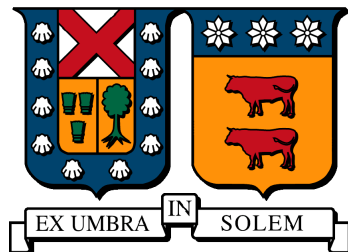


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO-CHILE



ANÁLISIS TÉCNICO Y ECONÓMICO DE
VIGAS DE MADERA COMPUESTAS

JOSÉ CARLOS MURGA RAMÍREZ

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

PROFESOR GUÍA : DR.-ING. PATRICIO ARRUÉ
PROFESOR CORREFERENTE : DR. JOAQUÍN MURA

julio 2026



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Análisis técnico y económico de vigas de madera compuestas

Nombre del candidato(a): José Carlos Murga Ramírez

Carrera / Grado: Ingeniero Civil Mecánico

Campus: San Joaquín Departamento: Ingeniería Mecánica

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Patricio Andrés Arrué Cornejo, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

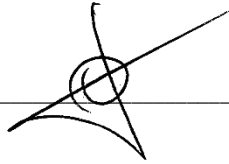
☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (marcar una opción):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

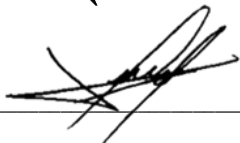
Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 17/08/2026 Firma: 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 14/08/2026 Firma: 

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Resumen

El presente estudio desarrolla un análisis técnico-económico del comportamiento estructural de vigas de pino radiata reforzadas interfacialmente con Titanio Grado 2 y polímero reforzado con fibra de carbono (CFRP). El objetivo es evaluar su viabilidad como alternativas sustentables frente al acero estructural, optimizando la relación entre capacidad de carga, masa y costo financiero.

La metodología integró métodos analíticos y simulaciones por Elementos Finitos (MEF) en Ansys Workbench, evaluando configuraciones planas y en U. Se acopló un modelo paramétrico de costos para alimentar algoritmos de optimización multiobjetivo mediante Frentes de Pareto, identificando así las dimensiones que maximizan el rendimiento mecánico con la mínima inversión.

Los resultados demostraron que la simulación MEF es esencial para predecir el Estado Límite de Servicio (ELS) en vigas cortas, corrigiendo la subestimación analítica de las deflexiones. En la optimización técnico-económica, el CFRP dominó absolutamente el espacio de diseño. La variante plana de CFRP (6 capas) se consolidó como el óptimo económico global, soportando 134,20 kN con un Índice de Eficiencia Financiera de 0,61 kN/USD (un 45 % superior a su equivalente en titanio).

Para altas solicitaciones, el CFRP en U (6 capas) logró emular la resistencia de un perfil de acero A36 (172,66 kN frente a 170 kN), pero reduciendo la masa muerta en un 71 %. Su Índice de Eficiencia Másica alcanzó 8,69 kN/kg, triplicando el rendimiento del acero (2,64 kN/kg). Se concluye que las vigas ligo-poliméricas constituyen una solución ingenieril superior al acero para obras con restricciones logísticas y de gálibo, mientras que el titanio resulta inviable comercialmente por sus altos costos.

Abstract

This study develops a technical-economic analysis of the structural behavior of Radiata pine beams reinforced with Grade 2 Titanium and Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP). The objective is to evaluate their viability as sustainable alternatives to structural steel by optimizing the relationship between load-bearing capacity, mass, and financial cost.

The methodology integrated analytical methods (transformed-section method) and Finite Element Method (FEM) simulations in Ansys Workbench, evaluating both flat and “U-shaped” configurations. A parametric cost model was coupled with multi-objective optimization algorithms using Pareto Fronts, identifying the dimensions that maximize mechanical performance with minimal investment.

Results demonstrated that FEM simulation is essential to predict the Serviceability Limit State (SLS) in short beams, correcting the analytical underestimation of deflections. In the technical-economic optimization, CFRP absolutely dominated the design space. The flat CFRP variant (6 layers) emerged as the global economic optimum, supporting 134,20 kN with a Financial Efficiency Index of 0,61 kN/USD (45 % higher than its titanium equivalent).

For high-load demands, the “U-shaped” CFRP (6 layers) managed to emulate the strength of an A36 steel profile (172,66 kN versus 170 kN), while reducing dead load by 71 %. Its Mass Efficiency Index reached 8,69 kN/kg, tripling the performance of steel (2,64 kN/kg). It is concluded that timber-polymer beams constitute an engineering solution superior to steel for projects with logistical and clearance constraints, whereas titanium remains commercially unviable due to its high costs.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Estructura de la memoria	2
2. Marco Teórico	4
2.1. Madera estructural	4
2.1.1. Clasificación de la madera	5
2.1.2. Propiedades físicas de la madera	5
2.1.3. Propiedades mecánicas de la madera	7
2.1.4. Aplicaciones Estructurales y Escenarios de Demanda en Elementos de Flexión	10
2.2. Fibra de carbono e implementación en materiales compuestos	11
2.2.1. Precursores y rutas de fabricación	12
2.2.2. Propiedades y criterios de clasificación	12
2.2.3. Interfaz fibra-matriz: adhesión y tratamientos superficiales	13
2.2.4. Arquitectura del refuerzo y formas comerciales	13
2.2.5. Matrices y selección para compuestos estructurales	14
2.2.6. Procesos de manufactura del CFRP y su relación con la calidad	14
2.3. Vigas de Acero Estructural: Propiedades, Solicitaciones y Aplicaciones	15
2.3.1. Especificación del Material y Perfiles Comerciales	15
2.3.2. Estados Límites, Modos de Falla y Capacidades de Carga	15
2.3.3. Aplicaciones de Alta Demanda e Ingeniería de Diseño	16
2.4. Titanio	17
2.4.1. ¿El titanio se usa como material compuesto?	17
2.4.2. Grados y familias de aleaciones de titanio	18

2.4.3.	Comparación entre titanio Grado 2 y Grado 5 (Ti-6Al-4V)	18
2.4.4.	Titanio como matriz en materiales compuestos (TMC)	19
2.5.	Adhesivos	20
2.5.1.	Mecanismos de transferencia de carga	20
2.5.2.	Clasificación de adhesivos estructurales	21
2.5.3.	Caracterización mecánica	21
2.6.	Materiales compuestos	22
2.6.1.	Origen y evolución de la aplicación	22
2.6.2.	Clasificación y constituyentes típicos	22
2.6.3.	Aplicaciones típicas en ingeniería mecánica	23
2.7.	Modelos de cálculo	24
2.7.1.	Método analítico	24
2.7.2.	Método de Elementos Finitos (FEM)	28
3.	Metodología	32
3.1.	Ensayo de flexión a tres puntos	32
3.1.1.	Descripción del caso de carga y relaciones estáticas	33
3.1.2.	Justificación de la configuración de análisis	34
3.2.	Configuraciones de refuerzo	34
3.2.1.	Configuración plana	35
3.2.2.	Configuración en U	36
3.3.	Selección de materiales	37
3.3.1.	Justificación de los componentes seleccionados	37
3.3.2.	Tabla maestra de propiedades de entrada	38
3.3.3.	Propiedades físicas de diseño	39
3.3.4.	Consideraciones analíticas y criterios de falla	40
3.3.5.	Dimensiones paramétricas y de la viga base	41
3.4.	Cálculo analítico y modelo iterativo	42
3.4.1.	Viga de madera sin reforzar	44
3.4.2.	Viga de madera reforzada - Configuración Plana	45
3.5.	Estudio de Mercado y Modelamiento Paramétrico de Costos	52
3.5.1.	Especificación Técnica de Materiales	52
3.5.2.	Costos Materiales y Tabulación de Mercado	53
3.5.3.	Funciones Analíticas de Costo (Modelamiento Paramétrico)	55
3.6.	Modelamiento por Elementos Finitos y Optimización Paramétrica	58

3.6.1.	Línea Base: Viga de Madera sin Reforzar	58
3.6.2.	Viga de Madera Reforzada - Configuración Plana	61
3.6.3.	Viga de Madera Reforzada - Configuración U	66
4.	Resultados y discusión: desempeño mecánico y viabilidad técnico-económica	69
4.1.	Validación Analítica vs. Numérica	70
4.1.1.	Análisis Estructural: Capacidad de Carga Soportada y Estado de Esfuerzos	71
4.1.2.	Análisis Paramétrico de Costos	75
4.2.	Optimización Técnico-Económica Multiobjetivo (Frentes de Pareto)	79
4.2.1.	Candidatos Óptimos para Refuerzo Metálico (Titanio Gr 2)	80
4.2.2.	Candidatos Óptimos para Refuerzo Polimérico (CFRP)	84
4.2.3.	Veredicto Técnico y Selección de la Configuración Óptima Global	87
4.3.	Limitaciones Intrínsecas de la Matriz Lignocelulósica y Mitigación de Costos	88
4.4.	Estudio Comparativo y Consenso: Madera Compuesta vs. Acero Estructural	90
5.	Conclusiones y Recomendaciones	92
5.1.	Conclusiones	92
5.2.	Recomendaciones y Trabajos Futuros	93
A.	Códigos desarrollados en Python	95
A.1.	Definición de propiedades de los materiales y parámetros geométricos	95
A.2.	Funciones del modelo analítico	97
A.2.1.	Cálculo del eje neutro	97
A.2.2.	Cálculo del momento de inercia	98
A.2.3.	Cálculo de la carga máxima y distribución de esfuerzos	100
A.3.	Programa principal	100
A.3.1.	Configuración Plana	100
A.3.2.	Configuración en U	101
A.4.	Cálculo Esfuerzo de corte	102

B. Gráficos Analíticos	103
B.1. Candidatos Óptimos: Refuerzo de Titanio Grado 2	104
B.1.1. Configuración Plana	104
B.1.2. Configuración en “U”	105
B.2. Candidatos Óptimos: Refuerzo de Fibra de Carbono (CFRP)	106
B.2.1. Configuración Plana	106
B.2.2. Configuración en “U”	107
B.3. Evolución del Esfuerzo Cortante Interfacial vs. Espesor de Refuerzo . .	108
B.3.1. Evolución del Corte en Refuerzos de Titanio Grado 2	108
B.3.2. Evolución del Corte en Refuerzos de Fibra de Carbono (CFRP)	109

Índice de figuras

2.1. Curva típica de fuerza-deformación de un material biológico.	8
2.2. Curvas de esfuerzo-deformación para tracción y compresión paralela y perpendicular a la fibra.	10
2.3. Viga simple bajo flexión pura [28].	25
2.4. Viga simple con región central en flexión pura y regiones extremas en flexión no uniforme [28].	25
2.5. Curvatura de una viga y radio de curvatura [28].	26
3.1. Esquematización de un ensayo de flexión a tres puntos.	33
3.2. Representación esquemática de la sección transversal en configuración plana.	35
3.3. Representación esquemática de la sección transversal en configuración en “U”.	36
3.4. Curva de regresión paramétrica del costo total de la placa de Titanio Grado 2 en función del espesor.	56
3.5. Evolución del costo total acumulado del sistema de refuerzo CFRP (fibra + resina) en función del número de capas.	57
4.1. Contorno de esfuerzos normales longitudinales (σ_x) en la viga de madera sin reforzar bajo la carga límite elástica de 68,27 kN (unidades en MPa).	72
4.2. Contornos de esfuerzo equivalente en la configuración de Titanio en U, mostrando la fluencia del metal en la cara inferior como mecanismo gobernante de falla.	74
4.3. Distribución de tensiones longitudinales (σ_x) en la viga con CFRP plano, evidenciando que el sustrato de madera alcanza la rotura a tracción mientras el refuerzo continúa en rango elástico.	75

4.4.	Curva paramétrica del costo total en función del espesor de titanio (t_t) para la configuración de refuerzo plano (lote de 10 vigas).	76
4.5.	Curva paramétrica del costo total en función del espesor de titanio (t_t) para la configuración de refuerzo en U (lote de 10 vigas).	77
4.6.	Curva paramétrica del costo total en función del espesor de la fibra de carbono (t_c) para la configuración de refuerzo plano (lote de 10 vigas). .	78
4.7.	Curva paramétrica del costo total en función del espesor de la fibra de carbono (t_c) para la configuración de refuerzo en U (lote de 10 vigas). .	78
4.8.	Evolución de la capacidad de carga máxima admisible en función del espesor del refuerzo de Titanio Grado 2 para la configuración plana. . .	81
4.9.	Evolución de la capacidad de carga máxima admisible en función del espesor del refuerzo de Titanio Grado 2 para la configuración en “U”. .	81
4.10.	Frente de Pareto para la optimización multiobjetivo entre el costo total del lote y la capacidad de carga máxima de vigas reforzadas con Titanio Grado 2 en la configuración plana.	82
4.11.	Frente de Pareto para la optimización multiobjetivo entre el costo total del lote y la capacidad de carga máxima de vigas reforzadas con Titanio Grado 2 en la configuración en “U”.	83
4.12.	Evolución de la capacidad de carga máxima admisible en función de la adición discreta de capas de CFRP (0,2 mm por capa) para la configuración plana.	85
4.13.	Evolución de la capacidad de carga máxima admisible en función de la adición discreta de capas de CFRP (0,2 mm por capa) para la configuración en “U”.	85
4.14.	Frente de Pareto para la optimización multiobjetivo entre el costo total del lote y la capacidad de carga máxima de vigas reforzadas con laminados de CFRP en la configuración plana.	86
4.15.	Frente de Pareto para la optimización multiobjetivo entre el costo total del lote y la capacidad de carga máxima de vigas reforzadas con laminados de CFRP en la configuración en “U”.	87
B.1.	Curvas de Esfuerzo vs. Deflexión para los candidatos óptimos de Titanio en configuración plana. Se indica la carga de fluencia gobernante del metal.	104

B.2. Curvas de Esfuerzo vs. Deflexión para los candidatos óptimos de Titania en configuración U. Se evidencia el incremento de inercia y rigidez flexional.	105
B.3. Curvas de Esfuerzo vs. Deflexión para los candidatos óptimos de CFRP en configuración plana. La falla del sistema está dominada por la rotura de la madera a tracción.	106
B.4. Curvas de Esfuerzo vs. Deflexión para los candidatos óptimos de CFRP en configuración U. Se observa la optimización de la relación carga-deformación.	107
B.5. Curvas paramétricas de Esfuerzo de Corte Máximo ($\tau_{\text{máx}}$) vs. Espesor de Titanio (t_t).	108
B.6. Curvas paramétricas de Esfuerzo de Corte Máximo ($\tau_{\text{máx}}$) vs. Número de Capas de CFRP (n_c).	109

Índice de tablas

2.1. Clasificación típica de fibras de carbono por propiedades mecánicas (criterio por módulo y resistencia) [53].	13
2.2. Tipos de matrices en materiales compuestos reforzados con fibra [11,30].	14
2.3. Comparación típica entre titanio comercialmente puro Grado 2 (CP Ti) y aleación Ti-6Al-4V Grado 5 (condición recocida).	18
2.4. Ejemplos representativos de compuestos con matriz de titanio (TMC) y motivación de uso [36,42,52].	20
2.5. Clasificación resumida de materiales compuestos: constituyentes típicos y aplicaciones generales [11,24,30,39].	23
3.1. Propiedades mecánicas y elásticas de entrada para los materiales seleccionados.	38
3.2. Propiedades físicas de entrada de los materiales constituyentes de la viga compuesta.	39
3.3. Dimensiones base de la viga de madera y variables paramétricas iterativas del refuerzo.	41
3.4. Precios de mercado para Pino Radiata de 2×6 pulgadas (en USD) [50].	53
3.5. Fluctuación de precios de Titanio Grado 2 por espesor (1 m^2 en USD). .	54
3.6. Precios de mercado para CFRP Unidireccional (USD) [53].	54
3.7. Precios de adhesivos epóxicos estructurales (USD) [47–49].	55
3.8. Propiedades mecánicas ortotrópicas del pino radiata utilizadas en el modelo numérico.	59
3.9. Propiedades mecánicas de la resina epóxica utilizadas en el modelo numérico.	62
3.10. Propiedades mecánicas del Titanio Grado 2 utilizadas en el modelo numérico.	62

3.11. Propiedades mecánicas ortotrópicas de la fibra de carbono (CFRP) utilizadas en el modelo numérico.	65
4.1. Comparación entre el modelo analítico y el modelo de elementos finitos para las distintas configuraciones de viga.	70
4.2. Puntos candidatos óptimos arrojados por el Frente de Pareto para el Titanio Grado 2.	80
4.3. Puntos candidatos óptimos arrojados por el Frente de Pareto para el laminado de CFRP.	84
4.4. Matriz comparativa de desempeño técnico-económico y eficiencia de sistemas compuestos frente al acero estructural tradicional (Lote de 10 unidades).	90

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

A lo largo de la historia, la madera ha sido uno de los materiales estructurales más utilizados en la construcción debido a su disponibilidad, facilidad de trabajo y favorable relación resistencia-peso. Sin embargo, con el aumento de las exigencias estructurales y el desarrollo de nuevos materiales durante la Revolución Industrial, la madera fue progresivamente desplazada por elementos como el acero y el hormigón armado, los cuales ofrecían prestaciones mecánicas más acordes a las demandas modernas.

A pesar de ello, la madera mantiene su relevancia constructiva contemporánea, destacando por su carácter renovable y bajo impacto ambiental. El desafío técnico radica en su degradación natural ante factores higrotérmicos, cambios climáticos, ataques biológicos y ciclos de carga, lo que genera una necesidad constante de mantenimiento y refuerzo estructural. Tradicionalmente, la adhesión de placas de acero ha sido un método de refuerzo frecuente; no obstante, esta solución presenta inconvenientes significativos, tales como el incremento del peso propio, la susceptibilidad a la corrosión y complejidades en la instalación.

En este contexto, los materiales compuestos han abierto nuevas posibilidades para la rehabilitación estructural [30]. Los polímeros reforzados con fibra de carbono (CFRP) destacan por su elevada rigidez y resistencia específicas, además de su inmunidad a la corrosión [20]. Si bien su aplicación inició en las industrias aeroespacial y automotriz, su integración en la ingeniería civil comenzó en la década de 1990 con casos pioneros como el puente de Ibach en Suiza [41]. En el ámbito de la madera, su viabilidad se demostró en 1995 con el refuerzo de un puente histórico en Sins, Suiza [41], y en la

iglesia Frauenkirche de Meissen, Alemania [35].

Por otro lado, el titanio (en grados comerciales como el Grado 2 y Grado 5 [13]) es ampliamente reconocido por su excepcional resistencia a la corrosión, baja densidad y excelente comportamiento mecánico [56]. Históricamente, su uso se ha concentrado en nichos de alto desempeño como el sector aeroespacial, médico e industrial, donde sus exigencias justifican su costo [55]. En el ámbito de las estructuras civiles, su elevado precio frente a alternativas convencionales ha limitado su aplicación como refuerzo. Sin embargo, su enorme potencial para la optimización estructural en ambientes agresivos —donde se requiere alta durabilidad y resistencia química— plantea una oportunidad de investigación vigente y necesaria para evaluar su viabilidad técnica y económica [55]

1.2. Objetivos

En el marco de esta investigación, se plantea como objetivo general:

Optimizar la resistencia mecánica y el costo de vigas compuestas de base de madera reforzadas con láminas de titanio y fibra de carbono, para evaluar su viabilidad técnica y económica frente a vigas convencionales de acero estructural.

