamente a la reconstrucción, a partir del vector total saturado, de la acción PI equivalente compatible con dicha limitación. Por tanto, el término de prealimentación no se incorpora como estado ni como señal independiente de realimentación del mecanismo anti-enrollamiento.

En ausencia de saturación, $\boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{sat}} = \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{cmd}}$, por lo que $\Delta\boldsymbol{v}_{\mathrm{sat}} = \mathbf{0}$ y:

$$\boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{PI,eq}} = \boldsymbol{v}_{dq,\mathrm{PI}}. \tag{3.99}$$

De esta forma, cuando el limitador no actúa, la señal realimentada coincide con la salida del PI y se recupera la realización nominal del controlador $C_x(z)$. Cuando existe saturación, en cambio, la discrepancia introducida por el limitador modifica la acción equivalente utilizada para actualizar el estado interno, evitando que este evolucione de acuerdo con una tensión que no puede ser sintetizada por el inversor.

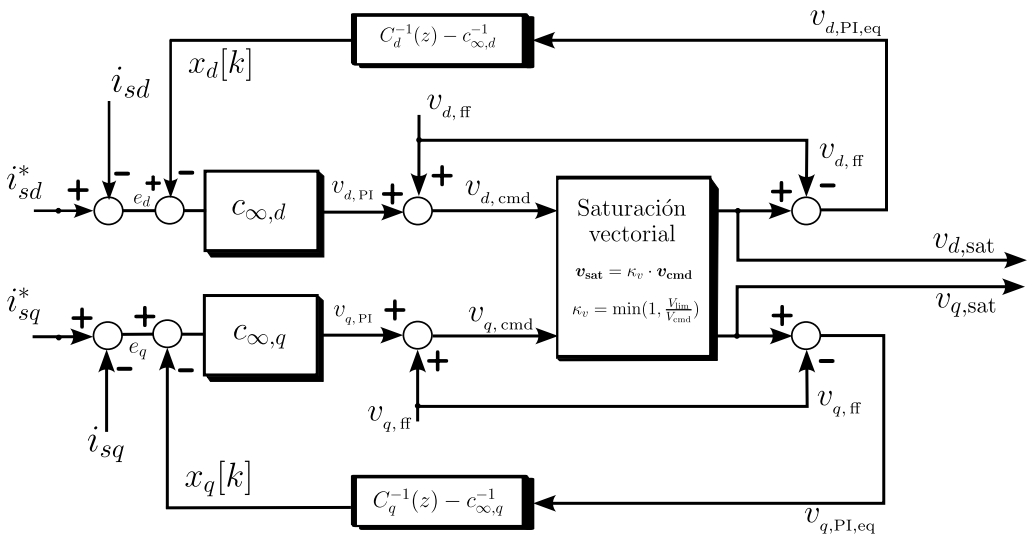


Figura 3.10: Estructura discreta del anti-enrollamiento de los controladores PI de corriente con prealimentación y saturación vectorial de tensión. La saturación actúa sobre el vector total comandado, mientras que la acción PI equivalente se realimenta a la estructura interna de cada controlador.

3.5.4.d. Señalización de límites

La implementación registra mediante indicadores lógicos la activación de los límites de torque, corriente y tensión. El indicador de torque señala que alguno de los límites aplicados a la referencia de torque ha modificado su valor; el indicador de corriente operacional registra el escalamiento del vector de referencia cuando su magnitud supera I_{op}; y el indicador de tensión se activa cuando $V_{\mathrm{cmd}} > V_{\mathrm{lím}}$.

Estos indicadores permiten identificar los intervalos en los cuales el accionamiento opera bajo alguna saturación y se utilizan posteriormente para interpretar los resultados de seguimiento y el esfuerzo requerido.

Por otra parte, se supervisa también el límite absoluto de corriente I_{abs}. En el modelo computacional, el indicador correspondiente se activa tanto cuando una referencia alcanza este límite como cuando la magnitud de la corriente medida lo supera. Este último caso debe distinguirse de una saturación de referencia, puesto que corresponde a la superación de una cota por una variable física medida.

En las simulaciones consideradas, estos indicadores se utilizan con fines de diagnóstico y su activación no ejecuta una acción de desconexión. En una implementación física, la superación de límites absolutos definidos sobre variables medidas puede incorporarse a una capa independiente de protección, encargada de ejecutar la acción segura correspondiente.

De igual forma, los indicadores anteriores no se interpretan como detectores de una pérdida de interacción entre el mecanismo y una extremidad. La detección de esta u otras condiciones anómalas y la definición de una estrategia de parada asociada requieren funciones de protección específicas, cuya implementación y validación se encuentran fuera del alcance de los escenarios de simulación considerados en este trabajo.

3.6. Metodología y métricas de evaluación

La evaluación del esquema CTC–FOC se realiza sobre el modelo equivalente de un grado de libertad definido para cada escenario articular. En cada caso se establece una trayectoria de referencia y se analizan conjuntamente la precisión de seguimiento, el esfuerzo requerido por el accionamiento y la suavidad cinemática de la respuesta.

En los casos destinados a evaluar rechazo de perturbaciones, se aplica un torque externo $T_{\text{ext}}(t)$ en el lado articular de la carga. Su magnitud, signo, instante de aplicación y duración se especifican individualmente para cada ensayo. Esta señal representa una carga externa y no forma parte del modelo utilizado por el CTC para calcular la acción de control.

Las métricas se calculan sobre una ventana de evaluación definida mediante:

$$\mathcal{K}_{\text{eval}} = \{k_{\text{a}}, k_{\text{a}}+1, \ldots, k_{\text{b}}\}, \qquad N_{\text{eval}} = k_{\text{b}} - k_{\text{a}} + 1, \tag{3.100}$$

donde k_{a} y k_{b} corresponden a las muestras inicial y final del intervalo analizado, respectivamente.

El instante asociado a cada muestra queda dado por: $t_k = kT_{s,\text{eval}}$, donde $T_{s,\text{eval}}$ es el periodo de las señales utilizadas durante el posprocesamiento. Este valor no debe confundirse necesariamente con el periodo del CTC o del FOC, puesto que puede corresponder al periodo de almacenamiento de las señales o de los búferes de captura.

Para las trayectorias periódicas, la ventana debe contener un número entero de ciclos. En los movimientos de punto a punto, las métricas correspondientes al intervalo de movimiento y a la fase posterior de mantenimiento se calculan de manera separada cuando ambas etapas forman parte del ensayo. De esta manera, la incorporación de intervalos prolongados de reposo no reduce artificialmente los indicadores RMS.

Todas las comparaciones entre perfiles se realizan utilizando el mismo periodo de evaluación y el mismo procesamiento de las señales. Si se aplica algún filtrado durante el posprocesamiento, su estructura y sus parámetros deben mantenerse constantes para todos los casos comparados.

3.6.1. Métricas de seguimiento

Los errores de posición y velocidad articular se definen como:

$$\begin{aligned} e_\theta[k] &= \theta_d[k] - \theta[k], \\ e_{\dot\theta}[k] &= \dot\theta_d[k] - \dot\theta[k]. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Como indicadores globales de seguimiento se utilizan los errores cuadráticos medios de posición y velocidad:

$$\begin{aligned} \text{RMSE}_\theta &= \sqrt{\frac{1}{N_{\text{eval}}} \sum_{k\in\mathcal{K}_{\text{eval}}} e_\theta^2[k]}, \\ \text{RMSE}_{\dot\theta} &= \sqrt{\frac{1}{N_{\text{eval}}} \sum_{k\in\mathcal{K}_{\text{eval}}} e_{\dot\theta}^2[k]}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

El RMSE incorpora tanto las variaciones del error alrededor de cero como un posible sesgo permanente de seguimiento. Por esta razón, a diferencia de la desviación estándar, no elimina la contribución asociada al valor medio de la señal.

De manera complementaria, se calculan los máximos absolutos de los errores:

$$\begin{aligned} e_{\theta,\mathrm{pk}} &= \max_{k\in\mathcal{K}_{\mathrm{eval}}} |e_\theta[k]|\,, \\ e_{\dot\theta,\mathrm{pk}} &= \max_{k\in\mathcal{K}_{\mathrm{eval}}} \left|e_{\dot\theta}[k]\right|. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Mientras que los indicadores RMSE representan el desempeño acumulado durante el intervalo de evaluación, los valores máximos permiten identificar las mayores desviaciones puntuales.

Las métricas angulares se calculan internamente en radianes. Cuando los resultados se presentan en grados, se aplica la conversión correspondiente después de calcular cada indicador.

3.6.2. Métricas de esfuerzo del accionamiento

El esfuerzo mecánico se caracteriza mediante el torque articular estimado $T_{J,\mathrm{est}}[k]$, obtenido a partir del torque electromagnético desarrollado por el motor y reflejado hacia el eje articular mediante la transmisión. Este valor corresponde al torque asociado a la corriente medida, después de las limitaciones del accionamiento, y no a la referencia de torque no saturada calculada inicialmente por el CTC.

El máximo absoluto y el valor RMS del torque articular estimado se definen como:

$$\begin{aligned} T_{J,\mathrm{pk}} &= \max_{k\in\mathcal{K}_{\mathrm{eval}}} |T_{J,\mathrm{est}}[k]|\,, \\ T_{J,\mathrm{RMS}} &= \sqrt{\frac{1}{N_{\mathrm{eval}}} \sum_{k\in\mathcal{K}_{\mathrm{eval}}} T_{J,\mathrm{est}}^2[k]}. \end{aligned} \tag{3.104}$$

El primer indicador caracteriza la mayor exigencia instantánea, mientras que el segundo representa el nivel global de demanda mecánica durante la ventana analizada.

Para evaluar el esfuerzo eléctrico se utiliza la magnitud de la corriente medida en el plano dq:

$$I_{dq,\mathrm{pu}}[k] = \sqrt{i_{d,\mathrm{pu}}^2[k] + i_{q,\mathrm{pu}}^2[k]}, \qquad I_{dq}[k] = I_b I_{dq,\mathrm{pu}}[k]. \tag{3.105}$$

Sus valores máximo y RMS corresponden a:

$$\begin{aligned} I_{dq,\mathrm{pk}} &= \max_{k\in\mathcal{K}_{\mathrm{eval}}} I_{dq}[k], \\ I_{dq,\mathrm{RMS}} &= \sqrt{\frac{1}{N_{\mathrm{eval}}} \sum_{k\in\mathcal{K}_{\mathrm{eval}}} I_{dq}^2[k]}. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Bajo la estrategia adoptada, con $i_d^* = 0$, la magnitud de corriente está dominada por la componente i_q, directamente asociada a la producción de torque electromagnético. No obstante, el uso de I_{dq} permite incorporar también cualquier desviación de la corriente medida en el eje d.

3.6.3. Métricas de suavidad cinemática

La suavidad cinemática se caracteriza mediante el *jerk* articular, definido como la derivada temporal de la aceleración. Para la respuesta obtenida en forma discreta se utiliza la aproximación:

$$j[k] = \frac{\ddot{\theta}[k] - \ddot{\theta}[k-1]}{T_{s,\mathrm{eval}}}, \qquad k \in \mathcal{K}_j, \tag{3.107}$$

donde:

$$\mathcal{K}_j = \{k_\mathrm{a} + 1, \ldots, k_\mathrm{b}\}, \qquad N_j = N_\mathrm{eval} - 1. \tag{3.108}$$

A partir de esta señal se calculan su valor RMS y su máxima magnitud:

$$\begin{aligned} j_\mathrm{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{N_j} \sum_{k \in \mathcal{K}_j} j^2[k]}, \\ j_\mathrm{pk} &= \max_{k \in \mathcal{K}_j} |j[k]|. \end{aligned} \tag{3.109}$$

Debido a que el cálculo del *jerk* implica una diferenciación adicional, esta métrica presenta una sensibilidad elevada al ruido, al periodo de evaluación y al procesamiento aplicado sobre la aceleración. Por esta razón, solo deben compararse valores obtenidos con el mismo periodo de muestreo y mediante el mismo procedimiento de estimación.

En las trayectorias senoidal, de mínimo *jerk* y de rampa suave, las referencias cinemáticas permiten obtener un *jerk* finito dentro de sus intervalos de definición. En cambio, el perfil trapezoidal en velocidad presenta cambios abruptos de aceleración, mientras que las trayectorias triangulares simétrica y asimétrica de retorno rápido presentan discontinuidades de velocidad. En estos instantes, el *jerk* ideal de la referencia no se encuentra definido como una función ordinaria.

Para los perfiles discontinuos no se interpreta el *jerk* RMS discreto de la referencia como una magnitud física independiente del muestreo. En estos casos, el valor calculado sobre la respuesta se utiliza únicamente como un índice numérico de brusquedad bajo un periodo de evaluación y un procesamiento comunes.

Las métricas anteriores se interpretan de manera conjunta. Los errores de seguimiento caracterizan la fidelidad cinemática; las métricas de torque y corriente cuantifican la exigencia mecánica y eléctrica del accionamiento; y las métricas de *jerk* permiten comparar la regularidad temporal de las respuestas. Estos resultados caracterizan el desempeño del modelo y del controlador, pero no constituyen por sí mismos una validación de seguridad o comodidad clínica.

Capítulo 4

Simulación computacional

En este capítulo se presenta el modelo computacional del accionamiento eléctrico y del esquema de control propuesto, desarrollado en el entorno de PLECS. El modelo integra la máquina sincrónica de imanes permanentes, el inversor trifásico de dos niveles, el modulador SVPWM y los algoritmos discretos asociados al esquema CTC–FOC.

En primer lugar, se establecen los parámetros eléctricos y mecánicos utilizados para representar la PMSM. Posteriormente, se verifica de manera independiente la operación del inversor y del modulador SVPWM mediante una carga trifásica equilibrada. Una vez comprobada la etapa de conversión, se incorpora la máquina y se evalúa el desempeño del lazo interno de corriente.

Finalmente, el modelo completo se utiliza para evaluar los escenarios articulares definidos en el Capítulo 3. Primero se analizan las condiciones nominales y las variaciones de carga correspondientes a rodilla y codo. Posteriormente, los resultados principales se reúnen en una síntesis comparativa. El capítulo concluye con evaluaciones complementarias basadas en perfiles de distinta regularidad cinemática, destinadas a estudiar la influencia de la referencia sobre el seguimiento y el esfuerzo del accionamiento.

4.1. Parametrización y validación del modelo de la PMSM

La primera etapa del estudio consiste en garantizar que el modelo computacional del motor utilizado en las simulaciones represente adecuadamente la máquina real. Para ello, se efectúan pruebas de caracterización en laboratorio siguiendo las recomendaciones de la *IEEE Std 1812-2023* para ensayos de máquinas PMSM [31].

Los parámetros presentados en la Tabla 4.1 constituyen la base del modelo implementado en el entorno de simulación. De este modo, el modelo computacional incorpora tanto la información proporcionada por el fabricante como los valores validados experimentalmente, garantizando una representación consistente de la máquina real. Para el análisis de las variables eléctricas y mecánicas se adopta una normalización en sistema por unidad. Las bases empleadas se presentan en la Tabla 4.2.

Tabla 4.1: Parámetros de la PMSM.

Parámetro	**Notación**	**Valor**	**Unidad**
Tensión nominal	V_n	322	V
Corriente nominal	I_n	2,10	A
Potencia nominal	P_n	1,10	kW
Factor de potencia	FP_n	0,93	–
Frecuencia nominal	f_n	140	Hz
Velocidad nominal	n_n	2100	rpm
Número de pares de polos	p	4	–
Momento de inercia	J	0,00090	$\mathrm{kg\,m^2}$
Resistencia de estator	R_s	1,66	Ω
Inductancia eje directo	L_d	25,2	mH
Inductancia eje cuadratura	L_q	45,7	mH

Tabla 4.2: Bases empleadas para la normalización en sistema por unidad.

Magnitud base	**Notación**	**Valor**	**Unidad**
Tensión	V_b	262,91	V
Corriente	I_b	2,97	A
Frecuencia angular	ω_b	879,65	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$
Impedancia	Z_b	88,53	Ω
Inductancia	L_b	100,64	mH
Enlace de flujo	Ψ_b	0,29	Wb
Potencia	S_b	1,17	kV A
Momento	T_b	5,32	N m

4.2. Modelo del accionamiento implementado en PLECS

La simulación computacional se implementa mediante la conexión de una máquina sincrónica de imanes permanentes a un inversor VSI trifásico de dos niveles. El inversor se alimenta desde una fuente de tensión continua ideal, lo que permite centrar el análisis en el comportamiento del accionamiento eléctrico y de la estrategia de control.

La utilización de una fuente DC ideal se justifica debido a que el objetivo principal del presente trabajo es analizar el desempeño del control vectorial del PMSM bajo consignas variables de torque. En un sistema real, el enlace de continua se estabiliza mediante condensadores, cuya función es atenuar las fluctuaciones de tensión y suministrar o absorber energía durante condiciones transitorias. Sin embargo, la dinámica propia del enlace DC se considera fuera del alcance de este análisis, ya que el enfoque se centra en la respuesta del motor y del sistema de control.

De esta manera, la simulación se concentra en los elementos fundamentales del sistema: la estrategia de modulación del inversor, la regulación de corrientes en el marco dq, la dinámica electromecánica del motor y la interacción con el controlador de nivel superior.

4.2.1. Estructura general del modelo

La Fig. 4.1 muestra el diagrama funcional simplificado del accionamiento. El modelo está compuesto por una fuente continua, un inversor VSI de dos niveles, la máquina PMSM y un bloque de control programado en *C-Script*, el cual representa la unidad de procesamiento digital del sistema.

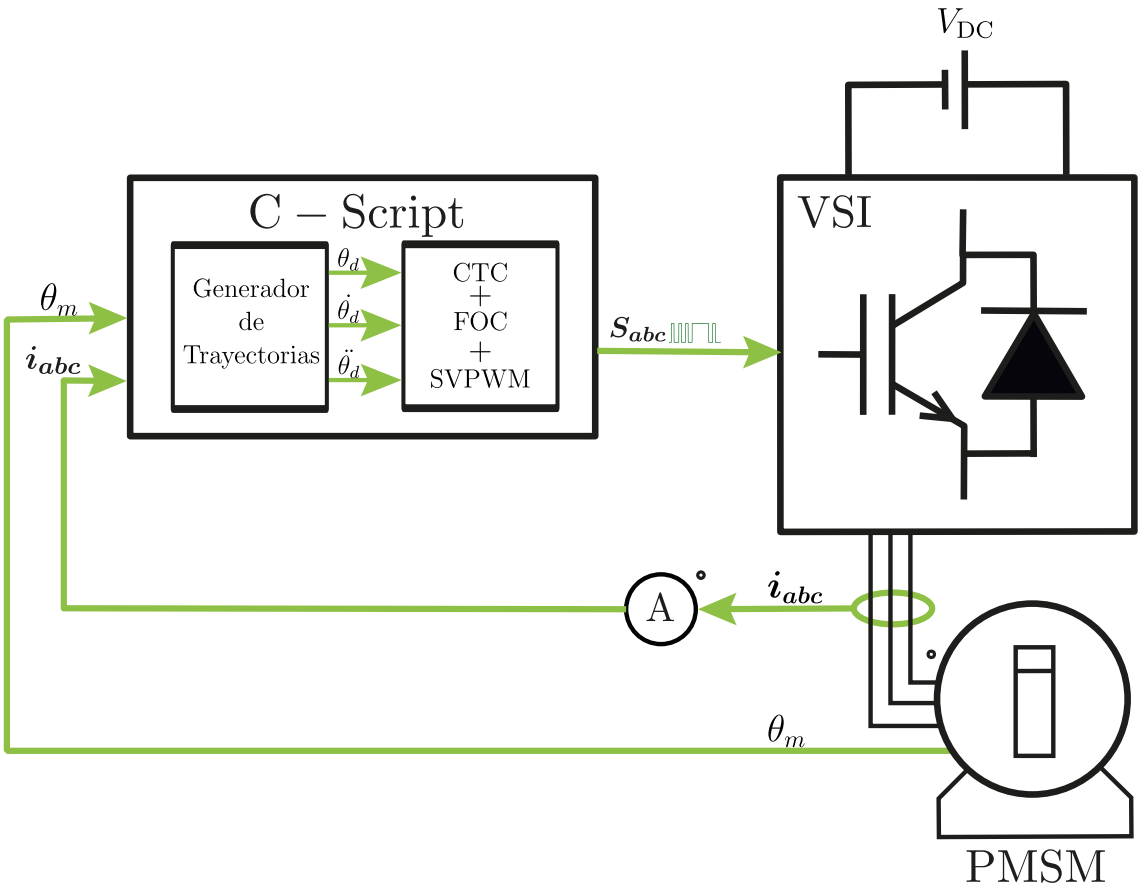


Figura 4.1: Diagrama funcional simplificado del accionamiento implementado en PLECS.

El bloque *C-Script* recibe las corrientes trifásicas del estator $\boldsymbol{i}_{abc}$ y la posición mecánica del rotor θ_m. A partir de esta última se determina el ángulo eléctrico utilizado por las transformaciones del FOC y, considerando la relación de transmisión, la posición articular realimentada.

El generador de trayectoria proporciona las referencias compatibles θ_d, $\dot{\theta}_d$ y $\ddot{\theta}_d$. Con estas señales y las variables mecánicas realimentadas, el CTC calcula T_J^*, que se convierte en la referencia i_q^*. Finalmente, el FOC y el modulador SVPWM generan las señales de conmutación $\boldsymbol{S}_{abc}$ aplicadas al inversor.

4.2.2. Verificación funcional del inversor y del modulador SVPWM

Antes de incorporar la máquina PMSM al modelo, se realizó una verificación funcional de la etapa de potencia y de la estrategia de modulación SVPWM programada en el bloque *C-Script*. Para ello, se conectó al inversor una carga trifásica RL equilibrada, compuesta por una resistencia de 16 Ω y una inductancia de 2,451 mH por fase.

Estos valores corresponden a los componentes disponibles en el laboratorio para la verificación experimental posterior, por lo que se utilizaron también en el modelo computacional. La carga presenta una constante de tiempo:

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R} = \frac{2{,}451\ \text{mH}}{16\ \Omega} = 153{,}2\ \mu\text{s}. \tag{4.1}$$

Esta prueba permitió aislar el comportamiento del modulador respecto de la dinámica propia de la máquina eléctrica, verificando de forma independiente la generación de las señales de conmutación, la secuencia de vectores espaciales aplicada y la síntesis de las tensiones trifásicas de salida.

La estrategia de modulación se implementó con una frecuencia de conmutación de 10 kHz. Por lo tanto, el período de conmutación y de actualización del modulador fue de 0,1 ms, calculado como $T_{\text{sw}} = 1/f_{\text{sw}}$. Este período se utilizó posteriormente como base temporal para la discretización del lazo interno de corriente.

La Fig. 4.2 muestra una ventana temporal representativa del proceso de modulación, en la que se observa la secuencia de vectores espaciales aplicada por el algoritmo, junto con los estados de conmutación superiores de cada fase. La correspondencia entre sectores, vectores activos y estados de conmutación permite verificar la correcta operación lógica del SVPWM implementado.

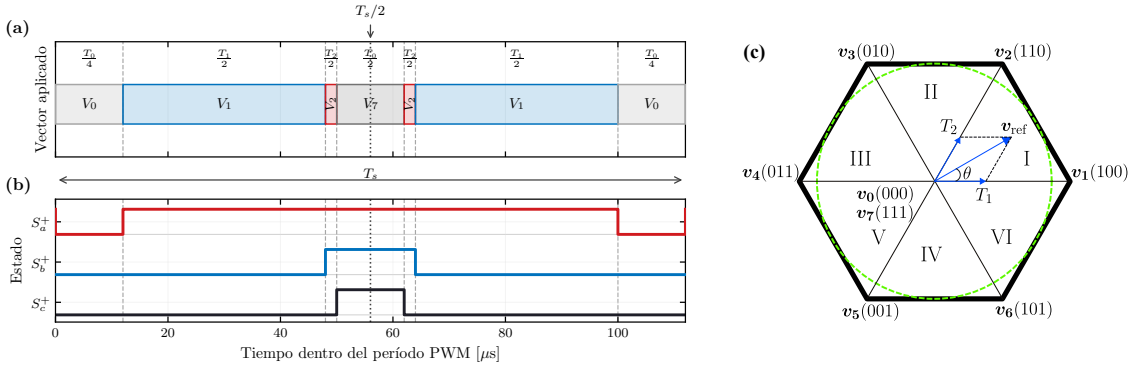


Figura 4.2: Verificación de la secuencia simétrica de conmutación SVPWM en el sector I. (a) Vectores espaciales aplicados durante un período PWM; (b) estados de los interruptores superiores S_a^+, S_b^+ y S_c^+; (c) hexágono de vectores espaciales como referencia para la ubicación del sector I.

Para esta verificación se empleó una tensión de enlace continuo de $V_{\text{DC}} = 380\sqrt{2}$ V y una referencia trifásica equilibrada de 50 Hz. El vector de tensión se definió en el marco giratorio mediante:

$$v_d^* = 30\ \text{V}, \qquad v_q^* = 0\ \text{V}. \tag{4.2}$$

Como la prueba se realizó sin incorporar la PMSM, el ángulo utilizado para generar las referencias trifásicas fue producido internamente por el algoritmo de modulación.

La amplitud de 30 V se seleccionó para realizar la verificación con una corriente reducida sobre la carga RL. A 50 Hz, la magnitud de su impedancia es:

$$|Z_{RL}| = \sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2} = 16{,}02\ \Omega, \tag{4.3}$$

por lo que la amplitud esperada de la componente fundamental de corriente es aproximadamente:

$$\widehat{I}_{a,1} = \frac{30}{16{,}02} = 1{,}873\ \text{A}. \tag{4.4}$$

Para la tensión de enlace utilizada, esta referencia corresponde a un índice de modulación:

$$m_{\text{SVPWM}} = \frac{\sqrt{(v_d^*)^2 + (v_q^*)^2}}{V_{\text{DC}}/\sqrt{3}} = 0{,}0967. \tag{4.5}$$

Esta prueba se realizó considerando una conmutación ideal del inversor, sin incorporar tiempo muerto ni otras no idealidades de los semiconductores. Por tanto, su objetivo es verificar la operación funcional del algoritmo SVPWM, la secuencia de conmutación y los niveles de tensión sintetizados. Debido al bajo índice de modulación utilizado, los efectos asociados al tiempo muerto podrían adquirir una mayor importancia relativa en una implementación física.

La Fig. 4.3 muestra los niveles de tensión obtenidos sobre la carga RL. La tensión de polo normalizada toma los valores 0 y 1, la tensión de línea toma los valores -1, 0 y 1, mientras que la tensión de fase presenta los niveles $-2/3$, $-1/3$, 0, $1/3$ y $2/3$.

La corriente de fase i_a se presenta en unidades físicas y contiene el rizado de conmutación superpuesto a su componente fundamental de 50 Hz. La amplitud obtenida para esta componente es $\widehat{I}_{a,1} = 1{,}873$ A, consistente con el valor estimado previamente a partir de la impedancia de la carga. En conjunto, estos resultados verifican la generación de los niveles de tensión esperados y la operación funcional del algoritmo SVPWM dentro del modelo ideal de conmutación considerado.

4.2.3. Calibración del lazo de corriente

Una vez verificada la operación del inversor y del modulador SVPWM, se incorporó la máquina PMSM al modelo y se procedió a la sintonía del lazo interno de corriente en los ejes d y q. Esta etapa cumple un doble propósito: por una parte, permite ajustar los controladores PI de corriente de acuerdo con la dinámica del accionamiento; por otra, verifica funcionalmente la correcta integración entre la máquina, el inversor y el algoritmo de control implementado en el bloque *C-Script*.

La estructura de control de corriente es análoga para ambos ejes y se implementa mediante controladores PI independientes. Sin embargo, debido a la diferencia entre las inductancias L_d y L_q, propia de la naturaleza saliente del rotor, los parámetros del controlador deben ajustarse de forma específica para cada canal.

4.2.3.a. Modelo discreto por canal

En la Fig. 4.4 se presenta el diagrama de bloques del lazo de corriente, donde se aprecia el acoplamiento existente entre ambos ejes. Para el diseño de los controladores, se

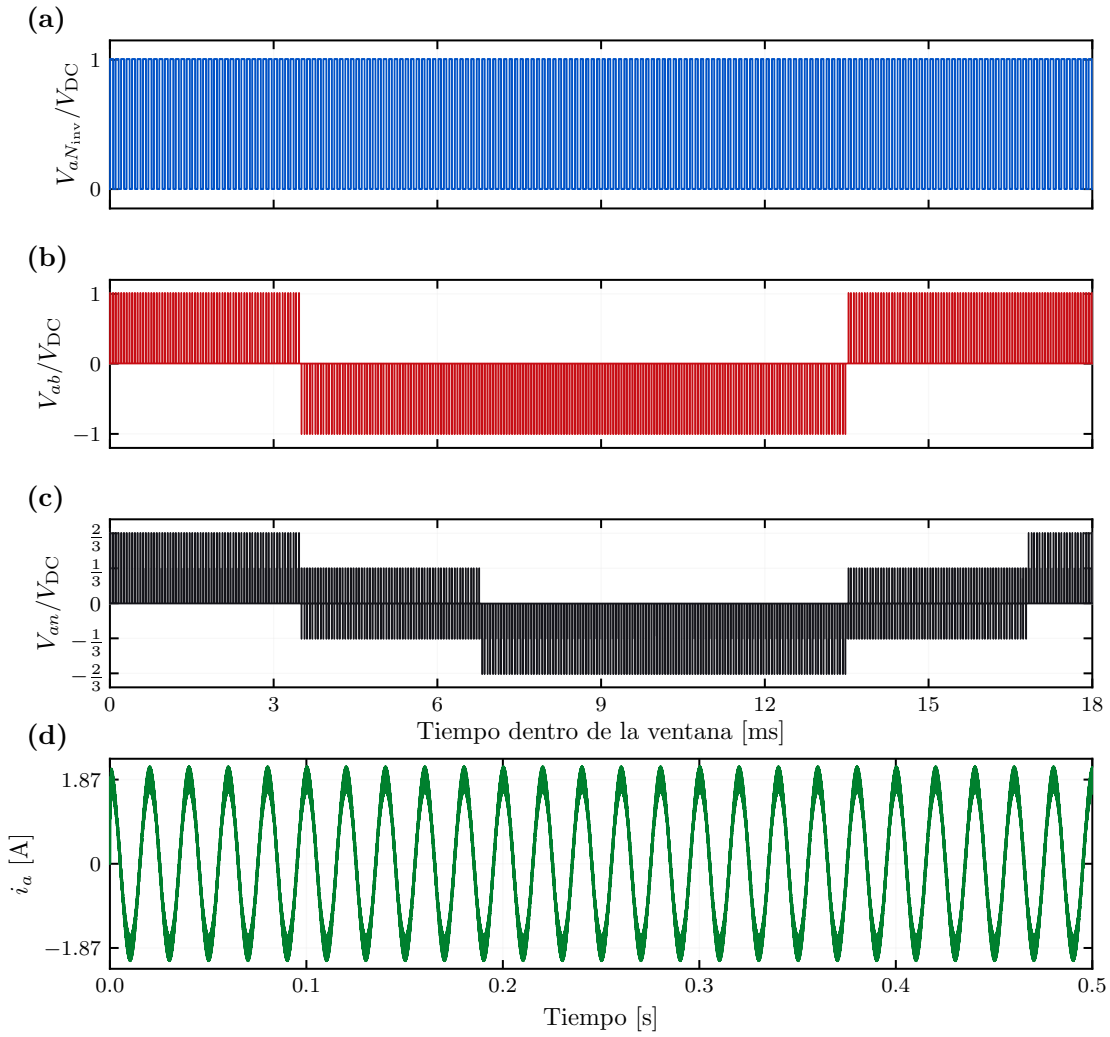


Figura 4.3: Tensiones de salida normalizadas y corriente de fase obtenidas sobre la carga *RL*: (a) tensión de polo $v_{aN_{\text{inv}}}/V_{\text{DC}}$; (b) tensión de línea v_{ab}/V_{DC}; (c) tensión de fase v_{an}/V_{DC}, medida respecto del neutro de la carga; y (d) corriente de fase i_a.

asume un modelo de planta desacoplado de primer orden para cada eje. Para asegurar la validez de esta aproximación y mejorar el desempeño dinámico, se incorpora una acción de prealimentación que compensa activamente tanto los términos de acoplamiento cruzados como la tensión inducida.