Para alcanzar este objetivo, se definen los siguientes objetivos específicos:

- Analizar de manera analítica el desempeño mecánico y el costo de vigas de madera reforzadas con titanio y fibra de carbono.
- Validar los resultados obtenidos mediante modelamiento de elementos finitos, apoyado en desarrollos analíticos basados en la mecánica de sólidos.
- Evaluar la viabilidad técnica y económica de las vigas compuestas frente a las vigas de acero estructural en aplicaciones de ingeniería civil.

1.3. Estructura de la memoria

El presente documento se estructura en cinco capítulos:

- Capítulo 1: Introduce la problemática estructural de la madera, presenta las alternativas de refuerzo (titanio y CFRP) y define los objetivos de la investigación.
- Capítulo 2: Desarrolla el marco teórico sobre las propiedades de los materiales involucrados y los fundamentos mecánicos para el cálculo analítico y numérico (FEM).

- Capítulo 3: Detalla la metodología, abarcando las ecuaciones analíticas para las configuraciones plana y en “U”, y la configuración del modelo de validación en ANSYS.
- Capítulo 4: Discute los resultados, validando el desempeño mecánico del cálculo analítico frente a las simulaciones numéricas, y presenta la evaluación de viabilidad técnico-económica.
- Capítulo 5: Expone las conclusiones finales del estudio y plantea recomendaciones para trabajos futuros.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Madera estructural

La madera estructural se define como aquella destinada a soportar cargas y funcionar como un elemento mecánicamente resistente dentro de un sistema constructivo. Su uso se fundamenta en una favorable relación resistencia-peso, facilidad de procesamiento y un desempeño predecible cuando se selecciona y especifica bajo estrictos criterios técnicos [27].

A diferencia de los materiales isotrópicos y esencialmente homogéneos como el acero, la madera presenta un comportamiento marcadamente ortotrópico. Esto significa que sus propiedades mecánicas (módulo de elasticidad, resistencia a la tracción, compresión y corte) varían significativamente en tres direcciones perpendiculares entre sí: longitudinal (paralela a la fibra), radial y tangencial (perpendiculares a la fibra) [27]. En consecuencia, la respuesta de la madera ante esfuerzos de flexión y cortante exige consideraciones particulares en el modelado matemático y en la simulación numérica mediante Elementos Finitos.

En aplicaciones donde la madera maciza resulta insuficiente para cubrir luces mayores o exigencias de carga elevadas, el material puede complementarse con refuerzos externos (placas metálicas o polímeros reforzados con fibra) para conformar sistemas estructurales compuestos. En estos sistemas, el desempeño global depende no solo de la contribución mecánica individual del refuerzo, sino, de manera crítica, de la correcta transferencia de esfuerzos a través de la interfaz adhesiva entre los materiales.

2.1.1. Clasificación de la madera

Debido a su naturaleza biológica, la madera maciza presenta una alta variabilidad en sus propiedades físicas y mecánicas producto de defectos naturales como nudos, desviaciones de la fibra, fendas y variaciones en la densidad. Para garantizar la seguridad y fiabilidad en su aplicación ingenieril, es indispensable someter el material a procesos de clasificación estructural. Estos procedimientos permiten asignar piezas individuales a clases resistentes con propiedades mecánicas de diseño conocidas y garantizadas.

Principalmente, existen dos metodologías de clasificación aceptadas a nivel industrial y normativo [27, 33]:

- Clasificación visual: Es el método tradicional y consiste en la inspección ocular de cada pieza para identificar, medir y evaluar la ubicación de defectos visibles (tamaño y posición de los nudos, inclinación del grano, tamaño de las fisuras, entre otros). A partir de reglas estandarizadas, se descartan o agrupan las piezas en diferentes grados estructurales.
- Clasificación mecánica (Machine Grading): Consiste en someter la pieza de madera a ensayos no destructivos (generalmente flexión continua o vibración acústica) para medir directamente su rigidez (Módulo de Elasticidad). Dado que existe una fuerte correlación estadística entre la rigidez y la resistencia a la rotura, este método permite una asignación más precisa y confiable de la clase resistente.

En el contexto nacional chileno, el uso estructural del Pino radiata (especie seleccionada para esta investigación) está regulado por normativas específicas que definen tanto sus dimensiones como sus grados estructurales (típicamente grados visuales o mecánicos), permitiendo a los ingenieros extraer los esfuerzos admisibles y módulos de elasticidad necesarios para el diseño y el análisis computacional [33].

2.1.2. Propiedades físicas de la madera

Las propiedades físicas de la madera describen su comportamiento frente a las condiciones ambientales y su estado material. Las variables más incidentes en el desempeño estructural son el contenido de humedad, la densidad, la estabilidad dimensional y las propiedades térmicas. Estas características son determinantes, ya que la madera es un material higroscópico, es decir, intercambia humedad con el entorno hasta alcanzar un equilibrio dependiente de la temperatura y la humedad relativa del aire [27].

Contenido de humedad e higroscopicidad: El contenido de humedad (CH) corresponde al porcentaje de agua presente en la madera con respecto a su masa anhidra (masa seca al horno). Se determina analíticamente mediante la expresión:

$$CH(\%) = \left(\frac{m_h - m_0}{m_0} \right) \times 100 \quad (2.1)$$

donde m_h es la masa de la muestra en su condición de ensayo y m_0 es la masa anhidra, obtenida mediante secado en estufa hasta masa constante.

En este contexto, un parámetro crítico es el Punto de Saturación de la Fibra (PSF), el cual oscila típicamente entre el 28 % y el 30 % de contenido de humedad para la mayoría de las especies [27]. El PSF representa el umbral físico donde el agua libre ha abandonado las cavidades celulares, quedando únicamente agua ligada en las paredes celulares. Los cambios en las propiedades mecánicas y dimensionales de la madera ocurren casi exclusivamente cuando el contenido de humedad fluctúa por debajo del PSF.

Densidad: La densidad es una propiedad física fundamental debido a su correlación directa con la resistencia mecánica, la rigidez y el peso propio del elemento estructural. Se define convencionalmente como:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.2)$$

donde m es la masa y V el volumen correspondiente al estado de humedad considerado. Debido a la variabilidad biológica, en el diseño estructural no se emplea un valor único, sino que se trabaja con valores estadísticos. La normativa de diseño, como la NCh1198 para el caso chileno, tabula la densidad en términos de densidad característica (ρ_k , asociada al 5to percentil) y densidad media (ρ_{mean}), cuyos valores dependen del grado estructural asignado a la especie, como el Pino radiata [33].

Estabilidad dimensional (contracción y anisotropía): La madera experimenta variaciones dimensionales (contracción al secarse e hinchamiento al absorber humedad) únicamente cuando las fluctuaciones de humedad ocurren por debajo del PSF. Como material ortotrópico, esta respuesta dimensional es marcadamente asimétrica: la contracción longitudinal (paralela a la fibra) es mínima (típicamente entre 0.1 % y 0.2 %), la contracción radial es moderada (alrededor del 3 % al 5 %), y la contracción tangencial es la más severa (entre 6 % y 10 %) [27]. Esta anisotropía de contracción es

la principal causa de defectos geométricos inducidos por secado, tales como alabeos, torceduras y grietas longitudinales, fenómenos que deben mitigarse para asegurar un correcto acoplamiento con placas de refuerzo externas.

Propiedades térmicas: La madera presenta una baja conductividad térmica en comparación con los materiales metálicos (como el acero o el titanio) y los polímeros reforzados, cualidad atribuible a su estructura celular porosa. Su calor específico e inercia térmica contribuyen a un excelente desempeño ante incendios, ya que la sección carbonizada exterior aísla y protege el núcleo estructural [27]. No obstante, la transferencia de calor está fuertemente influenciada por el contenido de humedad y la densidad, variables que deben considerarse al evaluar ciclos higrotérmicos en vigas compuestas, particularmente por las diferencias de dilatación térmica entre la madera, el adhesivo y el refuerzo.

2.1.3. Propiedades mecánicas de la madera

Las propiedades mecánicas de la madera describen su capacidad para resistir esfuerzos y deformaciones bajo diferentes solicitaciones. A diferencia de los metales isótropos, la madera se comporta como un material marcadamente ortotrópico [27]. Sus resistencias y rigideces dependen de la dirección de la carga respecto a la orientación de las fibras, siendo excepcionalmente mayores en dirección paralela al grano (longitudinal) que en dirección perpendicular (radial o tangencial).

Resistencia a la flexión: La flexión es la sollicitación más determinante en el diseño de vigas, ya que genera una distribución simultánea de esfuerzos normales de compresión y tracción, acompañados de esfuerzos de corte longitudinal. En la madera maciza, el límite proporcional a compresión es inferior al de tracción [27]. Por consiguiente, al someter una viga a flexión creciente, suele iniciarse la plastificación en las fibras superiores (compresión), lo que desplaza el eje neutro hacia la zona traccionada hasta que se produce una falla frágil y repentina en la fibra inferior [33]. Esta característica justifica la hipótesis adoptada en el cálculo analítico de esta investigación, donde se asume que la rotura de la viga base estará gobernada por la falla súbita a tracción en su cara inferior.

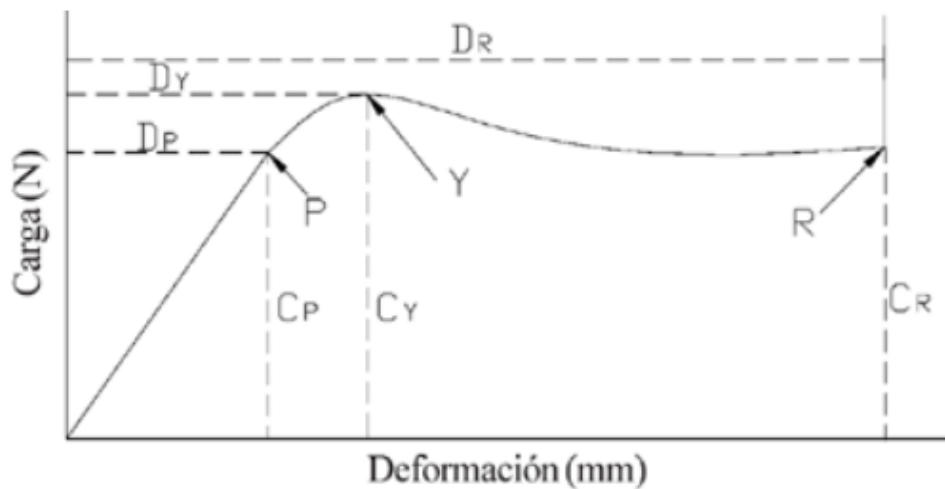


Figura 2.1: Curva típica de fuerza-deformación de un material biológico.

Como se evidencia en la Figura 2.1, la curva típica de fuerza-deformación de la madera sometida a flexión presenta puntos singulares y regiones críticas que definen su respuesta macromecánica:

- Límite Proporcional (P) y Deformación (D_P): Representa el punto terminal del régimen elástico lineal. Hasta este nivel de fuerza (P), la deformación (D_P) es directamente proporcional a la carga aplicada y recuperable en su totalidad al retirar la sollicitación. Las fibras de compresión y tracción se mantienen dentro de sus límites elásticos.
- Punto de Fluencia o Cedencia (Y) y Deformación (D_Y): Marca el punto de inflexión donde se pierde la linealidad elástica (del inglés Yield Point). Físicamente representa el inicio de la plastificación por aplastamiento en las fibras superiores de madera sometidas a compresión. La deformación (D_Y) asociada a este punto inicia el desplazamiento cinemático del eje neutro hacia la zona inferior.
- Punto de Fractura o Ruptura (R) y Deformación (D_R): Indica el colapso definitivo de la viga (Fracture Point). Dado que la madera es significativamente más débil e inelástica a tracción pura, en este punto se produce la falla súbita por desgarro en la fibra inferior, provocando la caída instantánea de la carga a cero sin presentar estricción ni ductilidad residual. La deformación D_r corresponde a la deformación de ruptura, es decir, el desplazamiento alcanzado por la probeta al momento de producirse la falla definitiva

Adicionalmente, la curva incorpora las cargas características asociadas a cada estado mecánico del material. En este sentido, C_P corresponde a la carga en el límite proporcional, representando el máximo nivel de carga para el cual el comportamiento permanece completamente elástico; C_Y corresponde a la carga de fluencia, asociada al inicio de las deformaciones permanentes; y C_R representa la carga de ruptura, correspondiente a la carga soportada por el material en el instante de la fractura. De igual manera.

Resistencia a la compresión: El comportamiento a compresión difiere radicalmente según el eje de sollicitación:

- Compresión paralela a la fibra: Las células madereras actúan como columnas tubulares microscópicas, otorgando una alta capacidad de carga. La falla final suele ocurrir por pandeo local de estas paredes celulares [27].
- Compresión perpendicular a la fibra: La madera presenta una resistencia considerablemente menor, típicamente entre un 15 % y un 25 % de la resistencia paralela [33]. La carga transversal aplasta la estructura celular hueca (lumen), generando grandes deformaciones sin una rotura catastrófica evidente. Por ello, el diseño normativo se rige por límites de deformación admisible o tensión de fluencia.

Resistencia a la tracción: La resistencia a la tracción paralela a la fibra es una de las propiedades más elevadas de la madera, superando significativamente a la resistencia en compresión. El material presenta un comportamiento casi lineal-elástico hasta la rotura, la cual ocurre de forma súbita [27]. Sin embargo, esta resistencia es extremadamente sensible a los defectos naturales (nudos) y a las desviaciones del grano. Por el contrario, la tracción perpendicular a la fibra es el eslabón más débil del material; su resistencia es casi nula debido a la baja cohesión lateral de las fibras. El diseño estructural penaliza o evita someter la madera a este tipo de sollicitación para prevenir fallas por hendimiento o rajadura [33].

Resistencia al cortante (Cizalle): En vigas sometidas a flexión transversal (como el ensayo de tres puntos aplicado en este estudio), el esfuerzo crítico es el corte longitudinal o cizalle paralelo a la fibra. Este esfuerzo es inducido por la variación del momento flector y alcanza su valor máximo en el eje neutro, evaluándose analíticamente

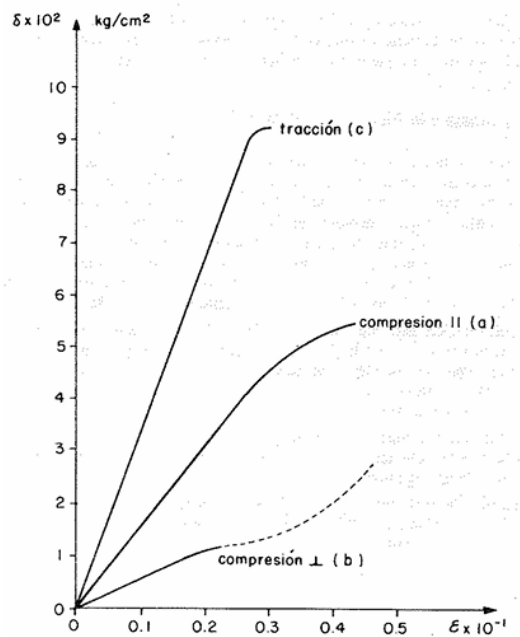


Figura 2.2: Curvas de esfuerzo-deformación para tracción y compresión paralela y perpendicular a la fibra.

mediante la fórmula de Jourawski ($\tau = \frac{VQ}{Ib}$). En este plano, la resistencia depende exclusivamente de la matriz de lignina que cohesiona las fibras de celulosa, resultando en una capacidad resistente baja (típicamente del orden del 10 % al 15 % de la resistencia a tracción paralela) [27]. En el contexto de vigas reforzadas con placas (titanio o CFRP), la resistencia al corte longitudinal es de suma importancia, ya que delimita el umbral antes de que se produzca una falla por delaminación en la madera adyacente a la línea del adhesivo epóxico.

2.1.4. Aplicaciones Estructurales y Escenarios de Demanda en Elementos de Flexión

En la ingeniería de la edificación y obras civiles, el diseño de elementos prismáticos sometidos a flexión elástica exige equilibrar la seguridad estructural frente a Estados Límites Últimos (ELU) y de Servicio (ELS) con las restricciones geométricas y presupuestarias del proyecto. En función de la magnitud de las solicitaciones y de las condicionantes arquitectónicas de contorno, las aplicaciones de las vigas de madera e híbridas se pueden tipificar en tres macro-escenarios operacionales:

1. **Sistemas de Techumbre y Solicitaciones Medias-Bajas:** Corresponde a la configuración clásica de elementos de techumbre, luces residenciales convencionales

o correas de soporte estructural. En estos escenarios, las demandas mecánicas directas rara vez exigen someter al sustrato lúneo a solicitudes cercanas a la falla súbita por tracción. Por consiguiente, el criterio gobernante de diseño se desplaza hacia la optimización financiera y la viabilidad de manufactura. Para estas aplicaciones, el incremento masivo de la inercia o la adición de costosos perfiles metálicos tridimensionales resulta técnicamente injustificado, abriendo espacio a refuerzos de alta eficiencia relativa que optimicen el costo por unidad de resistencia elástica.

2. **Luces Intermedias y Limitaciones de Gálíbo Arquitectónico:** Ocurre con frecuencia en plantas libres residenciales, entresijos comerciales o rehabilitaciones de estructuras patrimoniales. En estos contextos, las restricciones de diseño arquitectónico impiden incrementar el peralte o altura de la sección transversal de la madera para aumentar su momento de inercia (I_x). Ante la imposibilidad geométrica de rigidizar la viga aumentando sus dimensiones nominales, se hace mandatorio el uso de sistemas compuestos interfaciales. El refuerzo debe ser capaz de absorber el flujo de tensiones normales de tracción basal, aumentando significativamente la capacidad elástica sin alterar la sección maestra original del sustrato.
3. **Sistemas de Alta Demanda Estructural e Industrial:** Asociado a vigas maestras para luces mayores, puentes peatonales ligeros o naves industriales de acopio. En estas aplicaciones, los elementos de flexión se ven sometidos a cargas vivas y muertas severas que inducen un estado crítico de tensiones normales y de corte tridimensionales. Estos escenarios demandan no solo una alta rigidez axial en la cara de tracción pura, sino también el confinamiento parcial de la madera para detener los modos de falla por pandeo lateral o distorsión angular provocada por la baja rigidez al corte (G) natural de las maderas coníferas. En estos casos extremos, se justifica la inversión financiera en configuraciones de refuerzo más complejas y envolventes que blinden el continuo frente a colapsos catastróficos.

2.2. Fibra de carbono e implementación en materiales compuestos

La fibra de carbono (CF, por sus siglas en inglés) es un refuerzo fibroso avanzado constituido mayoritariamente por átomos de carbono organizados en dominios de

estructura gráfica. Esta configuración microestructural, caracterizada por enlaces covalentes fuertes y una orientación preferencial a lo largo del eje de la fibra, es la responsable de su elevada rigidez y resistencia específicas, así como de su comportamiento marcadamente anisotrópico (presentando propiedades notablemente superiores en la dirección longitudinal respecto a la transversal) [20, 30]. En el ámbito de la ingeniería mecánica civil, su relevancia radica en la posibilidad de diseñar componentes estructurales de baja masa con una alta eficiencia mecánica. Esto es especialmente evidente al integrarse en materiales compuestos (CFRP), donde el refuerzo soporta la mayor parte de la carga y la matriz polimérica transfiere los esfuerzos, protege las fibras y otorga estabilidad geométrica al componente [20].

2.2.1. Precursores y rutas de fabricación

La obtención industrial de fibra de carbono se realiza a partir de precursores orgánicos; el más difundido a nivel mundial es el poliacrilonitrilo (PAN), aunque también se emplean breas (pitch) para aplicaciones de ultra alto módulo [20, 58]. De manera general, el proceso termoquímico comprende: (i) el hilado del precursor para generar filamentos continuos, (ii) la estabilización térmica en atmósfera oxidante (aplicando tensión para orientar las cadenas moleculares), y (iii) la carbonización a altas temperaturas (usualmente superior a 1000 °C) en atmósfera inerte para eliminar heteroátomos. Dependiendo del grado deseado, se puede aplicar una etapa de grafitización a temperaturas aún mayores para incrementar el orden cristalino y el módulo elástico [58].

2.2.2. Propiedades y criterios de clasificación

En términos de propiedades mecánicas, la fibra de carbono presenta resistencias a la tracción del orden de varios gigapascals (GPa) y una densidad muy baja (típicamente entre 1,6 y 1,8 g/cm³), lo que se traduce en capacidades específicas inigualables por las aleaciones metálicas tradicionales. Una clasificación industrial ampliamente aceptada categoriza las fibras en función de su módulo de elasticidad y resistencia a la tracción, tal como se detalla en la Tabla 2.1 [53].

Tabla 2.1: Clasificación típica de fibras de carbono por propiedades mecánicas (criterio por módulo y resistencia) [53].

Clasificación	Módulo a tracción (GPa)	Resistencia a tracción (MPa)
Ultra alto módulo (UHM)	≥ 600	≥ 2500
Alto módulo (HM)	350 – 600	> 2500
Módulo intermedio (IM)	280 – 350	≥ 3500
Módulo estándar (HT)	200 – 280	≈ 2500
Bajo módulo (LM)	< 200	< 3500

Desde la perspectiva del diseño, la elección del grado de fibra está directamente ligada a las exigencias del estado límite: para controlar deflexiones se priorizan fibras de alto módulo (HM), mientras que para maximizar la carga de rotura en flexión se prefieren las de alta resistencia (HT).

2.2.3. Interfaz fibra-matriz: adhesión y tratamientos superficiales

En los polímeros reforzados con fibra de carbono (CFRP), el desempeño global está fuertemente condicionado por la calidad de la interfaz fibra-matriz. Esta zona de transición gobierna la transferencia de carga (esfuerzo de corte interfacial) y la resistencia a la delaminación. Debido a la inercia química de los filamentos de carbono, los fabricantes aplican tratamientos superficiales (como la oxidación electroquímica continua o tratamientos por plasma) y recubrimientos poliméricos (sizing) para maximizar la humectación y generar enlaces químicos fuertes con la resina epóxica, mejorando sustancialmente la tenacidad a la fractura del material compuesto [22, 37].

2.2.4. Arquitectura del refuerzo y formas comerciales

El refuerzo se comercializa en forma de mechas continuas (tows) que contienen miles de filamentos (ej. 12K, 24K) y se procesa en diversas arquitecturas textiles. Para aplicaciones de refuerzo estructural unidireccional (como las placas pultruidas de CFRP adheridas a vigas), se orientan todas las fibras en el eje longitudinal (0°) para maximizar la capacidad de carga a tracción y flexión. También existen configuraciones tejidas (ligamento plano, sarga o satén) que ofrecen propiedades bidireccionales y mayor estabilidad durante la laminación, aunque con una ligera penalización en la rigidez axial debido a la ondulación o crimp de los hilos [29, 54].

2.2.5. Matrices y selección para compuestos estructurales

La matriz es el medio continuo que consolida el compuesto. Para aplicaciones de refuerzo estructural en ingeniería civil y mecánica, predominan ampliamente las matrices poliméricas (y más específicamente, las resinas termoestables tipo epoxi) debido a su excelente adherencia mecánica, baja contracción durante el curado y resistencia química [30]. La Tabla 2.2 expone las diferentes familias de matrices utilizadas a nivel industrial.

Tabla 2.2: Tipos de matrices en materiales compuestos reforzados con fibra [11, 30].

Tipo de matriz	Ejemplos típicos	Consideraciones de desempeño
Polimérica (PMC)	Epoxi, poliéster, viniléster, PEEK	Excelente relación peso/resistencia. Facilidad de moldeo. Dominante en refuerzo civil.
Metálica (MMC)	Aluminio, titanio	Elevada resistencia térmica y dureza. Mayor costo y complejidad de manufactura.
Cerámica (CMC)	Carburo de silicio (SiC), alúmina	Uso en condiciones extremas de temperatura y fricción. Comportamiento frágil.

2.2.6. Procesos de manufactura del CFRP y su relación con la calidad

El método de consolidación del CFRP influye directamente en la fracción volumétrica de fibras (V_f) y en la presencia de defectos (porosidad o vacíos), variables que afectan drásticamente la resistencia al corte interlaminar. Aunque la industria aeroespacial utiliza preimpregnados curados en autoclave para obtener calidades óptimas, en la ingeniería estructural contemporánea han cobrado gran relevancia los procesos fuera de autoclave (OoA, Out-of-Autoclave), la infusión de resina al vacío (VARTM) y la adhesión en húmedo (wet lay-up), permitiendo fabricar e instalar refuerzos in-situ con una excelente relación costo-beneficio [24].

2.3. Vigas de Acero Estructural: Propiedades, Solicitaciones y Aplicaciones

Como contraparte fundamental de los sistemas de construcción basados en madera y compuestos avanzados, las vigas de acero estructural representan la solución convencional predominante en obras civiles de alta exigencia mecánica. El estudio de su comportamiento elasto-plástico, sus límites de estabilidad y sus escenarios de aplicación resulta indispensable para establecer un marco comparativo técnico-económico con las soluciones híbridas desarrolladas en esta investigación.

2.3.1. Especificación del Material y Perfiles Comerciales

El acero estructural empleado en la manufactura de elementos sometidos a flexión se caracteriza por un comportamiento homogéneo e isotrópico, con un módulo de elasticidad longitudinal nominal de $E_s = 200,000$ MPa y un módulo de corte de $G_s = 77,200$ MPa [40]. En el contexto nacional, los aceros para uso estructural se encuentran normados bajo la estricta especificación de la norma chilena NCh203, destacando los grados elásticos A37-24ES y A52-34ES, equivalentes a las designaciones internacionales ASTM A36 ($F_y = 250$ MPa) y ASTM A572 Grado 50 ($F_y = 345$ MPa), respectivamente [32].

Geométricamente, para optimizar el momento de inercia (I_x) y el módulo de sección elástico (S_x) sin incurrir en un exceso de masa muerta, el acero se preconfigura en perfiles laminados de alma esbelta y alas anchas. Las tipologías más utilizadas corresponden a los perfiles tipo I (designaciones americanas W o e internacionales tipo HN e IN según la norma chilena NCh300), los cuales concentran el área del material en los extremos de la sección transversal para absorber eficientemente los momentos flectores máximos [2].

2.3.2. Estados Límites, Modos de Falla y Capacidades de Carga

El diseño y la evaluación de vigas estructurales de acero se rigen bajo los criterios del Instituto Americano de Construcción en Acero (AISC 360), el cual establece que la capacidad de carga nominal a la flexión (M_n) de un perfil prismático compacto está dictada por el Estado Límite Último (ELU) de fluencia total de la sección, calculado mediante la relación:

$$M_n = M_p = F_y \cdot Z_x \quad (2.3)$$

Donde M_p representa el momento plástico del perfil y Z_x es el módulo de sección plástico de la geometría. No obstante, debido a la alta esbeltez de sus paredes, las vigas de acero estructural aplicadas a grandes luces libres sin arriostramiento lateral son altamente susceptibles a fallas prematuras por inestabilidad elástica. Los modos de falla críticos que gobiernan las fronteras operacionales del acero comprenden:

- Pandeo Lateral-Torsional (LTB): Fenómeno cinemático donde el ala sometida a compresión elástica experimenta un desplazamiento lateral y torsión simultánea antes de alcanzar la fluencia por flexión.
- Pandeo Local del Ala o del Alma (FLB/WLB): Inestabilidad por compresión localizada en las placas delgadas que componen el perfil bajo gradientes de momentos severos.

Bajo la acción de cargas vivas y muertas de magnitud severa (superiores a los 150 a 300 kN en luces de escala industrial), estos elementos demandan secciones robustas que incrementan linealmente el peso propio de la superestructura y los costos de cimentación, lo que exige evaluar soluciones híbridas alternativas.

2.3.3. Aplicaciones de Alta Demanda e Ingeniería de Diseño

Las aplicaciones predilectas de las vigas de acero estructural se concentran en infraestructuras industriales pesadas, puentes ferroviarios, naves de acopio de grandes luces y edificaciones en altura. En estos escenarios, el acero domina el mercado debido a su capacidad para salvar luces libres extremas manteniendo deflexiones instantáneas dentro del Estado Límite de Servicio (ELS), fijado comúnmente en $\delta_{\text{máx}} \leq L/360$.

Desde una perspectiva económica, el valor de mercado del acero estructural laminado (como los perfiles IN o HN en grado A36) oscila en torno a los 1,80 a 2,50 USD por kilogramo [38]. Si bien este costo métrico másico es sustancialmente inferior al de los polímeros avanzados o aleaciones de titanio, la alta densidad del material ($\gamma_s = 7,850 \text{ kg/m}^3$) genera que la inversión total por viga se dispare debido a la acumulación de masa muerta, encareciendo los costos de cimentación, transporte y montaje logístico.

2.4. Titanio

El titanio (Ti) es un metal estructural ampliamente utilizado por su combinación de alta relación resistencia-peso, buena resistencia a la corrosión y densidad moderada (aproximadamente $4,5 \text{ g/cm}^3$ en aleaciones típicas), lo que lo hace competitivo en aplicaciones aeroespaciales, marinas e industriales [55, 56]. Su excelente desempeño frente a la corrosión se debe, en gran medida, a la formación espontánea de una película pasiva (principalmente TiO_2) que protege la superficie en ambientes oxigenados, aunque su estabilidad depende del medio, la temperatura y condiciones locales (p. ej., rendijas, potencial galvánico) [55, 56]. En la práctica de ingeniería, el titanio se emplea principalmente como material monolítico (metal o aleación) y no como "material compuesto".^{en} el sentido estricto de combinar una matriz y un refuerzo distintos en una arquitectura deliberada [11, 30].

2.4.1. ¿El titanio se usa como material compuesto?

En términos de definición, un material compuesto se obtiene al combinar al menos dos fases (por ejemplo, una matriz y un refuerzo) para lograr propiedades globales superiores y/o direccionalmente diseñadas [11, 30]. Bajo esa definición, el titanio por sí solo no es un material compuesto: es un metal (o una aleación metálica) con microestructura propia, pero sin la arquitectura de refuerzo-matriz característica de los compuestos [30, 55].

No obstante, sí existen los materiales compuestos con matriz de titanio (Titanium Matrix Composites, TMC), donde una aleación de titanio actúa como matriz y se refuerza típicamente con fibras cerámicas (p. ej., SiC) o partículas (p. ej., TiC), buscando aumentar la rigidez, la resistencia o el desempeño a alta temperatura en aplicaciones seleccionadas [36, 42]. Estos TMC han sido explorados especialmente para componentes de motores aeronáuticos (por ejemplo, anillos de compresor reforzados con fibras unidireccionales de SiC), donde pueden ofrecer alta resistencia a menor densidad que las alternativas monolíticas en condiciones específicas [36, 42]. Sin embargo, su uso es más especializado que el de las aleaciones monolíticas de titanio, debido a la complejidad de fabricación, los costos y los retos de procesado, unión y control de defectos [36, 55].

2.4.2. Grados y familias de aleaciones de titanio

En la ingeniería de materiales, el titanio se clasifica tanto por grado comercial (por ejemplo, Grado 2: titanio comercialmente puro; Grado 5: Ti-6Al-4V) como por familia metalúrgica (aleaciones α , $\alpha + \beta$, β y relacionadas), según su composición y los tratamientos termomecánicos [13, 55]. En particular, el estándar ASTM B348 describe múltiples grados, incluyendo el Grado 2 (UNS R50400) como titanio no aleado y el Grado 5 (UNS R56400) como la aleación Ti-6Al-4V [13].

La aleación Ti-6Al-4V (Grado 5) es una de las más utilizadas por su equilibrio entre resistencia, tenacidad y disponibilidad industrial, siendo común en estructuras aeronáuticas, elementos de fijación y componentes sometidos a demandas mecánicas elevadas [9, 55]. Por su parte, el titanio comercialmente puro Grado 2 se prefiere cuando se prioriza la resistencia a la corrosión, la conformabilidad y la soldabilidad, manteniendo una resistencia moderada [43, 45].

2.4.3. Comparación entre titanio Grado 2 y Grado 5 (Ti-6Al-4V)

La Tabla 2.3 resume una comparación entre el titanio Grado 2 y Grado 5, presentando valores típicos y mínimos reportados en hojas técnicas y bases de datos, los cuales son útiles para una selección preliminar de materiales para refuerzo estructural (los valores exactos dependen de la condición metalúrgica, el formato del producto y la norma aplicable) [1, 9, 43, 45].

Tabla 2.3: Comparación típica entre titanio comercialmente puro Grado 2 (CP Ti) y aleación Ti-6Al-4V Grado 5 (condición recocida).

Propiedad	Ti Grado 5 (Ti-6Al-4V)	Ti Grado 2 (CP Ti)
Composición / designación	UNS R56400 (6 %Al-4 %V)	UNS R50400 (no aleado)
Resistencia a la tracción, UTS (MPa)	896 - 950	≥ 345
Límite elástico, YS (MPa)	827 - 880	≥ 275
Módulo elástico (GPa)	114	102 - 105
Densidad (g/cm ³)	4.43	4.51

Tabla 2.3 (continuación)

Propiedad	Ti Grado 5 (Ti-6Al-4V)	Ti Grado 2 (CP Ti)
Observación de uso	Alta resistencia; aeroespacial/estructural	Alta resistencia a corrosión y conformabilidad; uso industrial

Desde la perspectiva del diseño mecánico, el Grado 5 suele elegirse cuando el criterio dominante es la resistencia (y/o fatiga) con limitación de masa, mientras que el Grado 2 es atractivo cuando se priorizan la protección frente a la corrosión, la soldabilidad y la formabilidad con requerimientos mecánicos moderados [55,56]. En ambientes agresivos, el desempeño real dependerá del tipo de corrosión (p. ej., rendijas, fatiga-corrosión, hidrógeno) y del control de diseño y proceso (acabado superficial, uniones, pares galvánicos), por lo que la selección debe considerar el escenario de servicio y no solo las propiedades estáticas [55,56].

2.4.4. Titanio como matriz en materiales compuestos (TMC)

Aunque el titanio se usa mayoritariamente como metal o aleación monolítica, los TMC constituyen una familia de compuestos de matriz metálica donde una aleación de titanio se refuerza con fibras o partículas cerámicas para aumentar la rigidez y resistencia (frecuentemente a temperaturas de servicio donde las matrices poliméricas no son viables) [42,52]. Un ejemplo clásico son los compuestos Ti/SiC con fibras orientadas paralelas a la carga, investigados para anillos de compresor y componentes de turbomáquinas, con potencial de reducción de masa respecto a soluciones monolíticas en aplicaciones específicas [42,52]. También se han desarrollado TMC con refuerzo particulado (p. ej., TiC) mediante rutas pulvimetalúrgicas (síntesis por combustión y Spark Plasma Sintering, SPS), buscando aumentar la rigidez y resistencia del Ti-6Al-4V y mejorar su conductividad térmica relativa [36,55].

En resumen, para la mayoría de las aplicaciones estructurales el titanio se selecciona como aleación monolítica (Grado 2, Grado 5, etc.) y se compara directamente con otros metales; los TMC existen y son relevantes, pero representan un uso especializado dentro de la familia de materiales compuestos, principalmente en nichos de alto desempeño y alta exigencia termomecánica [42,55].

Tabla 2.4: Ejemplos representativos de compuestos con matriz de titanio (TMC) y motivación de uso [36, 42, 52].

Sistema TMC	Refuerzo típico	Motivación / aplicación
Ti aleación / SiC	SiC unidireccional (fibras)	Mayor rigidez y resistencia específica; turbomáquinas.
Ti-6Al-4V / TiC	TiC particulado (partículas)	Aumentar rigidez y resistencia; rutas PM (SPS).
Ti aleación / cerámicos	SiC, Al ₂ O ₃ , etc. (varios)	Optimizar rigidez, desgaste y resistencia a temperatura.

2.5. Adhesivos

Un adhesivo es una sustancia capaz de unir materiales mediante adhesión superficial, formando una unión continua entre sustratos sin requerir necesariamente elementos de fijación mecánica. En aplicaciones estructurales, se emplean adhesivos diseñados para transferir las cargas de servicio de manera confiable durante la vida útil prevista del componente, garantizando la integridad del ensamble [12].

En el ámbito de los materiales compuestos, la unión adhesiva es especialmente relevante porque permite integrar subcomponentes o adherir refuerzos (como placas de titanio o CFRP) sin taladrar ni interrumpir la continuidad de las fibras. Esto reduce drásticamente las concentraciones de esfuerzo y previene el daño local en la matriz del laminado o en las fibras de la madera. Asimismo, al distribuir la carga sobre un área de contacto relativamente grande, favorece una transferencia de esfuerzos más uniforme, lo que incrementa la eficiencia estructural y el desempeño a fatiga frente a las uniones puntuales tradicionales [46].

2.5.1. Mecanismos de transferencia de carga

Desde el punto de vista mecánico, la capa de adhesivo actúa como un medio de transmisión de carga. Las fuerzas se transfieren entre los adherentes (madera y refuerzo) principalmente mediante esfuerzos cortantes (τ) a lo largo de la línea de unión. Dependiendo de la geometría y la excentricidad de las cargas, también pueden aparecer esfuerzos normales transversales (conocidos como esfuerzos de pelado o peel), los cuales suelen ser críticos en materiales compuestos debido a su limitada resistencia interlaminar y a la baja resistencia a tracción perpendicular de la madera [15, 18]. Por ello, el diseño de uniones adhesivas busca minimizar los estados de peel, controlar las concentraciones de esfuerzo en los extremos del solape y asegurar anchos de adherencia

adecuados.

2.5.2. Clasificación de adhesivos estructurales

Los adhesivos pueden clasificarse de forma práctica según distintos criterios, los cuales orientan su selección para uniones en elementos estructurales:

- **Por su origen:** Naturales y sintéticos [23].
- **Por su comportamiento y constitución polimérica:** Termoestables (rígidos y de alta resistencia cruzada), termoplásticos (fusibles) y elastoméricos (alta deformabilidad) [23].
- **Por su función:** Estructurales (destinados a la transferencia principal de cargas) y no estructurales (sellado, fijación ligera, etc.) [12, 23].
- **Por su familia química:** Epóxicos, acrílicos, poliuretanos, cianoacrilatos, anaeróbicos y siliconas. Para el refuerzo de estructuras civiles y de madera, los sistemas epóxicos son los más utilizados debido a su alta resistencia al corte, excelente adhesión y baja contracción durante el curado [21].
- **Por su mecanismo de curado y presentación:** Sistemas de uno o dos componentes, curado por temperatura, humedad o radiación (p. ej., UV), y formulaciones en base solvente, acuosa o 100 % sólidos (hot-melt) [16].