La planta de cada eje se obtiene a partir de la ecuación eléctrica del estator, incorporando un retardo discreto equivalente asociado al muestreo y a la conmutación del modulador, modelado como z^{-1}. La discretización se realizó en Matlab mediante el comando *c2d*, utilizando un período de muestreo de 0,1 ms, correspondiente a la frecuencia de conmutación adoptada. De este modo, se obtuvieron las siguientes funciones de transferencia discretas:

$$H_{i_{sd}}(z) = \frac{0{,}3501}{z^2 - 0{,}9934z}, \qquad H_{i_{sq}}(z) = \frac{0{,}1934}{z^2 - 0{,}9964z}. \tag{4.6}$$

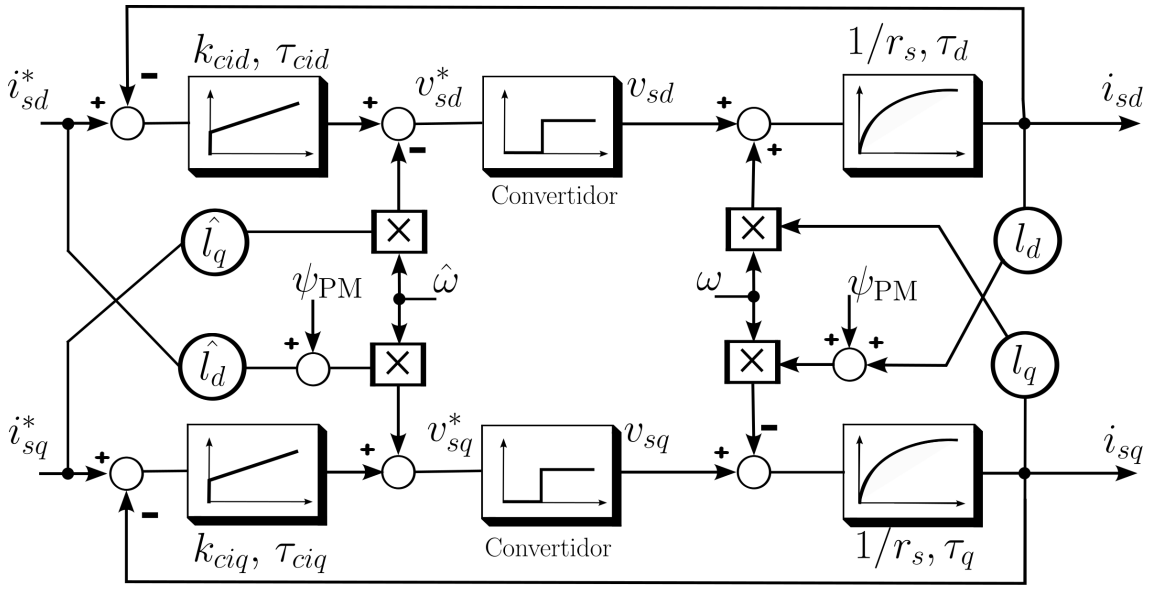


Figura 4.4: Diagrama de bloques del lazo de corriente con compensación por prealimentación.

4.2.3.b. Sintonía de los controladores PI

Considerando las características dinámicas de las plantas obtenidas, se adoptó una estructura de control proporcional-integral siguiendo los criterios de selección y sintonía del controlador en función de la estructura de la planta descritos en [32]. Los parámetros de los controladores se ajustaron sobre los modelos discretos mediante la herramienta *rltool* de Matlab, obteniéndose:

$$C_{i_{sd}}(z) = 1{,}1346\frac{z-0{,}8080}{z-1}, \qquad C_{i_{sq}}(z) = 2{,}0493\frac{z-0{,}8115}{z-1}. \tag{4.7}$$

4.2.3.c. Evaluación transitoria y alisamiento de la referencia

Con el fin de evaluar el desempeño transitorio del lazo de corriente, se analizaron las respuestas al escalón teóricas de ambos canales. El ajuste inicial entrega una respuesta rápida, aunque con un sobrepaso cercano al 59,5 % en ambos ejes. Si bien esta característica podría ser aceptable en otras aplicaciones de servoaccionamiento, en el contexto del presente trabajo resulta poco conveniente, ya que implica transitorios de corriente elevados y una respuesta menos suave del accionamiento.

Por esta razón, se decidió incorporar un alisamiento de la referencia de corriente, con el objetivo de reducir el sobrepaso y limitar exigencias transitorias innecesarias sobre el sistema. Esta medida resulta especialmente adecuada en una aplicación orientada a rehabilitación, donde se privilegia una respuesta suave y controlada del accionamiento por sobre una acción excesivamente agresiva.

El alisamiento se implementó mediante prefiltros discretos de primer orden, ajustados separadamente para cada canal:

$$i^*_{x,\mathrm{a}}(z) = F_x(z) i^*_x(z), \qquad x \in \{d, q\}, \tag{4.8}$$

donde:

$$F_d(z) = \frac{0{,}15772}{z - 0{,}84228}, \qquad F_q(z) = \frac{0{,}15583}{z - 0{,}84417}. \tag{4.9}$$

Ambos prefiltros poseen ganancia estacionaria aproximadamente unitaria, por lo que no modifican el valor final de las referencias de corriente.

La incorporación de $F(z)$ junto con el controlador de realimentación constituye una estructura de dos grados de libertad, ya que permite ajustar separadamente la regulación del lazo interno y el seguimiento de la referencia. En el modelo lineal y mientras no actúen las saturaciones, el prefiltro modifica la transferencia desde la referencia hasta la corriente medida, reduciendo su ancho de banda de seguimiento, pero no altera la ecuación característica del lazo de realimentación $1 + C_{i_x}(z)H_{i_x}(z) = 0$ ni la dinámica de rechazo frente a perturbaciones que actúan sobre la planta. Una sintonía menos agresiva del PI también habría reducido el sobrepaso frente al escalón, pero habría modificado simultáneamente el ancho de banda de regulación y la sensibilidad del lazo. La configuración adoptada permite conservar la sintonía del controlador de realimentación y ajustar independientemente el transitorio asociado a la referencia.

La Tabla 4.3 compara la respuesta desde la referencia hasta la corriente medida sin alisamiento (SA) y con alisamiento (CA), mientras que la Fig. 4.5 presenta las respuestas teóricas correspondientes para ambos ejes.

Tabla 4.3: Comparación de parámetros de respuesta del lazo de corriente en los ejes d y q.

Parámetro	**Eje** d		**Eje** q	
	SA	**CA**	**SA**	**CA**
Sobrepaso [%]	59,50	4,65	59,40	4,50
Tiempo de subida [ms]	0,40	1,00	0,40	1,00
Tiempo de asentamiento [ms]	2,00	2,30	2,00	2,30
Ancho de banda de seguimiento [Hz]	1465,81	708,24	1461,04	697,09

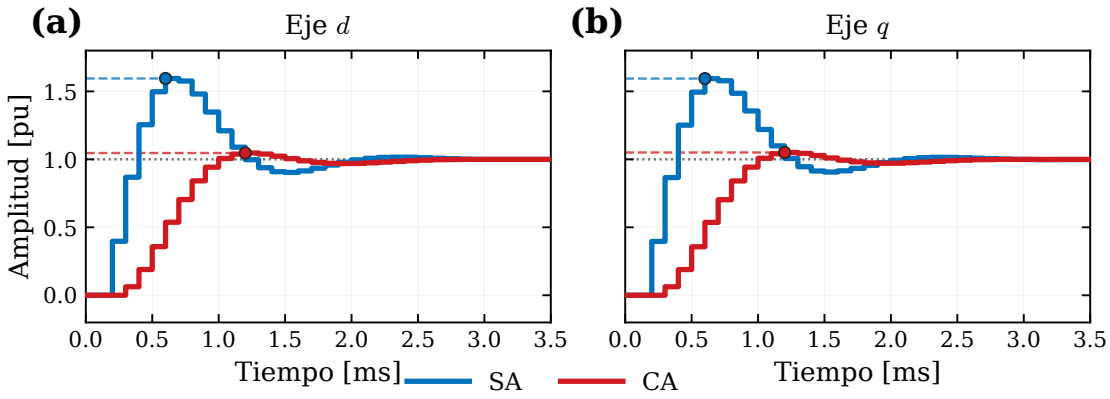


Figura 4.5: Respuesta al escalón de los lazos de corriente obtenida teóricamente desde *rltool*: (a) eje d y (b) q.

Se observa que el alisamiento de la referencia reduce significativamente el sobrepaso

y, por consiguiente, el transitorio de corriente demandado al accionamiento, a costa de un aumento moderado del tiempo de subida y una disminución del ancho de banda de seguimiento. Este compromiso resulta adecuado para la aplicación considerada, ya que favorece una respuesta más suave del sistema y reduce cambios abruptos del momento electromagnético.

4.2.3.d. Implementación de la estrategia anti-enrollamiento

La estructura del anti-enrollamiento de los controladores PI de corriente y su interacción con la saturación de tensión se presentaron en la subsección 3.5.4.c. En la implementación desarrollada no se privilegia ninguno de los ejes d o q. La saturación se aplica sobre el vector total de tensión comandada, escalando ambas componentes mediante el mismo factor, de acuerdo con (3.80).

A partir del vector de tensión saturado se obtiene, para cada eje, la acción PI equivalente utilizada por la estructura anti-enrollamiento:

$$v_{x,\mathrm{PI,eq}}[k] = v_{x,\mathrm{sat}}[k] - v_{x,\mathrm{ff}}[k], \qquad x \in \{d, q\}, \tag{4.10}$$

de acuerdo con (3.98).

Para expresar la realización discreta, el controlador de cada eje se escribe como:

$$C_{i_x}(z) = K_x \frac{z - a_x}{z - 1}, \qquad x \in \{d, q\}. \tag{4.11}$$

La estructura anti-enrollamiento asociada queda dada por:

$$x_x[k] = a_x x_x[k-1] - \frac{1 - a_x}{K_x} v_{x,\mathrm{PI,eq}}[k-1], \tag{4.12}$$

$$v_{x,\mathrm{PI}}[k] = K_x \left(e_x[k] - x_x[k]\right), \tag{4.13}$$

donde $x_x[k]$ corresponde al estado interno del controlador y $v_{x,\mathrm{PI,eq}}[k-1]$ a la acción PI equivalente obtenida a partir de la tensión total saturada en la ejecución anterior. El error de corriente se define como:

$$e_x[k] = i^*_{x,\mathrm{a}}[k] - i_x[k], \tag{4.14}$$

a partir de la referencia alisada. Las variables utilizadas en esta realización se encuentran expresadas en el sistema por unidad definido para el accionamiento.

Sustituyendo los parámetros de los controladores diseñados, se obtienen las siguientes ecuaciones de implementación:

$$x_d[k] = 0{,}8080\, x_d[k-1] - 0{,}1692\, v_{d,\mathrm{PI,eq}}[k-1], \quad v_{d,\mathrm{PI}}[k] = 1{,}1346 \left(e_d[k] - x_d[k]\right), \tag{4.15}$$

$$x_q[k] = 0{,}8115\, x_q[k-1] - 0{,}0920\, v_{q,\mathrm{PI,eq}}[k-1], \quad v_{q,\mathrm{PI}}[k] = 2{,}0493 \left(e_q[k] - x_q[k]\right). \tag{4.16}$$

De esta manera, cuando la saturación de tensión se encuentra activa, la memoria interna de los controladores se actualiza utilizando una acción PI equivalente consistente con el vector de tensión saturado. En ausencia de saturación, $v_{x,\mathrm{PI,eq}} = v_{x,\mathrm{PI}}$, recuperándose la realización nominal del controlador. Esta estructura evita la acumulación asociada a una acción de control no realizable y facilita la recuperación del lazo al retornar a la región lineal de operación.

4.2.3.e. Validación del lazo de corriente en PLECS

Una vez definidos los controladores PI, incorporado el alisamiento de la referencia y habilitada la estrategia anti-*windup*, se evaluó el comportamiento del lazo de corriente directamente sobre el modelo completo implementado en PLECS.

La Fig. 4.6 presenta una prueba de respuesta al escalón obtenida mediante la aplicación de una referencia de 0,2 pu, equivalente al 20 % de la corriente base. Esta amplitud se seleccionó de modo que durante el ensayo no se activaran los límites de corriente y la saturación vectorial de tensión. Los indicadores obtenidos mediante la simulación en PLECS se comparan con los valores teóricos determinados durante la etapa de diseño, considerando el sobrepaso, el tiempo de subida y el tiempo de asentamiento.

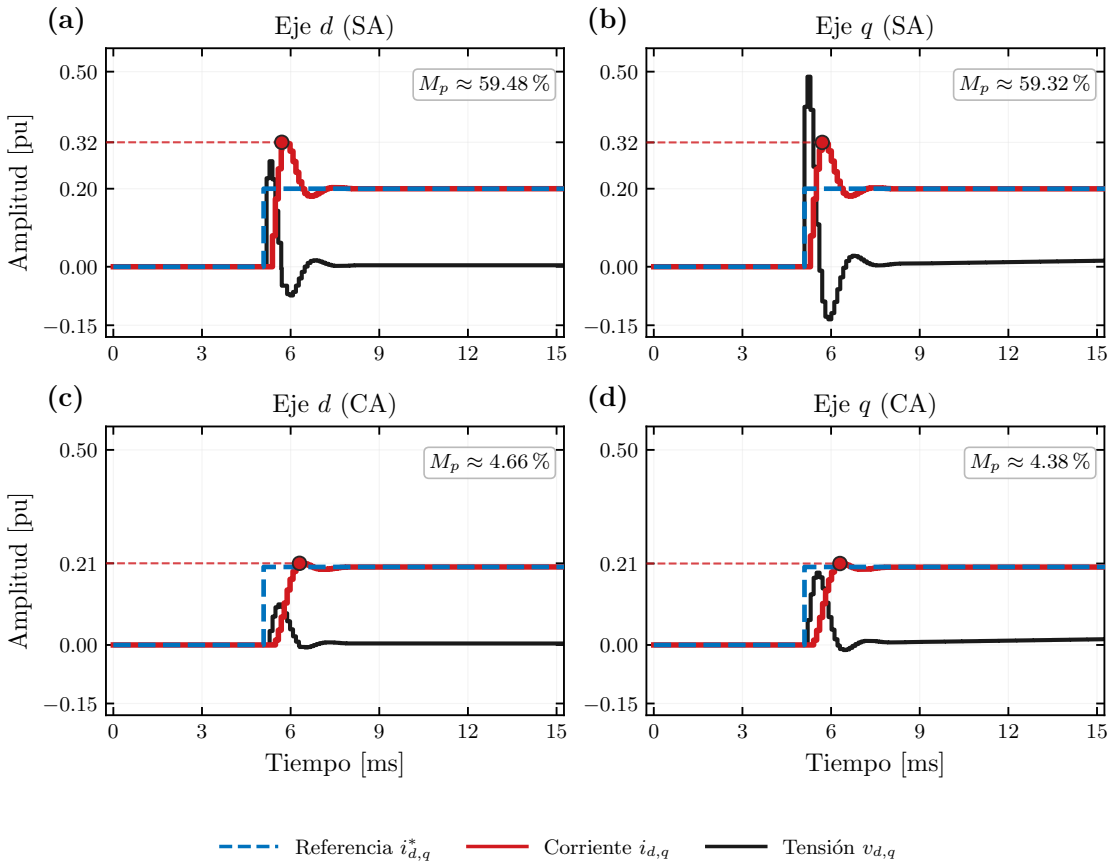


Figura 4.6: Respuestas simuladas en PLECS ante un escalón de referencia de 0,2 pu: (a) eje d sin alisamiento (SA); (b) eje q sin alisamiento (SA); (c) eje d con alisamiento (CA); y (d) eje q con alisamiento (CA).

Se observa una concordancia cualitativa y cuantitativa entre la respuesta teórica obtenida durante la etapa de diseño y la respuesta simulada en el modelo completo de PLECS. En particular, los sobrepasos identificados en la Fig. 4.6 permanecen próximos a los valores teóricos de la Tabla 4.3, tanto en los casos sin alisamiento como con alisamiento. Esto confirma que el procedimiento de sintonía representa adecuadamente la dinámica nominal del lazo interno implementado.

En consecuencia, el accionamiento queda en condiciones de ser integrado con la es-

trategia de control de nivel superior y de ser evaluado bajo los escenarios virtuales de rehabilitación definidos en las secciones siguientes.

4.3. Evaluación de los escenarios articulares

Una vez verificada la operación del accionamiento y del lazo interno de corriente, se incorporó el controlador CTC y se evaluó el modelo completo bajo los escenarios articulares definidos en el Capítulo 3. Los resultados se organizan según la articulación considerada y las condiciones mecánicas aplicadas en cada caso de estudio.

4.3.1. Escenario de rodilla

El escenario de rodilla utiliza el modelo equivalente del conjunto pierna–pie definido en la sección 3.3.2. Los parámetros antropométricos e inerciales corresponden a los presentados en la Tabla 3.1, mientras que la inercia total referida al eje articular se determina mediante (3.9).

Para este escenario se consideran dos casos de estudio. El primero evalúa el seguimiento de una trayectoria senoidal bajo la condición mecánica nominal. El segundo analiza el efecto producido por la incorporación de masas distales adicionales sobre el segmento movilizado.

4.3.1.a. Caso de estudio 1: trayectoria senoidal en condición nominal

Este caso de estudio evalúa el desempeño del esquema CTC–FOC sin torque externo aplicado sobre la articulación, es decir, con $T_{\text{ext}}(t) = 0$, y considerando únicamente la dinámica nominal del conjunto pierna–pie. La referencia corresponde a la trayectoria senoidal definida en la sección 3.4.1, con los parámetros establecidos en (3.14).

La simulación se ejecutó durante 10 s, correspondientes a dos períodos completos. El movimiento comienza en extensión completa, $\theta_d(0) = 0°$, alcanza 140° en la mitad de cada período y retorna posteriormente a la posición inicial.

Para $A = 70° = 1{,}2217$ rad y $\omega = 2\pi f = 1{,}2566$ rad/s, las magnitudes máximas de velocidad y aceleración de referencia son:

$$\dot{\theta}_{d,\text{máx}} = A\omega = 1{,}5353 \text{ rad/s}, \qquad \ddot{\theta}_{d,\text{máx}} = A\omega^2 = 1{,}9293 \text{ rad/s}^2. \tag{4.17}$$

Los puntos característicos de un período se presentan en la Tabla 4.4. Esta tabla relaciona directamente los valores de posición, velocidad y aceleración con las etapas de flexión y extensión.

La Fig. 4.7 presenta el seguimiento de posición. La respuesta articular reproduce la referencia durante los dos períodos simulados; los máximos, los mínimos y los instantes de inversión del movimiento coinciden con los establecidos por θ_d. Los recuadros ampliados permiten distinguir las diferencias entre ambas señales durante el inicio del movimiento y en la flexión máxima.

El error de posición presenta un valor $\text{RMSE}_\theta = 0{,}00622°$ y una magnitud máxima de $e_{\theta,\text{pk}} = 0{,}00887°$. Estos valores muestran que el CTC compensa las contribuciones inercial,

Tabla 4.4: Puntos característicos de la trayectoria senoidal nominal de rodilla.

Tiempo	**Posición**	**Velocidad**	**Aceleración**	**Interpretación**
$t = 0$	$0°$	0	$+\ddot{\theta}_{d,\text{máx}}$	Inicio de la flexión
$t = T/4$	$70°$	$+\dot{\theta}_{d,\text{máx}}$	0	Máxima velocidad de flexión
$t = T/2$	$140°$	0	$-\ddot{\theta}_{d,\text{máx}}$	Inversión en flexión máxima
$t = 3T/4$	$70°$	$-\dot{\theta}_{d,\text{máx}}$	0	Máxima velocidad de extensión
$t = T$	$0°$	0	$+\ddot{\theta}_{d,\text{máx}}$	Cierre del periodo

gravitacional y disipativa del modelo, mientras que el lazo interno FOC reproduce la corriente requerida para desarrollar el torque calculado.

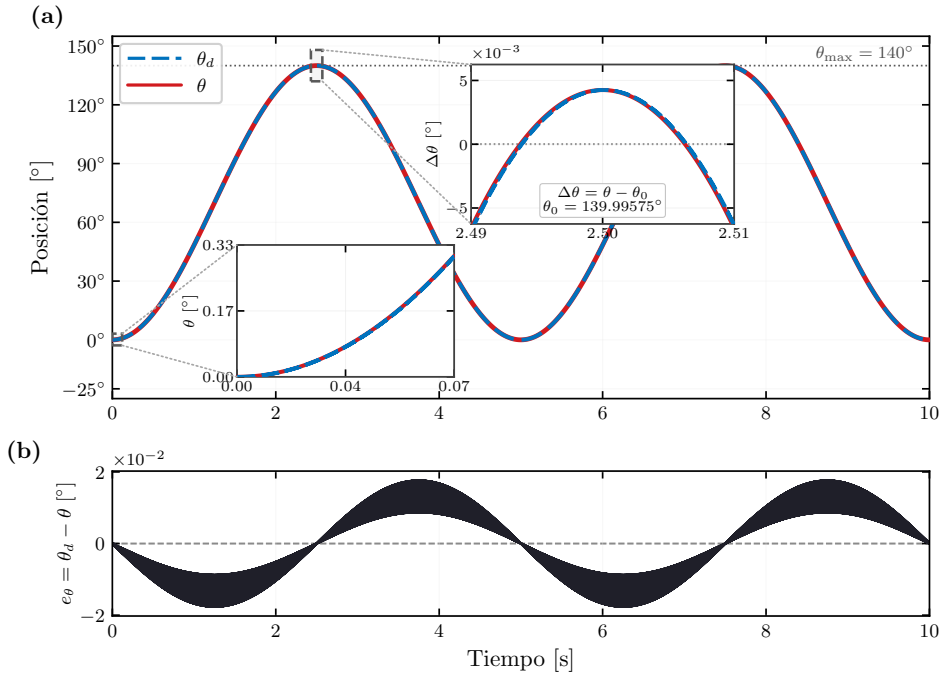


Figura 4.7: Seguimiento de posición durante la trayectoria senoidal nominal de rodilla: (a) posición de referencia θ_d y posición simulada θ; (b) error de posición articular.

La Fig. 4.8 muestra la velocidad angular de referencia y la velocidad medida en el eje articular. Después del establecimiento inicial, ambas señales mantienen la misma amplitud y fase durante el movimiento periódico. En esta condición, el error alcanza $\text{RMSE}_{\dot{\theta}} = 1{,}37 \times 10^{-4}$ rad/s, con una magnitud máxima de $e_{\dot{\theta},\text{pk}} = 1{,}98 \times 10^{-4}$ rad/s.

La Fig. 4.9 compara el torque articular de referencia T_J^*, generado por el CTC, con el torque articular estimado $T_{J,\text{est}}$, obtenido a partir del torque electromagnético del motor y referido al eje de salida mediante la relación de transmisión y su eficiencia. Luego del establecimiento inicial, ambas señales permanecen prácticamente superpuestas.

Aunque la posición de referencia es senoidal, el torque no presenta una forma senoidal pura. Para interpretar su forma se considera la componente de prealimentación dinámica

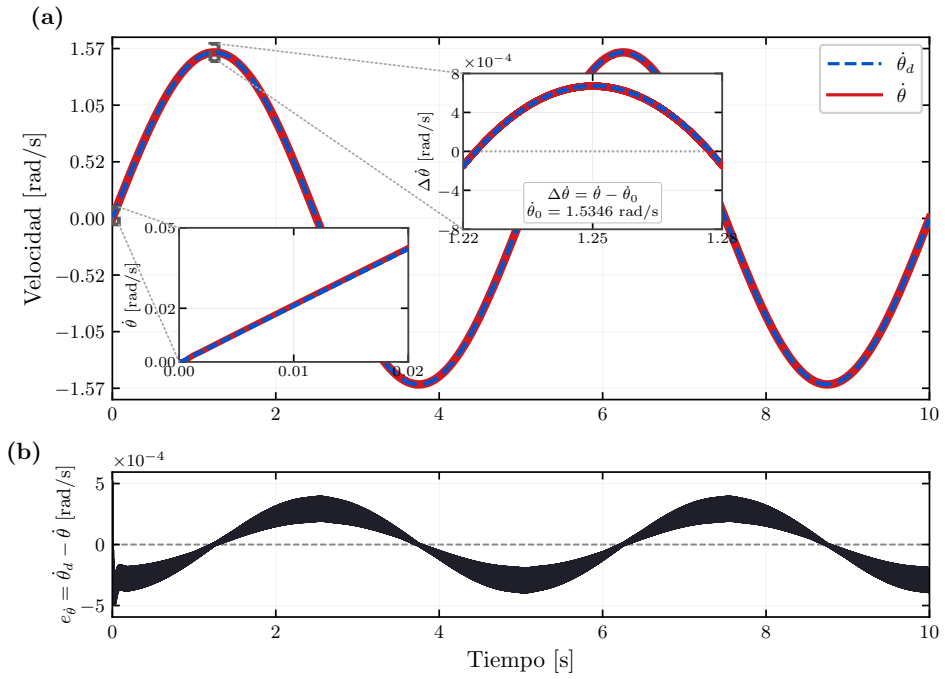


Figura 4.8: Seguimiento de velocidad durante la trayectoria senoidal nominal de rodilla: (a) velocidad de referencia $\dot{\theta}_d$ y velocidad simulada $\dot{\theta}$; (b) error de velocidad articular $e_{\dot{\theta}} = \dot{\theta}_d - \dot{\theta}$.

del CTC evaluada sobre la trayectoria de referencia:

$$T_{J,\mathrm{ff}}(t) = \underbrace{M_{\mathrm{tot}}\ddot{\theta}_d(t)}_{\text{componente inercial}} + \underbrace{mg\ell \sin\theta_d(t)}_{\text{componente gravitacional}} + \underbrace{F_v\dot{\theta}_d(t)}_{\text{fricción viscosa}} + \underbrace{F_c \tanh\left(\frac{\dot{\theta}_d(t)}{\varepsilon}\right)}_{\text{fricción de Coulomb regularizada}} . \tag{4.18}$$

Esta expresión permite identificar las contribuciones que determinan la forma predominante del torque. El valor exacto de T_J^* incluye además las correcciones de realimentación asociadas a e_θ, $e_{\dot{\theta}}$ y al estado integral del CTC.

Debido a la fase seleccionada, la trayectoria puede escribirse como:

$$\theta_d(t) = \frac{7\pi}{18}\left[1 - \cos(\omega t)\right]. \tag{4.19}$$

Como $0° \leq \theta_d \leq 140°$, la componente gravitacional permanece positiva durante todo el período. Su valor máximo se alcanza cuando $\theta_d = 90°$. Sustituyendo esta condición en (4.19) se obtiene:

$$\frac{7\pi}{18}\left[1 - \cos(\omega t)\right] = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \cos(\omega t) = -\frac{2}{7}. \tag{4.20}$$

Por lo tanto, dentro de cada período:

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\arccos\left(-\frac{2}{7}\right) = 1{,}48 \text{ s}, \tag{4.21}$$

$$t_2 = \frac{1}{\omega}\left[2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{7}\right)\right] = 3{,}52 \text{ s}. \tag{4.22}$$

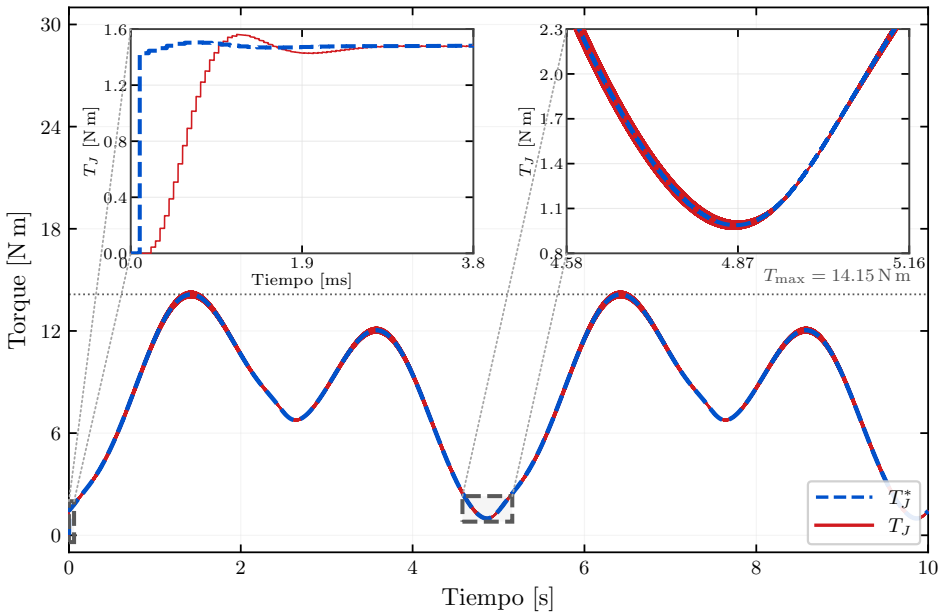


Figura 4.9: Torque articular de referencia T_J^* y torque articular estimado $T_{J,\text{est}}$ durante la trayectoria senoidal nominal de rodilla.

En estos instantes, la contribución gravitacional alcanza:

$$T_{g,\text{máx}} = mg\ell = (4{,}88)(9{,}81)(0{,}281) = 13{,}45 \text{ Nm}. \tag{4.23}$$

Durante la flexión, la compensación de fricción se suma al torque gravitacional; durante la extensión, cambia de signo y reduce el torque requerido. Esto explica la diferencia de amplitud entre los dos máximos observados en cada período. Las contribuciones inercial y de fricción desplazan además los máximos del torque total respecto de los instantes t_1 y t_2.

La inercia total utilizada por el CTC, referida al eje articular, está compuesta por la inercia del segmento, la inercia del reductor ubicada en el eje de salida y la inercia del rotor reflejada mediante la relación de transmisión:

$$\begin{aligned} M_{\text{tot}} &= J_{\text{seg}} + J_{\text{red,out}} + N^2 J_m \\ &= 0{,}7400 \text{ kg m}^2. \end{aligned} \tag{4.24}$$

En la flexión máxima, alcanzada en $t = 2{,}5$ s, se cumple $\theta_d = 140°$, $\dot{\theta}_d = 0$ y $\ddot{\theta}_d = -1{,}929$ rad/s^2. Por lo tanto:

$$T_g(2{,}5) = mg\ell \sin\left(\frac{7\pi}{9}\right) = 8{,}65 \text{ Nm}, \tag{4.25}$$

$$T_{\text{in}}(2{,}5) = M_{\text{tot}}\ddot{\theta}_d = -1{,}43 \text{ Nm}, \tag{4.26}$$

$$T_f(2,5) = 0. \tag{4.27}$$

La suma de estas contribuciones entrega $T_{J,\text{ff}}(2{,}5) \approx 7{,}22$ Nm en el instante exacto de flexión máxima. Después de la inversión, la velocidad se vuelve negativa y la fricción reduce adicionalmente el torque. Por esta razón, el mínimo se desplaza aproximadamente

hasta $t = 2{,}64$ s. En ese instante, el modelo de prealimentación entrega alrededor de 7,21 Nm, mientras que el torque de referencia completo generado por el CTC alcanza aproximadamente 6,76 Nm.

Una situación equivalente se presenta antes de completar la extensión. En $t = 5$ s, se cumple $\theta_d = 0$ rad, $\dot{\theta}_d = 0$ rad/s y $\ddot{\theta}_d = 1{,}929$ rad/s^2. En consecuencia, las componentes gravitacional y de fricción son nulas, por lo que:

$$T_{J,\mathrm{ff}}(5) = M_{\mathrm{tot}}\ddot{\theta}_d(5) = (0{,}7400)(1{,}929) = 1{,}43 \text{ Nm}. \tag{4.28}$$

La simulación entrega aproximadamente 1,43 Nm en este mismo instante. En cambio, el mínimo cercano a 0,99 Nm ocurre antes de alcanzar la extensión completa, aproximadamente en $t = 4{,}87$ s. En ese momento la velocidad todavía es negativa y la contribución de fricción reduce temporalmente el torque. Al llegar a $t = 5$ s, la velocidad se anula y desaparece dicha contribución.

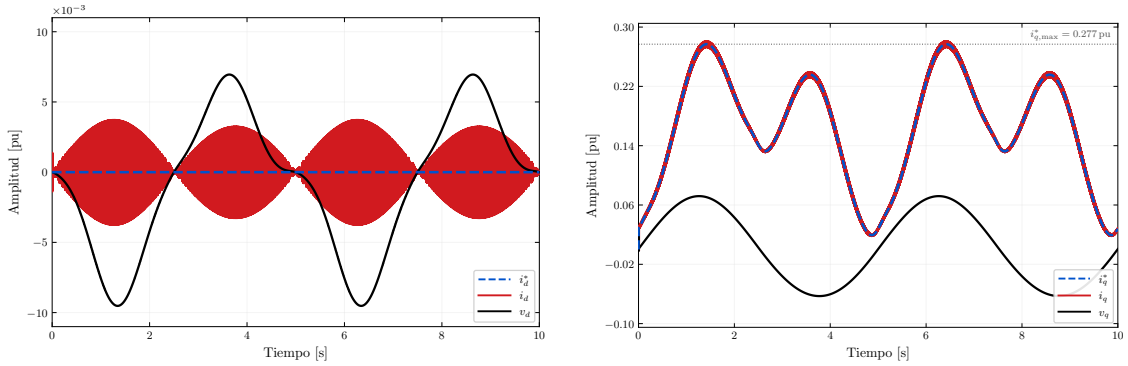
El torque articular alcanza una magnitud máxima de $T_{J,\mathrm{pk}} = 14{,}15$ Nm y un valor $T_{J,\mathrm{RMS}} = 9{,}19$ Nm. Ambos permanecen por debajo del límite de 45 Nm definido para el escenario de rodilla.