2.5.3. Caracterización mecánica

Para evaluar de manera comparativa la capacidad resistente de un adhesivo o de una unión específica, se emplean ensayos normalizados. Un método ampliamente utilizado en la industria es el ensayo de resistencia a cortante por tracción en junta a solape simple (lap-shear), establecido en normas como la ISO 4587 para uniones rígido-rígido. Es importante destacar que, si bien estos ensayos estandarizados bajo condiciones de laboratorio controladas son fundamentales para la caracterización del material, los valores obtenidos no constituyen por sí mismos esfuerzos directamente aplicables al diseño de componentes complejos, requiriendo factores de seguridad y análisis detallados [34].

2.6. Materiales compuestos

Los materiales compuestos son sistemas de ingeniería formados por la combinación intencional de dos o más fases con propiedades físicas o químicas diferentes, de modo que el material resultante exhibe un desempeño global superior (o ajustado) respecto a sus constituyentes por separado [11, 30]. En la mayoría de compuestos estructurales, estas fases se organizan como: (i) un refuerzo (fibras, partículas o tejidos) que aporta principalmente resistencia y rigidez, y (ii) una matriz (polimérica, metálica o cerámica) que cohesiona el refuerzo, transfiere las cargas, protege frente al ambiente y define la geometría del componente [24, 30]. Esta arquitectura permite diseñar propiedades direccionales (anisotropía), optimizando la rigidez y resistencia en direcciones específicas mediante la orientación del refuerzo y la secuencia de laminado [20, 30].

2.6.1. Origen y evolución de la aplicación

Aunque los compuestos poliméricos avanzados se han consolidado sobre todo en las últimas décadas por su alto desempeño estructural, el concepto de combinar materiales para mejorar prestaciones acompaña a la ingeniería desde tiempos antiguos [39]. En perspectiva histórica, el refuerzo de matrices frágiles con fibras naturales (por ejemplo, el uso de barro con paja en elementos constructivos) representa una lógica de diseño equivalente: la matriz aporta capacidad a compresión y estabilidad, mientras que las fibras ayudan a controlar las grietas y soportar los esfuerzos de tracción [39]. En la ingeniería moderna, la aplicación de materiales compuestos se aceleró drásticamente por la necesidad de reducir la masa, aumentar la eficiencia energética y mejorar el desempeño mecánico, especialmente en sectores donde la relación rigidez-peso y resistencia-peso resulta crítica [11, 24].

2.6.2. Clasificación y constituyentes típicos

Una clasificación fundamental en la ciencia de materiales se realiza según la naturaleza de la matriz: (a) matriz polimérica (PMC o FRP), (b) matriz metálica (MMC) y (c) matriz cerámica (CMC) [11, 30]. Las matrices poliméricas dominan ampliamente en aplicaciones estructurales de gran volumen debido a su excelente procesabilidad y menor costo relativo, empleando con frecuencia resinas termoestables (epoxi, poliéster, viniléster) y, de manera creciente, termoplásticos de ingeniería (como el PEEK) [11, 24].

En cuanto a los refuerzos, los más comunes en la ingeniería civil y mecánica son la fibra de vidrio, la fibra de carbono y las aramidas; dejando los refuerzos cerámicos (como el SiC) para MMC o CMC cuando se exige un alto desempeño térmico o resistencia al desgaste severo [11, 20].

En los CFRP (compuestos de matriz polimérica reforzada con fibra de carbono), la selección del tipo de fibra (alto módulo, alta resistencia), la química de la interfaz y la orientación del laminado determinan gran parte del desempeño final del componente ante cargas axiales, fatiga y tolerancia al daño [20, 30]. En general, la interfaz fibra-matriz es crítica para la transferencia efectiva de carga y la resistencia interlaminar; por ello, los fabricantes recurren a tratamientos superficiales y recubrimientos (sizing) para mejorar la adhesión y garantizar la durabilidad [20].

2.6.3. Aplicaciones típicas en ingeniería mecánica

El uso de materiales compuestos se ha extendido profundamente en los sectores aeroespacial, automotriz, energético, construcción, naval y biomédico, impulsado principalmente por la posibilidad de combinar una baja densidad con altísimas rigidez y resistencia, sumado a su inmunidad a la corrosión galvánica y oxidación [11, 24]. En el diseño estructural, su ventaja más competitiva es la capacidad de "diseñar el material a medida" (mediante la orientación de fibras, secuencias de laminados y estructuras tipo sándwich) para responder de manera óptima a las trayectorias de carga específicas [11, 30]. Sus principales desafíos ingenieriles incluyen la sensibilidad a los defectos de manufactura, la variabilidad de propiedades, la susceptibilidad al daño por impacto, la delaminación oculta y la complejidad inherente a su reparación y reciclaje (especialmente en matrices termoestables) [11, 20].

Tabla 2.5: Clasificación resumida de materiales compuestos: constituyentes típicos y aplicaciones generales [11, 24, 30, 39].

Tipo de compuesto	Matriz / Refuerzo típico	Aplicaciones frecuentes
PMC (FRP)	Epoxi o poliéster / vidrio, carbono, aramida	Aeroespacial, automotriz, marina y construcción civil/refuerzo estructural.

Tabla 2.5 (continuación)

Tipo de compuesto	Matriz / Refuerzo típico	Aplicaciones frecuentes
MMC	Al o Ti / SiC (fibras o partículas)	Componentes térmicamente exigentes y aplicaciones aeroespaciales especializadas.
CMC	Matriz cerámica / fibras cerámicas (p. ej., SiC)	Alta temperatura, fricción extrema y aplicaciones aeroespaciales/energéticas.

2.7. Modelos de cálculo

2.7.1. Método analítico

Flexión pura y no uniforme

Al analizar vigas, es fundamental distinguir entre flexión pura y flexión no uniforme, ya que el estado tensional interno varía a lo largo del eje longitudinal del elemento. La diferencia esencial radica en la presencia o ausencia de fuerza cortante y, en consecuencia, en la variación del momento flector a lo largo de la viga [28].

Flexión pura: Se define como la flexión de una viga bajo la acción de un momento flector constante. Por definición, solo puede presentarse en regiones donde la fuerza cortante es nula. A partir de las relaciones diferenciales de equilibrio estático:

$$V = \frac{dM}{dx} = 0 \implies M = \text{constante} \quad (2.4)$$

Un ejemplo clásico es una viga simplemente apoyada sometida a dos pares de momento M_1 de igual magnitud y sentidos opuestos en sus extremos, lo que genera un momento flector constante a lo largo de toda su longitud, manteniendo el cortante nulo en cualquier sección transversal (ver Figura 2.3).

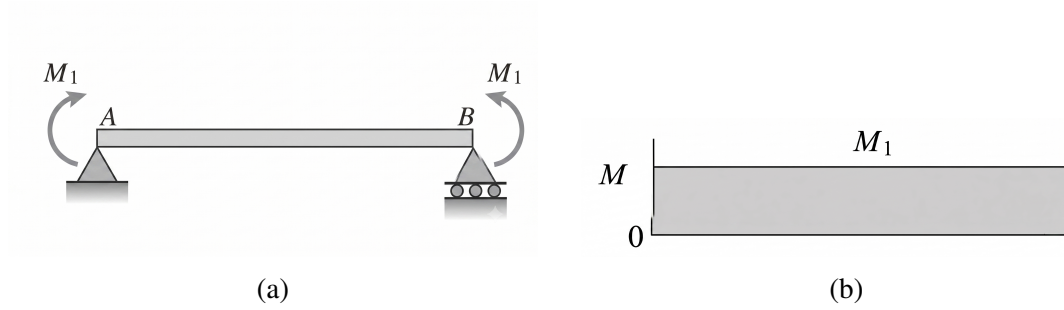


Figura 2.3: Viga simple bajo flexión pura [28].

Flexión no uniforme: Corresponde a la flexión en presencia de fuerzas cortantes ($V \neq 0$), lo que implica que el momento flector varía a lo largo del eje de la viga ($\frac{dM}{dx} \neq 0$) [28].

Vigas con regiones mixtas: Es habitual que una misma viga presente simultáneamente regiones en flexión pura y en flexión no uniforme. Por ejemplo, en una viga simplemente apoyada sometida a dos cargas puntuales simétricas, la región central se encuentra en flexión pura (cortante nulo y momento constante), mientras que los tramos entre los apoyos y las cargas experimentan flexión no uniforme (ver Figura 2.4) [28].

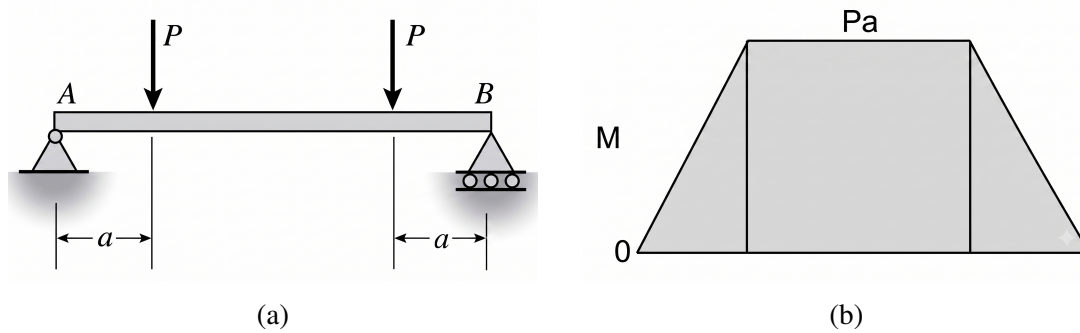


Figura 2.4: Viga simple con región central en flexión pura y regiones extremas en flexión no uniforme [28].

Curvatura de una viga

Al someter una viga a flexión, su eje longitudinal se deforma adoptando una configuración curva denominada línea elástica. La curvatura (κ) cuantifica la tasa de cambio de esta deformación en un punto específico. Considerando un tramo diferencial de la línea elástica asociado a un arco circular de radio ρ (radio de curvatura), se cumple por geometría que $\rho d\theta = ds$. La curvatura se define como el recíproco del radio de curvatura [28]:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (2.5)$$

En aplicaciones estructurales comunes donde las deflexiones son pequeñas, el diferencial de arco se aproxima al diferencial de coordenada longitudinal ($ds \approx dx$), simplificando la expresión a:

$$\kappa \approx \frac{d\theta}{dx} \quad (2.6)$$

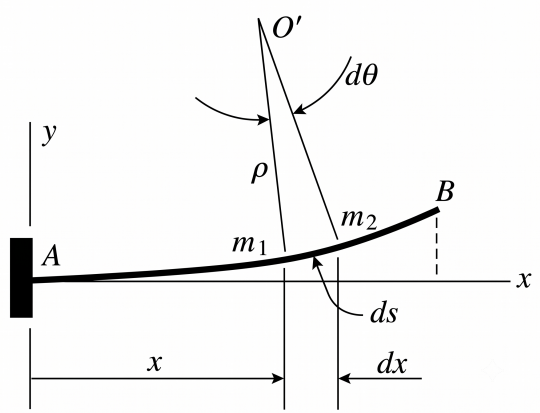


Figura 2.5: Curvatura de una viga y radio de curvatura [28].

Deformaciones unitarias

La deformación unitaria longitudinal (ϵ_x) cuantifica el cambio relativo de longitud de una fibra material. Por convención, valores positivos indican tracción y negativos compresión. Bajo la hipótesis de Navier-Bernoulli (las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje longitudinal), las fibras experimentan un cambio de longitud proporcional a su distancia y respecto al eje neutro (fibra que no sufre deformación axial) [28].

Para flexión pura, la deformación de una fibra situada a una distancia y del eje neutro es:

$$\epsilon_x(y) = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \quad (2.7)$$

Esfuerzos normales

En régimen elástico lineal, donde rige la Ley de Hooke ($\sigma_x = E\epsilon_x$), el esfuerzo normal asume una distribución lineal respecto al eje neutro. Vinculando esto con la ecuación momento-curvatura ($\kappa = \frac{M}{EI}$), se obtiene la fórmula clásica de flexión de vigas homogéneas [28]:

$$\sigma_x(y) = -\frac{My}{I} \quad (2.8)$$

o expresada en función de la curvatura:

$$\sigma_x(y) = -E\kappa y \quad (2.9)$$

Esfuerzo de corte transversal

En presencia de fuerza cortante (V), surgen tensiones tangenciales (τ) que equilibran el deslizamiento relativo entre las fibras longitudinales. Para el régimen elástico, la distribución del esfuerzo cortante en una sección transversal se obtiene mediante la fórmula de Jourawski [28]:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \quad (2.10)$$

donde V es el cortante interno, I es el segundo momento de área de la sección respecto al eje neutro, b es el ancho local en la fibra evaluada, y Q es el primer momento de área de la porción de sección situada por encima (o por debajo) de dicha fibra ($Q = \int y dA$). Esta formulación es de vital importancia en la evaluación de la interfaz adhesiva para vigas reforzadas.

Deflexión en vigas

La deflexión $v(x)$ representa el desplazamiento transversal de la línea elástica. En el marco de pequeñas deformaciones, la curvatura se aproxima a la segunda derivada de la deflexión, originando la ecuación diferencial de la elástica [28]:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.11)$$

Integrando esta expresión e imponiendo las condiciones de borde correspondientes a los apoyos, se obtiene la función analítica de desplazamiento $v(x)$.

Vigas compuestas

En una sección compuesta por múltiples materiales (como madera y refuerzos de titanio o CFRP) adheridos de manera perfecta, la hipótesis de Navier-Bernoulli sigue siendo válida. Esto implica que la deformación $\epsilon_x(y)$ mantiene un perfil lineal único dictado por una curvatura global compartida (κ) [28].

$$\epsilon_x(y) = -\kappa y \quad (2.12)$$

donde y es la distancia respecto al nuevo eje neutro de la sección compuesta. Aplicando la Ley de Hooke a cada material i :

$$\sigma_{x,i}(y) = E_i \epsilon_x(y) = -E_i \kappa y \quad (2.13)$$

El momento flector interno es resultado de integrar la distribución de esfuerzos en toda la sección:

$$M = - \int_A \sigma_x y dA = \kappa \sum_i E_i \int_{A_i} y^2 dA = \kappa \sum_i E_i I_i \quad (2.14)$$

Por ende, la relación momento-curvatura para la sección compuesta se define como:

$$\kappa = \frac{M}{\sum_i E_i I_i} = \frac{M}{(EI)_{eq}} \quad (2.15)$$

Sustituyendo (2.15) en (2.13), el esfuerzo normal en cada material queda determinado por:

$$\sigma_{x,i}(y) = - \frac{My E_i}{(EI)_{eq}} \quad (2.16)$$

Esta formulación evidencia analíticamente que, aunque la deformación geométrica es continua, los esfuerzos mecánicos experimentan saltos discretos en las interfaces entre materiales, siendo directamente proporcionales a la rigidez axial (E_i) de cada constituyente [28].

2.7.2. Método de Elementos Finitos (FEM)

El Método de Elementos Finitos (FEM, Finite Element Method) es una técnica numérica para aproximar la solución de problemas de ingeniería formulados mediante ecuaciones diferenciales (por ejemplo, equilibrio estructural, conducción térmica o difusión), en los que la geometría y/o las condiciones de carga hacen inviable una solución analítica cerrada. Su idea central consiste en reemplazar un dominio continuo por un sistema discreto de ecuaciones algebraicas, obtenido a partir de una aproximación por partes del campo de variables (desplazamientos, temperaturas, etc.) dentro de subdominios finitos [14,57].

Fundamentos del FEM

Discretización: La discretización es el proceso mediante el cual el dominio continuo del problema (sólido, estructura o región) se divide en subdominios pequeños llama-

dos elementos finitos. Sobre cada elemento se asume una forma aproximada del campo desconocido (p. ej., desplazamientos) mediante funciones de interpolación, y al ensamblar todos los elementos se obtiene un sistema global que aproxima el comportamiento del continuo [14, 57]. En el enfoque más común para análisis estructural, el campo de desplazamientos se aproxima y, mediante formulaciones variacionales o de residuos ponderados, se deriva la matriz de rigidez elemental y posteriormente la global [14, 57].

Nodos: Los nodos son puntos de referencia del mallado donde se definen los grados de libertad (DOF), por ejemplo desplazamientos y/o rotaciones en análisis estructural. Los valores nodales actúan como incógnitas principales del sistema, y las funciones de forma interpolan el campo dentro del elemento a partir de esos valores [14, 57]. En general, al aumentar el número de nodos (refinamiento de malla o elementos de orden superior) se incrementa la capacidad de aproximación, a costa de un mayor costo computacional [14].

Elementos: Los elementos son las entidades geométricas básicas que conectan nodos y definen el subdominio de interpolación. Pueden ser unidimensionales (barras/vigas), bidimensionales (placas/cascarones) o tridimensionales (sólidos), y su formulación determina el tipo de comportamiento mecánico que pueden representar [14, 57]. La elección del tipo de elemento (sólido, cascarón, viga), su orden (lineal/cuadrático) y su calidad geométrica influyen de manera directa en la precisión, estabilidad numérica y tiempo de solución [14].

Mallado: El mallado es la generación práctica de la discretización: asigna una distribución y conectividad de elementos sobre la geometría real. Una malla debe capturar adecuadamente zonas con gradientes altos (p. ej., concentraciones de esfuerzo cerca de entallas, agujeros o contactos), ya que en dichas regiones los errores de discretización tienden a ser mayores [57]. En términos generales, mallas más finas aumentan la precisión, pero también incrementan el número de DOF y el costo computacional; por ello, se busca que los resultados sean independientes de la malla mediante estudios de convergencia [57].

Análisis estructural en ANSYS

En ANSYS Mechanical (Workbench), el análisis estructural se formula a partir de la definición de la geometría, el material, el mallado y las condiciones físicas del pro-

blema (cargas, soportes y contactos), resolviendo posteriormente el sistema algebraico asociado al modelo FEM. La calidad de los resultados depende críticamente de que el modelo represente de forma consistente las restricciones y transferencias de carga del sistema real [4].

Condiciones de borde (condiciones de contorno): ANSYS denomina boundary conditions al conjunto de cargas y restricciones aplicables al modelo (por ejemplo, fuerzas, presiones, soportes que restringen movimiento y desplazamientos impuestos). Estas condiciones se aplican a entidades geométricas o selecciones del mallado mediante el proceso de: seleccionar el tipo de condición, definir el scoping (dónde actúa) y especificar magnitud, dirección y propiedades adicionales (p. ej., sistema de coordenadas, rampa/escalón) [4]. La correcta definición evita modelos sub-restringidos (movimiento rígido) o sobre-restringidos (rigidez artificial y picos de esfuerzo no físicos) [4].

Convergencia de malla: La convergencia de malla busca verificar que una magnitud de interés (p. ej., desplazamiento máximo o esfuerzo equivalente) no cambie significativamente al refinar la malla. ANSYS dispone de herramientas de Adaptive Convergence que permiten refinar automáticamente la malla en zonas donde el solucionador detecta mayor beneficio, usando como criterio un porcentaje de cambio permitido entre iteraciones y un estimador de error tipo Zienkiewicz-Zhu (ZZ) para decidir qué elementos refinar [8]. En la práctica, se recomienda converger sobre magnitudes globales (reacciones, desplazamientos, rigideces) y, con mayor cuidado, sobre esfuerzos locales, ya que estos pueden verse afectados por singularidades geométricas o idealizaciones de borde/contacto [8].

Modelado de contactos: El contacto es una no linealidad frecuente en análisis estructural, porque el estado abierto/cerrado puede cambiar durante la solución, modificando la zona efectiva de transferencia de carga. ANSYS ofrece tipos de contacto que determinan el movimiento relativo permitido entre superficies: Bonded (sin deslizamiento ni separación, comportamiento equivalente a "pegado"), No Separation (sin separación, con deslizamiento permitido), Frictionless (sin penetración, con deslizamiento libre y posible separación), Frictional (con fricción según un coeficiente) y Rough (sin deslizamiento una vez en contacto, equivalente a fricción infinita) [7].

Además del tipo de contacto, la formulación define cómo se impone la compatibilidad (no interpenetración). En ANSYS, las formulaciones principales incluyen Pure

Penalty y Augmented Lagrange (ambas basadas en penalización), donde la fuerza normal depende de una rigidez de contacto y una penetración permisible; en Augmented Lagrange se agrega un término adicional que reduce la sensibilidad a la elección de la rigidez de contacto [5]. Otras opciones como Normal Lagrange introducen un DOF adicional (presión de contacto) para satisfacer compatibilidad con penetración casi nula, pero con mayores demandas numéricas [5]. ANSYS también documenta parámetros avanzados clave (por ejemplo, Penetration Tolerance, Normal Stiffness, método de detección y región pinball) que influyen en estabilidad y convergencia [6].

Materiales ortotrópicos: El análisis de materiales ortotrópicos es esencial cuando las propiedades varían según direcciones principales (p. ej., láminas compuestas, madera o laminados). En ANSYS, la definición elástica lineal ortotrópica requiere ingresar todos los parámetros: E_X , E_Y , E_Z , los coeficientes de Poisson (en forma mayor PR o menor NU, pero no ambos simultáneamente) y los módulos de corte G_{XY} , G_{YZ} , G_{XZ} ; a diferencia del caso isotrópico, no existen valores por defecto para ortotropía si el elemento utiliza esas propiedades [3]. El software también describe consideraciones de interpretación direccional (por ejemplo, para modelos axisimétricos y la relación entre razones de Poisson mayores y menores) [3]. Por ello, en problemas con laminados o CFRP, además de definir constantes ortotrópicas, es indispensable alinear correctamente los ejes del material con la orientación física de las fibras/laminas mediante sistemas de coordenadas o definiciones de orientación del modelo [3].

Capítulo 3

Metodología

En el presente capítulo se fundamenta la metodología empírica, analítica y numérica empleada para evaluar la viabilidad técnica y económica del refuerzo de vigas de madera estructural mediante láminas de titanio (Grado 2) y polímeros reforzados con fibra de carbono (CFRP). El desarrollo de esta investigación se estructura en tres etapas secuenciales: en primer lugar, se definen los parámetros de ensayo, las propiedades de los materiales involucrados y las configuraciones geométricas de refuerzo (configuración plana y en “U”). En segundo lugar, se formulan los modelos analíticos iterativos para la determinación de los esfuerzos normales, cortantes y deflexiones bajo flexión transversal. Finalmente, se describe la parametrización del modelo computacional basado en el Método de Elementos Finitos (FEM), el cual se establece como la herramienta de validación numérica frente a los resultados obtenidos por el modelo teórico.

3.1. Ensayo de flexión a tres puntos

En esta investigación se adopta la configuración de flexión a tres puntos como el escenario de sollicitación mecánica de referencia. Este esquema permite evaluar de manera directa y controlada la respuesta estructural de las vigas en términos de rigidez flexional, distribución de esfuerzos y mecanismos de falla, estableciendo una línea base común para comparar la viga de madera maciza sin reforzar frente a las distintas variantes compuestas con titanio y CFRP.

3.1.1. Descripción del caso de carga y relaciones estáticas

El modelo de flexión a tres puntos se idealiza mecánicamente como una viga prismática simplemente apoyada sobre una luz libre o claro de longitud L . Sobre la cara superior del elemento, específicamente en el punto medio del vano ($x = L/2$), se aplica una carga vertical concentrada de magnitud P , la cual actúa de forma perpendicular al eje longitudinal del componente (ver Figura 3.1).

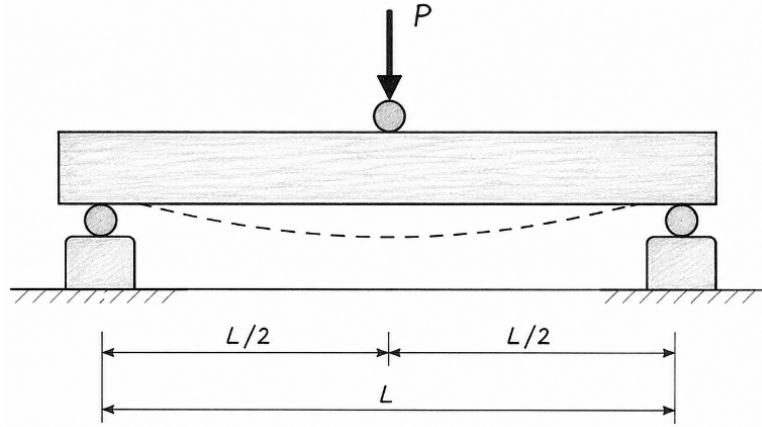


Figura 3.1: Esquematización de un ensayo de flexión a tres puntos.

A partir de las ecuaciones de equilibrio estático global, las reacciones en los apoyos izquierdo (R_A) y derecho (R_B) presentan simetría absoluta, quedando determinadas en función de la fuerza externa por la expresión [28]:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} \quad (3.1)$$

Esta disposición de apoyos y carga genera un estado de flexión no uniforme a lo largo de toda la longitud del elemento. La fuerza cortante interna (V) experimenta una discontinuidad discreta en el centro de la viga, gobernada por la siguiente función seccionada [28]:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{P}{2} & \text{para } 0 < x < \frac{L}{2} \\ -\frac{P}{2} & \text{para } \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad (3.2)$$

Por su parte, el diagrama de momentos flectores presenta un perfil lineal simétrico que asciende desde cero en los apoyos hasta alcanzar su valor máximo absoluto en la

sección central de la viga, directamente bajo el punto de aplicación de la carga P [28]:

$$M_{max} = \frac{P \cdot L}{4} \quad (3.3)$$

3.1.2. Justificación de la configuración de análisis

La selección y estandarización de este modelo de carga dentro de la metodología analítica y computacional se fundamenta en tres criterios ingenieriles principales:

- **Determinación unívoca del estado tensional crítico:** Al concentrar el momento flector máximo en una única sección transversal conocida ($x = L/2$), el ensayo permite aislar geométricamente la zona crítica de máxima demanda a tracción y compresión. Esto facilita la monitorización analítica e iterativa del inicio de la falla en la fibra inferior de la madera.
- **Presencia de corte longitudinal constante:** A diferencia de la flexión a cuatro puntos (donde el tramo central experimenta flexión pura con cortante nulo), el ensayo a tres puntos induce un esfuerzo cortante constante en magnitud a ambos lados del vano ($V = P/2$). Esto es de suma importancia para esta investigación, ya que permite evaluar con alta sensibilidad el comportamiento de la interfaz adhesiva y estimar el riesgo de delaminación mediante la fórmula de Jourawski [28].
- **Simplicidad y reproducibilidad cinemática:** Al tratarse de una configuración de apoyos simples estáticamente determinada, se eliminan ambigüedades numéricas asociadas a montajes hiperestáticos o restricciones complejas. Esto permite aislar y estudiar exclusivamente el efecto de las variables de interés: el espesor de la placa de titanio y el número de capas de CFRP.

3.2. Configuraciones de refuerzo

Con el objetivo de optimizar el desempeño estructural de las vigas de madera frente a solicitaciones de flexión y mitigar el efecto de la falla súbita en la zona traccionada, se proponen y analizan dos configuraciones geométricas de refuerzo externo. Ambas variantes combinan la incorporación de placas de titanio (Grado 2) y láminas de polímero reforzado con fibra de carbono (CFRP) unidas mecánicamente al sustrato de madera mediante una capa continua de adhesivo epóxico estructural.

Las dimensiones base de la sección transversal de la viga de madera corresponden a un ancho b y una altura h . Los refuerzos se parametrizan en función del espesor de la placa de titanio (t_t) y el espesor total del laminado de CFRP (t_c), el cual depende directamente del número de capas aplicadas.

3.2.1. Configuración plana

La configuración plana consiste en la adhesión exclusiva de los materiales de refuerzo en la cara inferior de la viga de madera, correspondiente a la zona sometida a esfuerzos máximos de tracción elástica durante el ensayo de flexión a tres puntos.

En esta disposición, el orden de colocación desde el eje neutro hacia el exterior es: sustrato de madera, capa de adhesivo epóxico, placa de titanio y, finalmente, las capas correspondientes de CFRP de forma superficial. Esta arquitectura busca maximizar el brazo de distancia respecto al eje neutro original, incrementando de forma eficiente el momento de inercia equivalente de la sección transformada y absorbiendo las tensiones normales de tracción que la madera no es capaz de soportar de manera monolítica. El ancho de los refuerzos coincide estrictamente con el ancho b de la sección transversal de la viga (ver Figura 3.2).

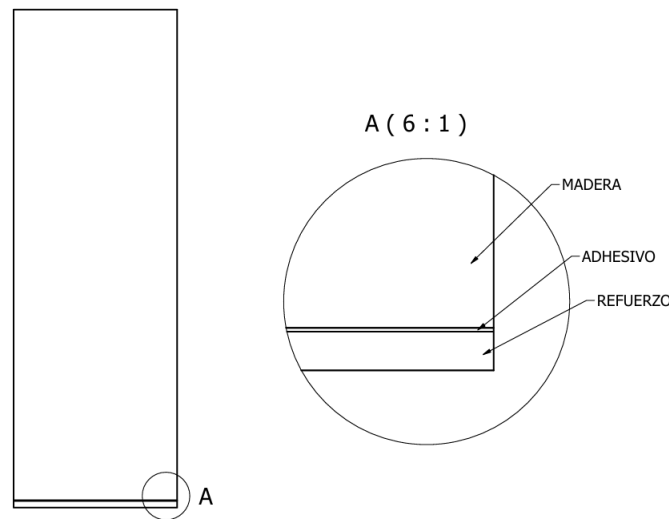


Figura 3.2: Representación esquemática de la sección transversal en configuración plana.

3.2.2. Configuración en U

La configuración en “U” extiende el principio de la configuración plana mediante un envolvimiento parcial de las caras laterales de la viga. Además de cubrir la cara inferior (zona de tracción pura), el refuerzo asciende verticalmente por ambos costados de la sección transversal hasta una altura de ala determinada (h_u), conformando un perfil continuo en forma de canal.

Esta geometría responde a dos requerimientos mecánicos avanzados:

- **Incremento de la rigidez flexional:** Las alas laterales aportan área y segundo momento de área suplementario a la sección compuesta, lo que induce un descenso más pronunciado del eje neutro dynamic hacia la zona traccionada y eleva significativamente la rigidez equivalente $(EI)_{eq}$ sin alterar las dimensiones nominales de la madera.
- **Optimización ante el cizalle interfacial:** Al envolver los laterales, se incrementa drásticamente el área efectiva de contacto y adherencia entre el sustrato y los refuerzos de alta rigidez. Esto mitiga las concentraciones de esfuerzos cortantes longitudinales en las esquinas inferiores y ofrece una trayectoria de transferencia de carga alternativa a través de las paredes laterales de la viga, reduciendo sustancialmente el riesgo de falla prematura por delaminación o descascaramiento de la madera adyacente al adhesivo.

El esquema detallado con la nomenclatura dimensional de esta variante se presenta en la Figura 3.3.

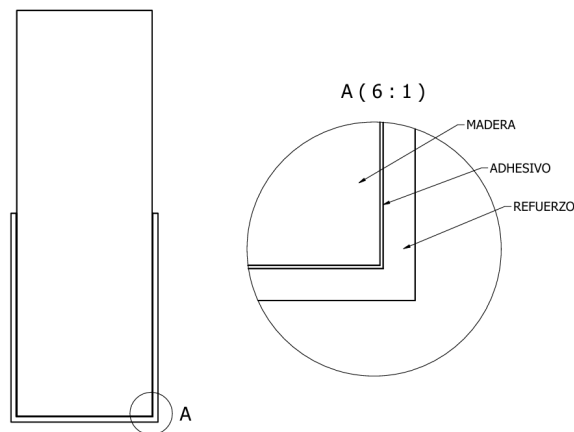


Figura 3.3: Representación esquemática de la sección transversal en configuración en “U”.

3.3. Selección de materiales

En esta sección se fundamenta la selección de los materiales constituyentes utilizados para la configuración de las vigas compuestas, detallando los criterios técnicos, mecánicos y normativos que justifican su inclusión en el estudio. Las propiedades elásticas y de resistencia de diseño de cada componente se han estandarizado para servir como datos de entrada tanto en el modelo analítico iterativo desarrollado en Python como en la simulación numérica tridimensional en ANSYS.

3.3.1. Justificación de los componentes seleccionados

Madera estructural (Pino radiata): Se selecciona el Pino radiata debido a su amplia disponibilidad comercial y relevancia estructural en el sector de la construcción en Chile. Sus propiedades mecánicas y de diseño están debidamente respaldadas por la normativa nacional [33], lo que permite modelar un elemento base realista y representativo de las estructuras que requieren reacondicionamiento o refuerzo en la práctica de la ingeniería civil.

Titanio (Grado 2): Se opta por el titanio comercialmente puro Grado 2 en lugar del Grado 5 (Ti-6Al-4V) debido a su mayor conformabilidad, ductilidad y soldabilidad, cualidades esenciales para adaptar físicamente el refuerzo a la geometría de la viga (especialmente al doblar las alas en la configuración en “U”). Asimismo, proporciona una resistencia mecánica comparable a la del acero estructural convencional (con tensiones de fluencia equivalentes), combinada con una excepcional resistencia a la corrosión y a un costo significativamente menor que las aleaciones de grado aeroespacial, favoreciendo la viabilidad económica del proyecto.

Polímero reforzado con fibra de carbono (CFRP): Se incorpora un laminado unidireccional de CFRP de módulo estándar con el fin de contrarrestar la fragilidad intrínseca de la madera ante esfuerzos de tracción paralela a la fibra. Debido a su altísima resistencia específica en el eje longitudinal, el CFRP es el componente idóneo para posicionarse en la fibra extrema inferior de la sección, absorbiendo la mayor proporción de las cargas de tracción elástica y controlando las deflexiones mecánicas globales del elemento.

Adhesivo epóxico estructural: La unión recíproca entre el sustrato de madera y los refuerzos metálicos o compuestos se confía a una resina epóxica estructural de dos componentes con curado a temperatura ambiente. Este tipo de adhesivo destaca por su baja contracción volumétrica, excelente adherencia sobre sustratos disímiles y una elevada resistencia al corte interlaminar, garantizando la transferencia continua de deformaciones unitarias en las interfaces.

3.3.2. Tabla maestra de propiedades de entrada

La Tabla 3.1 consolida los valores de rigidez, límites elásticos y de rotura adoptados como constantes elásticas fijas en todas las herramientas de cálculo de esta investigación. Cabe destacar que los valores numéricos respetan estrictamente la separación de miles mediante puntos y el uso de comas para los decimales, alineándose con el estándar formal de la memoria.

Tabla 3.1: Propiedades mecánicas y elásticas de entrada para los materiales seleccionados.

Material / Componente	Propiedad Mecánica	Valor de Entrada	Referencia / Fuente
Madera Estructural (Pino radiata)	Módulo elástico (E_L)	7.300 MPa	[27,33]
	Resistencia a tracción ($f_{t,0}$)	46,8 MPa	[33]
	Resistencia a compresión ($f_{c,0}$)	35 MPa	[33]
	Resistencia al corte (f_v)	8,5 MPa	[27,33]
Titanio Monolítico (Grado 2 comercial)	Módulo elástico (E_t)	102.000 MPa	[43,45]
	Límite elástico (Y_s)	315 MPa	[45]
	Resistencia máxima (UTS)	411 MPa	[45]

Tabla 3.1 (continuación)

Material / Componente	Propiedad Mecánica	Valor de Entrada	Referencia / Fuente
	Módulo elástico (E_c)	230.000 MPa	[53,54]
Compuesto CFRP			
(Laminado unidireccional)	Resistencia a tracción (σ_{cu})	2.500 MPa	[54]
	Espesor por capa (t_{layer})	0,2 mm	[29]
Adhesivo Epóxico	Módulo elástico (E_a)	3.780 MPa	[21,23]
(Resina estructural)	Resistencia al cizalle (τ_u)	25 – 15 MPa	[34,46]

3.3.3. Propiedades físicas de diseño

Complementando el análisis mecánico, la Tabla 3.2 detalla las propiedades físicas fundamentales de los materiales seleccionados. Estas constantes son críticas para la correcta definición de los modelos en ANSYS, permitiendo al solucionador computacional calcular la distribución de masa, el peso propio estructural y prever el comportamiento volumétrico ante eventuales variaciones ambientales.

Tabla 3.2: Propiedades físicas de entrada de los materiales constituyentes de la viga compuesta.

Material	Propiedad Física	Valor	Fuente / Ref.
Madera Estructural	Densidad aparente (ρ al 12 % CH)	450 kg/m ³	[33]
(Pino radiata)	Punto de saturación de la fibra (PSF)	30 %	[27]

Tabla 3.2 (continuación)

Material	Propiedad Física	Valor	Fuente / Ref.
	Coef. expansión térmica longitudinal (α_L)	$4,0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	[27]
Titanio (Grado 2)	Densidad de masa (ρ)	4.510 kg/m^3	[43]
	Coeficiente de expansión térmica (α)	$8,89 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	[1]
Compuesto CFRP (Laminado CF/Epoxi)	Densidad de masa (ρ)	1.800 kg/m^3	[54]
	Coef. expansión térmica longitudinal (α_L)	$-0,1 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	[30]
Adhesivo Epóxico (Resina líquida curada)	Densidad de masa (ρ)	1.160 kg/m^3	[23]
	Coeficiente de expansión térmica (α)	$55,0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	[21]

3.3.4. Consideraciones analíticas y criterios de falla

Para la ejecución matemática del análisis se establecen las siguientes condiciones de contorno y operacionales:

- Adherencia elástica perfecta: Se asume que la capa de adhesivo epóxico garantiza una compatibilidad cinemática absoluta, impidiendo el deslizamiento relativo inicial entre las superficies de contacto de la madera, el titanio y el CFRP. Los esfuerzos de corte en dicha interfaz se calculan mediante la teoría de Jourawski para verificar que no superen el límite operativo ($\tau_u = 25 \text{ MPa}$).
- Criterio de colapso por tracción en la madera: En concordancia con el comportamiento mecánico elástico, la madera presenta una rotura de carácter frágil ante esfuerzos de tracción paralela a la fibra. Por lo tanto, el límite de carga del modelo analítico se activa inmediatamente cuando el esfuerzo normal elástico en la fibra inferior de la madera alcanza su resistencia última a la tracción ($f_{t,0} = 46,8 \text{ MPa}$).
- Comportamiento elástico de los refuerzos: Debido a que el fallo de la viga compuesta está gobernado de forma crítica por la rotura súbita de la madera o el

cizalle de la interfaz, se verifica de manera secundaria que el titanio Grado 2 y el CFRP operen dentro de sus rangos elásticos, sin superar sus respectivos límites de fluencia o rotura estipulados en la Tabla 3.1.

3.3.5. Dimensiones paramétricas y de la viga base

Para garantizar la rigurosidad comparativa de los resultados entre la viga de madera maciza (elemento de control) y las distintas configuraciones compuestas, la sección transversal base y la luz de ensayo se mantienen geoméricamente constantes a lo largo de todo el estudio. Las cotas del sustrato de madera responden a escuadrías comerciales típicas, facilitando así la aplicabilidad directa de la investigación a casos reales de reacondicionamiento estructural.