La Fig. 4.10 presenta las corrientes de referencia y medidas en los ejes d y q, junto con las tensiones aplicadas después de la saturación vectorial. En el eje directo, la referencia se mantiene en $i_d^* = 0$, mientras que i_d permanece alrededor de cero con variaciones del orden de 10^{-3} pu.

La tensión v_d cambia de signo con la velocidad debido principalmente al término de desacoplo:

$$v_{d,\mathrm{ff}} = -\omega_e L_q i_q. \tag{4.29}$$

De esta manera, el controlador compensa el acoplamiento introducido por la corriente i_q y mantiene regulada la componente de eje directo.



(a) Corriente i_d y tensión aplicada v_d. (b) Corriente i_q y tensión aplicada v_q.

Figura 4.10: Referencias y corrientes medidas en los ejes d y q, junto con las tensiones aplicadas por el lazo interno de corriente durante el caso nominal de rodilla.

En el eje q, la corriente medida sigue la referencia generada por el CTC. Bajo la condición $i_d^* = 0$, la relación entre el torque articular y la corriente puede expresarse como:

$$T_J \approx \eta N k_T i_{q,\mathrm{A}} = \eta N k_T I_b \, i_{q,\mathrm{pu}}. \tag{4.30}$$

Por esta razón, la evolución de i_q reproduce la forma del torque articular requerido. La magnitud de corriente en el plano dq alcanza $I_{dq,\mathrm{pk}} = 0{,}277$ pu, equivalente a 0,822 A,

mientras que su valor RMS corresponde a $I_{dq,\mathrm{RMS}} = 0{,}179$ pu, equivalente a 0,534 A. Estos valores permanecen por debajo del límite operacional de 1,5 pu.

La suavidad cinemática se caracteriza mediante $j_{\mathrm{RMS}} = 1{,}714\,\mathrm{rad/s^3}$ y $j_{\mathrm{pk}} = 2{,}539\,\mathrm{rad/s^3}$. Los valores obtenidos son consistentes con una trayectoria senoidal cuyas variables de posición, velocidad y aceleración evolucionan continuamente.

Durante el ensayo no se activaron los límites de torque, corriente o tensión. En consecuencia, los resultados corresponden al funcionamiento del esquema CTC–FOC dentro de la región operacional definida. El caso nominal establece así la referencia de comparación para evaluar posteriormente el efecto de incorporar masas distales al segmento movilizado.

4.3.1.b. Caso de estudio 2: inclusión de masas distales

Este caso de estudio evalúa el desempeño del esquema CTC–FOC frente al incremento de la carga mecánica acoplada al eje de salida del reductor. Las masas incorporadas no representan un torque voluntario ejercido por el paciente, sino una carga pasiva adicional que modifica la inercia y el momento gravitacional del segmento movilizado. Este escenario permite representar diferencias antropométricas entre usuarios, accesorios de soporte, órtesis o incertidumbres en la estimación de la masa distal.

Las masas añadidas se aplicaron únicamente sobre la planta mecánica, mientras que el controlador CTC conservó los parámetros correspondientes al modelo nominal de rodilla. Por tanto, el controlador no dispone explícitamente de los incrementos de masa e inercia introducidos en cada ensayo. El objetivo es determinar si la realimentación del esquema CTC–FOC mantiene el seguimiento de la trayectoria cuando la dinámica de la planta difiere del modelo utilizado por el controlador.

Los niveles de carga se definieron como fracciones de la masa nominal del segmento pierna–pie, $m_{\mathrm{rod}} = 4{,}88$ kg. Se consideraron incrementos de 50 %, 150 % y 200 %, correspondientes a masas adicionales de 2,44 kg, 7,32 kg y 9,76 kg, respectivamente. En consecuencia, la condición +200 % representa una masa distal total igual a tres veces la masa nominal.

Para un brazo efectivo $r = 0{,}281$ m, la inercia y el momento gravitacional máximo asociados exclusivamente a la masa añadida se calculan mediante:

$$\Delta J = \Delta m r^2, \qquad \Delta T_g^{\mathrm{máx}} = \Delta m g r. \tag{4.31}$$

Los parámetros resultantes se presentan en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5: Parámetros de las masas distales adicionales incorporadas en la planta mecánica.

Condición	$\boldsymbol{\Delta m}$ [kg]	$\boldsymbol{m_{\mathrm{rod}} + \Delta m}$ [kg]	$\boldsymbol{\Delta J}$ [kg m^2]	$\boldsymbol{\Delta T_g^{\mathrm{máx}}}$ [Nm]
+50 %	2,44	7,32	0,1927	6,726
+150 %	7,32	12,20	0,5780	20,178
+200 %	9,76	14,64	0,7707	26,905

La contribución mecánica asociada a cada masa añadida se incorporó en la planta mediante el torque equivalente referido al eje de salida:

$$T_{\mathrm{c}}(t) = \Delta J\, \ddot{\theta}(t) + \Delta m\, g\, r\, \sin\theta(t), \tag{4.32}$$

donde el primer término corresponde al torque necesario para acelerar la masa añadida y el segundo representa su contribución gravitacional. En el balance mecánico de la planta, $T_c(t)$ actúa con signo opuesto al torque desarrollado por el accionamiento.

La Fig. 4.11 presenta el seguimiento de posición para los tres niveles de masa añadida. Las respuestas permanecen próximas a la referencia senoidal durante el período analizado. El error RMSE_θ toma valores de 0,00571°, 0,00964° y 0,01263° para las condiciones 50 %, 150 % y 200 %, respectivamente. Las magnitudes máximas del error son 0,01040°, 0,01670° y 0,01999°.

Entre las tres condiciones cargadas se observa un aumento progresivo del error de posición; sin embargo, incluso al añadir el 200 % de la masa nominal, el RMSE permanece por debajo de 0,013° y el error máximo por debajo de 0,020°.

Una vez superado el transitorio inicial, el error observado no corresponde a un sesgo constante, sino a un error periódico de seguimiento. Este comportamiento se debe a que el CTC conserva el modelo nominal, mientras que la planta incorpora la inercia y la contribución gravitacional asociadas a la masa adicional. En consecuencia, la compensación nominal no cancela exactamente la dinámica de la planta modificada y la realimentación corrige esta diferencia durante el movimiento. Esto explica también el aumento gradual del error al incrementar la masa distal.

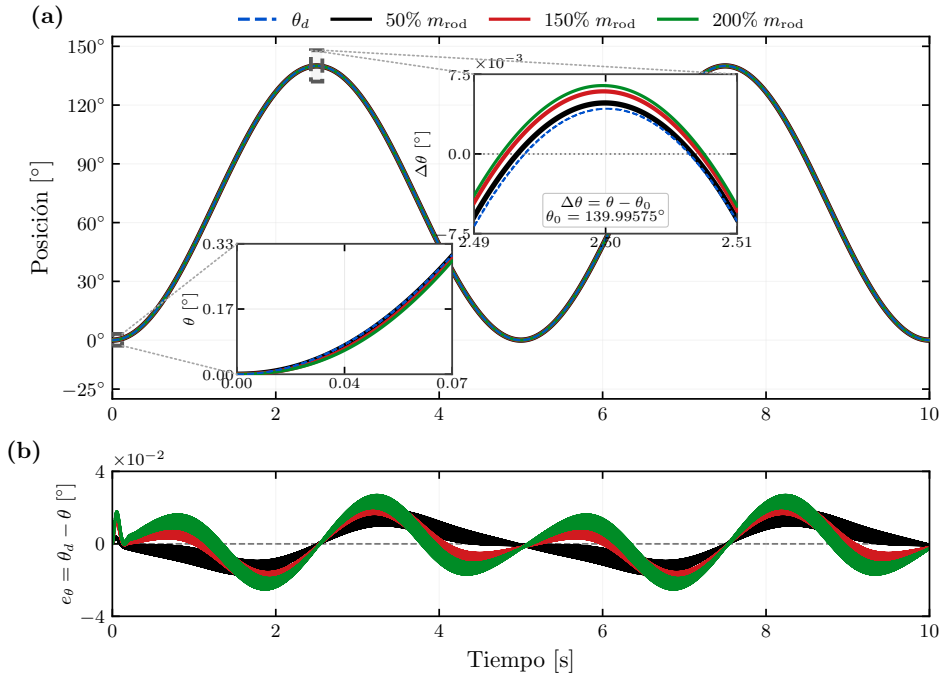


Figura 4.11: Seguimiento de la trayectoria senoidal de rodilla para incrementos de masa distal de 50 %, 150 % y 200 %.

La Fig. 4.12 muestra la velocidad articular obtenida bajo las mismas condiciones. El $\mathrm{RMSE}_{\dot\theta}$ aumenta desde $1{,}75 \times 10^{-4}$ rad/s para la carga de +50 %, hasta $4{,}23 \times 10^{-4}$ rad/s y $5{,}62 \times 10^{-4}$ rad/s para las cargas de +150 % y +200 %. Las magnitudes máximas del error alcanzan $3{,}53 \times 10^{-4}$ rad/s, $6{,}79 \times 10^{-4}$ rad/s y $9{,}07 \times 10^{-4}$ rad/s, respectivamente.

El incremento del error de velocidad se relaciona con el término inercial de (4.32). En

los extremos de la trayectoria, la velocidad se anula y la aceleración alcanza su magnitud máxima; por ello, el torque adicional $\Delta J\ddot{\theta}$ adquiere mayor relevancia durante las inversiones del movimiento. A pesar de este incremento, las tres respuestas conservan la amplitud y la periodicidad impuestas por la referencia.

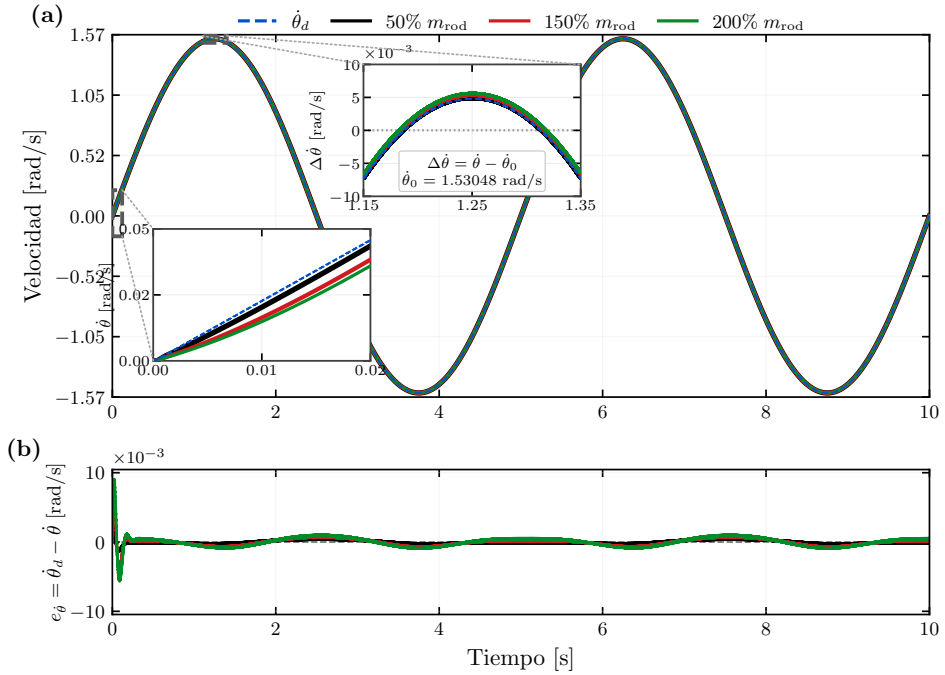


Figura 4.12: Velocidad articular de referencia y velocidad obtenida para los tres niveles de masa distal añadida.

La comparación conjunta de los errores RMS de posición y velocidad se presenta en la Fig. 4.13. Los resultados muestran que la diferencia entre el modelo nominal utilizado por el CTC y la planta cargada se manifiesta como un incremento gradual de ambos errores. No obstante, sus magnitudes permanecen reducidas dentro de todo el intervalo de cargas considerado.

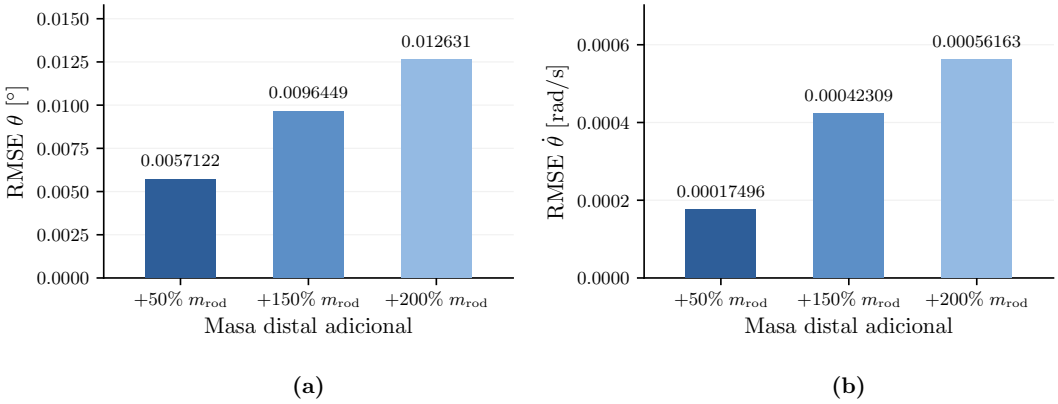


Figura 4.13: Errores RMS de (a) posición y (b) velocidad para los incrementos de masa distal de 50 %, 150 % y 200 %.

La Fig. 4.14 presenta el torque articular para las tres condiciones. Como la trayectoria ejecutada es prácticamente la misma en todos los ensayos, las variables $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$ conservan su evolución temporal. Por esta razón, la forma general del torque se mantiene respecto del caso nominal, pero su magnitud aumenta con la masa añadida.

Este incremento se explica directamente mediante (4.32). La contribución gravitacional crece en proporción a Δm, mientras que la contribución inercial aumenta porque $\Delta J = \Delta m r^2$. Cerca de $\theta = 90°$, el término gravitacional añadido alcanza su mayor valor. En los instantes de extensión completa, correspondientes al inicio y al cierre de cada período, se cumple $\theta = 0°$, por lo que la contribución gravitacional se anula y permanece la contribución inercial asociada a la aceleración angular.

El torque articular máximo alcanza 20,77 Nm, 34,02 Nm y 40,64 Nm para las cargas de +50 %, +150 % y +200 %, respectivamente. Sus valores RMS corresponden a 13,80 Nm, 23,06 Nm y 27,69 Nm.

La diferencia entre el torque articular de referencia y el torque estimado desde la máquina presenta valores RMS de 0,00672 Nm, 0,01121 Nm y 0,01346 Nm. Por lo tanto, el lazo interno reproduce el torque solicitado por el CTC aun cuando su magnitud aumenta con la carga.

Para el límite articular de 45 Nm, los márgenes disponibles son 24,23 Nm, 10,98 Nm y 4,36 Nm, respectivamente. El margen mínimo se obtiene en la condición 200 %, pero durante la ventana de evaluación no se activa el indicador de saturación de torque.

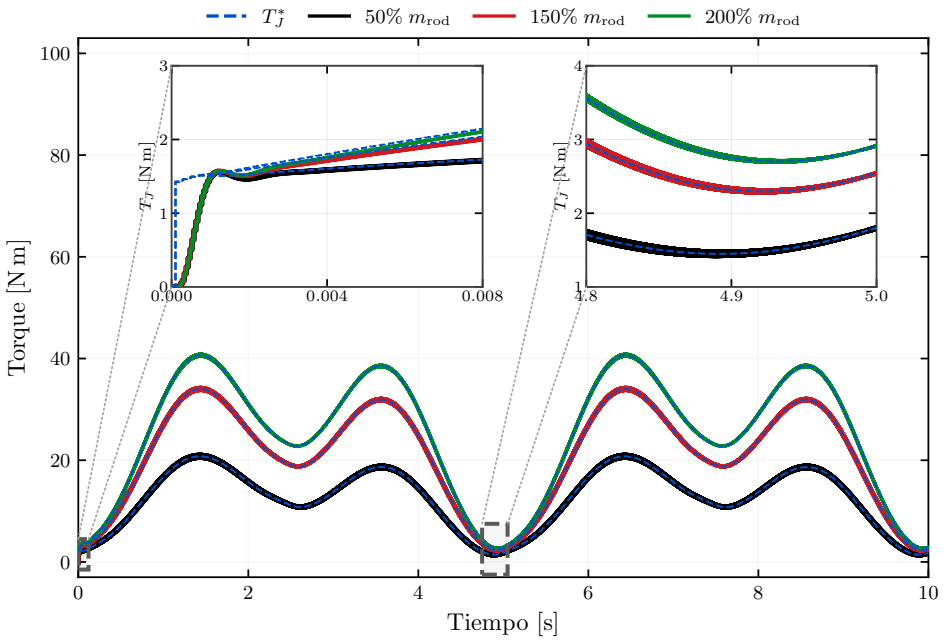


Figura 4.14: Torque articular de referencia y torque articular estimado para los incrementos de masa distal de 50 %, 150 % y 200 %.

La Fig. 4.15 presenta las corrientes de referencia y medidas en los ejes d y q. En el eje directo, i_d permanece alrededor de la referencia $i_d^* = 0$. En el eje de cuadratura, la corriente aumenta con la masa distal debido al mayor torque solicitado por el CTC.

La magnitud máxima de corriente alcanza 0,407 pu, 0,666 pu y 0,796 pu, equivalentes

a 1,207 A, 1,978 A y 2,363 A. Los valores RMS correspondientes son 0,270 pu, 0,451 pu y 0,542 pu, equivalentes a 0,802 A, 1,340 A y 1,610 A.

Incluso en la condición +200 %, la magnitud máxima permanece por debajo de la base de corriente de 1 pu y del límite operacional de 1,5 pu. Esto coincide con la ausencia de activaciones de los límites operacional y absoluto de corriente durante los tres ensayos.

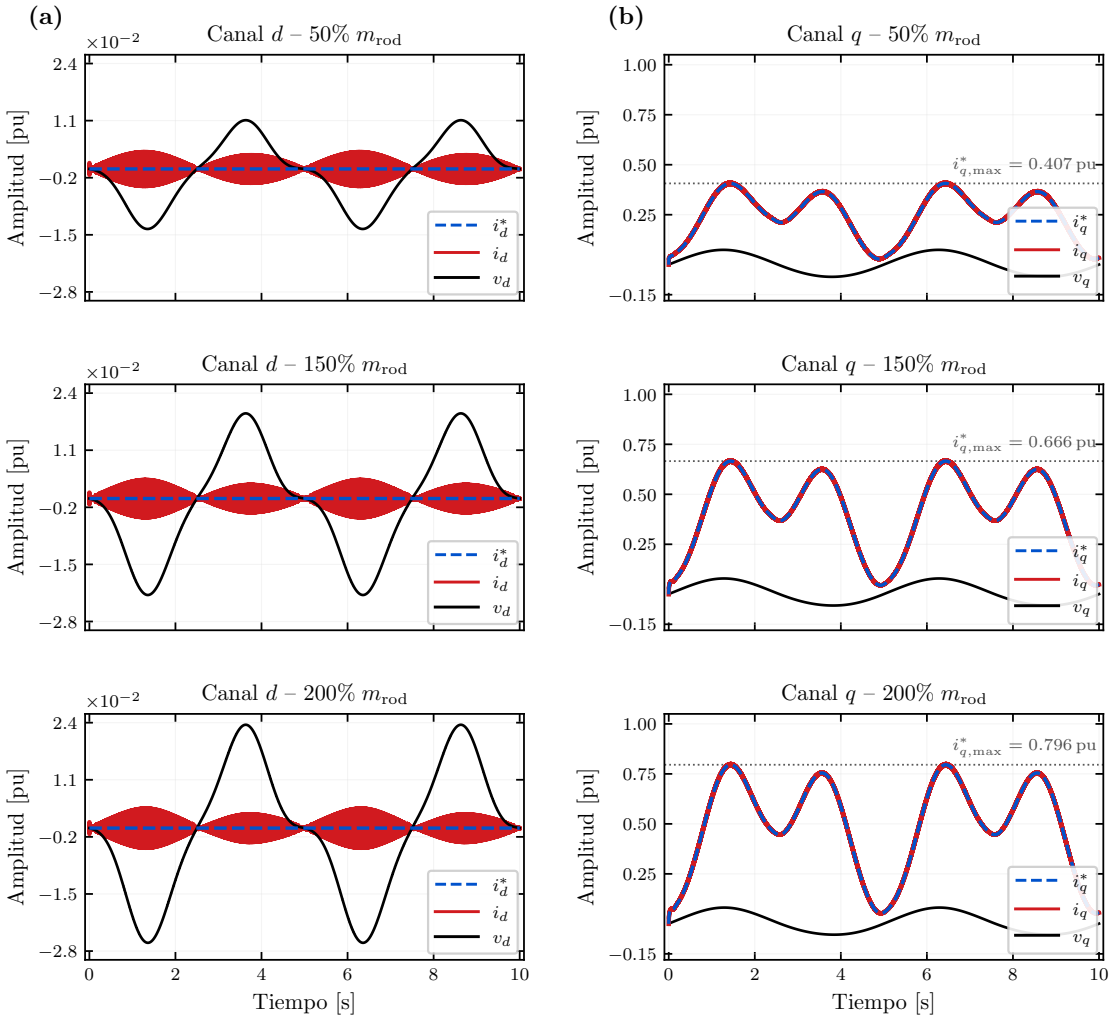


Figura 4.15: Corrientes de referencia y medidas para los tres niveles de masa distal: (a) eje directo d; (b) eje de cuadratura q.

La suavidad cinemática se evaluó a partir del jerk obtenido desde la aceleración articular medida. Los valores j_{RMS} son 1,7143 rad/s^3, 1,7142 rad/s^3 y 1,7141 rad/s^3, mientras que las magnitudes máximas alcanzan 2,5456 rad/s^3, 2,5643 rad/s^3 y 2,5802 rad/s^3. La reducida variación entre los tres casos indica que el aumento de masa modifica principalmente el esfuerzo requerido, sin introducir cambios relevantes en la evolución cinemática de la trayectoria ejecutada.

Durante la ventana de evaluación no se activaron los indicadores de saturación de torque o tensión, ni los límites operacional y absoluto de corriente. En consecuencia, los resultados corresponden al funcionamiento del esquema CTC–FOC sin intervención de las

saturaciones implementadas.

Los resultados muestran que el incremento de masa distal se traduce principalmente en mayores demandas de torque articular y corriente de eje q. Para las condiciones evaluadas, el controlador conserva errores reducidos de posición y velocidad frente a esta variación paramétrica de la planta. La condición $+200\,\%$ constituye el ensayo más exigente, con un torque máximo de 40,64 Nm, una corriente máxima de 0,796 pu y un margen de 4,36 Nm respecto del límite articular configurado. De este modo, el caso permite establecer el desempeño del sistema frente a variaciones de carga equivalentes a diferencias antropométricas, accesorios distales o incertidumbre en la dinámica del segmento movilizado.

4.3.1.c. Caso de estudio 3: rechazo de perturbación de torque externo

Este caso de estudio evalúa la capacidad del esquema CTC–FOC para rechazar una perturbación mecánica externa no incluida en el modelo utilizado por el controlador. Se mantienen la planta nominal de rodilla y la trayectoria senoidal empleada en el caso de estudio 1, incorporando únicamente un escalón de torque externo sobre la planta mecánica.

La perturbación se aplica a partir de $t = 6$ s, una vez superado el transitorio inicial del accionamiento, y permanece activa hasta finalizar la simulación:

$$T_{\text{ext}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 6 \text{ s}, \\ 10 \text{ Nm}, & t \geq 6 \text{ s}. \end{cases} \tag{4.33}$$

El torque externo no se incorpora al modelo nominal empleado por el CTC, por lo que su compensación depende de la acción de realimentación del controlador.

La Fig. 4.16a muestra el seguimiento de posición. La aplicación del escalón produce una desviación transitoria en $t = 6$ s, alcanzándose una magnitud máxima de error de $e_{\theta,\text{pk}} = 0{,}07312°$. Posteriormente, el error disminuye y la posición continúa siguiendo la trayectoria de referencia aun cuando la perturbación permanece aplicada.

La respuesta de velocidad se presenta en la Fig. 4.16b. En esta variable se distingue con mayor claridad el efecto instantáneo de la perturbación: al aplicarse el escalón aparece una desviación transitoria respecto de $\dot{\theta}_d$, seguida de una rápida recuperación. Una vez superado este transitorio, la velocidad vuelve a reproducir la referencia durante el resto del movimiento.

La Fig. 4.17a muestra la respuesta del torque articular. Después del transitorio producido al aplicar la perturbación, la forma temporal del torque conserva la evolución observada en el ciclo nominal, pero con un incremento aproximadamente igual al torque externo aplicado. Esto puede comprobarse comparando puntos equivalentes de ambos períodos.

Por ejemplo, al completar la extensión en el primer período, $T_J(5 \text{ s}) \approx 1{,}43$ Nm. En el segundo período, con la perturbación activa, se obtiene $T_J(10 \text{ s}) \approx 11{,}61$ Nm, lo que corresponde a un incremento de aproximadamente 10,18 Nm. Un comportamiento similar se observa en los máximos y mínimos posteriores al transitorio, confirmando que el controlador incrementa la acción requerida para compensar la nueva carga.

El torque articular alcanza una magnitud máxima de $T_{J,\text{pk}} = 23{,}73$ Nm, permaneciendo por debajo del límite de 45 Nm definido para este escenario.

El incremento del torque solicitado se refleja directamente en la corriente del eje de cuadratura, como se observa en la Fig. 4.17b. Al aplicarse la perturbación, i_q^* aumenta

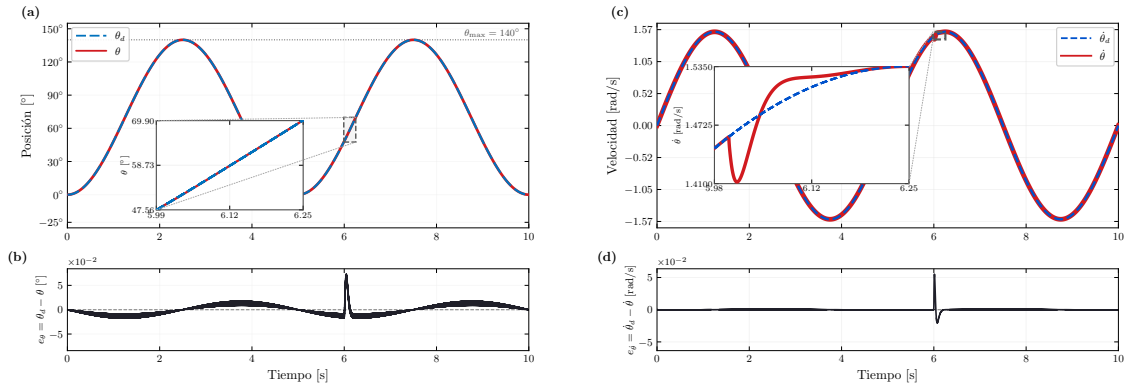


Figura 4.16: Respuesta de la articulación de rodilla ante la aplicación de un escalón de torque externo de 10 Nm en $t = 6$ s: (a) seguimiento de posición articular y el (b) error de seguimiento; (c) seguimiento de velocidad articular y el (d) error de seguimiento.

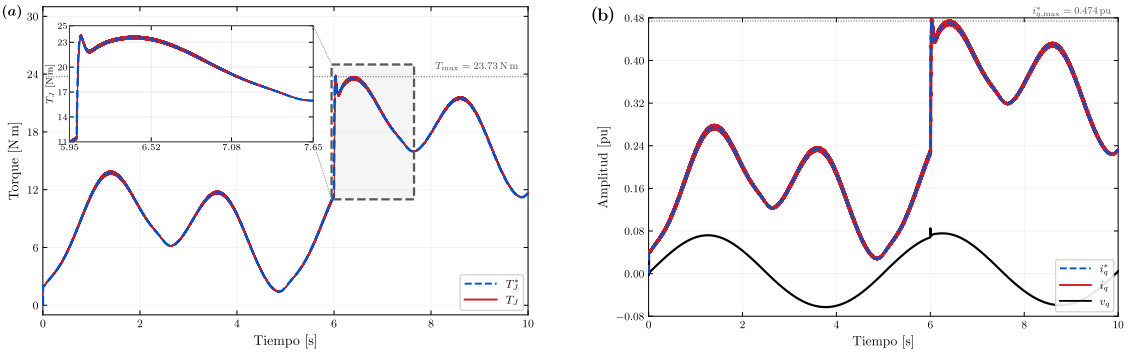


Figura 4.17: Respuesta de la articulación de rodilla ante la aplicación de un escalón de torque externo de 10 Nm en $t = 6$ s: (a) torque articular de referencia T_J^* y torque articular estimado T_J; (b) corriente de referencia i_q^* y corriente medida i_q en el eje de cuadratura.

para generar el torque adicional requerido y la corriente medida reproduce esta referencia. La magnitud máxima alcanza $i_{q,\mathrm{pk}} = 0{,}474$ pu.

Durante el ensayo no se activaron los límites de torque o corriente ni la saturación vectorial de tensión. Por tanto, la respuesta observada corresponde a la acción del esquema CTC–FOC sin intervención de las saturaciones implementadas. El ensayo muestra que el controlador compensa una perturbación de torque constante no incluida en su modelo y mantiene el seguimiento de la trayectoria después de una desviación transitoria reducida.

4.3.2. Escenario de codo

4.3.2.a. Caso de estudio 1: trayectoria de mínimo *jerk* en condición nominal

Este caso de estudio evalúa el seguimiento de una trayectoria de mínimo *jerk* en la articulación de codo, sin torque externo aplicado, es decir, con $T_{\mathrm{ext}}(t) = 0$, y considerando la dinámica nominal del conjunto antebrazo–mano. A diferencia de la referencia periódica

empleada en el escenario de rodilla, aquí se ejecuta un único movimiento de flexión desde 0° hasta 150°, con condiciones de velocidad y aceleración nulas en ambos extremos.

La trayectoria corresponde al perfil definido en la sección 3.4.2. El movimiento se completa en $T = 5$ s, mientras que la simulación se extiende hasta $t_f = 6$ s para observar el sostenimiento de la posición final. Los parámetros utilizados corresponden a los establecidos en (3.28).

Para $\Delta\theta = 150° = 2{,}6180$ rad y $T = 5$ s, las magnitudes características de la referencia son:

$$\dot{\theta}_{d,\text{máx}} = \frac{1{,}875\,\Delta\theta}{T} = 0{,}98175 \text{ rad/s}, \qquad \ddot{\theta}_{d,\text{máx}} = \frac{10\,\Delta\theta}{\sqrt{3}\,T^2} = 0{,}60460 \text{ rad/s}^2. \tag{4.34}$$

Para el mismo perfil, el valor RMS y la magnitud máxima del jerk de referencia se obtienen mediante:

$$j_{\text{RMS,ref}} = \frac{\sqrt{720}\,\Delta\theta}{T^3} = 0{,}56199 \text{ rad/s}^3, \qquad j_{\text{pk,ref}} = \frac{60\,\Delta\theta}{T^3} = 1{,}25664 \text{ rad/s}^3. \tag{4.35}$$

Los puntos característicos del movimiento se presentan en la Tabla 4.6. La primera mitad corresponde a la fase de aceleración, mientras que la segunda representa el frenado previo a la llegada a 150°.

Tabla 4.6: Puntos característicos de la trayectoria de mínimo *jerk* para codo.

Tiempo	**Posición**	**Velocidad**	**Aceleración**	**Interpretación**
$t = 0$	0°	0	0	Inicio en reposo
$t \approx 1{,}06\,\text{s}$	10°	$+\dot{\theta}_d$	$+\ddot{\theta}_{d,\text{máx}}$	Máxima aceleración
$t = 2{,}5\,\text{s}$	75°	$+\dot{\theta}_{d,\text{máx}}$	0	Máxima velocidad
$t \approx 2{,}77\,\text{s}$	90°	$+\dot{\theta}_d$	$-\ddot{\theta}_d$	Máxima contribución gravitacional
$t \approx 3{,}94\,\text{s}$	140°	$+\dot{\theta}_d$	$-\ddot{\theta}_{d,\text{máx}}$	Máxima desaceleración
$t = 5\,\text{s}$	150°	0	0	Llegada en reposo
$t > 5\,\text{s}$	150°	0	0	Sostenimiento final

La Fig. 4.18 presenta el seguimiento de posición. La respuesta articular reproduce la evolución sigmoidal de la referencia y alcanza la posición final sin sobreimpulso apreciable. Para el ensayo completo se obtiene:

$$\text{RMSE}_\theta = 0{,}00329°, \qquad e_{\theta,\text{pk}} = 0{,}00571°. \tag{4.36}$$

La Fig. 4.19 muestra el seguimiento de velocidad. La respuesta parte desde cero, alcanza su máximo en $t = 2{,}5$ s y disminuye posteriormente hasta anularse al completar el desplazamiento. El error presenta:

$$\text{RMSE}_{\dot{\theta}} = 3{,}98 \times 10^{-5} \text{ rad/s}, \qquad e_{\dot{\theta},\text{pk}} = 6{,}30 \times 10^{-5} \text{ rad/s}. \tag{4.37}$$

La Fig. 4.20 compara el torque articular de referencia T_J^*, generado por el CTC, con el torque articular estimado $T_{J,\text{est}}$, calculado a partir del torque electromagnético del motor y referido al eje articular mediante la relación de transmisión y su eficiencia. Ambas señales

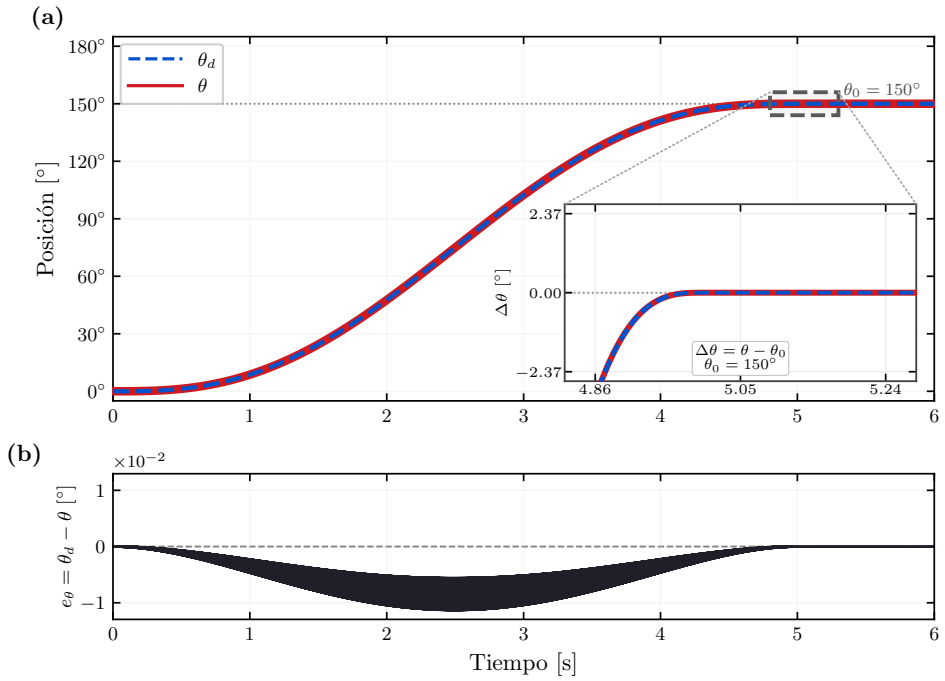


Figura 4.18: Seguimiento de posición durante la trayectoria de mínimo *jerk*: (a) posición de referencia θ_d y posición simulada θ; (b) error de posición articular $e_\theta = \theta_d - \theta$.

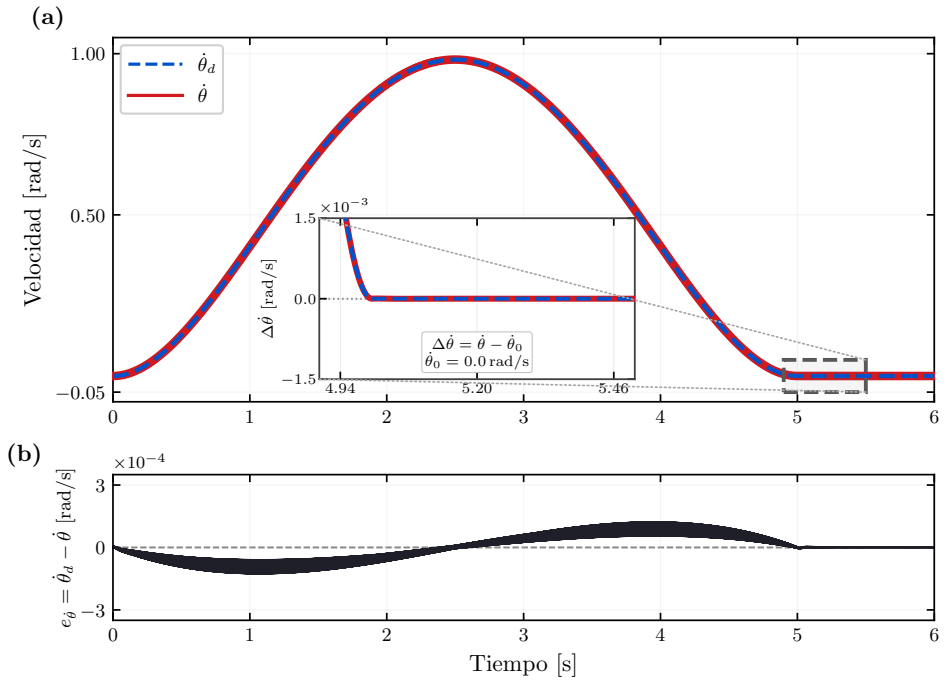


Figura 4.19: Seguimiento de velocidad durante la trayectoria de mínimo *jerk*: (a) velocidad de referencia $\dot{\theta}_d$ y velocidad simulada $\dot{\theta}$; (b) error de velocidad articular $e_{\dot{\theta}} = \dot{\theta}_d - \dot{\theta}$.

permanecen próximas durante el desplazamiento y el sostenimiento final, con un error $\mathrm{RMSE}_{T_J} = 6{,}29 \times 10^{-4}$ Nm.

La forma del torque se obtiene por la superposición de las contribuciones inercial, gravitacional y de fricción. Cuando los errores de seguimiento son pequeños, su componente de prealimentación puede escribirse como:

$$T_{J,\mathrm{ff}} = M_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{codo}} \ddot{\theta}_d + m_{\mathrm{codo}} g \ell_{\mathrm{codo}} \sin\theta_d + F_v \dot{\theta}_d + F_c \tanh\left(\frac{\dot{\theta}_d}{\varepsilon}\right). \tag{4.38}$$

Durante la primera mitad del movimiento, la aceleración positiva y la velocidad creciente incrementan las contribuciones inercial y de fricción. Posteriormente, la articulación atraviesa 90° aproximadamente en $t = 2{,}77$ s, posición en la que la componente gravitacional alcanza su máximo. En la segunda mitad, la aceleración negativa reduce el torque mientras el movimiento se aproxima a la posición final.

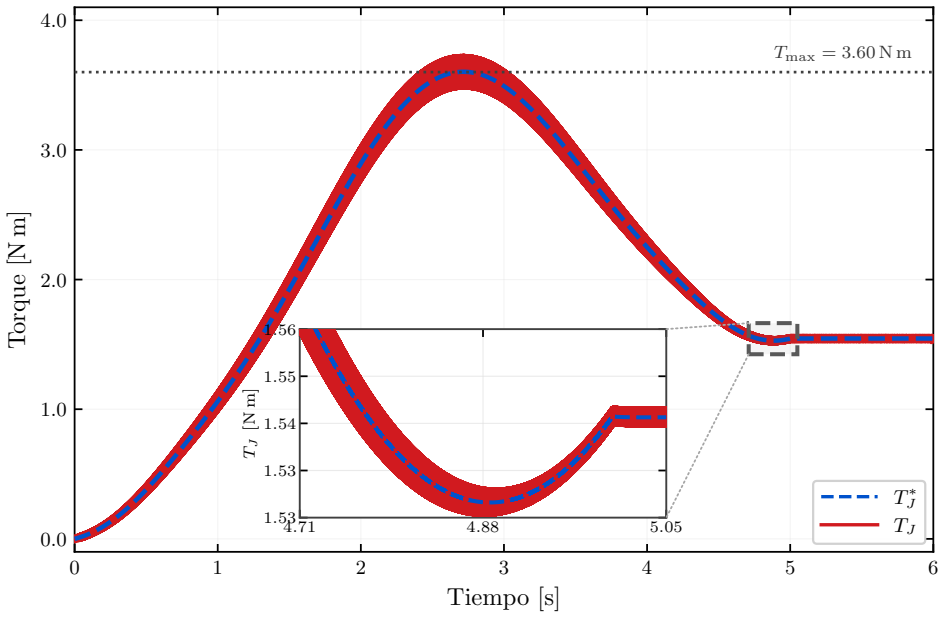


Figura 4.20: Torque articular de referencia T_J^* y torque articular estimado $T_{J,\mathrm{est}}$ durante la trayectoria de mínimo *jerk*.

Al finalizar el desplazamiento, para $t \geq 5$ s, la velocidad y la aceleración de referencia son nulas. Por ende, desaparecen las contribuciones inercial y disipativa asociadas al movimiento, mientras que el accionamiento conserva un torque distinto de cero para sostener el antebrazo en $\theta = 150°$ frente a la gravedad. La dependencia angular de esta contribución está dada por:

$$T_g(\theta) = m_{\mathrm{codo}} g \ell_{\mathrm{codo}} \sin\theta. \tag{4.39}$$

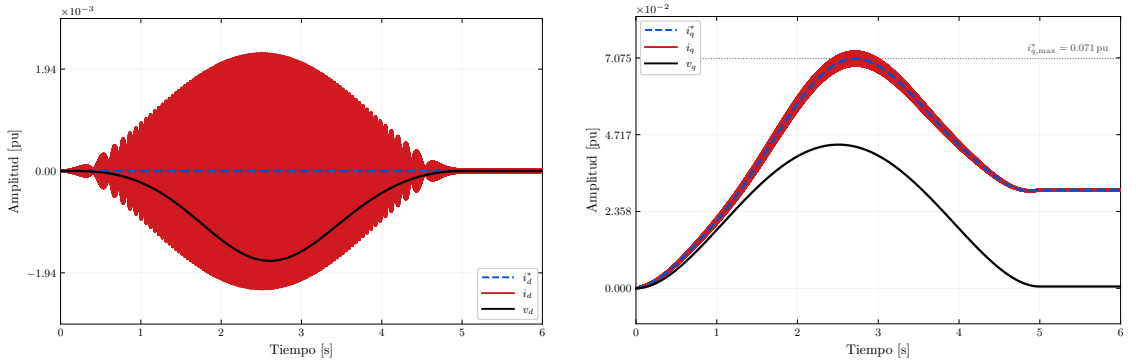
Durante el sostenimiento, el torque de referencia y el torque articular estimado convergen aproximadamente a 1,545 Nm. El error RMS entre ambas señales en esta etapa corresponde a $9{,}05 \times 10^{-5}$ Nm. Por lo tanto, una vez completada la trayectoria, el accionamiento mantiene el esfuerzo requerido para conservar la posición final sin oscilaciones apreciables.

En el ensayo completo, el torque articular alcanza:

$$T_{J,\mathrm{pk}} = 3{,}603 \text{ Nm}, \qquad T_{J,\mathrm{RMS}} = 2{,}245 \text{ Nm}. \tag{4.40}$$

El máximo permanece 11,398 Nm por debajo del límite articular configurado de 15 Nm.

La Fig. 4.21 presenta las corrientes de referencia y medidas en los ejes d y q. La corriente de eje directo permanece alrededor de la referencia $i_d^* = 0$, mientras que la corriente i_q reproduce la evolución del torque solicitado durante el movimiento y se estabiliza en el valor requerido para mantener la posición final.



(a) Corriente en el eje directo i_d. (b) Corriente en el eje de cuadratura i_q.

Figura 4.21: Corrientes de referencia y medidas en los ejes d y q durante la trayectoria de mínimo *jerk* del codo.

La magnitud de corriente en el plano dq alcanza

$$I_{dq,\mathrm{máx}} = 0{,}07053 \text{ pu} = 0{,}20945 \text{ A}, \tag{4.41}$$

mientras que su valor RMS corresponde a

$$I_{dq,\mathrm{RMS}} = 0{,}04395 \text{ pu} = 0{,}13051 \text{ A}. \tag{4.42}$$

Estas magnitudes permanecen por debajo del límite operacional de 1,5 pu.

La suavidad del movimiento ejecutado se caracteriza mediante:

$$j_{\mathrm{RMS}} = 0{,}56195 \text{ rad/s}^3, \qquad j_{\mathrm{pk}} = 1{,}31395 \text{ rad/s}^3. \tag{4.43}$$

El valor RMS medido difiere solamente un 0,0064 % del resultado analítico obtenido en (4.35). Esta concordancia muestra que la trayectoria ejecutada conserva la suavidad cinemática establecida por el perfil de mínimo *jerk*.

Durante la simulación no se activaron la saturación de torque, la saturación de tensión ni los límites operacional y absoluto de corriente. Por lo tanto, los errores obtenidos corresponden al funcionamiento del esquema CTC–FOC sin intervención de las saturaciones implementadas. El caso nominal establece la respuesta de referencia para evaluar posteriormente el efecto de un torque externo aplicado durante el movimiento del codo.

4.3.2.b. Caso de estudio 2: rechazo de momento resistivo externo

Este caso de estudio evalúa la respuesta del sistema frente a un momento resistivo externo aplicado durante el movimiento de flexión del codo. La referencia se mantiene igual a la del caso nominal, es decir, una trayectoria de mínimo *jerk* desde 0° hasta 150°, ejecutada en $T = 5$ s. El objetivo no es representar un ejercicio resistivo de fortalecimiento, sino verificar si el esquema CTC–FOC conserva el seguimiento cuando aparece una oposición transitoria al movimiento guiado.

La perturbación se introduce en el eje articular y se modela mediante el pulso rectangular:

$$T_{\text{ext}}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ T_p, & t_1 \le t < t_2, \\ 0, & t \ge t_2, \end{cases} \tag{4.44}$$

donde

$$T_p = \{1{,}0;\ 1{,}5;\ 2{,}0\}\ \text{Nm}, \qquad [t_1, t_2) = [2{,}0,\ 2{,}8)\ \text{s}. \tag{4.45}$$

La Fig. 4.22 muestra las perturbaciones de torque aplicadas sobre la planta mecánica para los tres niveles considerados.

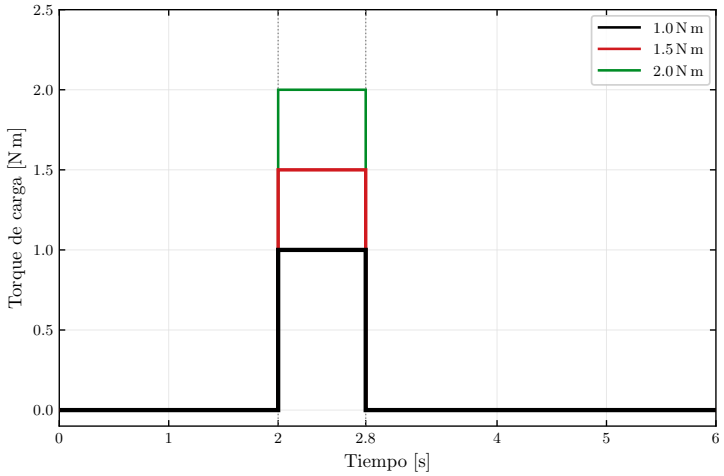


Figura 4.22: Torques externos aplicados sobre el eje articular para $T_p = 1{,}0$ Nm, 1,5 Nm y 2,0 Nm, activos durante el intervalo $2{,}0 \le t < 2{,}8$ s.

El intervalo seleccionado comprende la zona de mayor velocidad de la trayectoria, cuyo máximo ocurre en $t = 2{,}5$ s, y se extiende hasta el paso por $\theta_d = 90°$, aproximadamente en $t = 2{,}77$ s, donde la contribución gravitacional alcanza su máximo. De este modo, el rechazo se evalúa durante una fase de elevada demanda cinemática y mecánica.

La Fig. 4.23 presenta el seguimiento de posición para los tres niveles de perturbación. Las respuestas permanecen próximas a la referencia y las desviaciones se concentran alrededor de los flancos del pulso. En su entrada, el momento resistivo reduce transitoriamente el avance de la articulación; en su retiro, el cambio abrupto del torque neto produce una desviación de signo contrario antes de recuperar la trayectoria.

Para el ensayo completo, los errores RMS de posición, ordenados según T_p, son:

$$\mathrm{RMSE}_\theta = \{0{,}00586;\ 0{,}00798;\ 0{,}01024\}^\circ. \tag{4.46}$$

Las correspondientes magnitudes máximas alcanzan:

$$e_{\theta,\mathrm{pk}} = \{0{,}04163;\ 0{,}05972;\ 0{,}07781\}^\circ. \tag{4.47}$$

La magnitud máxima global se registra en la respuesta inmediatamente posterior al retiro del pulso. Por consiguiente, no corresponde a un error estacionario, sino al segundo transitorio producido por la perturbación rectangular. Incluso en la condición de 2,0 Nm, el error máximo permanece por debajo de 0,08°.

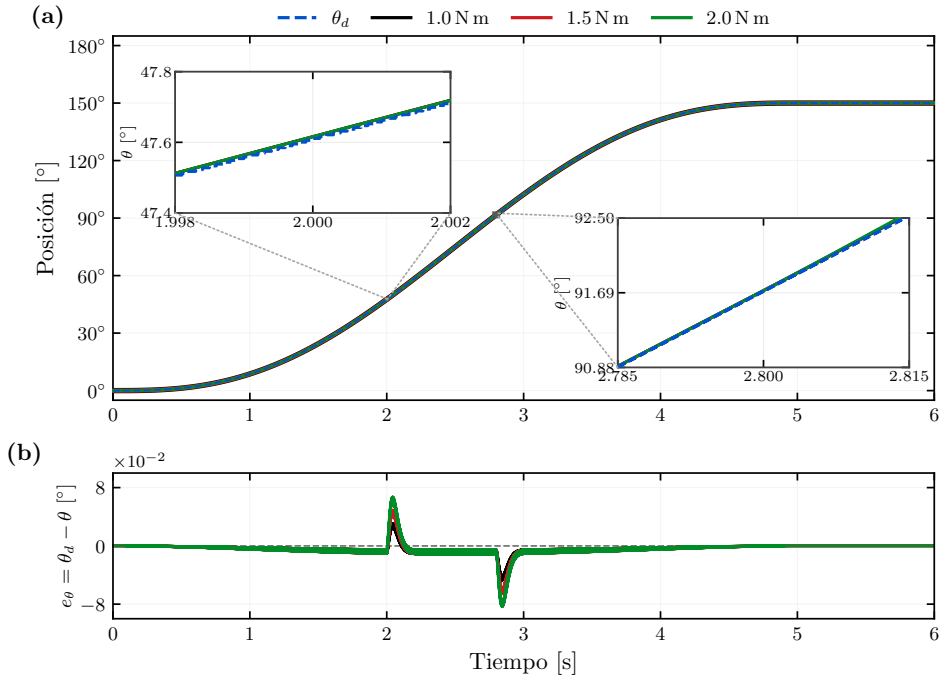


Figura 4.23: Seguimiento de posición ante momentos resistivos de 1,0 Nm, 1,5 Nm y 2,0 Nm: (a) posición de referencia θ_d y posiciones simuladas θ; (b) error de posición $e_\theta = \theta_d - \theta$.

La Fig. 4.24 muestra el seguimiento de velocidad. En esta variable los flancos del pulso resultan más visibles, debido a que el momento resistivo modifica directamente el torque neto disponible para acelerar la articulación. La dinámica durante la perturbación puede expresarse como:

$$M_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{codo}}\ddot{\theta} = T_J - m_{\mathrm{codo}} g \ell_{\mathrm{codo}} \sin\theta - f(\dot{\theta}) - T_{\mathrm{ext}}. \tag{4.48}$$

En la entrada del pulso, T_{ext} reduce el torque neto y genera una disminución transitoria de velocidad. La acción correctiva del CTC aumenta posteriormente la consigna de torque. Cuando el pulso se retira en $t = 2{,}8$ s, el torque neto cambia nuevamente de forma abrupta y produce el segundo transitorio observado en la figura.

Los errores RMS de velocidad durante el ensayo completo son:

$$\mathrm{RMSE}_{\dot{\theta}} = \{2{,}30;\ 3{,}45;\ 4{,}60\} \times 10^{-3}\ \mathrm{rad/s}, \tag{4.49}$$

mientras que sus magnitudes máximas corresponden a:

$$e_{\dot{\theta},\mathrm{pk}} = \{2{,}443;\ 3{,}665;\ 4{,}887\} \times 10^{-2}\ \mathrm{rad/s}. \tag{4.50}$$

Los máximos se concentran inmediatamente después de los cambios de estado del pulso y aumentan de forma aproximadamente proporcional a T_p. Una vez extinguidos estos transitorios, el error retorna hacia cero y no se observa una desviación sostenida de velocidad.

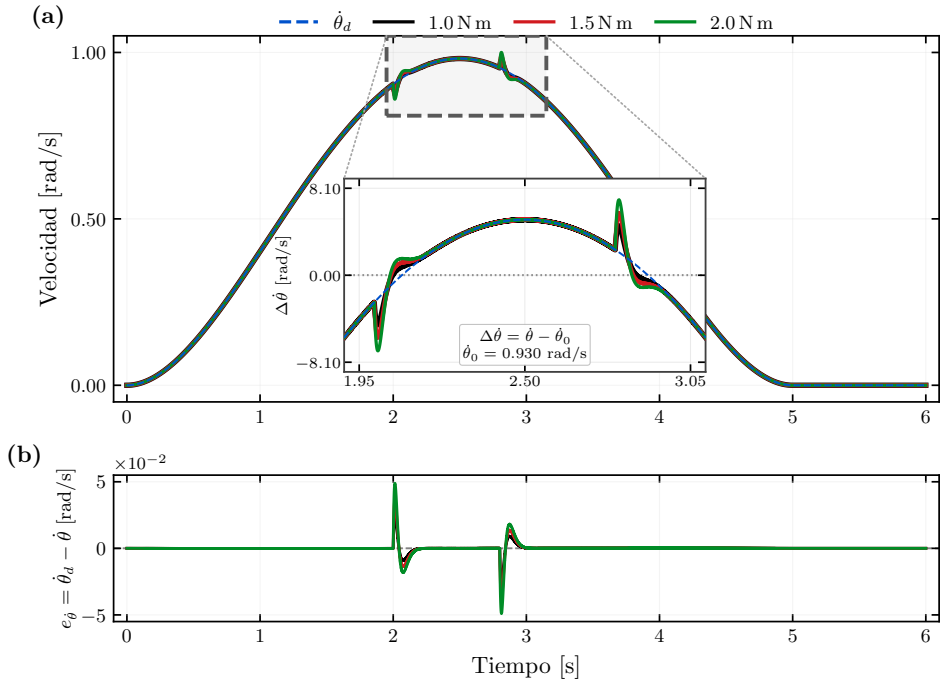


Figura 4.24: Seguimiento de velocidad ante momentos resistivos de 1,0 Nm, 1,5 Nm y 2,0 Nm: (a) velocidad de referencia $\dot{\theta}_d$ y velocidades simuladas $\dot{\theta}$; (b) error de velocidad $e_{\dot{\theta}} = \dot{\theta}_d - \dot{\theta}$.

La Fig. 4.25 resume los errores RMS de posición y velocidad. Ambas métricas presentan un crecimiento monotónico con la amplitud del momento resistivo. Sin embargo, sus magnitudes muestran que la perturbación afecta principalmente los transitorios asociados a los flancos del pulso, sin producir una degradación acumulativa del seguimiento.

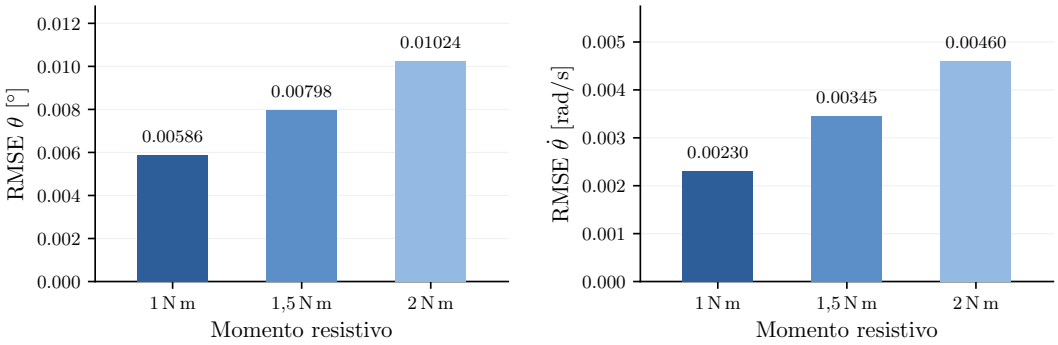
La Fig. 4.26 compara el torque articular de referencia T_J^*, generado por el CTC, con el torque articular estimado $T_{J,\mathrm{est}}$. Durante el intervalo $2{,}0 \leq t < 2{,}8$ s, el controlador incrementa la consigna de torque para contrarrestar la oposición externa. Al finalizar el pulso, el torque retorna al nivel determinado por la trayectoria nominal.

Las magnitudes máximas del torque articular estimado son:

$$T_{J,\mathrm{pk}} = \{4{,}603;\ 5{,}103;\ 5{,}603\}\ \mathrm{Nm}, \tag{4.51}$$

y sus valores RMS durante el ensayo completo corresponden a:

$$T_{J,\mathrm{RMS}} = \{2{,}465;\ 2{,}588;\ 2{,}717\}\ \mathrm{Nm}. \tag{4.52}$$



(a) Errores RMS de posicion. **(b)** Errores RMS de velocidad.

Figura 4.25: Errores RMS durante el ensayo completo para los tres niveles de momento resistivo: (a) error RMS de posición y (b) error RMS de velocidad.

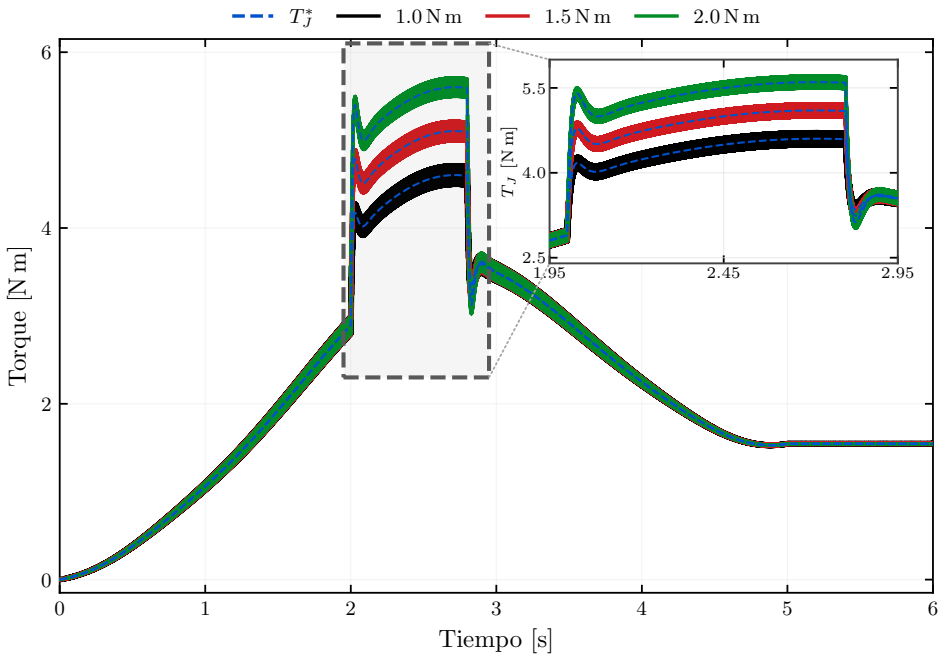


Figura 4.26: Torque articular de referencia T_J^* y torque articular estimado $T_{J,\text{est}}$ para los tres niveles de momento resistivo. El recuadro ampliado muestra la respuesta durante la aplicación y el retiro del pulso.

En el caso nominal se obtuvo $T_{J,\text{pk}} = 3{,}603$ Nm. Por tanto, los incrementos producidos por la perturbación son:

$$\Delta T_{J,\text{pk}} = T_{J,\text{pk}}(T_p) - T_{J,\text{pk}}(0) = \{1{,}000;\ 1{,}500;\ 2{,}000\}\ \text{Nm}. \tag{4.53}$$

Estos incrementos satisfacen:

$$\Delta T_{J,\text{pk}} = T_p, \tag{4.54}$$

Esta correspondencia es consistente con el balance mecánico en el eje articular: durante la aplicación de la perturbación, el accionamiento debe desarrollar un incremento de torque

aproximadamente igual al momento resistivo externo para mantener el seguimiento de la trayectoria. En el modelo computacional se considera además una transmisión ideal, $\eta_{\text{sim}} = 1$, por lo que no se introducen pérdidas adicionales en esta relación.

El error RMS entre T_J^* y $T_{J,\text{est}}$ durante el ensayo completo es:

$$\text{RMSE}_{T_J} = \{3{,}16;\ 4{,}68;\ 6{,}20\} \times 10^{-3}\ \text{Nm}. \tag{4.55}$$

Incluso al evaluar únicamente la ventana del pulso, el error RMS de torque no supera $1{,}20 \times 10^{-2}$ Nm. Por tanto, el lazo interno FOC reproduce la consigna generada por el CTC mientras aumenta la demanda mecánica.

Los márgenes respecto del límite articular de 15 Nm son 10,398 Nm, 9,898 Nm y 9,398 Nm, respectivamente. En ninguno de los tres casos se activa la saturación de torque.

La Fig. 4.27 presenta las referencias y corrientes medidas en los ejes d y q, junto con las tensiones aplicadas por el controlador. La corriente i_d permanece alrededor de $i_d^* = 0$, con oscilaciones del orden de 10^{-3} pu. El efecto principal de la perturbación se concentra en i_q, cuya referencia aumenta durante el pulso para generar el torque adicional requerido.

La magnitud vectorial de corriente alcanza los valores máximos:

$$I_{dq,\text{pk}} = \{0{,}09010;\ 0{,}09989;\ 0{,}10968\}\ \text{pu}, \tag{4.56}$$

equivalentes a:

$$I_{dq,\text{pk}} = \{0{,}26759;\ 0{,}29666;\ 0{,}32573\}\ \text{A}. \tag{4.57}$$

Los valores RMS durante el ensayo completo son:

$$I_{dq,\text{RMS}} = \{0{,}04826;\ 0{,}05066;\ 0{,}05319\}\ \text{pu}, \tag{4.58}$$

equivalentes a $\{0{,}14331;\ 0{,}15044;\ 0{,}15797\}$ A.

Respecto del máximo nominal de 0,07053 pu, los incrementos de corriente son:

$$\Delta I_{dq,\text{pk}} = \{0{,}01958;\ 0{,}02936;\ 0{,}03915\}\ \text{pu}. \tag{4.59}$$

La relación entre estos incrementos es $1 : 1{,}5 : 2$, igual a la relación entre las amplitudes de los momentos resistivos. Esto confirma la cadena causal entre perturbación, torque compensatorio y corriente de eje q. El mayor valor de corriente corresponde únicamente al 7,3 % del límite operacional de 1,5 pu.

En este escenario, el *jerk* calculado a partir de la aceleración medida no se utiliza como indicador de suavidad. El momento resistivo se aplica mediante una señal rectangular, cuya derivada ideal está dada por:

$$\frac{\mathrm{d}T_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = T_p \left[\delta(t - t_1) - \delta(t - t_2)\right], \tag{4.60}$$

donde $\delta(\cdot)$ representa la delta de Dirac. Por tanto, los flancos del pulso producen cambios abruptos en la aceleración y componentes impulsivas en el *jerk*. En la implementación discreta, la magnitud numérica de estos máximos depende del período de muestreo y de la representación discreta de la discontinuidad.