Por su parte, las dimensiones de los refuerzos (Titanio y CFRP) no son valores estáticos, sino que se han definido como variables paramétricas de entrada dentro del algoritmo desarrollado en Python. Esta parametrización permite iterar distintos escenarios de refuerzo, evaluando la influencia del espesor y el volumen del material sobre el incremento de la rigidez equivalente y el descenso del eje neutro dinámico ($\bar{y}$).

La Tabla 3.3 detalla la geometría base y los rangos iterativos aplicados tanto al cálculo analítico de esfuerzos como al dimensionamiento del dominio continuo en el Método de Elementos Finitos (ANSYS).

Tabla 3.3: Dimensiones base de la viga de madera y variables paramétricas iterativas del refuerzo.

Parámetro Geométrico	Símbolo	Valor Base / Rango Iterativo
Viga de Madera		
Ancho de la sección transversal	b	50,8 mm
Altura de la sección transversal	h	152,4 mm
Luz libre de flexión (apoyos)	L	500 mm
Refuerzo de Titanio (Grado 2)		
Espesor de la placa inferior	t_t	Rango iterativo: 1 mm a 12 mm
Ancho de la placa plana	b_t	Igual al ancho de la viga (b)

Tabla 3.3 (continuación)

Parámetro Geométrico	Símbolo	Valor Base / Rango Iterativo
Altura de alas laterales (Con- fig. U)	$h_{u,t}$	Variable dependiente geométrica (ej. $h/2$)
Refuerzo CFRP		
Espesor unitario por lámina	t_{layer}	0,2 mm
Número de capas apiladas	n	Rango iterativo: 1 a 6 capas
Espesor total del laminado	t_c	$n \times 0,2$ mm
Adhesivo Epóxico		
Espesor de la línea de pega- mento	t_a	0,2 mm

Efecto cinemático de la variación de dimensiones

En la lógica del modelo analítico, el incremento progresivo de los espesores de refuerzo (t_t y t_c) altera la coordenada del centroide ponderado de la sección compuesta. Esto obliga al código a recalcular la posición del eje neutro y la inercia equivalente (I_{eq}) en cada ciclo del bucle iterativo. De manera particular, en la configuración en “U”, la altura de las alas laterales (h_u) incrementa drásticamente el primer momento de área (Q) cerca de la fibra extrema traccionada, parámetro que es monitoreado continuamente mediante la formulación de Jourawski para prevenir un colapso prematuro por cizalle interfacial.

3.4. Cálculo analítico y modelo iterativo

El análisis de los esfuerzos internos de la viga se desarrolló mediante un modelo analítico programado en lenguaje Python, cuyo propósito principal es la evaluación paramétrica y la iteración automatizada sobre el espesor de la placa de titanio y el número de capas del laminado CFRP. Este enfoque permite mapear el incremento de la capacidad de carga frente al aumento de la cuantía de refuerzo, estableciendo la base de datos para la posterior evaluación económica.

Desde la perspectiva de la mecánica de sólidos, el acoplamiento de materiales con rigideces disímiles exige abandonar las fórmulas convencionales de vigas homogéneas. Por consiguiente, el algoritmo analítico se fundamenta en el cálculo de la rigidez fle-

xional equivalente y la curvatura de la sección. Este procedimiento garantiza el cumplimiento de la hipótesis de compatibilidad de deformaciones (Navier-Bernoulli), asumiendo que las secciones transversales permanecen planas tras la flexión y que todos los materiales comparten un único perfil de deformación unitaria lineal.

Para cualquier iteración del refuerzo, la posición del eje neutro dinámico ($\bar{y}$) se determina ponderando las áreas de cada componente i respecto a su módulo elástico (E_i):

$$\bar{y} = \frac{\sum E_i A_i y_i}{\sum E_i A_i} \quad (3.4)$$

donde A_i es el área de cada componente y y_i es la distancia desde el centroide local de dicha área hasta el eje de referencia coordinado.

Una vez fijado el eje neutro, se calcula la rigidez flexional equivalente de la sección compuesta ($(EI)_{eq}$) aplicando el teorema de los ejes paralelos (Steiner):

$$(EI)_{eq} = \sum (E_i I_i + E_i A_i d_i^2) \quad (3.5)$$

donde d_i es la distancia desde el centroide de cada elemento al eje neutro global $\bar{y}$. La curvatura global (κ) inducida por el momento flector máximo (M_{max}) es:

$$\kappa = \frac{M_{max}}{(EI)_{eq}} \quad (3.6)$$

Finalmente, el esfuerzo normal en cualquier fibra y medida desde el eje neutro global, para cualquier material i , se obtiene aplicando la Ley de Hooke sobre el campo de deformaciones compartidas ($\epsilon = \kappa y$):

$$\sigma_i(y) = E_i \cdot \kappa \cdot y \quad (3.7)$$

El límite cinemático de rotura del algoritmo se rige por el colapso súbito a tracción elástica de la fibra extrema inferior de la madera, o alternativamente, por la falla al esfuerzo cortante en la línea del adhesivo epóxico, gobernada por la formulación de Jourawski ($\tau = \frac{VQ}{I_{eq}b}$).

Cálculo de la deflexión máxima

Además de la verificación por estados límites de falla (tracción en la madera y cizalle interfacial), el algoritmo iterativo cuantifica el desempeño de la viga en el estado límite de servicio mediante el cálculo de su deformación transversal máxima (δ_{max}).

Bajo la configuración estática de flexión a tres puntos (carga central P y luz libre L), la deflexión máxima ocurre en el centro del vano ($x = L/2$). En los casos donde la relación de esbeltez geométrica (L/h) es suficientemente grande, la deflexión se gobierna principalmente por la flexión y puede calcularse mediante la expresión clásica de doble integración:

$$\delta_{max,flexion} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot (EI)_{eq}} \quad (3.8)$$

Sin embargo, debido a la naturaleza ortotrópica de la madera y a las proporciones geométricas de los elementos estructurales, la deformación por esfuerzo de corte transversal no siempre es despreciable. Para obtener un modelo analítico riguroso en vigas con esbeltez reducida, se incorpora el término de deformación por corte basado en la teoría de vigas de Timoshenko [28]. La ecuación total implementada en el algoritmo es:

$$\delta_{max} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot (EI)_{eq}} + \frac{3 \cdot P \cdot L}{10 \sum (G_i A_i)} \quad (3.9)$$

donde G representa el módulo de elasticidad transversal (módulo de corte) del material base, y A_{eq} corresponde al área de la sección transformada equivalente.

Esta formulación permite al modelo en Python demostrar analíticamente que, a medida que el espesor del refuerzo de titanio (t_t) o el número de capas de CFRP (n) aumentan, la ganancia en rigidez flexional equivalente ($(EI)_{eq}$) reduce la magnitud del primer término, mitigando de forma directa la deflexión global de la estructura frente a una misma sollicitación de carga.

3.4.1. Viga de madera sin reforzar

Antes de evaluar el efecto mecánico de las placas, el algoritmo calcula el estado tensional de la viga de madera maciza (elemento de control) sometida al ensayo de flexión a tres puntos. Para una sección transversal rectangular homogénea de base b y altura h , el cálculo se simplifica ya que el eje neutro $\bar{y}$ coincide con el centroide geométrico ($h/2$) y el módulo elástico es único (E_m). El momento de inercia flexional (I) se expresa de manera estándar como:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (3.10)$$

Bajo la carga central P , la curvatura máxima de la viga de control es $\kappa = \frac{M_{max}}{E_m I}$. Sustituyendo esto en la ecuación (3.7), la fibra inferior de la madera ($y = h/2$) experi-

menta el esfuerzo normal de tracción máximo ($\sigma_{m,t}$):

$$\sigma_{m,t} = E_m \cdot \kappa \cdot \left(\frac{h}{2} \right) = \frac{M_{max} \cdot (h/2)}{I} \quad (3.11)$$

Por su parte, la fuerza cortante máxima ($V_{max} = P/2$), constante en ambos tramos del vano, induce un esfuerzo de cizalle longitudinal. Para la sección rectangular homogénea, la distribución de tensiones tangenciales asume un perfil parabólico, alcanzando su valor máximo absoluto (τ_{max}) exactamente sobre la línea del eje neutro:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_{max}}{b \cdot h} \quad (3.12)$$

Adicionalmente, se incorporó el cálculo de la deflexión máxima de la viga sin reforzar. Este parámetro no solo permite trazar la evolución cinemática de la deflexión a medida que se incrementa la carga aplicada de forma progresiva, sino que es fundamental para determinar analíticamente la carga máxima absoluta que el sistema es capaz de soportar antes de alcanzar el estado límite de falla por tracción en la fibra extrema.

Los resultados teóricos obtenidos de estas ecuaciones y curvas de comportamiento configuran la condición inicial (0 % de incremento estructural), contra la cual se contrasta la ganancia porcentual de resistencia, rigidez y control de deflexiones proporcionada por el titanio y el CFRP en las configuraciones plana y en “U”.

3.4.2. Viga de madera reforzada - Configuración Plana

En esta sección se desarrolla la formulación analítica que gobierna el comportamiento mecánico de las vigas de madera reforzadas en su cara inferior mediante elementos prismáticos planos. El análisis se divide en dos tipologías de refuerzo: la incorporación de una placa de titanio monolítico y la aplicación de un laminado continuo de polímero reforzado con fibra de carbono (CFRP).

Configuración Viga Ti Plana

Para el análisis de esta variante, se considera una sección transversal compuesta constituida por tres materiales elásticos, homogéneos e isotrópicos o equivalentemente ortótropos en su eje longitudinal: madera estructural, una capa continua de adhesivo epóxico y una placa plana de titanio Grado 2. Los refuerzos se posicionan de forma sucesiva en la base de la viga (zona sometida a tracción máxima), de manera que el

sistema resultante responde mecánicamente como una viga compuesta multi-capa bajo un esquema de flexión a tres puntos.

El desarrollo analítico se efectúa bajo la hipótesis de adherencia perfecta en las interfaces de unión, descartando el deslizamiento relativo inicial entre capas y garantizando la compatibilidad cinemática de las deformaciones unitarias. En consecuencia, se asume la validez de la hipótesis de Navier-Bernoulli (las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje elástico tras la deformación), lo que permite describir el estado tensional y de deformación global mediante una curvatura común (κ) compartida por todo el conjunto.

Determinación del eje neutro compuesto: Como primera etapa del algoritmo iterativo, se localiza la coordenada vertical del eje neutro dinámico ($\bar{y}$) de la sección transversal mixta. Para ello, se ejecuta un promedio ponderado por la rigidez axial de cada material con respecto a un sistema de referencia coordinado cuyo origen ($y = 0$) se sitúa de forma convencional en la fibra extrema inferior del refuerzo de titanio:

$$\bar{y} = \frac{E_m A_m y_m + E_a A_a y_a + E_t A_t y_t}{E_m A_m + E_a A_a + E_t A_t} \quad (3.13)$$

donde E_i representa el módulo de elasticidad longitudinal, A_i es el área de la sección transversal y y_i corresponde a la distancia desde el origen de referencia hasta el centroide local de cada componente i (siendo los subíndices m , a y t asociados a la madera, adhesivo y titanio, respectivamente).

Momento de inercia y rigidez flexional equivalente: Una vez determinada la posición de $\bar{y}$, se cuantifica el momento de inercia equivalente de la sección compuesta. Aplicando el teorema de los ejes paralelos (Steiner), el segundo momento de área de cada componente respecto al eje neutro global se calcula mediante:

$$I_i = I_{ci} + A_i d_i^2 \quad (3.14)$$

donde d_i es la distancia absoluta entre el centroide local del material i y el eje neutro global ($d_i = |y_i - \bar{y}|$). El momento de inercia de la sección rectangular homogénea de cada capa respecto a su propio eje centroidal se expresa como:

$$I_{ci} = \frac{b_i \cdot h_i^3}{12} \quad (3.15)$$

donde b_i y h_i corresponden al ancho y espesor nominal de cada capa material. A partir de estos parámetros, la rigidez flexional equivalente global de la sección compuesta $((EI)_{eq})$ se obtiene mediante la suma ponderada:

$$(EI)_{eq} = E_m I_m + E_a I_a + E_t I_t \quad (3.16)$$

Cálculo de la carga máxima de referencia: El umbral de colapso mecánico del sistema se determina evaluando la capacidad límite de curvatura elástica. Dado que los materiales poseen módulos de elasticidad y límites mecánicos disímiles, se define la curvatura máxima admisible ($\kappa_{max,i}$) que cada componente crítico puede tolerar de forma individual antes de alcanzar su respectivo esfuerzo de falla:

$$\kappa_{max,i} = \frac{f_i}{E_i \cdot c_i} \quad (3.17)$$

donde f_i es el esfuerzo límite de diseño del material i (correspondiendo a la resistencia a tracción $f_{t,0}$ para la madera, el límite elástico Y_s para el titanio y la resistencia al cizalle τ_u para el adhesivo) y c_i representa la distancia perpendicular máxima desde el eje neutro global hasta la fibra más solicitada del componente analizado.

Debido a que el espesor de la placa de titanio (t_t) varía paramétricamente en cada iteración del script de Python, la posición de $\bar{y}$ se desplaza dinámicamente. Por ello, el algoritmo evalúa continuamente las tres condiciones geométricas posibles: (i) el eje neutro se ubica en el núcleo de la madera, (ii) el eje neutro intersecta la delgada capa de adhesivo, o (iii) el eje neutro desciende hasta confinarse dentro de la placa de titanio. Para cada escenario, el código recalcula de forma exacta las distancias críticas c_i hacia las fibras extremas y las líneas de interfaz.

Posteriormente, el momento flector máximo resistente asociado al estado límite de cada material se determina a partir de su curvatura admisible:

$$M_{max,i} = \kappa_{max,i} \cdot (EI)_{eq} \quad (3.18)$$

El momento flector máximo global que puede soportar la sección (M_{max}) se adopta de manera conservadora como el menor de los valores calculados, garantizando que ningún componente falle prematuramente:

$$M_{max} = \min(M_{max,m}, M_{max,a}, M_{max,t}) \quad (3.19)$$

Finalmente, vinculando este valor con la ecuación estática del ensayo de flexión a tres puntos ($M_{max} = \frac{PL}{4}$), se despeja de forma unívoca la capacidad de carga máxima elástica del sistema (P_{max}):

$$P_{max} = \frac{4 \cdot M_{max}}{L} \quad (3.20)$$

Cálculo de la deflexión máxima: Establecida la carga máxima, se procede a determinar la deflexión transversal en el centro del vano ($x = L/2$). Dependiendo de la relación de esbeltez geométrica (L/h), el algoritmo implementa dos aproximaciones elásticas. Para vigas esbeltas donde predomina el comportamiento flexional puro, la deflexión máxima responde a la expresión diferencial clásica:

$$\delta_{max} = \frac{P_{max} \cdot L^3}{48 \cdot (EI)_{eq}} \quad (3.21)$$

Por el contrario, en escenarios de baja esbeltez, se incorpora el término corrector por distorsión transversal derivado de la teoría de vigas de Timoshenko, el cual evalúa de forma integrada la rigidez al corte equivalente del sistema compuesto ($(GA)_{eq} = \sum G_i A_i$):

$$\delta_{max} = \frac{P_{max} \cdot L^3}{48 \cdot (EI)_{eq}} + \frac{3 \cdot P_{max} \cdot L}{10 \cdot (GA)_{eq}} \quad (3.22)$$

Evolución elástica de esfuerzos y deflexión: Con el propósito de caracterizar de manera continua la trayectoria cinemática de la viga reforzada, el algoritmo en Python define un vector discreto de deflexiones (δ) que abarca de forma incremental desde el estado de reposo ($\delta = 0$) hasta la deflexión de colapso (δ_{max}). Para cada incremento de desplazamiento, se invierte la Ecuación (3.22) para hallar la fuerza elástica instantánea P , determinando el momento flector actual y la curvatura instantánea del ensamble mediante:

$$\kappa = \frac{M}{(EI)_{eq}} \quad (3.23)$$

A partir de esta curvatura común, la distribución de esfuerzos normales (σ_i) a lo largo del perfil transversal se calcula aplicando directamente la Ley de Hooke sobre la distancia de la fibra evaluada (y) medida respecto al eje neutro de la sección:

$$\sigma_i(y) = E_i \cdot \kappa \cdot y \quad (3.24)$$

Este procedimiento permite mapear con precisión los gradientes de esfuerzo normal, monitoreando la transición tensional entre tracción y compresión dentro de la madera, la resina y la placa metálica. La secuencia algorítmica completa se repite en forma de bucle iterativo variando el espesor del titanio (t_t) desde 1 mm hasta 10 mm, aportando los datos técnicos necesarios para el análisis de optimización económica.

Configuración Viga CFRP Plana

Para el análisis de la viga de madera reforzada con polímeros reforzados con fibra de carbono (CFRP) en configuración plana, se aplica de forma homóloga el modelo físico-matemático basado en la curvatura de la sección y la compatibilidad elástica expuesto para el titanio. El sistema estructural se compone en este caso por la viga de madera base, la interfaz de adhesivo epóxico y el laminado superficial de CFRP.

La divergencia fundamental radica en la definición geométrica del espesor del refuerzo compuesto. A diferencia de la placa monolítica de titanio, el espesor total del CFRP (t_c) constituye una variable discreta que depende estrictamente del número de capas apiladas (n) y del espesor nominal unitario del filamento comercial (t_{layer}):

$$t_c = n \cdot t_{layer} \quad (3.25)$$

A partir de esta configuración geométrica, el algoritmo en Python actualiza las matrices de área ($A_c = b \cdot t_c$) e inercia local del compuesto, determinando la nueva coordenada del eje neutro dinámico y recalculando la rigidez flexional equivalente de la sección transformada:

$$(EI)_{eq} = E_m I_m + E_a I_a + E_c I_c \quad (3.26)$$

donde el subíndice c denota las propiedades del CFRP. Tras la actualización de la rigidez elástica, el código evalúa las curvas de carga-deflexión total, las curvaturas críticas y los esfuerzos normales internos mediante las ecuaciones elásticas correspondientes. Este análisis paramétrico automatizado se ejecuta iterando el número de capas de CFRP desde $n = 1$ hasta $n = 5$, sentando las bases para evaluar comparativamente la eficiencia mecánica del refuerzo polimérico frente al titanio.

Configuración Viga Reforzada en “U”

El modelo analítico para la configuración en “U” (aplicable tanto a los refuerzos de titanio como a los laminados de CFRP) representa un salto de complejidad geométrica respecto a la variante plana. En esta disposición, el material de refuerzo y el adhesivo

estructural no solo cubren la cara inferior sometida a máxima tracción, sino que ascienden verticalmente por las caras laterales de la viga de madera hasta una altura designada como h_u .

Esta adición bidimensional transforma la sección transversal equivalente. Las alas laterales aportan área y, más importante aún, incrementan sustancialmente el segundo momento de área de la sección compuesta sin alterar el peralte total nominal del sistema estructural.