En los tres ensayos, el máximo de *jerk* se registra en $t = 2{,}0001$ s, inmediatamente después de la entrada del pulso, y su magnitud aumenta proporcionalmente con T_p. Esta

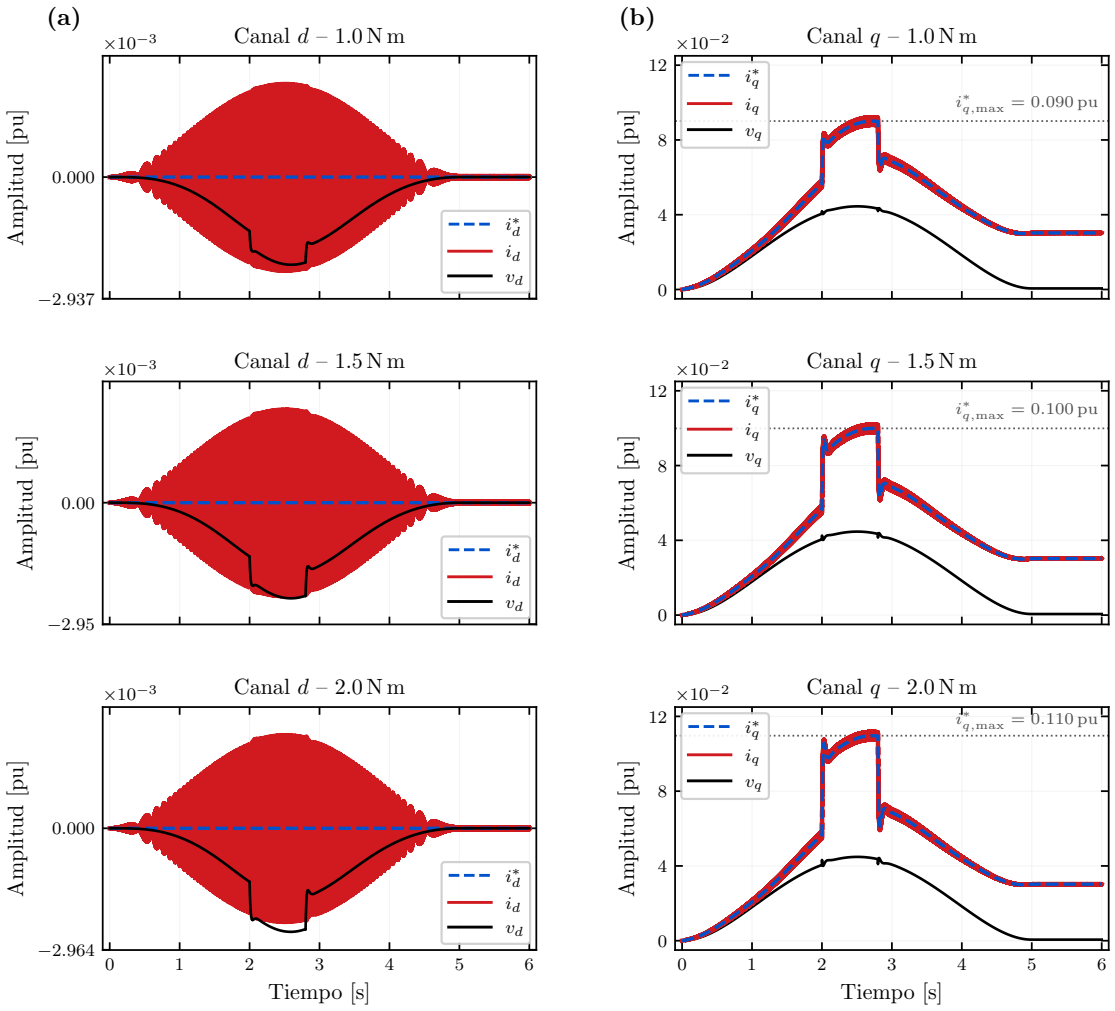


Figura 4.27: Referencias y corrientes medidas en los ejes d y q, junto con las tensiones aplicadas, para los tres niveles de momento resistivo. Cada fila corresponde a una amplitud de perturbación: 1,0 Nm, 1,5 Nm y 2,0 Nm.

coincidencia temporal confirma que dichos máximos están determinados por el flanco de la perturbación y no por una pérdida de suavidad de la referencia de mínimo *jerk*. Por esta razón, estas magnitudes no se comparan con el caso nominal como métricas de desempeño cinemático.

Durante los tres ensayos no se activaron la saturación de torque, la saturación de tensión ni los límites operacional y absoluto de corriente. En la condición más exigente, correspondiente a $T_p = 2{,}0$ Nm, el error máximo de posición permanece por debajo de 0,08°, el error máximo de velocidad es inferior a 0,049 rad/s, el torque máximo alcanza 5,603 Nm y la corriente máxima corresponde a 0,10968 pu.

En conjunto, los resultados muestran que el esquema CTC–FOC rechaza los momentos resistivos considerados mediante un aumento transitorio y proporcional del torque articular y de la corriente i_q. La perturbación produce desviaciones localizadas en los flancos de entrada y salida, pero no genera un error sostenido ni conduce al accionamiento hacia sus límites operacionales.

4.4. Síntesis comparativa de los escenarios

Los escenarios principales permiten evaluar el esquema CTC–FOC frente a distintos tipos de exigencia mecánica. En la rodilla se estudia, por una parte, una variación paramétrica producida por masas distales no incorporadas en el modelo nominal del controlador y, por otra, el rechazo de un escalón de torque externo aplicado sobre la planta. En el codo se analiza el rechazo de un torque resistivo externo aplicado transitoriamente durante el movimiento. Los casos nominales establecen las condiciones de referencia para cada articulación.

La Tabla 4.7 resume las métricas más representativas. Los márgenes de torque se calculan respecto de los límites configurados de 45 Nm para la rodilla y 15 Nm para el codo.

Tabla 4.7: Síntesis de los resultados obtenidos en los escenarios principales.

Condición	$\mathbf{RMSE}_{\boldsymbol{\theta}}$ [°]	$\mathbf{RMSE}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}}$ [rad/s]	$\boldsymbol{T}_{J,\mathrm{pk}}$ [Nm]	**Margen de torque** [Nm]	$\boldsymbol{I}_{dq,\mathrm{pk}}$ [pu]
Rodilla nominal	0,00622	$1{,}37 \times 10^{-4}$	14,15	30,85	0,277
Rodilla +50 %	0,00571	$1{,}75 \times 10^{-4}$	20,77	24,23	0,407
Rodilla +150 %	0,00964	$4{,}23 \times 10^{-4}$	34,02	10,98	0,666
Rodilla +200 %	0,01263	$5{,}62 \times 10^{-4}$	40,64	4,36	0,796
Rodilla, $T_{\mathrm{ext}} = 10$ Nm	0,00946	$4{,}02 \times 10^{-3}$	23,73	21,27	0,474
Codo nominal	0,00329	$3{,}98 \times 10^{-5}$	3,603	11,398	0,071
Codo, $T_p = 1{,}0$ Nm	0,00586	$2{,}30 \times 10^{-3}$	4,603	10,398	0,090
Codo, $T_p = 1{,}5$ Nm	0,00798	$3{,}45 \times 10^{-3}$	5,103	9,898	0,099
Codo, $T_p = 2{,}0$ Nm	0,01024	$4{,}60 \times 10^{-3}$	5,603	9,398	0,110

Los casos nominales muestran un seguimiento de posición y velocidad con errores reducidos en ambas articulaciones. La rodilla presenta una demanda mecánica mayor, asociada principalmente a la compensación gravitacional del conjunto pierna–pie y a sus contribuciones inercial y disipativa. El codo, en cambio, opera con menores niveles de torque y corriente durante la trayectoria de mínimo *jerk* y mantiene un torque distinto de cero al finalizar el movimiento para sostener la posición de 150°.

Aunque los errores nominales del codo resultan menores que los obtenidos en la rodilla, esta diferencia no debe interpretarse como un mejor ajuste del controlador. Ambos escenarios emplean trayectorias, duraciones, rangos articulares y condiciones mecánicas diferentes, por lo que las métricas deben analizarse dentro de cada condición de operación.

En la rodilla, la incorporación de masas distales únicamente en la planta genera una discrepancia persistente respecto del modelo nominal utilizado por el CTC. El incremento de carga se refleja principalmente en una mayor demanda de torque y corriente, mientras que los errores de seguimiento permanecen reducidos. La condición +200 % constituye el caso más exigente: utiliza aproximadamente el 90,3 % del límite articular de torque, pero solo el 53,0 % del límite operacional de corriente. En consecuencia, dentro de la configuración evaluada, el margen mecánico resulta más restrictivo que el margen eléctrico.

El ensayo adicional de rodilla con $T_{\mathrm{ext}} = 10$ Nm permite distinguir este comportamiento de una perturbación externa aplicada directamente sobre la planta. En este caso, los parámetros nominales permanecen inalterados y la perturbación produce una desviación transitoria de posición y velocidad. La recuperación del seguimiento se obtiene mediante un incremento del torque solicitado y de la corriente i_{sq}, sin activación de las saturaciones

implementadas.

En el escenario de codo, los pulsos resistivos producen transitorios localizados en sus instantes de aplicación y retiro. Al aumentar T_p, crecen los errores de posición y velocidad y el esfuerzo requerido por el accionamiento, pero no aparece una desviación acumulativa del seguimiento. Para la condición más exigente, $T_p = 2{,}0$ Nm, el error máximo de posición permanece por debajo de $0{,}08^\circ$ y el error máximo de velocidad es inferior a 0,049 rad/s.

El aumento del torque articular requerido durante estos ensayos sigue la magnitud de la perturbación aplicada. Para $T_p = \{1{,}0;\ 1{,}5;\ 2{,}0\}$ Nm, se obtiene:

$$\Delta T_{J,\mathrm{pk}} = \{1{,}000;\ 1{,}500;\ 2{,}000\}\ \mathrm{Nm}, \tag{4.61}$$

por lo que, para los casos evaluados:

$$\Delta T_{J,\mathrm{pk}} \approx T_p. \tag{4.62}$$

Esta correspondencia es consistente con el balance mecánico en el eje articular: el accionamiento incrementa el torque desarrollado para compensar el momento resistivo aplicado. La transmisión ideal considerada en el modelo, $\eta_{\mathrm{sim}} = 1$, evita además la incorporación de pérdidas adicionales en esta relación.

Incluso en la condición $T_p = 2{,}0$ Nm, el torque máximo utiliza solo el 37,4 % del límite articular del codo y la corriente máxima representa el 7,3 % del límite operacional. Por tanto, el rechazo de estas perturbaciones se obtiene con un margen amplio respecto de las restricciones configuradas.

En conjunto, los ensayos muestran dos comportamientos complementarios de la estrategia de control. Cuando la discrepancia respecto del modelo nominal es persistente, como ocurre con las masas distales añadidas, la realimentación mantiene el seguimiento aunque los errores aumentan gradualmente con la diferencia paramétrica. En cambio, ante perturbaciones externas aplicadas de forma abrupta, las mayores desviaciones se concentran en los transitorios de entrada o salida, recuperándose posteriormente el seguimiento. Estos resultados muestran el aporte de la compensación basada en modelo del CTC en condiciones nominales y de la realimentación frente a dinámicas no incluidas explícitamente en dicho modelo.

La comparación entre T_J^* y $T_{J,\mathrm{est}}$ permite separar este comportamiento del desempeño del lazo interno FOC. Considerando los escenarios principales, el mayor error RMS de torque corresponde a $1{,}35 \times 10^{-2}$ Nm, registrado en la condición de rodilla con +200 % de masa distal. Por tanto, el aumento de los errores articulares observado al incrementar las perturbaciones se relaciona principalmente con la diferencia entre la dinámica efectiva de la planta y la acción calculada por el CTC, y no con una incapacidad del lazo de corriente para reproducir la consigna de torque.

La suavidad cinemática debe interpretarse de acuerdo con la regularidad de cada excitación. En la trayectoria senoidal de rodilla y en sus variantes con masa añadida, el *jerk* RMS permanece alrededor de 1,714 rad/s^3, lo que indica que el incremento de carga modifica principalmente el esfuerzo requerido sin alterar de forma apreciable la trayectoria ejecutada. En el caso nominal de codo, el valor medido de 0,56195 rad/s^3 concuerda con el resultado analítico del perfil de mínimo *jerk*.

Estos valores no deben utilizarse para concluir directamente que una trayectoria es más suave que la otra, debido a que ambos movimientos poseen amplitudes, duraciones

y perfiles temporales diferentes. Su utilidad en este análisis consiste en comprobar la correspondencia entre la referencia y el movimiento ejecutado dentro de cada escenario.

En los ensayos de codo con perturbación rectangular, el *jerk* numérico no constituye una métrica directamente comparable con los casos nominales, ya que los flancos del pulso introducen cambios discontinuos en la aceleración y, por ende, componentes impulsivas en el *jerk*. Su magnitud numérica depende del período de muestreo y del procedimiento de diferenciación utilizado.

En todos los escenarios principales se mantuvieron inactivos los indicadores de saturación de torque y tensión, así como los límites operacional y absoluto de corriente. De esta forma, los resultados permiten observar la cadena de actuación del esquema implementado:

$$\{\theta_d, \dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d\} \longrightarrow T_J^* \longrightarrow i_q^* \longrightarrow \text{FOC–PMSM} \longrightarrow T_{J,\text{est}} \longrightarrow \text{planta mecánica} \longrightarrow \theta. \quad (4.63)$$

El CTC determina el esfuerzo articular requerido a partir de la trayectoria y de las variables realimentadas, mientras que el FOC regula la corriente necesaria para desarrollar dicho esfuerzo mediante el accionamiento.

Los resultados respaldan el funcionamiento del esquema CTC–FOC en el modelo equivalente de un grado de libertad y dentro de los rangos simulados. En particular, muestran seguimiento preciso bajo condiciones nominales, capacidad de compensación frente a variaciones paramétricas de carga y rechazo frente a perturbaciones externas de torque. Estas conclusiones corresponden al entorno de simulación y no constituyen por sí solas una validación clínica o experimental.

Con esta síntesis se cierra la evaluación de los escenarios articulares principales. La sección siguiente complementa estos resultados mediante perfiles de contraste cinemático, con el propósito de estudiar la influencia de la estructura temporal de la referencia sobre el seguimiento y el esfuerzo del accionamiento.

4.5. Evaluación complementaria de perfiles de contraste cinemático

Una vez cerrada la comparación de los escenarios articulares principales, se incorporan evaluaciones complementarias destinadas a estudiar la influencia de la regularidad cinemática de la referencia. Todas las pruebas se realizan sobre el modelo nominal de rodilla, de manera que las diferencias observadas se atribuyen principalmente a la evolución temporal de la posición, la velocidad y la aceleración impuestas.

La evaluación se organiza en dos grupos. En primer lugar, se analiza un perfil trapezoidal en velocidad, cuya velocidad permanece continua, pero cuya aceleración cambia por tramos. Posteriormente, se contrasta una rampa suave, que mantiene continuidad de posición, velocidad y aceleración, con dos trayectorias triangulares: una simétrica y otra asimétrica de retorno rápido. Estas últimas presentan discontinuidades de velocidad. Esta organización permite incrementar progresivamente la exigencia cinemática aplicada al esquema CTC–FOC.

4.5.1. Evaluación complementaria del perfil trapezoidal

Con el propósito de ampliar la evaluación realizada en los escenarios principales, se analiza el comportamiento del esquema CTC–FOC frente a una trayectoria trapezoidal en velocidad. La prueba se implementa sobre el mismo modelo nominal de rodilla utilizado en la sección 3.3.2, por lo que las diferencias respecto del caso senoidal se deben principalmente a la estructura temporal de la referencia.

El movimiento comprende una flexión desde 0° hasta 140° durante 5 s, seguida de un intervalo de sostenimiento hasta $t = 6$ s. La trayectoria se divide en una fase de aceleración entre 0 y 1 s, una fase de velocidad constante entre 1 y 3,5 s, y una fase de desaceleración entre 3,5 y 5 s.

Los valores analíticos de la referencia corresponden a:

$$\dot{\theta}_{d,\text{máx}} = 0{,}65159 \text{ rad/s}, \qquad \ddot{\theta}_{d,\text{ac}} = 0{,}65159 \text{ rad/s}^2, \qquad \ddot{\theta}_{d,\text{des}} = -0{,}43439 \text{ rad/s}^2. \quad (4.64)$$

A diferencia de una referencia senoidal, este perfil mantiene la aceleración constante dentro de cada fase dinámica y presenta cambios instantáneos de aceleración en $t = 1$ s y $t = 3{,}5$ s. Considerando además las condiciones de borde, la aceleración también cambia al iniciar el ensayo en $t = 0$ y al comenzar el sostenimiento en $t = 5$ s. El análisis localizado se concentra en las dos transiciones internas, donde se modifica la estructura dinámica durante el desplazamiento.

La Fig. 4.28 muestra el seguimiento de posición y velocidad. La respuesta angular reproduce el desplazamiento impuesto y alcanza la posición final sin sobreimpulso apreciable. Durante el ensayo completo se obtiene:

$$\text{RMSE}_\theta = 0{,}00279^\circ, \qquad e_{\theta,\text{pk}} = 0{,}00381^\circ. \quad (4.65)$$

El error angular máximo se registra en $t = 1{,}005$ s, inmediatamente después de la primera transición. Esta localización indica que la desviación no se produce por acumulación de error, sino por el cambio de aceleración aplicado al finalizar la primera fase.

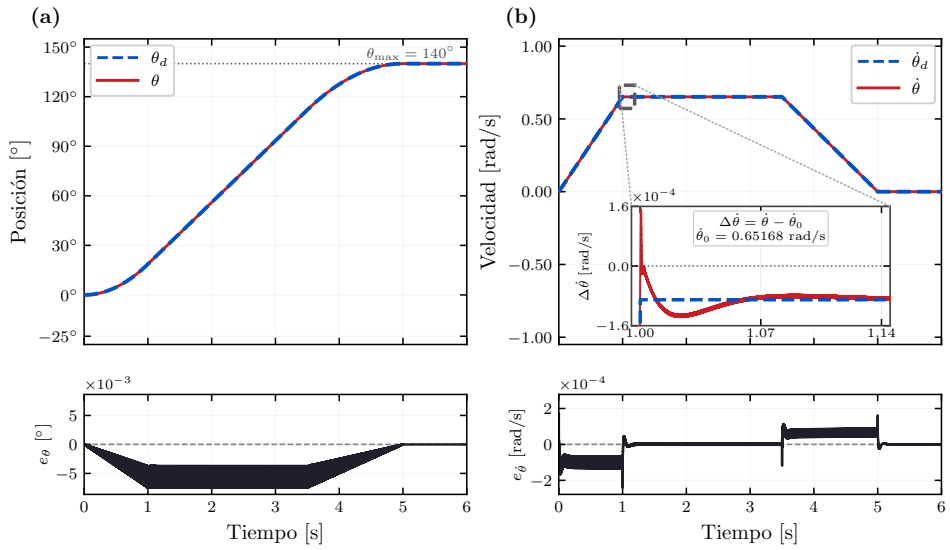


Figura 4.28: Seguimiento del perfil trapezoidal de velocidad para la rodilla: (a) posición de referencia, posición simulada y error angular; (b) velocidad de referencia, velocidad simulada y error de velocidad.

El seguimiento de velocidad presenta:

$$\mathrm{RMSE}_{\dot{\theta}} = 3{,}51 \times 10^{-5} \text{ rad/s}, \qquad e_{\dot{\theta},\mathrm{pk}} = 2{,}42 \times 10^{-4} \text{ rad/s}. \tag{4.66}$$

La desviación máxima de velocidad ocurre en $t = 1{,}0005$ s, prácticamente coincidente con el primer cambio de fase. El análisis por intervalos muestra que el error RMS de velocidad disminuye hasta $6{,}83 \times 10^{-6}$ rad/s durante el crucero, mientras que alcanza $6{,}70 \times 10^{-5}$ rad/s durante la aceleración y $4{,}26 \times 10^{-5}$ rad/s durante la desaceleración. Por lo tanto, la mayor exigencia de seguimiento se concentra en las fases donde existe aceleración y, especialmente, en sus transiciones.

Esta concentración del error en los cambios de fase es consistente con la estructura del CTC, ya que una discontinuidad de $\ddot{\theta}_d$ produce un cambio abrupto de la componente inercial $M_{\mathrm{tot}}\ddot{\theta}_d$ y, por tanto, de la referencia de torque que debe reproducir el accionamiento. La Fig. 4.29 compara el torque articular de referencia con el torque estimado a partir del accionamiento. Ambas señales permanecen prácticamente superpuestas durante todo el ensayo, con un error:

$$\mathrm{RMSE}_{T_J} = 7{,}50 \times 10^{-3} \text{ Nm}. \tag{4.67}$$

Los cambios localizados observados en $t = 1$ s y $t = 3{,}5$ s se deben a la variación instantánea de la componente inercial $M_{\mathrm{tot}}\ddot{\theta}_d$. La segunda transición ocurre, además, en una posición donde la contribución gravitacional es mayor, por lo que el nivel de torque asociado resulta superior.

Durante el ensayo completo, el esfuerzo mecánico alcanza:

$$T_{J,\mathrm{pk}} = 14{,}394 \text{ Nm}, \qquad T_{J,\mathrm{RMS}} = 10{,}166 \text{ Nm}. \tag{4.68}$$

El máximo global se presenta durante el crucero, cerca de la región en que la articulación atraviesa 90° y la contribución gravitacional alcanza su mayor magnitud. Este valor permanece 30,607 Nm por debajo del límite articular configurado de 45 Nm.

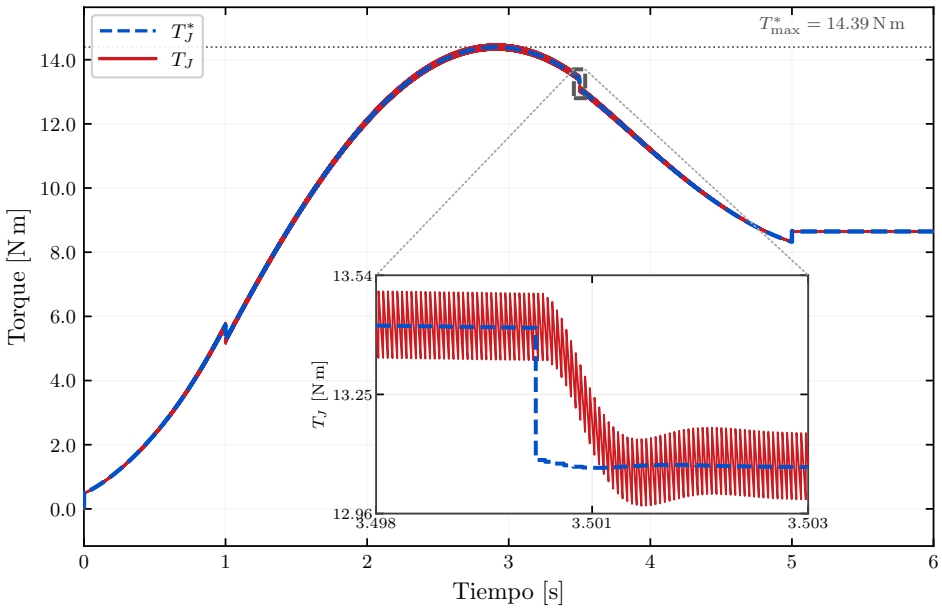
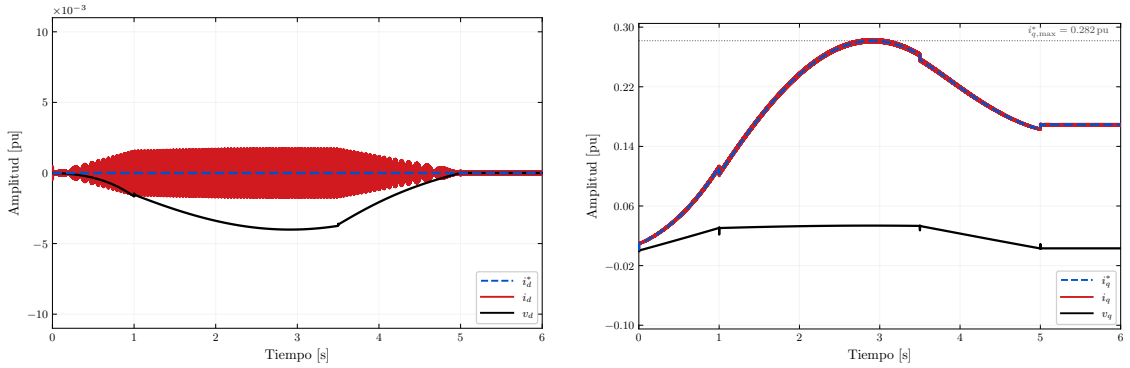


Figura 4.29: Torque articular de referencia T_J^* y torque articular estimado $T_{J,\mathrm{est}}$ durante el perfil trapezoidal de velocidad para la rodilla.



(a) Corriente i_d y tensión aplicada v_d.

(b) Corriente i_q y tensión aplicada v_q.

Figura 4.30: Referencias y corrientes medidas en los ejes d y q, junto con las tensiones aplicadas por el lazo interno de corriente durante el perfil trapezoidal de velocidad para la rodilla.

La Fig. 4.30 presenta la respuesta eléctrica del accionamiento. La corriente i_d permanece alrededor de la referencia $i_d^* = 0$, mientras que i_q sigue la consigna generada por el CTC y reproduce la evolución del torque articular. Los cambios de corriente observados en $t = 1$ s y $t = 3{,}5$ s corresponden a la compensación de las variaciones de torque asociadas a las transiciones del perfil.

La magnitud de corriente en el plano dq alcanza:

$$I_{dq,\mathrm{pk}} = 0{,}28179\ \mathrm{pu} = 0{,}83686\ \mathrm{A}, \qquad I_{dq,\mathrm{RMS}} = 0{,}19900\ \mathrm{pu} = 0{,}59101\ \mathrm{A}. \tag{4.69}$$

Los cambios de corriente asociados a ambas transiciones permanecen ampliamente por debajo del límite operacional de 1,5 pu.

Las aceleraciones medias medidas en las tres fases son:

$$\overline{\ddot{\theta}}_{\mathrm{ac}} = 0{,}65344 \text{ rad/s}^2, \qquad \overline{\ddot{\theta}}_{\mathrm{cr}} = 0{,}00494 \text{ rad/s}^2, \qquad \overline{\ddot{\theta}}_{\mathrm{des}} = -0{,}43160 \text{ rad/s}^2. \tag{4.70}$$

Estas magnitudes concuerdan con los valores analíticos de (4.64): la diferencia relativa es aproximadamente 0,284 % durante la aceleración y 0,642 % durante la desaceleración, mientras que la aceleración media del crucero permanece próxima a cero. La magnitud máxima de la aceleración medida corresponde a 0,702 rad/s^2.

En este perfil, el *jerk* requiere una interpretación diferente a la utilizada para trayectorias suaves. Debido a que la referencia trapezoidal ideal presenta saltos de aceleración, su derivada contiene componentes impulsivas en los cambios de fase. Por esta razón, las magnitudes numéricas del *jerk* dependen de la frecuencia de muestreo, del filtrado y del método de diferenciación, y no se utilizan como indicadores absolutos de suavidad.

Durante la simulación no se activaron la saturación de torque, la saturación de tensión ni los límites operacional y absoluto de corriente. En comparación con el caso senoidal nominal de rodilla, el torque máximo aumenta solamente 0,249 Nm, mientras que la corriente máxima aumenta 0,00487 pu. Por lo tanto, el cambio en la estructura temporal de la referencia introduce exigencias localizadas en las transiciones, pero no modifica de forma significativa el margen operacional del accionamiento.

En síntesis, esta evaluación complementaria muestra que el esquema CTC–FOC puede seguir una referencia trapezoidal en velocidad con errores reducidos y reproducir los cambios de esfuerzo requeridos en cada fase. El perfil constituye un caso de contraste frente a las referencias suaves evaluadas anteriormente, al introducir discontinuidades de aceleración durante el movimiento.

4.5.2. Rampa suave y trayectorias triangulares

A continuación, el contraste cinemático se amplía mediante tres trayectorias periódicas con diferente grado de regularidad: rampa suave, triangular simétrica y triangular asimétrica de retorno rápido. A diferencia del perfil trapezoidal de velocidad, las dos últimas referencias introducen cambios instantáneos de velocidad. Esta comparación permite distinguir el efecto de las discontinuidades de aceleración del producido por las discontinuidades de velocidad.

Los tres perfiles se aplicaron al modelo nominal de rodilla y cubren el mismo rango angular, entre 0° y 140°. Cada trayectoria posee un período de 5 s y se evaluaron dos períodos completos, de modo que la ventana de análisis corresponde a $0 \leq t < 10$ s. De esta forma, las diferencias observadas responden principalmente a la estructura temporal de las referencias y no a cambios en los parámetros mecánicos.

Los perfiles corresponden a las definiciones presentadas en la sección 3.4.4. La rampa suave conserva continuidad hasta la aceleración, mientras que la triangular simétrica presenta inversiones instantáneas de velocidad. En la triangular asimétrica, el avance ocupa el 85 % del período y el retorno el 15 % restante, lo que incrementa la magnitud del cambio de velocidad en sus puntos de inversión. La Fig. 4.31 presenta el seguimiento global de posición para los tres perfiles evaluados. En la rampa suave, la respuesta permanece prácticamente superpuesta a la referencia durante ambos períodos, con $\mathrm{RMSE}_\theta = 0{,}00670°$ y $e_{\theta,\mathrm{pk}} = 0{,}01057°$.

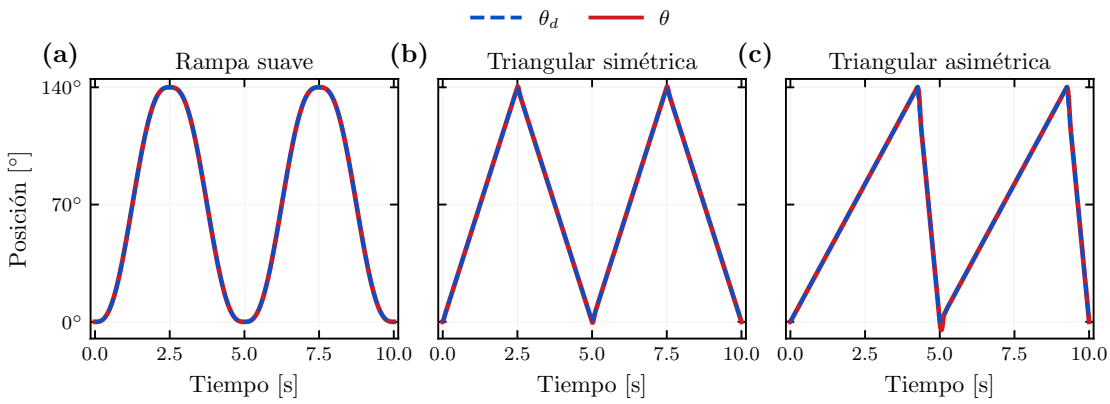


Figura 4.31: Seguimiento de posición para los perfiles de contraste cinemático: (a) rampa suave, (b) triangular simétrica y (c) triangular asimétrica de retorno rápido.

En la trayectoria triangular simétrica, el error aumenta principalmente alrededor del inicio y de las inversiones instantáneas del movimiento, alcanzando un valor RMS de 0,1809° y una magnitud máxima de 1,797°. La trayectoria triangular asimétrica de retorno rápido presenta la mayor desviación, con $\mathrm{RMSE}_\theta = 0{,}8395°$ y $e_{\theta,\mathrm{pk}} = 6{,}710°$. En este último perfil, el retorno concentrado en el 15 % del período exige un cambio de velocidad considerablemente mayor, que no puede ser reproducido instantáneamente por el accionamiento.

Para examinar estos transitorios, la Fig. 4.32 presenta ampliaciones alrededor de los vértices superior e inferior de ambas trayectorias triangulares. En ambas trayectorias se

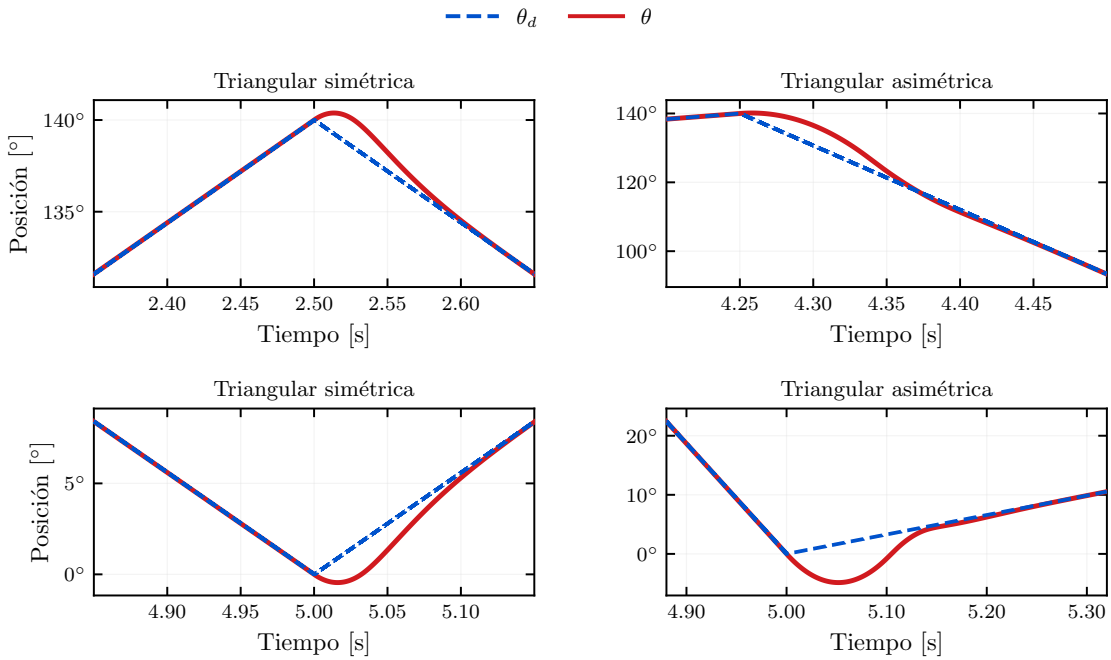


Figura 4.32: Ampliaciones del seguimiento de posición alrededor de los vértices de las trayectorias triangular simétrica y triangular asimétrica de retorno rápido.

observa que la posición simulada permanece próxima a la referencia antes de cada inversión, pero continúa transitoriamente en el sentido anterior del movimiento después del cambio de velocidad impuesto. Esto produce un redondeo de la respuesta y sobrepasos transitorios de los extremos angulares, a diferencia de los vértices definidos de la referencia.

En la trayectoria triangular simétrica, estas desviaciones permanecen relativamente acotadas y se corrigen durante el tramo siguiente. En cambio, la triangular asimétrica presenta una respuesta más pronunciada, especialmente al comenzar el retorno rápido en $t = 4{,}25$ s y al invertir nuevamente el movimiento en $t = 5$ s. En este último instante, la posición simulada desciende transitoriamente por debajo de 0°. Esto muestra que restringir el rango angular de la referencia no garantiza que la posición ejecutada permanezca dentro de ese intervalo, aspecto relevante al seleccionar trayectorias para aplicaciones de rehabilitación asistida.

La Tabla 4.8 resume las métricas globales y los resultados calculados fuera de las ventanas inmediatas de transición. Estas últimas excluyen intervalos de ±0,05 s alrededor de cada cambio de tramo. Por consiguiente, no representan necesariamente un régimen estacionario, sino el seguimiento una vez excluido el entorno más próximo a cada discontinuidad.

Tabla 4.8: Métricas de seguimiento para los perfiles de contraste cinemático.

Perfil	**Posición** [°]			**Velocidad** [rad/s]		
	RMSE total	Error máx	RMSE fuera de trans.	RMSE total	Error máx	RMSE fuera de trans.
Rampa suave	0,006696	0,01057	0,006817	0,0001617	0,0002286	0,0001645
Triangular simétrica	0,1809	1,797	0,08403	0,1215	1,955	0,04744
Triangular asimétrica	0,8395	6,710	0,6713	0,3744	3,833	0,2446

Al excluir las ventanas de transición, el error RMS de posición de la trayectoria triangular simétrica disminuye hasta 0,08403°. En la triangular asimétrica, en cambio, permanece en 0,6713°. Esta diferencia muestra que el efecto del retorno rápido no se limita al entorno inmediato de los vértices, sino que la recuperación del seguimiento se prolonga durante el tramo posterior a la inversión.

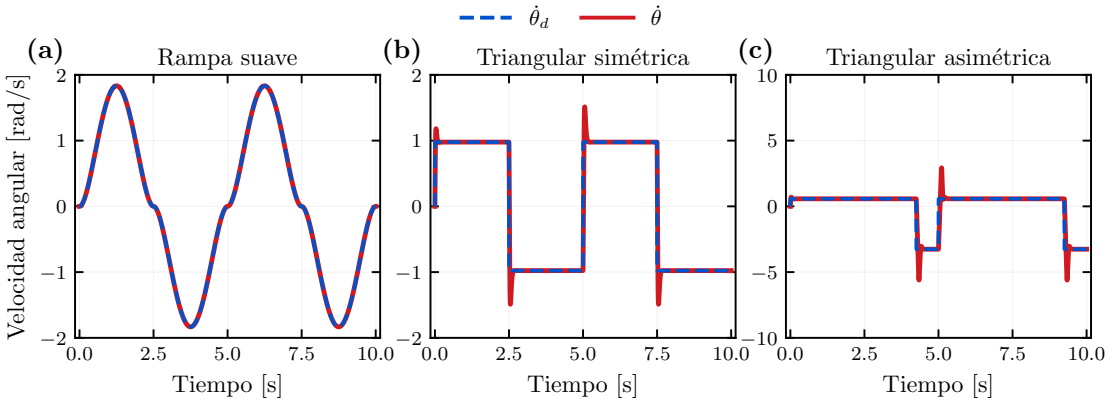


Figura 4.33: Seguimiento de velocidad para los perfiles de contraste cinemático: (a) rampa suave, (b) triangular simétrica y (c) triangular asimétrica de retorno rápido.

La Fig. 4.33 presenta el seguimiento de velocidad. En la rampa suave, la referencia

evoluciona continuamente y se anula antes de cada inversión. El error permanece pequeño, con $\mathrm{RMSE}_{\dot{\theta}} = 1{,}62 \times 10^{-4}$ rad/s y $e_{\dot{\theta},\mathrm{pk}} = 2{,}29 \times 10^{-4}$ rad/s.

En la trayectoria triangular simétrica, para $A = 70° = 1{,}2217$ rad y $T = 5$ s, la magnitud de velocidad impuesta y el salto producido en cada inversión corresponden a:

$$\left|\dot{\theta}_{d,\mathrm{sim}}\right| = \frac{4A}{T} = 0{,}9774 \text{ rad/s}, \qquad \left|\Delta\dot{\theta}_{d,\mathrm{sim}}\right| = \frac{8A}{T} = 1{,}9548 \text{ rad/s}. \tag{4.71}$$

El salto de referencia coincide prácticamente con el error máximo de velocidad registrado. Esto se explica porque la velocidad articular no puede invertir instantáneamente su sentido, mientras que la referencia cambia entre ambos valores en un mismo instante.

Para la trayectoria triangular asimétrica de retorno rápido, las velocidades de avance y retorno son:

$$\dot{\theta}_{d,\mathrm{avance}} = \frac{2A}{0{,}85T} = 0{,}5749 \text{ rad/s}, \qquad \dot{\theta}_{d,\mathrm{retorno}} = -\frac{2A}{0{,}15T} = -3{,}2580 \text{ rad/s}. \tag{4.72}$$

El cambio entre ambos tramos alcanza 3,8329 rad/s, valor que también coincide aproximadamente con el error máximo de velocidad obtenido. Por tanto, la mayor degradación del seguimiento en la trayectoria asimétrica se relaciona directamente con la magnitud de los cambios de velocidad impuestos durante las inversiones. La Fig. 4.34 presenta la

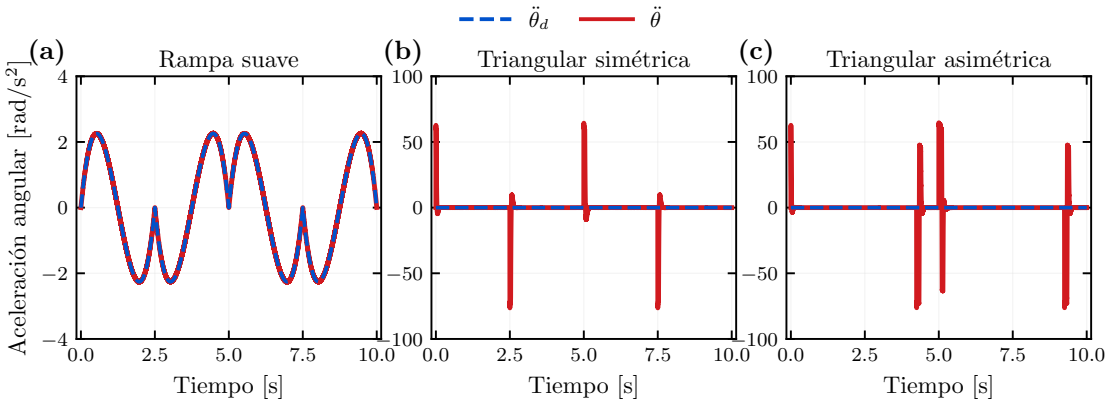


Figura 4.34: Aceleración de referencia y aceleración medida para los perfiles de contraste cinemático: (a) rampa suave, (b) triangular simétrica y (c) triangular asimétrica de retorno rápido.

respuesta de aceleración. En la rampa suave, la aceleración de referencia permanece continua y la aceleración simulada alcanza una magnitud máxima de 2,263 rad/s^2, con un error RMS de $8{,}51 \times 10^{-3}$ rad/s^2. Para este perfil, el *jerk* puede emplearse como métrica cuantitativa y presenta:

$$j_{\mathrm{RMS}} = 4{,}197 \text{ rad/s}^3, \qquad j_{\mathrm{pk}} = 10{,}913 \text{ rad/s}^3. \tag{4.73}$$

Aunque el *jerk* cambia de valor en las uniones entre los segmentos polinomiales, la aceleración conserva su continuidad.

En las trayectorias triangulares, el generador discreto entrega $\ddot{\theta}_d = 0$ dentro de cada tramo lineal y no representa numéricamente las componentes impulsivas ideales asociadas

a las inversiones, tal como se explicó en el marco teórico. Los máximos de aceleración simulada corresponden a la respuesta dinámica del sistema frente a los cambios instantáneos de velocidad de referencia, y no a una representación de dichos impulsos. Sus magnitudes máximas alcanzan 76,27 rad/s^2 y 76,18 rad/s^2 para la triangular simétrica y la asimétrica, respectivamente.

La similitud entre estos máximos, pese a la diferencia en las magnitudes de los saltos de velocidad, es consistente con que ambas trayectorias alcanzan el mismo límite de referencia de torque articular, como se analiza posteriormente.

En estos perfiles, el *jerk* numérico depende del período de muestreo y del procedimiento de diferenciación. Sus valores RMS corresponden a $1{,}56 \times 10^3$ rad/s^3 y $1{,}63 \times 10^3$ rad/s^3, mientras que sus máximos alcanzan aproximadamente $1{,}19 \times 10^5$ rad/s^3. Estas magnitudes se utilizan únicamente como diagnóstico de los transitorios y no como indicadores comparables de suavidad.

La Tabla 4.9 reúne los máximos obtenidos al considerar el conjunto de ventanas de $\pm 0{,}05$ s alrededor de las transiciones de cada perfil. En una misma fila, cada columna representa el máximo encontrado entre todas las ventanas y no necesariamente corresponde al mismo instante.

Tabla 4.9: Respuesta máxima localizada alrededor de las transiciones.

Perfil	máx $\lvert e_\theta \rvert$ [°]	máx $\lvert e_{\dot\theta} \rvert$ [rad/s]	máx $\lvert \ddot\theta \rvert$ [rad/s^2]	máx $\lvert T^*_{J,\mathrm{sat}} \rvert$ [Nm]	$I_{dq,\mathrm{pk}}$ [pu]
Rampa suave	$8{,}589 \times 10^{-5}$	$5{,}640 \times 10^{-5}$	0,4454	8,648	0,1693
Triangular simétrica	1,797	1,955	76,27	45,00	0,9290
Triangular asimétrica	6,489	3,833	76,18	45,00	0,9289

En la rampa suave, los errores localizados alrededor de las transiciones permanecen por debajo de los máximos globales del ensayo. En cambio, en las trayectorias triangulares, los mayores errores de velocidad y las mayores aceleraciones se concentran alrededor de las inversiones. En la triangular asimétrica, el máximo global de posición aparece después del entorno inmediato considerado en la tabla, debido al tiempo requerido para corregir la desviación producida durante el retorno rápido.

Para interpretar el esfuerzo mecánico es necesario distinguir entre la salida original del CTC y la referencia entregada al lazo interno. El limitador de torque se expresa mediante:

$$T^*_{J,\mathrm{sat}} = \mathrm{sat}\left(T^*_{J,\mathrm{unsat}}, -45\ \mathrm{Nm}, 45\ \mathrm{Nm}\right). \tag{4.74}$$

El indicador de limitación se activa cuando $T^*_{J,\mathrm{unsat}} \neq T^*_{J,\mathrm{sat}}$. Esta condición indica que la consigna calculada originalmente por el CTC supera el intervalo permitido y es recortada antes de convertirse en una referencia de corriente. No implica, por sí sola, la activación de las saturaciones de corriente o tensión del FOC.

La Tabla 4.10 presenta las métricas de esfuerzo y la activación de límites. En la rampa suave, la referencia de torque permanece dentro del intervalo permitido. En cambio, las trayectorias triangular simétrica y asimétrica generan solicitudes originales de 104,27 Nm y 186,99 Nm, respectivamente, que son limitadas a 45 Nm antes de ingresar al lazo interno.

Tabla 4.10: Esfuerzo y activación de límites para los perfiles de contraste.

Perfil	$T^*_{J,\text{unsat,pk}}$ [Nm]	$T^*_{J,\text{sat,pk}}$ [Nm]	$T_{J,\text{est,RMS}}$ [Nm]	$I_{dq,\text{pk}}$ [pu]	$I_{dq,\text{RMS}}$ [pu]	Limitador de torque	Sat. tensión
Rampa suave	14,01	14,01	8,737	0,2742	0,1710	NO	NO
Triangular simétrica	104,27	45,00	11,56	0,9290	0,2263	SÍ	NO
Triangular asimétrica	186,99	45,00	14,18	0,9289	0,2777	SÍ	NO

El torque articular estimado alcanza magnitudes máximas de 14,007 Nm, 47,391 Nm y 47,409 Nm para la rampa suave, la triangular simétrica y la triangular asimétrica, respectivamente. En los dos perfiles discontinuos, el torque estimado presenta un sobrepaso transitorio respecto de la referencia limitada de 45 Nm, asociado a la respuesta dinámica del lazo interno de corriente. Por tanto, el limitador restringe la consigna entregada al FOC, pero no garantiza que el torque estimado permanezca instantáneamente dentro de ese valor durante los transitorios.

El error RMS entre la referencia limitada de torque y el torque estimado es $4{,}82 \times 10^{-3}$ Nm para la rampa suave. En las trayectorias triangular simétrica y asimétrica aumenta a 0,671 Nm y 0,700 Nm, respectivamente. Este comportamiento refleja la mayor exigencia dinámica sobre el lazo interno cuando se producen cambios abruptos en la referencia de torque.

La corriente máxima alcanza 0,2742 pu en la rampa suave y aproximadamente 0,929 pu en las dos trayectorias triangulares. La similitud entre los máximos de estas últimas es consistente con el recorte de sus referencias de torque al mismo valor. Sin embargo, la triangular asimétrica presenta una corriente RMS mayor, debido al retorno rápido y a la recuperación más prolongada de los errores de seguimiento.

En los tres ensayos, la corriente permanece por debajo de los límites operacional y absoluto de 1,5 pu y 2,0 pu. Los máximos diagnósticos de tensión vectorial corresponden a 0,0857 pu, 0,9452 pu y 0,9614 pu para la rampa suave, triangular simétrica y triangular asimétrica, respectivamente. En ningún caso se activa la saturación de tensión. En consecuencia, la primera restricción que interviene en los perfiles discontinuos es el limitador de la referencia de torque articular, no los límites eléctricos del accionamiento.

En conjunto, los resultados muestran que la rampa suave mantiene errores bajos y no requiere la intervención de los límites configurados. Las trayectorias triangulares, aunque continuas en posición, introducen inversiones instantáneas de velocidad que producen errores transitorios mayores y solicitudes de torque superiores al intervalo permitido. La triangular asimétrica de retorno rápido representa la condición más exigente, debido a la mayor magnitud de sus cambios de velocidad y a la recuperación más prolongada del seguimiento.

Por esta razón, estas trayectorias triangulares no resultan adecuadas como referencias directas de movimiento asistido bajo la configuración evaluada. Su utilización requeriría incorporar transiciones suavizadas o perfiles con aceleración acotada, de modo que las inversiones se realicen durante intervalos finitos. Esta evaluación muestra que la regularidad cinemática constituye un criterio de diseño relevante, junto con el error de seguimiento y los límites de actuación, para seleccionar trayectorias destinadas a sistemas de rehabilitación asistida.

Capítulo 5

Implementación experimental

En este capítulo se presenta la implementación experimental del esquema de control CTC–FOC desarrollado en los capítulos anteriores. La validación se realiza de manera incremental, comenzando con la comprobación de la plataforma digital, las etapas de medición y el accionamiento eléctrico. Posteriormente, se verifica la operación bidireccional del motor mediante el lazo de velocidad y, finalmente, se evalúa el seguimiento de trayectorias mediante el controlador CTC.

Los ensayos de trayectoria consideran perfiles de mínimo *jerk* y senoidales dentro de un intervalo angular comprendido entre 0° y 140°. Para evaluar el efecto de la carga mecánica, se incorporan discos removibles en el extremo del mecanismo y se ajustan previamente los parámetros inerciales y gravitacionales utilizados por el controlador. De esta manera, los ensayos permiten comprobar la ejecución del esquema CTC–FOC bajo diferentes configuraciones conocidas de carga.

La validación experimental se concentra en el seguimiento de posición y velocidad, la regulación de las corrientes i_d e i_q, el torque electromagnético estimado y la activación de los límites del accionamiento.

5.1. Plataforma y montaje experimental

5.1.1. Plataforma digital y etapa de potencia

La plataforma de control utiliza una arquitectura híbrida DSP–FPGA con interfaz HPI [33,34]. La disposición física e interconexión de las placas se muestra en la Fig. 5.1. El DSP TMS320C6713, operando a 225 MHz, ejecuta las transformaciones de Clarke y Park, los controladores de corriente, la estimación de velocidad, la generación de referencias y la ley de control CTC.

La FPGA Xilinx Spartan-6 utiliza una fuente de reloj de 260 MHz y realiza las tareas asociadas a la temporización y a los periféricos de alta velocidad. Entre ellas se encuentran la adquisición sincronizada de las corrientes, la lectura del *encoder* incremental y la actualización de los registros utilizados para generar las señales PWM del inversor.

La interfaz HPI permite acceder desde el computador anfitrión a las variables internas del DSP. Mediante MATLAB se configuran los parámetros de cada ensayo, se inicia la

secuencia de prueba, se supervisa el estado del sistema y se descargan los búferes de captura. Estas operaciones no forman parte de los lazos de control en tiempo real ni sustituyen los mecanismos físicos de parada y protección.

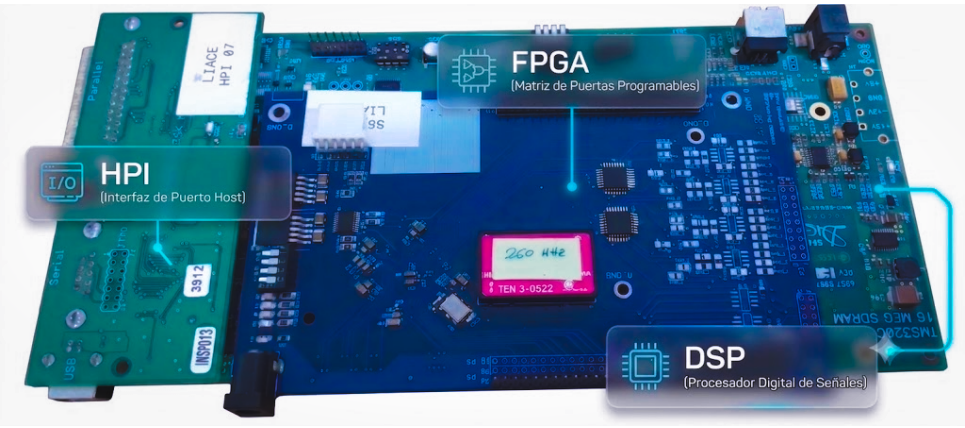


Figura 5.1: Plataforma digital híbrida DSP–FPGA con interfaz HPI utilizada para la implementación del sistema de control.

El código de control ejecutado por el DSP se desarrolló y compiló mediante *Code Composer Studio*. Su implementación contempla una secuencia de estados mutuamente excluyentes para el alineamiento, el control de corriente, el control de velocidad, la ejecución del CTC y la parada controlada del accionamiento.

La etapa de potencia está constituida por un inversor trifásico de dos niveles alimentado desde un enlace de continua. Durante la puesta en marcha, la tensión de entrada se ajustó mediante un variac conectado a la etapa de rectificación, lo que permitió energizar el sistema de manera gradual. El enlace DC está compuesto por dos condensadores conectados en serie, cada uno con una capacitancia de 3000 µF y una tensión nominal de 400 V.

Las señales PWM generadas por la plataforma se transmiten mediante una tarjeta de expansión de fibra óptica, proporcionando aislamiento entre las etapas de control y potencia. Posteriormente, una tarjeta *gate driver* acondiciona estas señales y genera los pulsos aplicados a los interruptores del inversor, incorporando el tiempo muerto entre las señales complementarias.

La medición del enlace de continua se realiza mediante una tarjeta de acondicionamiento de tensión. Por su parte, dos corrientes de fase son adquiridas mediante sensores LEM y circuitos de acondicionamiento analógico. La tercera corriente se obtiene en el DSP a partir de la condición de sistema trifásico sin conductor neutro:

$$i_c = -(i_a + i_b). \tag{5.1}$$

5.1.2. Carga mecánica equivalente

El accionamiento utiliza un motorreductor NORD equipado con un *encoder* incremental TTL de 2048 pulsos por revolución. El *encoder* proporciona la posición mecánica del rotor utilizada en las transformaciones del FOC y, por medio de la relación de transmisión $N = 10{,}22$, permite obtener la posición angular del eje de salida.

Para representar una carga rotacional ajustable de un grado de libertad, el eje de salida se prolonga mediante un acople rígido. Sobre este conjunto se instala perpendicularmente un elemento de sujeción, denominado caimán, desde el cual se dispone una barra destinada a soportar discos removibles. El mecanismo gira en un plano vertical, de modo que la incorporación de discos modifica tanto la inercia equivalente como la amplitud del torque gravitacional aplicado al accionamiento. El diseño conceptual del acople y su implementación final en el banco experimental se muestran en la Figura 5.2.

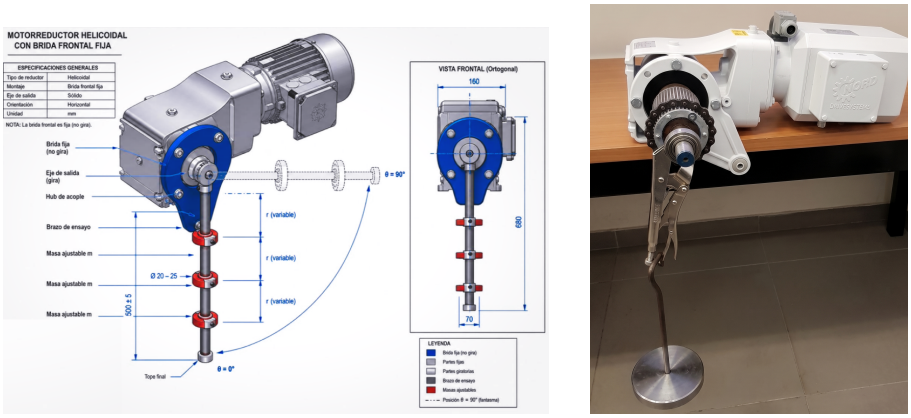


Figura 5.2: Comparación entre el diseño conceptual del acople mecánico (izquierda) y su implementación final en el banco experimental (derecha). La configuración construida se adaptó a los componentes y elementos disponibles en el laboratorio, manteniendo la funcionalidad requerida para la incorporación de masas removibles en el eje de salida del motorreductor.

Cada disco utilizado posee una masa aproximada $m_d = 2{,}5$ kg y un radio $R_d = 0{,}075$ m. Para el modelo utilizado por el controlador se adoptó una distancia efectiva $L = 0{,}63$ m entre el eje de rotación y el centro del disco. La inercia de un disco respecto del eje de salida se calcula mediante:

$$J_{\text{disco,sal}} = m_d L^2 + \frac{1}{2} m_d R_d^2. \tag{5.2}$$

Su valor referido al eje del motor corresponde a:

$$J_{\text{disco,m}} = \frac{J_{\text{disco,sal}}}{N^2} = 0{,}00956722 \text{ kg m}^2. \tag{5.3}$$

La amplitud del torque gravitacional producido por cada disco, referida al eje del motor, queda dada por:

$$G_{\text{disco,m}} = \frac{m_d g L}{\eta N} = 1{,}542668 \text{ Nm}, \tag{5.4}$$

donde se utiliza una eficiencia mecánica $\eta = 0{,}98$.

La Tabla 5.1 presenta los parámetros utilizados por el controlador para las tres configuraciones de carga. Los valores de inercia incluyen la inercia base referida al eje del motor y la contribución calculada de los discos adicionales. La contribución gravitacional tabulada corresponde exclusivamente a los discos incorporados.

Tabla 5.1: Configuraciones mecánicas utilizadas en los ensayos experimentales.

Configuración	**Discos**	$\boldsymbol{J_{\mathbf{eq,m}}}$ [kg m^2]	$\boldsymbol{G_{\mathbf{discos,m}}}$ [Nm]
Base	0	0,00368032	0
Un disco	1	0,01324754	1,542668
Dos discos	2	0,02281477	3,085337

Las contribuciones del acople, del elemento de sujeción y de los componentes auxiliares no se modelan de manera independiente. Por tanto, sus efectos permanecen incorporados en la incertidumbre asociada a la configuración mecánica experimental.

5.2. Implementación del control y procedimiento de ensayo

La implementación conserva la estructura general CTC–FOC desarrollada en los capítulos anteriores. El generador de trayectoria calcula en tiempo real las referencias articulares compatibles de posición, velocidad y aceleración. A partir de estas señales y de las variables realimentadas, el CTC obtiene una referencia de torque en el eje del motor, la cual se transforma en la referencia de corriente i_q^*. El lazo interno FOC regula i_q y mantiene $i_d^* = 0$.

Para los ensayos con discos, los parámetros de inercia y gravedad se calcularon previamente para cada configuración y se cargaron en el DSP antes de iniciar el movimiento. Los términos inercial y gravitacional se consideraron debido a que sus parámetros podían obtenerse directamente a partir de la geometría y de las masas del montaje. Los efectos mecánicos no modelados permanecieron como parte de la diferencia entre la planta real y el modelo utilizado por el controlador.

La Tabla 5.2 resume las frecuencias utilizadas por los principales subsistemas.

Tabla 5.2: Frecuencias de ejecución y adquisición experimental.

Subsistema	**Frecuencia**
Interrupción principal, adquisición y FOC	10 kHz
Estimación de velocidad	2 kHz
Controlador CTC	1 kHz
Almacenamiento de señales experimentales	2 kHz

La frecuencia de ejecución del CTC se estableció en 1 kHz mediante un factor de decimación $D_{\mathrm{CTC}} = 10$ respecto de la interrupción principal de 10 kHz. Esta elección permite mantener una mayor frecuencia de actualización en el lazo interno FOC, encargado de la regulación de las corrientes, mientras que el CTC calcula las referencias asociadas a la dinámica mecánica articular. De este modo, por cada ejecución del CTC se realizan diez ciclos del lazo de corriente y dos actualizaciones de la estimación de velocidad.

Adicionalmente, para el periodo de ejecución $T_{s,\mathrm{CTC}} = 1$ ms, el criterio de discretización establecido en (2.84) requiere $\omega_{p,\mathrm{máx}} \leq 100$ rad/s. Por lo tanto, la frecuencia seleccionada resulta compatible con dicho criterio para las sintonías cuyos polos deseados satisfagan

esta condición.

Antes de cada ensayo se ejecutó una secuencia compuesta por el autocero de los sensores de corriente, el alineamiento eléctrico del rotor, la escritura y verificación de los parámetros del controlador y la comprobación del estado del sistema. Una vez cumplidas estas condiciones, MATLAB enviaba una única orden de inicio y el DSP asumía la ejecución de la trayectoria, la regulación del accionamiento y la parada controlada.

La coordinación de las funciones del código se implementó mediante una lógica supervisora encargada de mantener el accionamiento en una condición segura durante la inicialización, validar las solicitudes de operación y conceder la ejecución a un único modo de control. El diagrama completo de esta secuencia se presenta en la Fig. A.1, incluida en el Apéndice A.

El procedimiento de alineamiento eléctrico se implementó mediante una secuencia independiente, encargada de aplicar la corriente de alineamiento, verificar la estabilidad del rotor y almacenar el *offset* eléctrico antes de habilitar la operación del FOC. Su funcionamiento se detalla en la Fig. A.2. Por su parte, la secuencia utilizada para configurar, ejecutar y descargar cada ensayo experimental se resume en la Fig. A.3.

Las variables almacenadas incluyen la posición y la velocidad de referencia y medidas, las corrientes dq, las referencias generadas por el CTC, el torque electromagnético estimado, la tensión del enlace de continua y los indicadores de saturación y falla. Las capturas se descargaron después de cada ensayo para realizar el análisis y generar las figuras.

5.3. Resultados experimentales

Los resultados se organizan de acuerdo con la secuencia incremental utilizada durante la puesta en marcha. En primer lugar, se presenta una prueba de velocidad bidireccional destinada a verificar la coherencia del *encoder*, el sentido de giro y la regulación de corriente. Posteriormente, se evalúa el seguimiento mediante CTC para las trayectorias de mínimo *jerk* y senoidal.

Para cada trayectoria se analizan la posición en el eje de salida, el error angular, la velocidad, la corriente i_q y el torque electromagnético estimado. Este último se obtiene evaluando la expresión general de la IPMSM presentada en la ecuación (2.8) mediante las corrientes i_d e i_q calculadas a partir de las corrientes de fase adquiridas.

Como la estrategia FOC establece $i_d^* = 0$ y la corriente i_d medida permanece próxima a cero, la contribución de reluctancia es residual. En consecuencia, el torque electromagnético estimado satisface aproximadamente $T_{m,\text{est}} \approx k_T i_q$, de manera consistente con la relación definida en la ecuación (2.14). Esta magnitud corresponde a una estimación basada en las corrientes del motor y no a una medición directa mediante un transductor de torque.

5.3.1. Verificación bidireccional del accionamiento

Antes de habilitar el seguimiento de trayectorias mediante CTC, se verificó el funcionamiento bidireccional del accionamiento utilizando referencias de velocidad de $+8$ rpm y -8 rpm, referidas al eje de salida del reductor. En ambos ensayos, el comando de velocidad fue aplicado una única vez desde el computador, mientras que la generación de la rampa, la regulación y la parada posterior fueron ejecutadas internamente por el DSP.

La Fig. 5.3 presenta la referencia rampada, la velocidad medida y el error de seguimiento para ambos sentidos de giro. La velocidad medida corresponde a la señal obtenida a partir del *encoder* y procesada en tiempo real mediante el estimador implementado en el DSP. Para facilitar la observación de su tendencia, se incorporó además una señal filtrada fuera de línea mediante un filtro Butterworth pasabajos de orden 2 y frecuencia de corte de 3 Hz.

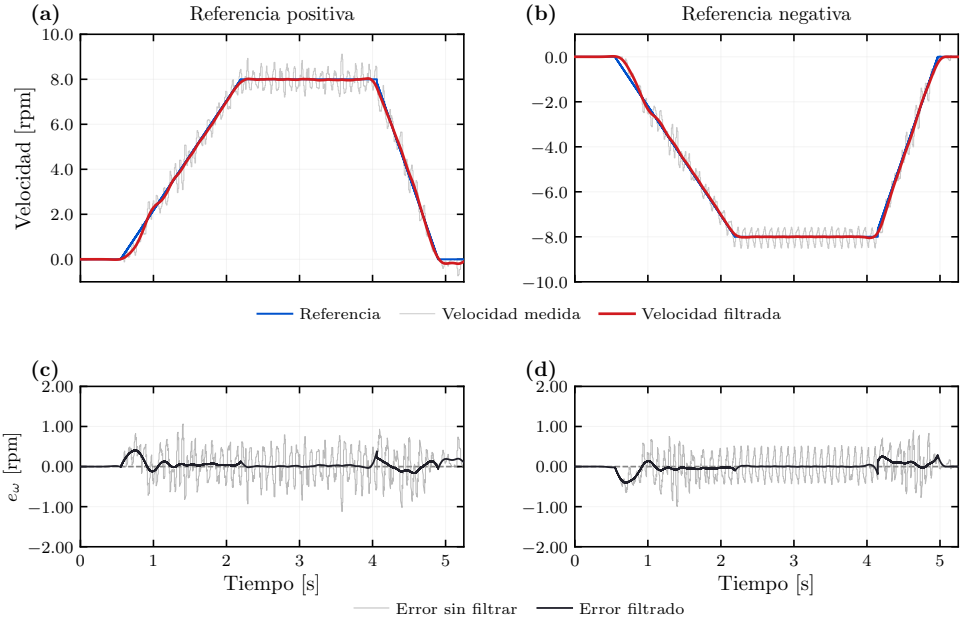


Figura 5.3: Verificación bidireccional del lazo de velocidad: (a) referencia positiva, velocidad medida y velocidad filtrada; (b) referencia negativa, velocidad medida y velocidad filtrada; (c) errores de seguimiento para la referencia positiva; (d) errores de seguimiento para la referencia negativa.