Determinación del nuevo eje neutro compuesto: La inclusión de las alas laterales obliga a recalcular la coordenada del eje neutro dinámico ($\bar{y}$). Considerando simetría respecto al eje vertical, se agrupan las contribuciones de las placas inferiores (subíndice *inf*) y las alas laterales (subíndice *lat*). El promedio ponderado por rigidez axial se actualiza mediante la expresión:

$$\bar{y} = \frac{E_m A_m y_m + \sum E_i A_{i,inf} y_{i,inf} + \sum E_i A_{i,lat} y_{i,lat}}{E_m A_m + \sum E_i A_{i,inf} + \sum E_i A_{i,lat}} \quad (3.27)$$

donde el área de los refuerzos laterales equivale a $A_{i,lat} = 2 \cdot (t_i \cdot h_u)$, siendo t_i el espesor del material (titanio o CFRP) y h_u la altura de extensión vertical del ala. La coordenada $y_{i,lat}$ representa la posición del centroide de dichas alas respecto al eje de referencia inferior.

Rigidez flexional equivalente con contribución lateral: Una vez que el algoritmo define la nueva posición de $\bar{y}$, se calcula la rigidez flexional equivalente. El aporte inercial de las alas laterales es crítico en esta etapa. A diferencia de las placas inferiores (cuya inercia centroidal propia es despreciable debido a su ínfimo espesor elevado al cubo), las alas laterales poseen una altura h_u significativa, por lo que su inercia local no puede omitirse.

Aplicando el teorema de ejes paralelos, el momento de inercia equivalente de la sección en “U” se formula como:

$$(EI)_{eq} = E_m I_m + \sum E_i I_{i,inf} + 2 \cdot \sum E_i \left(\frac{t_i h_u^3}{12} + (t_i h_u) d_{i,lat}^2 \right) \quad (3.28)$$

donde $d_{i,lat}$ es la distancia vertical absoluta entre el centroide geométrico del ala lateral y el nuevo eje neutro compuesto global $\bar{y}$.

Evaluación del cizalle interfacial (Fórmula de Jourawski): La configuración en “U” modifica drásticamente la distribución del esfuerzo cortante longitudinal, mitigando el riesgo de falla por delaminación en las esquinas inferiores. El algoritmo computacional evalúa este fenómeno aplicando la fórmula de Jourawski [28]:

$$\tau(y) = \frac{V_{max} \cdot Q(y)}{(EI)_{eq} \cdot b_{eq}(y)} \quad (3.29)$$

En la zona inferior (sin alas laterales), el ancho efectivo corresponde únicamente al de la madera ($b_{eq} = b_m$). Sin embargo, en el tramo de la sección cubierto por las alas laterales (hasta la altura h_u), el ancho equivalente (b_{eq}) experimenta un ensanchamiento matemático determinado de la siguiente manera:

$$b_{eq} = b_m + 2 \cdot (t_a + t_r) \quad (3.30)$$

Este incremento en b_{eq} reduce significativamente la magnitud del esfuerzo cortante τ en la interfaz vertical, redistribuyendo las tensiones y proporcionando una trayectoria de carga alterna que protege la unión adhesiva inferior. En el algoritmo iterativo de Python, el primer momento de área ponderado ($Q(y)$) se calcula barriendo la sección transversal desde la fibra extrema hasta el eje neutro, identificando el punto de máximo esfuerzo de cizalle para contrastarlo con el límite de fluencia del adhesivo epóxico (τ_u).

Convergencia con el modelo elástico global: Finalmente, tras haber obtenido la nueva rigidez $(EI)_{eq}$ y verificado el estado límite por cizalle transversal, el algoritmo retoma exactamente las mismas ecuaciones cinemáticas de la configuración plana expuestas en la Ecuación (3.23) y (3.24). La curvatura de falla (κ_{max}), la carga máxima soportada (P_{max}) y la deflexión límite (δ_{max}) se calculan utilizando las nuevas propiedades transformadas, evidenciando teóricamente cómo la geometría envolvente en “U” maximiza la eficiencia estructural del titanio y el CFRP respecto a la variante plana.¹

¹Con el fin de mantener la continuidad y legibilidad del presente documento, los códigos desarrollados en Python utilizados para la implementación de los cálculos analíticos descritos en esta sección se presentan en el capítulo de Anexo A. Estos códigos permiten reproducir la metodología de cálculo empleada y constituyen un complemento al desarrollo teórico expuesto en esta investigación.

3.5. Estudio de Mercado y Modelamiento Paramétrico de Costos

El diseño de elementos estructurales compuestos no solo exige cumplir con los estados límites de falla y servicio, sino también garantizar la viabilidad económica del proyecto. Tras haber definido analíticamente el incremento de rigidez flexional y resistencia que aportan el titanio y la fibra de carbono, el tránsito hacia un escenario de aplicación real requiere la formulación de ecuaciones paramétricas de costos.

El presente subcapítulo desarrolla un estudio de mercado exhaustivo para los materiales propuestos, levantando precios reales tabulados para formular funciones matemáticas continuas y discretas. Este enfoque paramétrico permite evaluar la fluctuación de los costos en función de variables de diseño como el espesor del metal, el número de capas de polímero y el área de refuerzo, permitiendo trazar fronteras de optimización entre el desempeño estructural y la inversión financiera.

3.5.1. Especificación Técnica de Materiales

Con el fin de alimentar el modelo financiero con certidumbre técnica, se estandarizaron las especificaciones comerciales de los materiales constituyentes:

- **Madera de Pino Radiata:** Se selecciona madera aserrada y cepillada de escuadría comercial nominal de 2 por 6 pulgadas, cuyas dimensiones efectivas de cálculo estructural corresponden a $50,8 \text{ mm} \times 152,4 \text{ mm}$ [50].
- **Titanio Grado 2:** Se especifica titanio comercialmente puro (UNS R50400) en formato de láminas y placas monolíticas, seleccionado por su óptimo balance entre tenacidad, resistencia a la corrosión y conformabilidad mecánica [25].
- **Polímero Reforzado con Fibra de Carbono (CFRP):** Se establece el uso exclusivo de tejido seco unidireccional de alto módulo elástico (tipo SikaWrap 300 C), descartando configuraciones bidireccionales (Twill o Plain) para evitar peso y costo parásito en el eje transversal de la viga [49].

3.5.2. Costos Materiales y Tabulación de Mercado

Para la construcción de la base de datos financiera, los precios obtenidos de proveedores locales e internacionales se estandarizaron a la moneda nacional (Pesos Chilenos, CLP).

Madera Estructural: Pino Radiata

La base económica de control del sistema corresponde al costo de la viga homogénea de Pino Radiata por metro lineal. Los valores comerciales recopilados en el mercado minorista nacional [50] se exponen en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4: Precios de mercado para Pino Radiata de 2×6 pulgadas (en USD) [50].

Calidad y Estado	Largo (m)	Precio Total	Unitario (USD/m)
Seco Cepillado Genérico	3,2	\$7,99	\$2,50
Graduada Estructural	4,0	\$20,11	\$5,03
Graduada Estructural	4,8	\$23,22	\$4,84
Impregnada Cepillada	4,0	\$25,54	\$6,39
Impregnada Cepillada	4,8	\$29,49	\$6,14

A partir del análisis de dispersión, se descarta el pino genérico debido a su incertidumbre estructural (presencia de nudos y alabeos). Se adopta para las funciones matemáticas el valor estabilizado de la madera graduada estructural, equivalente a \$5 USD/m.

Titanio Grado 2 y Metodología de Tratamiento de Cotizaciones

El levantamiento de costos para el refuerzo metálico requirió un tratamiento analítico de los datos comerciales (elaboración propia). Esto obedece a que los distribuidores metalúrgicos internacionales (OnlineMetals y Evек GmbH) [25,44] no comercializan este material a un valor estandarizado por superficie, sino mediante formatos minoristas indexados a la masa, aplicando tarifas variables según el grado de procesamiento.

Desde una perspectiva volumétrica, al evaluar una placa de área fija (1 m^2), el costo de adquisición escala conforme aumenta el espesor paramétrico (t_t), pues el volumen y la masa total requerida crecen linealmente. No obstante, el estudio de mercado reveló un fenómeno de economía de escala inverso respecto al precio unitario: el costo por kilogramo es inversamente proporcional al espesor de la placa. Las láminas delgadas (ej. 0,5 mm) sufren una fuerte penalización económica en origen debido a los complejos y repetitivos procesos de conformado metalúrgico y laminado en frío necesarios para alcanzar calibres mínimos. Por el contrario, a medida que la placa aumenta su espesor,

el costo por unidad de masa decrece y converge de forma asintótica hacia el valor bruto del lingote refinado.

Para incorporar esta fenomenología no lineal dentro del algoritmo de optimización en Python, se procedió a estandarizar la información del mercado. Se recopilieron cotizaciones de placas con dimensiones de venta estándar, se calculó su masa teórica utilizando la densidad nominal del titanio ($\rho_{Ti} = 4,510 \text{ kg/m}^3$), y se normalizaron los valores económicos para obtener un costo superficial aplicable a un área de análisis constante de 1 m^2 . Este procedimiento paramétrico se consolida en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5: Fluctuación de precios de Titanio Grado 2 por espesor (1 m^2 en USD).

Espesor (mm)	Precio (USD/kg)	Masa (kg/m^2)	Costo Total (USD/m^2)
0,5	\$87,40	2,255	\$197,09
1,0	\$69,00	4,510	\$311,19
2,0	\$50,60	9,020	\$456,41
5,0	\$36,80	22,550	\$829,84
10,0	\$32,20	45,100	\$1.452,22

Fibra de Carbono (CFRP Unidireccional)

La prospección comercial del CFRP unidireccional demuestra que el valor de adquisición se rige fuertemente por la economía de escala del proyecto [10]. La adquisición fraccionada por metros cuadrados sufre recargos logísticos significativos, mientras que el abastecimiento mediante rollos maestros industriales minimiza el costo unitario de la fibra (ver Tabla 3.6).

Tabla 3.6: Precios de mercado para CFRP Unidireccional (USD) [53].

Formato Venta	Área (m^2)	Precio Total	Unitario (USD/m^2)
Fraccionado (Retazo)	1,0	\$73,99	\$73,99
Rollo Mediano	15,0	\$1.020,00	\$68,00
Rollo Maestro	50,0	\$2.388,24	\$47,77

Resinas Epóxicas Estructurales

La transferencia continua de esfuerzos en la interfaz compuesta se confía a matrices poliméricas especializadas de dos componentes. Sus costos unitarios de mercado se exponen en la Tabla 3.7.

- Rendimiento operativo Sikadur-30: Evaluando una densidad de mezcla cu-

Tabla 3.7: Precios de adhesivos epóxicos estructurales (USD) [47–49].

Producto	Aplicación	Formato	Unitario (USD/kg)
Sikadur-30	Adhesivo para Titanio	5,0 kg	\$31,11
Sikadur-330	Resina impregnante CFRP	5,0 kg	\$40,26

rada de $\approx 1,650 \text{ kg/m}^3$ and controlando mecánicamente una línea de pegado uniforme de 1 mm de espesor, el consumo de diseño equivale estrictamente a $1,65 \text{ kg/m}^2$ de acuerdo con las especificaciones técnicas del fabricante [47].

- Rendimiento operativo Sikadur-330: La impregnación de la primera capa de tela CFRP (que contempla la saturación por porosidad del sustrato de madera seca) demanda un consumo de $1,2 \text{ kg/m}^2$. Las capas de refuerzo adicionales subsiguientes solo requieren un aporte de saturación interlaminar de $0,8 \text{ kg/m}^2$, valores normalizados de acuerdo con las guías de aplicación oficiales [48].

3.5.3. Funciones Analíticas de Costo (Modelamiento Paramétrico)

Con el fin de acoplar de forma automatizada las bases elásticas de mercado dentro del bucle iterativo programado en Python, los datos discretos recopilados se procesaron estadísticamente mediante regresiones matemáticas.

Variables Geométricas y Perímetro de Interfaz

Para unificar de forma matemática los modelos de optimización, se define el área superficial total de interfaz a revestir (*Area*) en metros cuadrados. Esta variable vincula la longitud libre de la viga (L), el ancho de la escuadría de madera ($b_{madera} = 0,041 \text{ m}$), y la altura de las alas laterales (h_u) correspondiente a la configuración en “U” (asumiendo que $h_u = 0$ para la configuración elástica plana):

$$Area = L \cdot (b_{madera} + 2h_u) \quad [\text{m}^2] \quad (3.31)$$

Función de Costo para el Refuerzo de Titanio

Al ajustar una regresión no lineal de potencia sobre los valores de cotización de distribuidores metalúrgicos internacionales normalizados de la Tabla 3.5 [25, 44], se obtuvo una función continua con un coeficiente de determinación $R^2 > 0,98$. Esta ecuación calcula de forma automática el costo superficial indexando el espesor variable

(t_t , en mm) y multiplicándolo por el área real de intervención:

$$C_{Ti}(t_t, Area) = Area \cdot 303,153 \cdot t_t^{0,6471} \quad [\text{USD}] \quad (3.32)$$

La Figura 3.4 ilustra la correlación matemática alcanzada, validando la precisión del modelo continuo frente a las cotizaciones discretas del mercado.

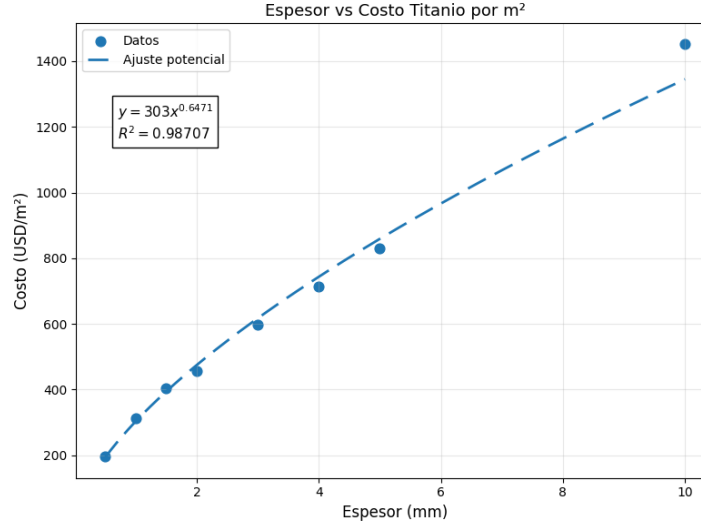


Figura 3.4: Curva de regresión paramétrica del costo total de la placa de Titanio Grado 2 en función del espesor.

Función de Costo para el Adhesivo de Titanio

El costo volumétrico del adhesivo estructural de acoplamiento (Sikadur-30) escala de forma lineal en función del espesor de la línea de pegado (t_a , ingresado obligatoriamente en metros). Multiplicando la densidad del polímero por su tarifa por masa proporcionada por el proveedor [47], la ecuación se formula como:

$$C_{Adh_Ti}(t_a, Area) = Area \cdot (t_a \cdot 1.650 \cdot 31,106) = Area \cdot 51.324,900 \cdot t_a \quad [\text{USD}] \quad (3.33)$$

Función de Costo para el Sistema Compuesto CFRP

A diferencia de la placa metálica homogénea, el modelamiento económico del CFRP requiere una estructura matemática bifásica que separe el comportamiento del tejido seco de fibra y de la resina epóxica de impregnación, evaluando la cuantía de refuerzo como una variable discreta basada en el número entero de capas aplicadas (n_c).

A. Modelamiento del tejido de fibra de carbono: Debido a la fuerte fluctuación por economía de escala expuesta en la Tabla 3.6 y estudiada en la literatura de manufactura de compuestos [10], el costo unitario disminuye a medida que el proyecto demanda mayor volumen de tela ($Area \cdot n_c$). Aplicando una regresión de potencia sobre los datos comerciales, la función de costo del sustrato de carbono se define mediante:

$$C_{fibra}(n_c, Area) = 77,219 \cdot (Area \cdot n_c)^{0,9018} \quad [\text{USD}] \quad (3.34)$$

B. Modelamiento de la matriz polimérica de impregnación: Respondiendo al consumo diferenciado por capas especificado por el fabricante [48], la masa total de resina Sikadur-330 requerida se calcula aislando el mayor consumo de la primera capa elástica respecto a las capas extras estandarizadas. Multiplicando la masa resultante por el valor indexado de la resina, se deriva la ecuación lineal fija de la matriz:

$$C_{resina}(n_c, Area) = Area \cdot (16,10 + 32,21 \cdot n_c) \quad [\text{USD}] \quad (3.35)$$

Englobando ambos términos, la ecuación maestra para el costo total acumulado del sistema CFRP (CT_{CFRP}) se consolida a continuación, describiéndose su comportamiento gráfico por capas en la Figura 3.5:

$$CT_{CFRP}(n_c, Area) = [77,219 \cdot (Area \cdot n_c)^{0,9018}] + [Area \cdot (16,103 + 32,206 \cdot n_c)] \quad [\text{USD}] \quad (3.36)$$

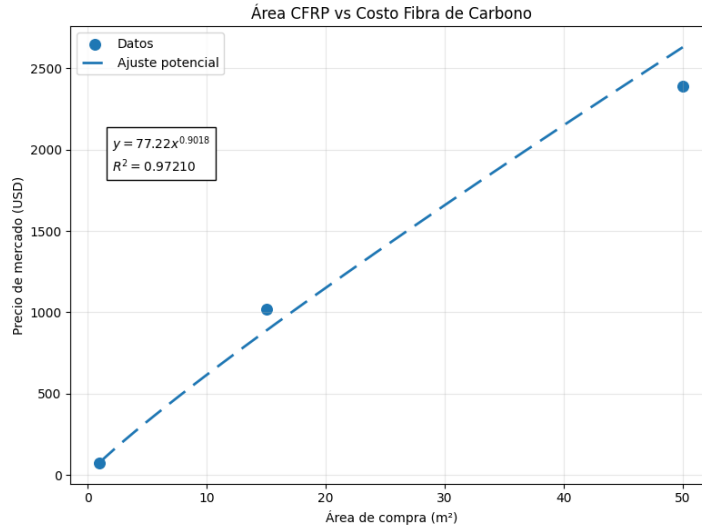


Figura 3.5: Evolución del costo total acumulado del sistema de refuerzo CFRP (fibra + resina) en función del número de capas.

3.6. Modelamiento por Elementos Finitos y Optimización Paramétrica

Con el propósito de validar los modelos analíticos deducidos mediante el método de la sección transformada y verificar las fronteras de falla del sistema, se desarrolló un análisis numérico tridimensional utilizando el Método de Elementos Finitos (MEF) en el entorno Ansys Mechanical. Esta etapa complementa el estudio técnico-económico al acoplar la física del continuo con algoritmos avanzados de optimización de superficies de respuesta.

3.6.1. Línea Base: Viga de Madera sin Reforzar

Como paso inicial y elemento de control de la investigación, se modeló geométricamente la viga de madera homogénea desprovista de elementos de refuerzo. El objetivo de esta línea base es determinar la capacidad de carga máxima elástica del sustrato de pino radiata bajo condiciones controladas de laboratorio.

Construcción Geométrica y Propiedades Elásticas

La geometría tridimensional de la viga fue desarrollada utilizando el software de diseño asistido por computadora **Autodesk Inventor Professional 2023** bajo licencia académica. Las dimensiones nominales del prisma sólido se extrajeron rigurosamente de la caracterización geométrica previa detallada en la Tabla 3.1, las cuales corresponden a un ancho $b = 50,8$ mm, un peralte $h = 152,4$ mm y una longitud total $L = 500$ mm.

En el módulo **Engineering Data** de **Ansys**, el volumen del sustrato fue caracterizado empleando una ley constitutiva elástica ortotrópica lineal. El conjunto completo de constantes elásticas e índices de acoplamiento direccional ingresados en el simulador para el **Pinus radiata** se encuentra sintetizado en la Tabla 3.8 ([19, 27, 31]). Para garantizar la fidelidad física del análisis numérico, las direcciones principales de anisotropía del material se alinearon con el sistema de coordenadas globales del entorno virtual. De este modo, se aseguró que el eje longitudinal de la viga (eje X) coincidiera directamente con la dirección de máxima rigidez elástica, gobernada por un módulo de Young de $E_x = 10.200$ MPa.