La respuesta sigue la referencia con el signo esperado en ambos sentidos, sin pérdida de la correspondencia entre el comando y el movimiento del eje. El error RMS asociado a la velocidad medida fue de 0,369 rpm para la referencia positiva y 0,309 rpm para la referencia negativa. Para la señal procesada fuera de línea, el error RMS fue de 0,105 rpm y 0,099 rpm, respectivamente. La proximidad entre los resultados obtenidos confirma un comportamiento bidireccional consistente del accionamiento.

La Fig. 5.4 presenta las principales variables eléctricas registradas durante ambos ensayos.

Las corrientes de fase presentan el comportamiento alterno esperado para cada sentido de giro. Las corrientes i_a e i_b fueron adquiridas mediante los sensores de corriente, mientras que i_c fue reconstruida en el DSP mediante la expresión (5.1).

En el canal d, la referencia se mantuvo en $i_d^* = 0$ y la corriente i_d permaneció alrededor de cero. En el canal q, la corriente medida siguió la referencia generada por el PI de velocidad y cambió de signo de acuerdo con el sentido de giro solicitado. Las tensiones v_d y v_q representan las actuaciones calculadas por el DSP después de aplicar el límite vectorial de tensión.

Los ciclos de trabajo permanecieron dentro del intervalo de modulación del inversor

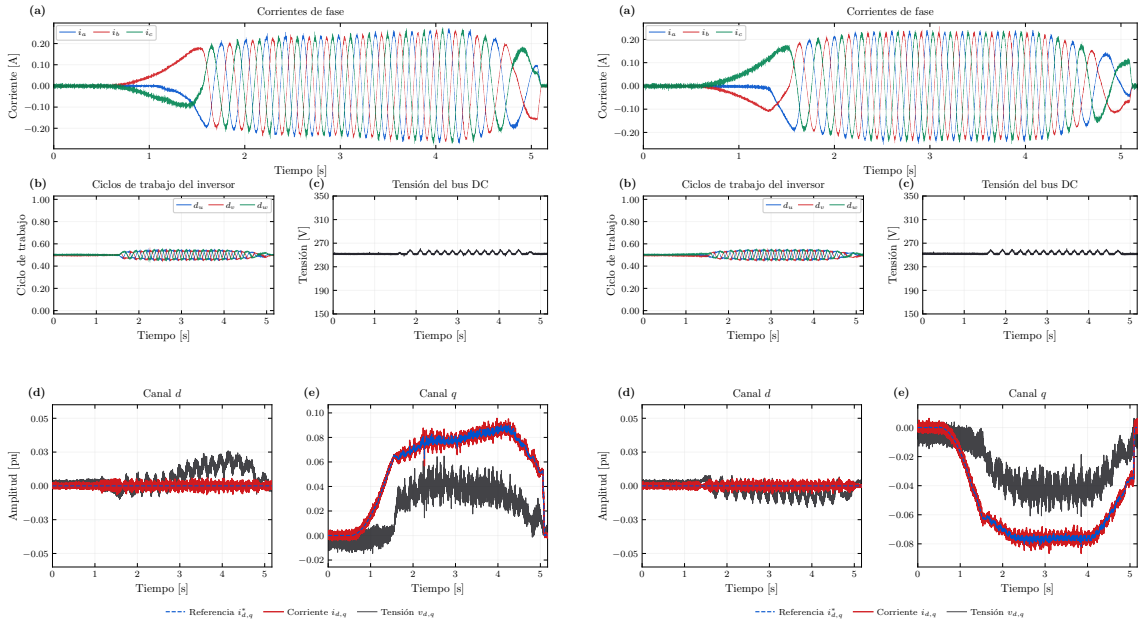


Figura 5.4: Variables eléctricas registradas durante la verificación bidireccional del accionamiento. Las columnas izquierda y derecha corresponden, respectivamente, a las referencias de +8 rpm y −8 rpm. En cada columna se presentan: (a) las corrientes de fase; (b) los ciclos de trabajo del inversor; (c) la tensión del enlace DC; (d) las variables del canal d; y (e) las variables del canal q.

y la tensión del enlace DC se mantuvo acotada alrededor de su valor medio durante la ejecución. Sobre dicha tensión se observa un rizado de baja amplitud, consistente con el funcionamiento del rectificador y las variaciones de potencia asociadas a la operación del inversor y del motor. En conjunto, estos resultados verifican la coherencia del *encoder*, la operación bidireccional del lazo de velocidad y la regulación de las corrientes dq. Esta comprobación establece la condición previa para evaluar experimentalmente el seguimiento de trayectorias mediante el controlador CTC.

5.3.2. Seguimiento de trayectoria de mínimo *jerk*

La trayectoria de mínimo *jerk* se ejecutó desde 0° hasta 140° durante 4 s, seguida de una etapa de sostenimiento de 2 s. La prueba se realizó para la configuración base y para las condiciones con uno y dos discos adicionales.

Para cada configuración, los parámetros inerciales y gravitacionales se calcularon previamente y se cargaron en el DSP antes de iniciar el movimiento. De este modo, los ensayos permiten evaluar el seguimiento obtenido cuando el modelo utilizado por el CTC se adapta a una carga mecánica conocida. La comparación se concentra en el error de posición, el sostenimiento de la posición final y el incremento del esfuerzo electromagnético requerido al incorporar los discos.

La referencia utilizada conserva analíticamente condiciones nulas de velocidad y aceleración al inicio y al término del desplazamiento. Para el movimiento de 140° ejecutado en 4 s, el *jerk* de referencia presenta una magnitud máxima de 2,291 rad/s^3 y un valor RMS de 1,024 rad/s^3, calculados durante el intervalo de movimiento.

5.3.2.a. Configuración base sin discos adicionales

La configuración base corresponde al mecanismo sin discos adicionales. Sin embargo, el eje permanece conectado al reductor, al acople y a los elementos de sujeción descritos en la sección 5.1.2. Por esta razón, esta configuración no representa una condición mecánica ideal sin carga, sino el punto de referencia experimental para evaluar posteriormente el efecto de los discos.

La Fig. 5.5 presenta el seguimiento de posición y velocidad en el eje de salida. La posición medida reproduce la evolución continua de la referencia y alcanza la región correspondiente a 140° al finalizar los 4 s de movimiento, sin sobrepasamiento apreciable. El error permanece predominantemente positivo, por lo que la posición medida se mantiene ligeramente por debajo de la referencia durante el desplazamiento.

El error de posición se calculó utilizando la posición obtenida directamente del *encoder* y reconstruida en el DSP, referida al eje de salida del reductor, sin aplicar un filtrado adicional a la señal angular. Durante el movimiento se obtuvo un error de posición $\mathrm{RMSE}_\theta = 0{,}551°$ y una magnitud máxima $e_{\theta,\mathrm{pk}} = 0{,}855°$. Estos valores corresponden, respectivamente, al 0,393 % y al 0,611 % del desplazamiento total de 140°.

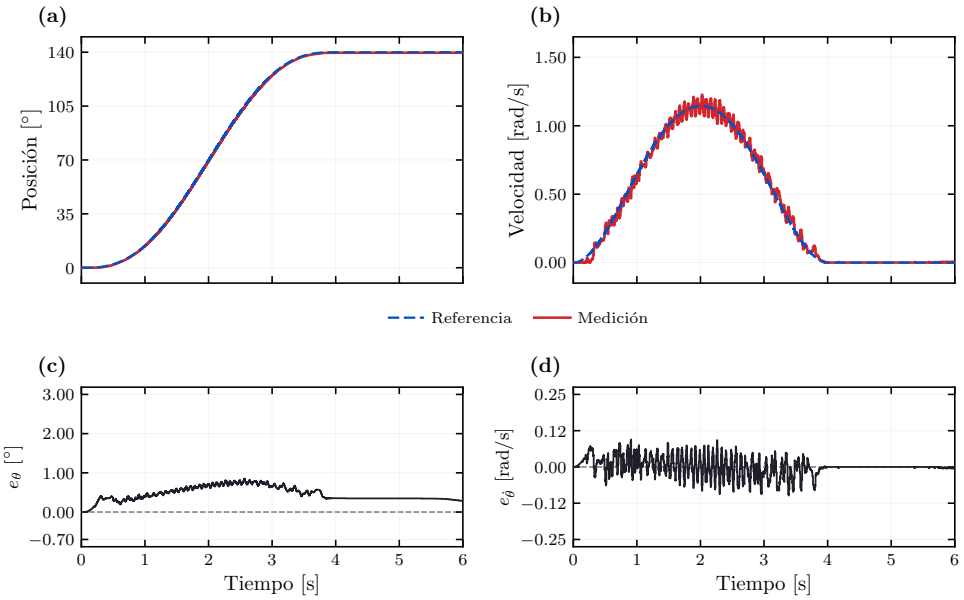


Figura 5.5: Seguimiento cinemático de la trayectoria de mínimo *jerk* en la configuración base: (a) posición de referencia y posición medida; (b) velocidad de referencia y velocidad medida; (c) error de posición $e_\theta = \theta_d - \theta$; y (d) error de velocidad $e_{\dot\theta} = \dot\theta_d - \dot\theta$.

La velocidad medida conserva la forma general de la referencia, incluyendo las condiciones próximas a cero al inicio y al término del desplazamiento. Durante el movimiento se observan variaciones alrededor de la referencia, asociadas a la estimación de velocidad a partir del *encoder* y a las no idealidades del accionamiento experimental. El error alcanza $\mathrm{RMSE}_{\dot\theta} = 0{,}0393$ rad/s, con una magnitud máxima de $e_{\dot\theta,\mathrm{pk}} = 0{,}0985$ rad/s. Estas variaciones no producen pérdida de continuidad ni desviaciones acumulativas en la posición.

Durante los últimos 0,5 s de sostenimiento, el error medio de posición corresponde a 0,323°, mientras que su valor RMS es 0,323° y su magnitud máxima alcanza 0,343°. Puesto

que el error se define como $e_\theta = \theta_d - \theta$, el signo positivo indica que la posición medida permanece aproximadamente 0,323° por debajo de la referencia final.

La Fig. 5.6 muestra las corrientes de fase y el torque electromagnético estimado en el eje del motor. Durante el movimiento, las corrientes presentan la alternancia trifásica correspondiente al giro del rotor, con una frecuencia instantánea que varía de acuerdo con la velocidad. Una vez alcanzada la posición final, el rotor permanece prácticamente detenido y las corrientes de fase adoptan valores cuasiestacionarios para producir el torque requerido durante el sostenimiento.

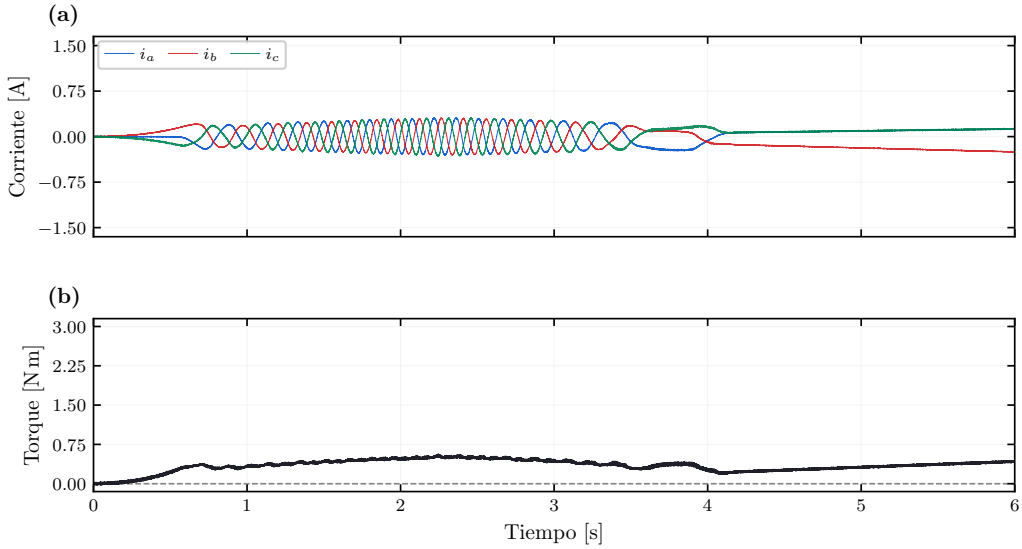


Figura 5.6: Variables eléctricas durante la trayectoria de mínimo *jerk* en la configuración base: (a) corrientes medidas i_a, i_b e i_c; y (b) torque electromagnético estimado $T_{m,\mathrm{est}}$, referido al eje del motor.

El torque estimado aumenta durante la primera parte del desplazamiento y alcanza una magnitud máxima de $T_{m,\mathrm{pk}} = 0{,}554$ Nm. Posteriormente disminuye a medida que la trayectoria reduce su aceleración y velocidad antes de alcanzar la posición final. Su valor RMS es $T_{m,\mathrm{RMS}} = 0{,}386$ Nm durante el movimiento y 0,366 Nm al considerar el ensayo completo.

En la ventana final de sostenimiento, el torque estimado presenta un valor medio de 0,397 Nm. La presencia de un torque distinto de cero en esta condición es consistente con el esfuerzo requerido para mantener la posición frente a la carga mecánica propia del montaje, la fricción y los efectos no modelados de los elementos auxiliares. Por tanto, este valor constituye la referencia experimental con la cual se comparará posteriormente el incremento producido por los discos.

La Fig. 5.7 presenta la regulación de las corrientes en los ejes d y q, junto con las actuaciones de tensión correspondientes.

En el canal d, la referencia se mantiene en $i_d^* = 0$ y la corriente medida permanece alrededor de este valor. Durante el movimiento, el error de seguimiento presenta un RMSE de 4,53 mA, con una magnitud máxima de 17,9 mA. La tensión v_d varía a lo largo del desplazamiento para compensar el acoplamiento eléctrico asociado a la velocidad y a la corriente de torque.

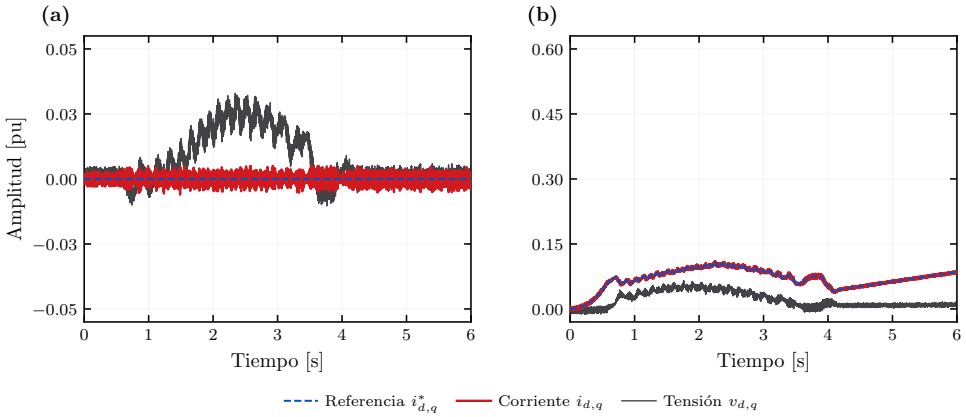


Figura 5.7: Referencias y corrientes medidas en los ejes d y q, junto con las tensiones aplicadas por el lazo interno FOC durante la trayectoria de mínimo *jerk*: (a) canal d; y (b) canal q. Las corrientes y tensiones se expresan por unidad respecto de sus bases correspondientes.

En el canal q, la corriente medida reproduce la referencia generada por el CTC, con $\mathrm{RMSE}_{i_q} = 5{,}66$ mA y una magnitud máxima del error de 21,30 mA. De acuerdo con (2.14), la evolución de i_q determina principalmente el torque electromagnético desarrollado cuando i_d se mantiene próximo a cero. Por esta razón, el aumento de i_q durante el sostenimiento coincide con el torque requerido para conservar la posición final.

La magnitud de corriente en el plano dq alcanza $I_{dq,\mathrm{RMS}} = 0{,}217$ A, equivalente a 0,0732 pu, y un valor máximo $I_{dq,\mathrm{pk}} = 0{,}329$ A, equivalente a 0,111 pu. Ambos valores permanecen ampliamente por debajo del límite operacional de 1,5 pu.

En conjunto, la configuración base verifica el seguimiento de la trayectoria de mínimo *jerk*, el sostenimiento de la posición final y la regulación de las corrientes dq. Estos resultados establecen la referencia experimental para cuantificar los cambios en el error de seguimiento y en el esfuerzo electromagnético al incorporar uno y dos discos adicionales.

5.3.2.b. Configuraciones con discos adicionales

Para evaluar el efecto de la carga mecánica, la trayectoria se repitió incorporando uno y dos discos en el extremo del mecanismo. La Fig. 5.8 compara el seguimiento cinemático, mientras que las Figs. 5.9 y 5.10 presentan las corrientes, el torque electromagnético estimado y las variables de los ejes dq.

La Tabla 5.3 resume los principales indicadores obtenidos para las tres configuraciones. Las métricas cinemáticas y de seguimiento de corriente se calcularon durante los 4 s de movimiento. Los valores RMS y máximos de corriente y torque consideran el ensayo completo.

La configuración con un disco presentó el menor error de seguimiento, con $\mathrm{RMSE}_\theta = 0{,}0957°$ y una magnitud máxima de 0,268°. Con dos discos, estos indicadores aumentaron a 1,401° y 2,590°, equivalentes aproximadamente al 1,00 % y al 1,85 % del recorrido total. En el sostenimiento, el signo negativo del error indica que la posición medida quedó ligeramente por encima de la referencia final.

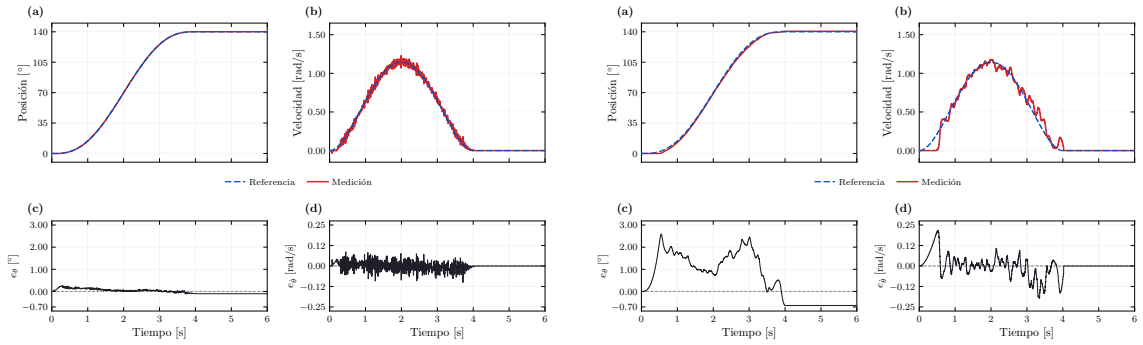


Figura 5.8: Seguimiento cinemático de la trayectoria de mínimo *jerk* para distintas configuraciones de carga: configuración con un disco (izquierda) y con dos discos (derecha). En ambos casos se muestran: (a) la posición de referencia y la posición medida; (b) la velocidad de referencia y la velocidad medida; (c) el error de posición $e_\theta = \theta_d - \theta$; y (d) el error de velocidad $e_{\dot\theta} = \dot\theta_d - \dot\theta$.

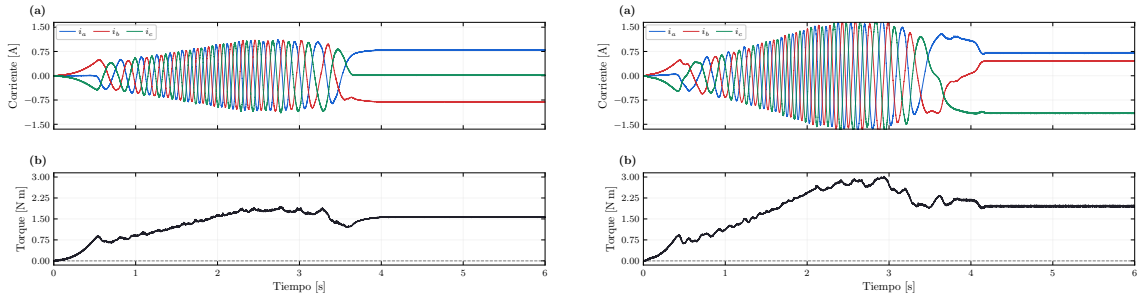


Figura 5.9: Variables eléctricas durante la trayectoria de mínimo *jerk* para las configuraciones con un disco (izquierda) y dos discos (derecha). En ambos casos se muestran: (a) las corrientes medidas i_a, i_b e i_c; y (b) el torque electromagnético estimado $T_{m,\text{est}}$.

El aumento de la carga produjo un incremento del esfuerzo electromagnético. La magnitud máxima de corriente pasó de 0,111 pu en la configuración base a 0,388 pu con un disco y 0,605 pu con dos discos. Estos valores permanecieron por debajo del límite operacional de 1,5 pu. De manera correspondiente, el torque electromagnético estimado máximo aumentó desde 0,554 Nm hasta 1,938 Nm y 3,024 Nm, respectivamente.

A pesar del incremento del esfuerzo, los errores RMS de los canales d y q permanecieron próximos a 5 mA y 6 mA en las tres configuraciones. Esto muestra que el lazo interno FOC mantuvo una regulación de corriente comparable al aumentar la carga. En conjunto, los resultados verifican la ejecución de la trayectoria de mínimo *jerk* con parámetros mecánicos adaptados a cada configuración, aunque el caso con dos discos presentó una degradación del seguimiento cinemático.

5.3.3. Seguimiento de trayectoria senoidal

La referencia senoidal describe un ciclo completo entre 0° y 140°, retornando posteriormente a la posición inicial. En los ensayos experimentales, el ciclo se ejecutó durante 4 s, lo que corresponde a una frecuencia de 0,25 Hz, seguido de una etapa de sostenimiento de 1 s.

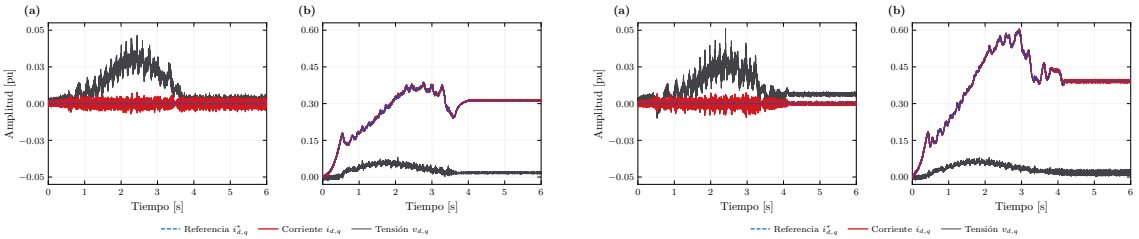


Figura 5.10: Variables dq durante la trayectoria de mínimo *jerk* para las configuraciones con un disco (izquierda) y dos discos (derecha). En ambos casos se muestran: (a) el canal d; y (b) el canal q, incluyendo las referencias, las corrientes medidas y las tensiones aplicadas por el lazo interno FOC.

Tabla 5.3: Comparación experimental para la trayectoria de mínimo *jerk*.

Métrica	**Base**	**Un disco**	**Dos discos**
RMSE_{θ} [°]	0,551	0,096	1,401
$e_{\theta,\mathrm{pk}}$ [°]	0,855	0,268	2,590
$\overline{e}_{\theta,\mathrm{hold}}$ [°]	+0,323	−0,103	−0,634
$\mathrm{RMSE}_{\dot{\theta}}$ [rad/s]	0,039	0,030	0,073
RMSE_{i_d} [mA]	4,530	4,670	4,780
RMSE_{i_q} [mA]	5,660	5,890	6,110
$I_{dq,\mathrm{RMS}}$ [pu]	0,073	0,287	0,399
$I_{dq,\mathrm{pk}}$ [pu]	0,111	0,388	0,605
$T_{m,\mathrm{RMS}}$ [Nm]	0,366	1,434	1,995
$T_{m,\mathrm{pk}}$ [Nm]	0,554	1,938	3,024
$\overline{T}_{m,\mathrm{hold}}$ [Nm]	0,397	1,562	1,958

Para la evaluación experimental, la frecuencia se incrementó de 0,2 Hz, utilizada en simulación, a 0,25 Hz. Este ajuste se realizó para reducir el tiempo de operación a velocidades muy bajas, donde la cuantización del *encoder* afecta en mayor medida la estimación de velocidad. Sin embargo, en los puntos de inversión la velocidad de referencia necesariamente pasa por cero.

A diferencia de la trayectoria punto a punto de mínimo *jerk*, esta referencia exige que el accionamiento invierta el sentido de movimiento durante el mismo ensayo. Como consecuencia, la velocidad, la corriente i_q y el torque electromagnético pueden cambiar de signo entre las etapas de avance y retorno.

5.3.3.a. Configuración base sin discos adicionales

La configuración base corresponde al mecanismo sin discos adicionales, aunque conserva la carga mecánica propia del reductor, el acople y los elementos de sujeción. Este ensayo establece la referencia para evaluar posteriormente el efecto de incorporar carga adicional.

La Fig. 5.11 presenta el seguimiento de posición y velocidad durante el ciclo completo.

La posición medida reproduce las etapas de ascenso, inversión y retorno de la referencia, aunque se observan diferencias mayores que en la trayectoria de mínimo *jerk*. Durante el movimiento, el error de posición presenta un RMSE de 2,109° y una magnitud máxima de $e_{\theta,\mathrm{pk}} = 4{,}416°$, equivalentes al 1,51 % y al 3,15 % del recorrido angular de 140°, respectivamente. La diferencia respecto del mínimo *jerk* puede relacionarse con la mayor

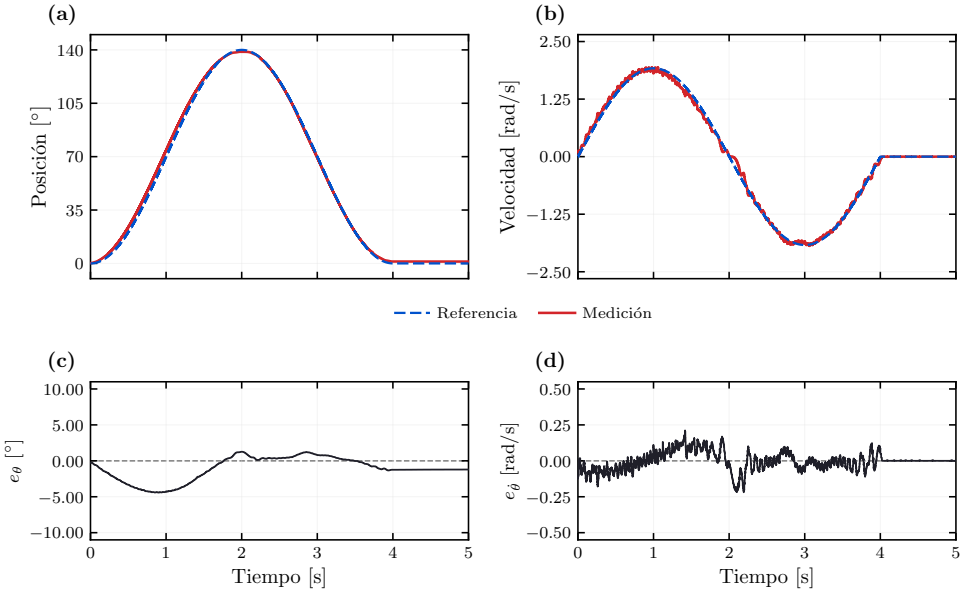


Figura 5.11: Seguimiento cinemático de la trayectoria senoidal en la configuración base: (a) posición de referencia y posición medida; (b) velocidad de referencia y velocidad medida; (c) error de posición $e_\theta = \theta_d - \theta$; y (d) error de velocidad $e_{\dot\theta} = \dot\theta_d - \dot\theta$.

exigencia dinámica de la trayectoria senoidal. Mientras que el perfil de mínimo *jerk* realiza un desplazamiento desde 0° hasta 140° en 4 s, la trayectoria senoidal completa el avance y retorno dentro del mismo intervalo. Para estas condiciones, la velocidad máxima de referencia aumenta desde 1,145 rad/s hasta 1,920 rad/s, y la aceleración máxima desde 0,882 rad/s^2 hasta 3,014 rad/s^2.

En la respuesta de velocidad se distingue una desviación transitoria alrededor de los 2 s, cuando la referencia pasa por cero e invierte el sentido del movimiento. En esta región, la estimación de velocidad basada en el *encoder* presenta mayor sensibilidad a la cuantización y al tiempo de acumulación de cuentas. La fricción y las diferencias entre el modelo utilizado por el CTC y la dinámica real del montaje también pueden contribuir a la desviación observada.

El error de velocidad alcanzó $\mathrm{RMSE}_{\dot\theta} = 0{,}072$ rad/s, con una magnitud máxima de $e_{\dot\theta,\mathrm{pk}} = 0{,}218$ rad/s. A pesar de estas desviaciones, el accionamiento completó la inversión de movimiento y retornó a las proximidades de la posición inicial.

Durante los últimos 0,5 s de sostenimiento, el error medio de posición fue −1,118°, con una magnitud máxima de 1,125°. El signo negativo indica que la posición medida permaneció por encima de la referencia final. En esta misma ventana, la velocidad medida presentó un valor RMS de $1{,}23 \times 10^{-3}$ rad/s, por lo que el eje permaneció prácticamente detenido.

La Fig. 5.12 muestra las corrientes de fase y el torque electromagnético estimado en

el eje del motor. Durante el ciclo, las corrientes cambian su evolución de acuerdo con la velocidad y el sentido de movimiento. De manera correspondiente, el torque estimado toma valores positivos y negativos durante las etapas de avance y retorno.

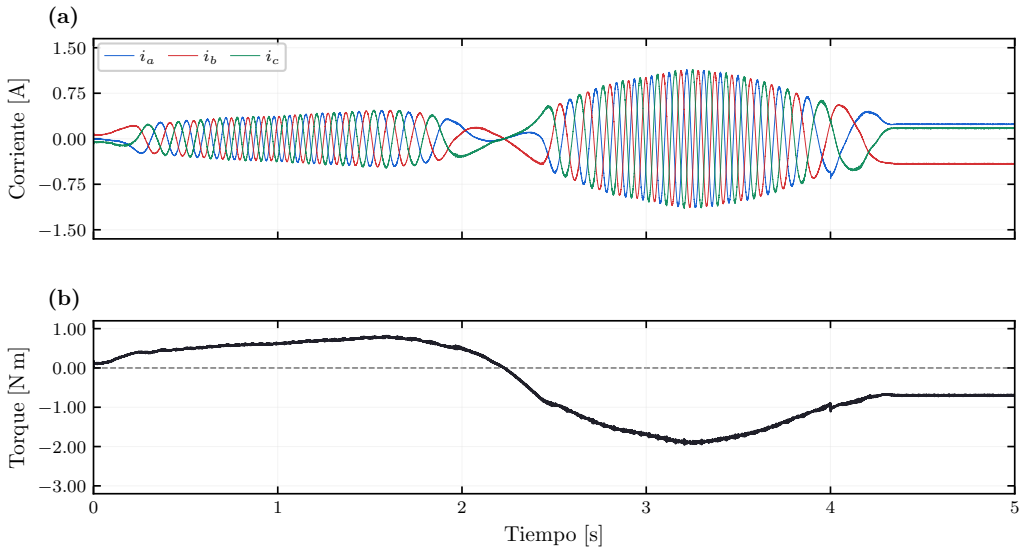


Figura 5.12: Variables eléctricas durante la trayectoria senoidal en la configuración base: (a) corrientes medidas i_a, i_b e i_c; y (b) torque electromagnético estimado $T_{m,\text{est}}$, referido al eje del motor.

Durante el movimiento, el torque estimado alcanzó un máximo de 0,814 Nm y un mínimo de −1,961 Nm, con un valor RMS de 1,048 Nm. La diferencia entre sus magnitudes positiva y negativa muestra que el esfuerzo requerido no es simétrico entre ambas direcciones. Este comportamiento es consistente con la combinación de los efectos inerciales, la fricción y las características mecánicas del montaje.

En el sostenimiento final, el torque estimado presentó un valor medio de −0,674 Nm. Su signo es coherente con la acción requerida para reducir el error final negativo y mantener el eje próximo a la posición inicial.

La Fig. 5.13 presenta las referencias y corrientes medidas en los ejes d y q, junto con las tensiones aplicadas por el lazo interno FOC.

En el canal d, la referencia se mantuvo en $i_d^* = 0$ y la corriente medida permaneció próxima a este valor, con $\text{RMSE}_{i_d} = 4{,}48$ mA y una magnitud máxima del error de 20,3 mA. En el canal q, la corriente medida siguió la referencia generada por el CTC y cambió de signo con el torque solicitado. El error presentó $\text{RMSE}_{i_q} = 7{,}83$ mA, con una magnitud máxima de 48,7 mA.

La magnitud de corriente en el plano dq alcanzó $I_{dq,\text{RMS}} = 0{,}569$ A, equivalente a 0,192 pu, y un valor máximo $I_{dq,\text{pk}} = 1{,}161$ A, equivalente a 0,391 pu. Ambos valores permanecieron por debajo del límite operacional de 1,5 pu.

En conjunto, la configuración base permitió ejecutar la trayectoria senoidal completa, incluyendo la inversión del movimiento y el retorno a la posición inicial. Las diferencias cinemáticas observadas establecen la referencia experimental para analizar el efecto de la carga adicional y de los ajustes del controlador.

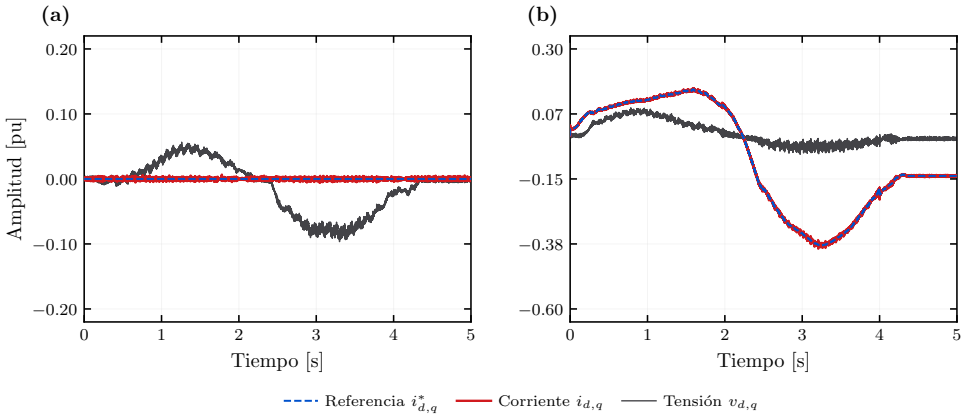


Figura 5.13: Referencias y corrientes medidas en los ejes d y q, junto con las tensiones aplicadas durante la trayectoria senoidal: (a) canal d; y (b) canal q.

5.3.3.b. Configuración con carga adicional

La trayectoria senoidal se repitió después de incorporar la carga adicional. Para esta configuración se actualizaron en el DSP los parámetros inerciales y gravitacionales del modelo y, adicionalmente, se realizó un ajuste empírico iterativo de los parámetros del CTC a partir del error observado. Por tanto, los resultados con carga corresponden a una parametrización específica del controlador y no a la aplicación de una misma sintonización sobre ambas configuraciones mecánicas.

En aplicaciones con cargas variables o desconocidas, esta dependencia del modelo podría abordarse mediante la estimación o actualización en línea de los parámetros mecánicos, o mediante estrategias de control que consideren la incertidumbre paramétrica. La implementación y evaluación de estos mecanismos quedan fuera del alcance experimental de este trabajo.

La Fig. 5.14 presenta el seguimiento cinemático. Durante el ciclo, el error de posición alcanza $\mathrm{RMSE}_\theta = 0{,}316°$ y una magnitud máxima de $0{,}789°$. Para la velocidad se obtiene un valor $\mathrm{RMSE}_{\dot\theta} = 0{,}0512$ rad/s, con una magnitud máxima del error de $0{,}212$ rad/s.

En la ventana final de sostenimiento, el error medio de posición corresponde a $+0{,}268°$. El estimador de velocidad registra 0 rad/s durante esta ventana. Este valor debe interpretarse considerando la resolución del *encoder* y del estimador, por lo que indica ausencia de movimiento detectable y no una velocidad físicamente nula con precisión ilimitada.

Respecto del ensayo efectuado con la configuración base, en esta prueba se obtuvieron menores errores cinemáticos. El RMSE de posición disminuyó de $2{,}655°$ a $0{,}316°$, mientras que el RMSE de velocidad se redujo de $0{,}104$ rad/s a $0{,}0512$ rad/s.

Esta reducción no indica que la incorporación de la carga mejore por sí misma el seguimiento, puesto que los parámetros del CTC no se mantuvieron invariantes entre ambos ensayos. La diferencia observada responde al efecto conjunto de la modificación mecánica, la actualización del modelo dinámico y el reajuste iterativo de las ganancias del controlador CTC.

La Fig. 5.15 muestra las corrientes de fase y el torque electromagnético estimado. Durante el movimiento, el torque presenta un valor RMS de $1{,}472$ Nm, con valores extremos

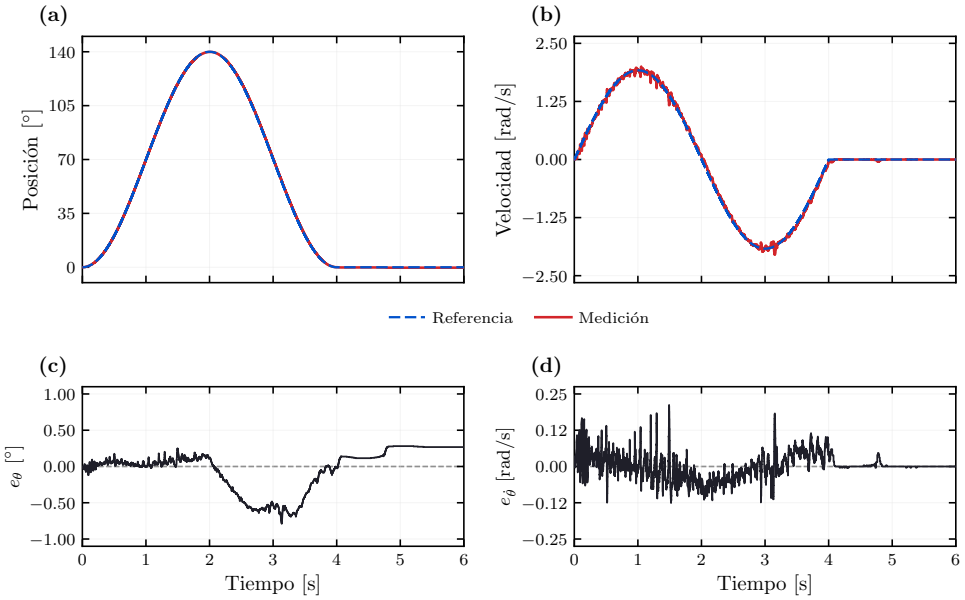


Figura 5.14: Seguimiento cinemático de la trayectoria senoidal con carga adicional: (a) posición de referencia y posición medida; (b) velocidad de referencia y velocidad medida; (c) error de posición $e_\theta = \theta_d - \theta$; y (d) error de velocidad $e_{\dot\theta} = \dot\theta_d - \dot\theta$.

de −2,757 Nm y +1,220 Nm. La diferencia entre ambas magnitudes es consistente con las distintas exigencias mecánicas durante las etapas de avance y retorno.

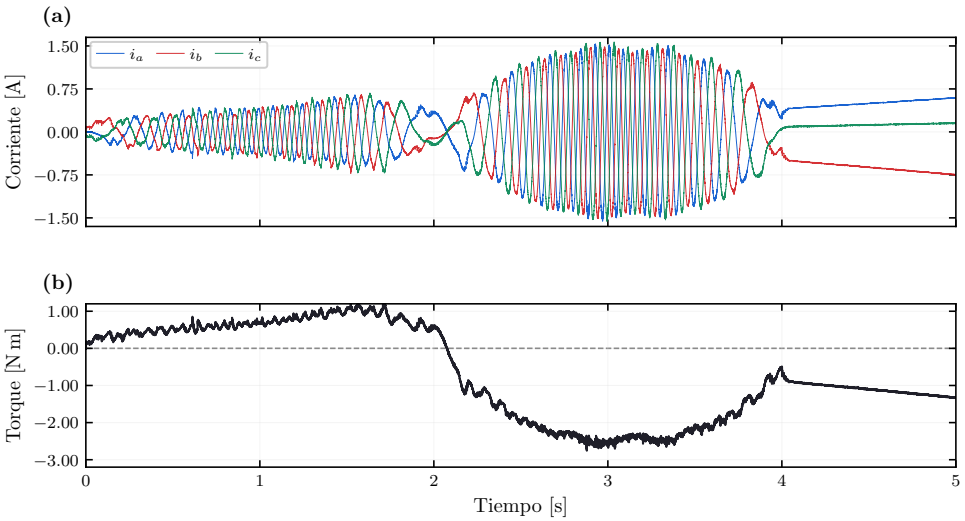


Figura 5.15: Variables eléctricas durante la trayectoria senoidal con carga adicional: (a) corrientes medidas i_a, i_b e i_c; y (b) torque electromagnético estimado $T_{m,\text{est}}$.

El incremento del esfuerzo electromagnético se observa al comparar el torque RMS durante el movimiento, que aumenta desde 1,052 Nm en la configuración base hasta 1,472 Nm con carga. Asimismo, la máxima magnitud de torque aumenta desde 1,956 hasta 2,757 Nm.

La Fig. 5.16 presenta las variables de los ejes d y q. Durante el movimiento, los errores de seguimiento de corriente alcanzan valores RMS de 5,85 mA en el canal d y 16,18 mA en el canal q. La magnitud máxima de corriente en el plano dq corresponde a 1,642 A,

equivalente a 0,553 pu, por debajo del límite máximo de corriente del actuador.

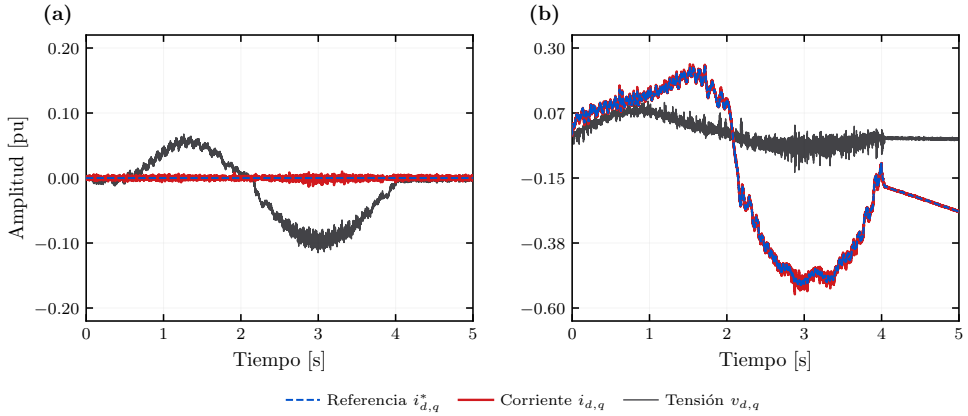


Figura 5.16: Referencias y corrientes medidas en los ejes d y q, junto con las tensiones aplicadas por el lazo interno FOC durante la trayectoria senoidal con carga adicional: (a) canal d; y (b) canal q.

La Tabla 5.4 resume los resultados obtenidos con la parametrización utilizada en cada configuración. La comparación caracteriza los puntos de operación evaluados, pero no permite aislar individualmente el efecto de la carga adicional.

Tabla 5.4: Resultados experimentales de la trayectoria senoidal para las parametrizaciones utilizadas en cada configuración.

Métrica	**Configuración base**	**Con carga**
RMSE_θ [°]	2,109	0,316
$e_{\theta,\mathrm{pk}}$ [°]	4,416	0,789
$\mathrm{RMSE}_{\dot\theta}$ [rad/s]	0,072	0,0512
$e_{\dot\theta,\mathrm{pk}}$ [rad/s]	0,218	0,212
$\overline{e}_{\theta,\mathrm{hold}}$ [°]	−1,118	+0,268
$\mathrm{RMSE}_{i_{sd}}$ [mA]	4,48	5,85
$\mathrm{RMSE}_{i_{sq}}$ [mA]	7,83	16,18
$I_{dq,\mathrm{pk}}$ [pu]	0,391	0,553
$T_{m,\mathrm{RMS}}$ durante movimiento [Nm]	1,048	1,472
máx $\lvert T_{m,\mathrm{est}}\rvert$ [Nm]	1,961	2,757

En síntesis, después de actualizar el modelo dinámico y reajustar los parámetros del CTC, el sistema siguió la trayectoria senoidal con carga adicional y presentó menores errores cinemáticos que los obtenidos en el ensayo base. Esta respuesta estuvo acompañada de una mayor demanda de corriente y torque electromagnético. Por tanto, los resultados muestran la posibilidad de ajustar el esquema CTC–FOC para una configuración mecánica conocida, pero no constituyen una evaluación de robustez ante cambios de carga manteniendo una única sintonización.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló e implementó un esquema CTC–FOC para el seguimiento de trayectorias de posición mediante una PMSM. La solución integró el modelo mecánico equivalente de un grado de libertad, el cálculo del torque requerido, su conversión en una referencia de corriente i_q^* y la regulación eléctrica mediante FOC y SVPWM. La incorporación de las inercias del segmento movilizado, del rotor y del reductor permitió representar de forma más consistente el esfuerzo mecánico del sistema. De esta manera, se estableció una cadena funcional completa entre las referencias de posición, velocidad y aceleración, el torque calculado por el CTC y la actuación electromagnética desarrollada por el motor.

La evaluación en PLECS permitió verificar progresivamente el inversor trifásico de dos niveles, el modulador SVPWM, los lazos de corriente y el controlador de movimiento. En los escenarios nominales, ante variaciones paramétricas de carga y frente a perturbaciones externas de torque, el incremento de la exigencia mecánica se manifestó principalmente en el torque y en la corriente i_q, mientras que el FOC mantuvo la regulación de las corrientes. El análisis también mostró la importancia del margen disponible de torque articular, particularmente ante condiciones de mayor exigencia mecánica. Por otra parte, las trayectorias suaves pudieron ejecutarse sin activar las restricciones consideradas, mientras que las discontinuidades de velocidad de las trayectorias triangular simétrica y triangular asimétrica de retorno rápido generaron solicitudes abruptas y activaron el limitador de torque. Estos resultados permitieron analizar conjuntamente el error de seguimiento, el esfuerzo del accionamiento y la sensibilidad del sistema frente a cambios en la dinámica y en la trayectoria.

La implementación experimental permitió comprobar la operación bidireccional del accionamiento, la adquisición de las variables eléctricas y la ejecución del CTC en la plataforma DSP–FPGA. La trayectoria de mínimo *jerk* se completó con cero, uno y dos discos adicionales, manteniendo los errores RMS de seguimiento de corriente entre el 0,15 % y 0,21 % de la corriente base del sistema, sin alcanzar los límites de corriente establecidos. En la trayectoria senoidal, la actualización del modelo y el reajuste de los parámetros del CTC redujeron los errores de posición y velocidad en la configuración con carga, mostrando la utilidad del proceso iterativo de ajuste contemplado en la metodología experimental. Esta comparación debe considerar que las configuraciones no utilizaron una misma sintonización del controlador. En ambas trayectorias, la incorporación de carga produjo el aumento esperado de i_q y del torque electromagnético estimado, mientras que i_d permaneció regulada

alrededor de cero.

En conjunto, los resultados dan cuenta del cumplimiento de los objetivos planteados: el sistema fue modelado y evaluado bajo diferentes perfiles y condiciones mecánicas, el esquema CTC–FOC fue implementado con un convertidor de dos niveles y se ejecutaron ensayos experimentales con carga emulada, incorporando ajustes cuando las características del montaje lo requirieron. La comparación entre ambos entornos mostró tendencias coherentes en la relación entre carga, corriente i_q y torque, mientras que las diferencias cuantitativas permitieron reconocer efectos propios del banco, como la resolución de la medición, especialmente en la estimación de velocidad a bajas revoluciones, la fricción y las incertidumbres mecánicas. Por tanto, el trabajo proporciona una validación ingenieril del accionamiento y de la estrategia de control dentro de las condiciones evaluadas. Su alcance permanece limitado a un mecanismo de un grado de libertad y a una estimación del torque basada en las corrientes, por lo que no corresponde a una validación clínica ni a una caracterización de la interacción directa con un usuario.

Las líneas futuras pueden orientarse a mejorar tres aspectos del sistema. En primer lugar, el modelo y el control pueden fortalecerse mediante la identificación sistemática de la inercia, la fricción, la eficiencia y las holguras del mecanismo, junto con observadores de perturbación o versiones robustas y adaptativas del CTC que reduzcan la dependencia de parámetros conocidos. También resulta pertinente estudiar estrategias que incorporen explícitamente las restricciones de torque, corriente y tensión. En segundo lugar, la validación experimental puede ampliarse mediante un sensor de torque, ensayos repetidos con diferentes cargas y protocolos que permitan evaluar el desempeño manteniendo una misma sintonización del controlador. Finalmente, la plataforma puede mejorarse mediante el perfeccionamiento de la estimación de velocidad a bajas revoluciones o la evaluación de sensores alternativos, como un *resolver* con su correspondiente electrónica de interfaz, además de una mayor capacidad de procesamiento y adquisición sincronizada y pruebas *hardware-in-the-loop*. Estas mejoras permitirían posteriormente evaluar estrategias de control de impedancia, admitancia o regulación de torque, orientadas a ejercicios asistidos y resistivos en los que la interacción del usuario pueda determinar el movimiento, sin imponer necesariamente una trayectoria predefinida ni el retorno a una posición fija de referencia. Asimismo, permitirían extender el estudio hacia mecanismos multiarticulares y condiciones de interacción física de mayor complejidad.

Apéndice A

Diagramas de flujo de la implementación experimental

A.1. Lógica supervisora del accionamiento

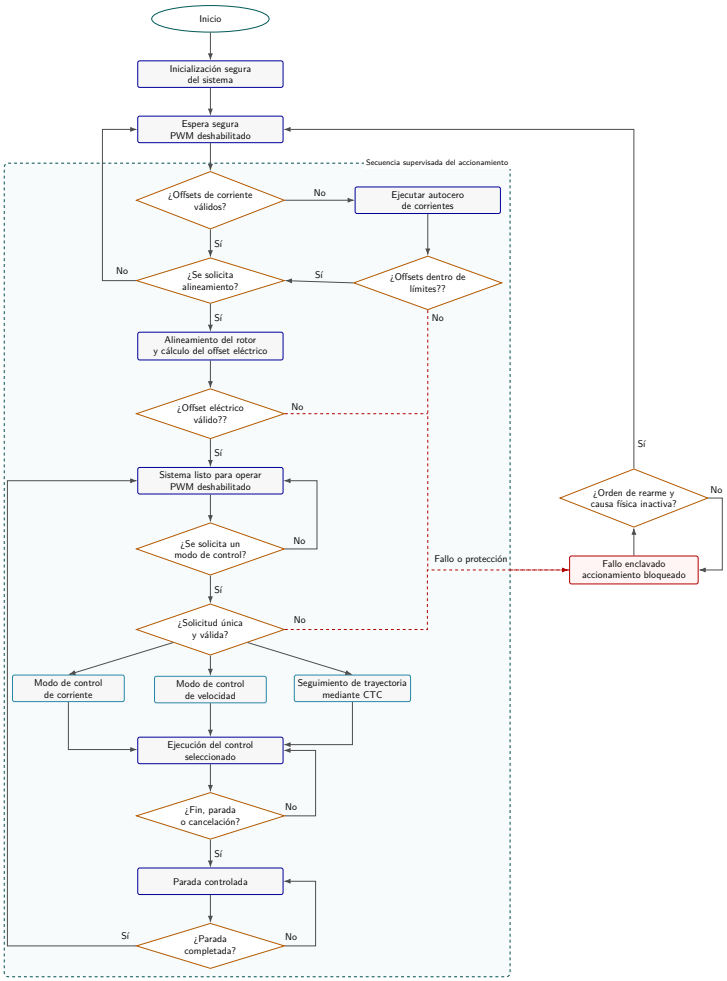


Figura A.1: Diagrama de flujo de la máquina supervisora del accionamiento.

A.2. Procedimiento de alineamiento eléctrico

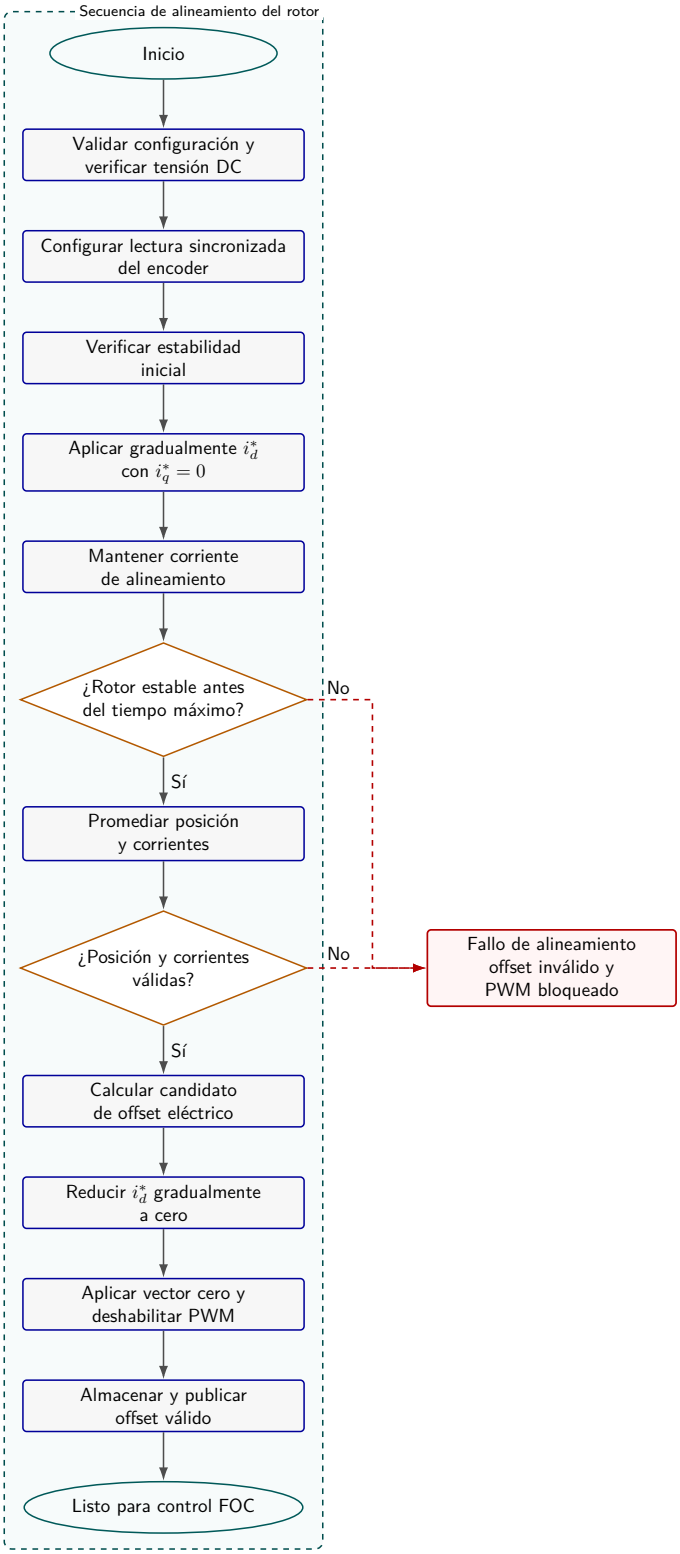


Figura A.2: Diagrama de flujo del proceso de alineamiento del rotor.

A.3. Ejecución y análisis de los ensayos

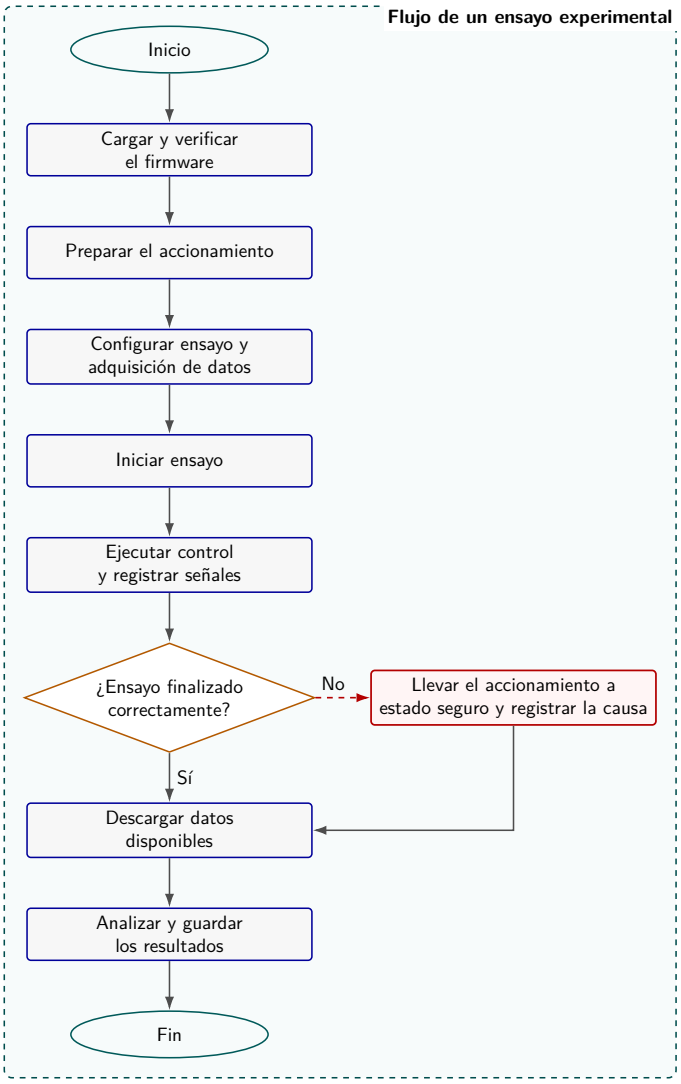


Figura A.3: Diagrama de flujo general para la ejecución y análisis de un ensayo experimental.

Bibliografía

[1] M. Rampioni, S. Leonzi, L. Antognoli, A. Mura, and V. Stara, "Poststroke ehealth technologies–based rehabilitation for upper limb recovery: Systematic review," *Journal of Medical Internet Research*, vol. 27, p. e57957, 03 2025.

[2] W. Yan, Y. Lin, Y.-F. Chen, Y. Wang, J. Wang, and M. Zhang, "Enhancing neuroplasticity for post-stroke motor recovery: Mechanisms, models, and neurotechnology," *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 2025.

[3] G. Bhaskare, "Neuroplasticity-based physiotherapy approaches in stroke rehabilitation: A systematic review," *Journal of Novel Physiotherapy and Rehabilitation*, vol. 9, no. 2, pp. 033–035, 2025.

[4] X. Zhang *et al.*, "Effects of robotic-assisted upper extremity therapy for stroke patients in different recovery phases: a systematic review and meta-analysis," *Frontiers in Neurology*, vol. 16, 2025.

[5] A. A. Blank, J. A. French, A. U. Pehlivan, and M. K. O'Malley, "Current trends in robot-assisted upper-limb stroke rehabilitation: Promoting patient engagement in therapy," *Current Physical Medicine and Rehabilitation Reports*, vol. 2, pp. 184–195, 06 2014.

[6] G. Durandau, D. Farina, and M. Sartori, "Robust real-time musculoskeletal modeling driven by electromyograms," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 65, no. 3, pp. 556–564, 2018.

[7] N. Garcia-Hernandez, C. Munguia-Angeles, and V. Parra-Vega, "Assist-as-needed robotic strategy based on velocity fields for enhancing motor training," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 30, no. 2, pp. 1504–1513, 2025.

[8] L. Shi, "Model-based active impedance controller development of the exoskeleton rehabilitation robot (errobot) for lower-extremity," in *2018 IEEE SmartWorld, Ubiquitous Intelligence Computing, Advanced Trusted Computing, Scalable Computing Communications, Cloud Big Data Computing, Internet of People and Smart City Innovation (SmartWorld/SCALCOM/UIC/ATC/CBDCom/IOP/SCI)*, 2018, pp. 150–155.

[9] M. J. Kim, W. Lee, J. Y. Choi, G. Chung, K.-L. Han, I. S. Choi, C. Ott, and W. K. Chung, "A passivity-based nonlinear admittance control with application to powered upper-limb control under unknown environmental interactions," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 24, no. 4, pp. 1473–1484, 2019.

[10] S. Dalla Gasperina, F. Ferrari, M. Gandolla, A. Pedrocchi, and E. Ambrosini, "Hybrid cooperative control of functional electrical stimulation and robot assistance for upper extremity rehabilitation," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 71, no. 9, pp. 2642–2650, 2024.

[11] C. Jaszczolt, "Understanding permanent magnet motors," https://www.controleng.com/understanding-permanent-magnet-motors/, January 2017.

[12] J. Müller, "Apuntes de Máquinas Eléctricas I (ELI-326)," Apuntes de asignatura, Departamento de Ingeniería Eléctrica, UTFSM.

[13] A. Mora Castro, "Control vectorial para máquinas de campo giratorio (ELI-328)," Apuntes de asignatura, Departamento de Ingeniería Eléctrica, UTFSM.

[14] B. K. Bose, *Modern Power Electronics and AC Drives*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

[15] P. Lezana, "Convertidores PWM: Inversor trifásico (ELI-319)," Apuntes de asignatura, Departamento de Ingeniería Eléctrica, UTFSM.

[16] J. Li, D. Wang, X. Wu, K. Xu, and X. qin Liu, "Vibration prediction of the robotic arm based on elastic joint dynamics modeling," *Sensors (Basel, Switzerland)*, vol. 22, 2022.

[17] R. Tedrake, "Underactuated robotics: Algorithms for walking, running, swimming, flying, and manipulation," Course Notes for MIT 6.832, 2023.

[18] J. Juchem and M. Loccufier, "Vibration control of underactuated mechanical systems with non-linear euler-lagrange control*," in *2023 European Control Conference (ECC)*, 2023, pp. 1–6.

[19] M. A. Faraj, B. Maalej, and N. Derbel, "Sliding mode control for lower limb rehabilitation exoskeleton contacting with floor," in *2023 20th International Multi-Conference on Systems, Signals Devices (SSD)*, 2023, pp. 109–115.

[20] T.-Q. Nguyen, V.-T. Phan, D.-T. Vo, V.-H. Trinh, H.-V. Nguyen, M.-S. Tran, and D.-T. Tran, "Kinematics, dynamics and control design for a 4-dof robotic manipulator," in *2021 International Conference on System Science and Engineering (ICSSE)*, 2021, pp. 138–144.

[21] E. Minguzzi, "Rayleigh's dissipation function at work," *European Journal of Physics*, vol. 36, no. 3, p. 035014, 2015.

[22] J. A. Rojas-Quintero, F. Dubois, H. C. Ramírez-de Ávila, E. Bugarin, B. Sánchez-García, and N. R. Cazarez-Castro, "Analysis of a dry friction force law for the covariant optimal control of mechanical systems with revolute joints," *Mathematics*, vol. 12, no. 20, p. 3239, 2024.

[23] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado *et al.*, *Control system design*. Prentice Hall Upper Saddle River, 2001, vol. 240.

[24] TeachMeAnatomy, "Terms of movement," https://teachmeanatomy.info/the-basics/anatomical-terminology/terms-of-movement/.

[25] D. A. Winter, *Anthropometry*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Ltd, 2009, ch. 4, pp. 82–106, available: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9780470549148.ch4.

[26] A. I. Kapandji, *Fisiología articular. Tomo 2: Miembro inferior*, 6th ed. Madrid, España: Editorial Médica Panamericana, 2012.

[27] A. I. Kapandji, *Fisiología articular. Tomo 1: Miembro superior*, 5th ed. Madrid, España: Editorial Médica Panamericana, 2006.

[28] L. Yu, H. Leto, and S. Bai, "Design and gait control of an active lower limb exoskeleton for walking assistance," *Machines*, vol. 11, no. 9, p. 864, 2023.

[29] A.-N. Sharkawy, "Minimum jerk trajectory generation for straight and curved movements: Mathematical analysis," in *Advances in Robotics and Automatic Control: Reviews*, S. Y. Yurish, Ed. Barcelona, Spain: International Frequency Sensor Association (IFSA) Publishing, 2021, vol. 2, pp. 187–201, available: https://www.sensorsportal.com/HTML/BOOKSTORE/Advances_in_Robotics_Reviews_Vol_2.pdf.

[30] Y. Cen, J. Yuan, S. Ma, J. Luo, and H. Wang, "Trajectory optimization algorithm of trajectory rehabilitation training mode for rehabilitation robot," in *2022 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, 2022, pp. 2153–2158.

[31] "IEEE Guide for Testing Permanent Magnet Machines," *IEEE Std 1812-2023 (Revision of IEEE Std 1812-2014)*, pp. 1–88, 2023.

[32] F. Fröif and F. Ortenburger, *Introducción al control electrónico*. Berlin: Siemens, 1986.

[33] G. Carrasco, "Diseño e implementación de módulos de firmware para uso de FPGA en aplicaciones de potencia," Master's thesis, Universidad Técnica Federico Santa María, 2008.

[34] P. Lezana, "Manejo de la plataforma digital DSP+FPGA para el control de accionamientos," Departamento de Ingeniería Eléctrica, UTFSM, 2020.