Tabla 3.8: Propiedades mecánicas ortotrópicas del pino radiata utilizadas en el modelo numérico.

Propiedad	Valor	Unidad
Densidad (ρ)	450	kg/m ³
Módulo de Young en dirección X (E_x)	10.200	MPa
Módulo de Young en dirección Y (E_y)	974,1	MPa
Módulo de Young en dirección Z (E_z)	974,1	MPa
Coefficiente de Poisson ν_{xy}	0,31	–
Coefficiente de Poisson ν_{yz}	0,03	–
Coefficiente de Poisson ν_{xz}	0,31	–
Módulo de corte G_{xy}	831,3	MPa
Módulo de corte G_{yz}	132,6	MPa
Módulo de corte G_{xz}	831,3	MPa

Configuración Estructural, Discretización y Condiciones de Borde

El modelo fue integrado en un sistema de análisis **Static Structural**. La discretización espacial del cuerpo sólido se realizó mediante un mallado controlado con elementos hexaédricos/tetraédricos de orden superior, fijando un tamaño de elemento elemental constante de 5 mm. Este tamaño de malla garantiza una densidad de nodos suficiente para resolver el gradiente de tensiones normales a lo largo del peralte de la viga sin incurrir en un costo computacional excesivo.

Para replicar de forma fidedigna el ensayo experimental de flexión en tres puntos, se configuraron las siguientes condiciones de contorno cinemáticas y de carga:

- **Apoyo Izquierdo (Restricción de Cuerpo Rígido):** Se aplicó una condición de Fixed Support en la arista inferior extrema, restringiendo todos los desplazamientos traslacionales para evitar movimientos parásitos del sólido.
- **Apoyo Derecho (Rodillo):** Se aplicó una condición de Displacement en la arista opuesta, fijando las componentes traslacionales vertical y transversal ($u_y = 0$, $u_z = 0$) pero liberando el eje longitudinal ($u_x = \text{Free}$), permitiendo el libre acortamiento de las fibras superiores e inclinación por flexión.
- **Condición de Carga:** Se introdujo una fuerza puntual central de magnitud nominal $P = -10,000$ N orientada verticalmente hacia abajo (dirección $-y$) sobre la cara superior de la viga.

El sistema de ecuaciones fue resuelto para monitorear dos variables críticas de salida (Output Parameters): la deflexión elástica máxima en el centro de la luz (dirección y) y el esfuerzo equivalente Von Mises de tracción (σ_x) localizado en las fibras inferiores extremas de la sección central.

Parametrización y Optimización mediante Superficie de Respuesta

Con el fin de automatizar la búsqueda del límite de falla elástica, se implementó una estrategia de optimización paramétrica en la plataforma **Ansys Workbench**. En el bloque de parámetros, se vinculó la fuerza de entrada como variable independiente (P) y los resultados estructurales como variables dependientes. Para evitar divergencias o errores de interpretación matemática en el algoritmo de optimización debidos a la naturaleza vectorial y signos negativos de la fuerza y la deflexión, se definieron variables derivadas basadas en sus valores absolutos ($|P|$ y $|\delta_{max}|$).

El espacio de diseño fue explorado mediante la herramienta **Response Surface Optimization**, ejecutando el procedimiento analítico en tres fases sucesivas:

1. **Diseño de Experimentos (DOE):** Se estableció un rango de búsqueda continuo para la variable de carga elástica entre un límite inferior de 9.000 N y un límite superior de 80.000 N. El software ejecutó de manera iterativa las simulaciones programadas en la matriz de muestreo elástica hasta actualizar por completo el espacio muestral.
2. **Superficie de Respuesta:** Utilizando los resultados discretos del DOE, se construyó un metamodelo matemático continuo (superficie de respuesta) mediante algoritmos de agregación genética, logrando interpolar el comportamiento de la viga ante cualquier nivel de carga intermedio con un error de aproximación numéricamente despreciable.
3. **Criterio de Optimización Matemática:** Finalmente, en el módulo de optimización, se ingresaron las restricciones de diseño (Constraints) y los objetivos de ingeniería. El problema se configuró bajo la siguiente estructura de optimización multiobjetivo:

Objetivo: Maximizar $P_{m\acute{a}x}$

Restricción: $\sigma_{tracci\acute{o}n} \leq 46,8 \text{ MPa}$.

Donde el valor de 46,8 MPa representa el esfuerzo de fluencia elástica última de

la madera a tracción paralela a la fibra. Este procedimiento determinó de forma exacta la capacidad de carga límite de la viga sin reforzar justo antes de iniciar el régimen de falla o plastificación del material.

3.6.2. Viga de Madera Reforzada - Configuración Plana

Variante 1: Placa de Titanio Grado 2

Tras establecer la línea base con la viga homogénea, se procedió a modelar numéricamente el comportamiento de la viga híbrida bajo la configuración de refuerzo plano interfacial. En esta sección se abordan los criterios cinemáticos, numéricos y algorítmicos implementados para la variante reforzada mediante una placa monolítica de Titanio Grado 2, posponiendo el análisis del compuesto polimérico para las secciones posteriores.

Modelamiento Volumétrico y Caracterización Geométrica La arquitectura tridimensional de la viga compuesta fue desarrollada en Autodesk Inventor Professional 2023 utilizando una metodología de modelado por sólidos independientes dentro de un único entorno de ensamble. Esta estrategia permitió representar de forma explícita el espesor físico y la presencia volumétrica de los tres componentes del sistema elástico:

- **Sustrato de Madera:** Mantiene las dimensiones geométricas de control descritas previamente en la Tabla 3.3 (50,8 mm × 152,4 mm × 500 mm).
- **Capa de Adhesivo Epóxico:** Modelada como un cuerpo sólido tridimensional intermedio con un espesor nominal de 0,2 mm, resguardando un ancho de 50,8 mm y una longitud total de 500 mm.
- **Placa de Titanio:** Configurada como el sólido basal de refuerzo con un ancho elástico de 50,8 mm, longitud de 500 mm y un espesor inicial de diseño fijado en 2 mm.

Dentro de este entorno asociativo, el espesor de la placa metálica (t_t) fue parametrizado como la variable geométrica de entrada primordial, vinculando dinámicamente sus modificaciones dimensionales con el solucionador de elementos finitos.

Propiedades de los Materiales y Discretización Numérica En el módulo Engineering Data de Ansys, se gestionaron de manera independiente las leyes constitutivas

elásticas asociadas a cada dominio volumétrico del sistema híbrido. El bloque correspondiente a la viga de madera reincorporó la matriz ortotrópica completa detallada previamente en la Tabla 3.8. Por su parte, la placa metálica basal fue modelada bajo un comportamiento isotrópico elástico lineal, cuyas propiedades mecánicas nominales para el Titanio Grado 2 comercial se encuentran consolidadas en la Tabla 3.10.

Finalmente, la película de pegamento estructural intermedia fue caracterizada de forma homóloga mediante un modelo constitutivo isotrópico, empleando los parámetros de rigidez y resistencia de la resina epóxica resumidos en la Tabla 3.9. La inclusión explícita de los módulos volumétricos (K) y de corte (G) en ambos componentes isotrópicos asegura una adecuada resolución matemática de las deformaciones volumétricas y distorsionales dentro del solucionador numérico, resguardando la consistencia elástica del continuo.

Tabla 3.9: Propiedades mecánicas de la resina epóxica utilizadas en el modelo numérico.

Propiedad	Valor	Unidad
Densidad (ρ)	1.160	kg/m ³
Módulo de Young (E)	3.780	MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,35	–
Módulo volumétrico (K)	4.200	MPa
Módulo de corte (G)	1.400	MPa
Límite de fluencia a tracción (σ_y)	54,6	MPa

Tabla 3.10: Propiedades mecánicas del Titanio Grado 2 utilizadas en el modelo numérico.

Propiedad	Valor	Unidad
Densidad (ρ)	4.510	kg/m ³
Módulo de Young (E)	102.000	MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,36	–
Módulo volumétrico (K)	121.430	MPa
Módulo de corte (G)	37.500	MPa
Límite de fluencia a tracción (σ_y)	315	MPa
Resistencia última a tracción (σ_u)	411	MPa

La discretización del modelo multifase se integró en un sistema Static Structural, estableciendo un mallado global mediante elementos tetraédricos de orden superior con un tamaño de elemento controlado de 8 mm. La conectividad y compatibilidad cinemática en las zonas de unión fue resuelta mediante la formulación de contactos tipo Bonded en las interfaces Madera-Adhesivo y Adhesivo-Titanio. Esta configuración

restringe el deslizamiento relativo interlaminar y el despegue (debonding), asumiendo una transferencia de esfuerzos de corte perfecta a través de la línea de pegamento.

Condiciones de Borde y Variables de Respuesta El montaje virtual replicó estrictamente las condiciones cinemáticas del ensayo de flexión en tres puntos analizado en la línea base: una arista basal izquierda con restricción total de desplazamientos (Fixed Support), una arista derecha operando como rodillo libre longitudinal (Displacement con $u_y = u_z = 0$) y una fuerza puntual central concentrada de magnitud nominal $P_{\text{control}} = -10,000$ N dirigida en el eje vertical negativo.

Tras la convergencia de las ecuaciones del continuo, el bloque de soluciones (Solution) recopiló las siguientes respuestas estructurales:

1. Esfuerzo normal de tracción máximo en la fibra inferior de la madera (σ_{madera}).
2. Esfuerzo normal de tracción máximo en el plano de la placa de titanio (σ_{titanio}).
3. Esfuerzo cortante máximo desarrollado en el volumen del adhesivo epóxico (τ_{adhesivo}).
4. Deflexión elástica máxima en el centro de la luz de la viga compuesta (u_y).

Formulación Algorítmica de Carga Límite y Costos Paramétricos En el editor de parámetros de Ansys Workbench, se introdujo una rutina algebraica de ingeniería económica. Aprovechando el comportamiento lineal de los materiales dentro de la simulación, se definieron tres variables derivadas para calcular de forma matemática la carga exacta a la cual cada material alcanza de forma independiente su régimen plástico o de falla estructural. Las ecuaciones de proporcionalidad implementadas operan bajo la siguiente estructura:

$$P_{\text{fl, madera}} = \frac{\sigma_{\text{fl, madera}}}{\sigma_{\text{madera}}} \cdot |P_{\text{control}}| \quad [\text{N}] \quad (3.37)$$

$$P_{\text{fl, adhesivo}} = \frac{\tau_{\text{fl, adhesivo}}}{\tau_{\text{adhesivo}}} \cdot |P_{\text{control}}| \quad [\text{N}] \quad (3.38)$$

$$P_{\text{fl, titanio}} = \frac{\sigma_{\text{fl, titanio}}}{\sigma_{\text{titanio}}} \cdot |P_{\text{control}}| \quad [\text{N}] \quad (3.39)$$

Para determinar con exactitud qué componente gobierna el colapso elástico del sistema híbrido, se programó un parámetro condicional de salida que extrae el valor mínimo de

las tres funciones, definiendo la capacidad de carga máxima elástica del sistema ($P_{\max}$):

$$P_{\max} = \min(P_{fl, \text{madera}}, P_{fl, \text{adhesivo}}, P_{fl, \text{titanio}}) \quad [\text{N}] \quad (3.40)$$

En paralelo, se incorporaron las ecuaciones de costo paramétrico deducidas en la Subsección 3.5.3, vinculando el área de interfaz de la zona a reforzar para computar en tiempo real el costo total de la intervención estructural en Dólares Estadounidenses (USD).

Optimización Multiobjetivo mediante Superficie de Respuesta El espacio de diseño fue gobernado mediante el módulo Response Surface Optimization. En la fase de Diseño de Experimentos (DOE), se configuró una exploración de variables continuas para el espesor de la placa de titanio (t_t), acotando un rango de búsqueda paramétrico entre 1 mm y 12 mm con incrementos de control de 1 mm.

Tras resolver la matriz de experimentos discretos, el metamodelo continuo de la superficie de respuesta fue actualizado. Finalmente, el problema de optimización técnico-económico multiobjetivo se estructuró matemáticamente mediante el siguiente esquema computacional:

$$\begin{aligned} \text{Objetivos:} & \quad \begin{cases} \text{Maximizar } P_{\max} \\ \text{Minimizar } C_{\text{Total}} \end{cases} \\ \text{Restricciones:} & \quad \begin{cases} \sigma_{\text{madera}} \leq 46,8 \text{ MPa}, \\ \tau_{\text{adhesivo}} \leq 15 \text{ MPa}, \\ \sigma_{\text{titanio}} \leq 315 \text{ MPa}. \end{cases} \end{aligned}$$

Este planteamiento matemático le permite al algoritmo converger hacia un frente de Pareto óptimo, identificando el espesor de metal exacto que maximiza la ganancia estructural al menor costo financiero posible, asegurando que ningún componente supere su umbral de fluencia elástica.

Variante 2: Lamina de Fibra de Carbono (CFRP)

De manera homóloga al modelo metálico, se evaluó la configuración de refuerzo plano interfacial utilizando materiales compuestos avanzados. La particularidad de esta simulación radica en la naturaleza anisotrópica del polímero reforzado con fibra de carbono (CFRP) y en el crecimiento discreto de su espesor en función del número de

capas laminadas manualmente.

Geometría, Materiales y Discretización Numérica La estructura se modeló preservando las dimensiones del sustrato y del adhesivo descritas anteriormente. El volumen inferior de refuerzo se parametrizó con un espesor inicial de $t_{\text{cfrp}} = 0,2$ mm, correspondiente a una capa de tejido. A nivel constitutivo, el refuerzo fue caracterizado mediante el modelo Carbon Fiber (230 GPa) de la biblioteca de Ansys, configurado bajo una ley elástica ortotrópica unidireccional paralela al eje longitudinal (Tabla 3.11). Las condiciones de malla (8 mm), contactos Bonded y apoyos cinemáticos replicaron con exactitud el escenario del titanio.

Tabla 3.11: Propiedades mecánicas ortotrópicas de la fibra de carbono (CFRP) utilizadas en el modelo numérico.

Propiedad	Valor	Unidad
Densidad (ρ)	1.800	kg/m ³
Módulo de Young en dirección X (E_x)	230.000	MPa
Módulo de Young en dirección Y (E_y)	23.000	MPa
Módulo de Young en dirección Z (E_z)	23.000	MPa
Coeficiente de Poisson ν_{xy}	0,20	—
Coeficiente de Poisson ν_{yz}	0,40	—
Coeficiente de Poisson ν_{xz}	0,20	—
Módulo de corte G_{xy}	9.000	MPa
Módulo de corte G_{yz}	8.214	MPa
Módulo de corte G_{xz}	9.000	MPa

Carga Límite y Optimización Discreta: Las respuestas tensionales alimentaron las mismas funciones de proporcionalidad lineal para determinar la carga máxima del sistema. La única ecuación divergente correspondió al límite de falla del compuesto:

$$P_{fl, cfrp} = \frac{2.400 \text{ MPa}}{\sigma_{cfrp}} \cdot |P_{control}| \quad [\text{N}] \quad (3.41)$$

A diferencia de la placa de titanio, la superficie de respuesta restringió la variable geométrica t_{cfrp} a un comportamiento estrictamente discreto. Esto permitió simular la adición escalonada de 1 a 6 capas textiles (n_c), iterando de 0,2 mm a 1,2 mm. El esquema de optimización se ajustó para minimizar únicamente el costo comercial del compuesto (C_{CFRP}) y restringir el esfuerzo último a $\sigma_{CFRP} \leq 2.400 \text{ MPa}$, generando su propio frente de Pareto.

$$\begin{aligned} \text{Objetivos:} & \quad \begin{cases} \text{Maximizar } P_{\text{máx}} \\ \text{Minimizar } C_{CFRP} \end{cases} \\ \text{Restricciones:} & \quad \begin{cases} \sigma_{\text{madera}} \leq 46,8 \text{ MPa}, \\ \tau_{\text{adhesivo}} \leq 15 \text{ MPa}, \\ \sigma_{CFRP} \leq 2.400 \text{ MPa}. \end{cases} \end{aligned}$$

3.6.3. Viga de Madera Reforzada - Configuración U

Variante 1: Perfil de Refuerzo en U de Titanio Grado 2

Como segunda macro-configuración estructural, se evaluó el comportamiento de la viga híbrida acoplando un perfil continuo en forma de “U”. Esta solución cubre la cara traccionada y asciende lateralmente por el peralte de la viga, confinando el sustrato lúneo e incrementando drásticamente la inercia del sistema.

Parametrización Geométrica y Área Efectiva Para viabilizar la optimización automatizada de esta nueva sección, se añadieron dos variables independientes de entrada al software de diseño: la altura del peralte de la madera ($h = 152,4 \text{ mm}$) y el espesor transversal de la resina ($t_{\text{adhesivo}} = 0,2 \text{ mm}$). La inclusión explícita de ambas magnitudes resultó fundamental para que Ansys actualizara dinámicamente el desarrollo perimetral y el Área Efectiva de contacto, garantizando un cálculo preciso en las fun-

ciones de costo financiero de la intervención.

Condiciones de Simulación y Optimización Las propiedades de los materiales, la malla de 8 mm, los contactos Bonded y las restricciones de apoyo se heredaron inalteradas de la variante plana. Para evitar redundancias algorítmicas, la carga límite global ($P_{\text{máx}}$) conservó las mismas ecuaciones de fluencia descritas en la Subsección 3.6.2. Asimismo, se reutilizó el esquema matemático de optimización multiobjetivo (Maximizando $P_{\text{máx}}$ y minimizando C_{Total}), iterando de forma continua el espesor del metal (t_t) entre 1 mm y 12 mm para proyectar la superficie de respuesta específica de la sección en “U.

Variante 2: Perfil de Refuerzo en U de Fibra de Carbono (CFRP)

De manera complementaria, se evaluó el desempeño estructural del sistema híbrido envolviendo las tres caras inferiores del sustrato lúneo con el polímero reforzado con fibra de carbono (CFRP), maximizando así el brazo de palanca del laminado ortotrópico.

Discretización Numérica y Optimización Discreta La topología tridimensional acopló las variables perimetrales (h y t_{adhesivo}) de forma análoga al modelo metálico. No obstante, para garantizar una convergencia geométrica óptima en el mallado y evitar altas relaciones de aspecto (Aspect Ratio) producto de las alas laterales esbeltas del tejido, el tamaño de los elementos tetraédricos se ajustó levemente a 9 mm.

La extracción de la carga límite y los umbrales de falla operaron bajo los mismos criterios y tolerancias de la variante plana de CFRP ($\sigma_{\text{CFRP}} \leq 2.400 \text{ MPa}$). En el entorno de optimización, se retomó el frente de Pareto multiobjetivo con iteración de variable discreta (t_{cfrp}), analizando el incremento de material en saltos fijos de 0,2 mm (de 1 a 6 capas). Esta retroalimentación entre la rigidez simulada y el consumo volumétrico permitió al algoritmo resolver de manera directa el número óptimo de capas envolventes para el proyecto.

En alineación con los estándares contemporáneos de transparencia y probidad académica, se deja constancia de que, durante la fase de redacción y edición del presente documento, se emplearon Modelos de Lenguaje de Gran Escala (LLM, por sus siglas en inglés) estrictamente con fines de asistencia gramatical, corrección ortográfica y refinamiento de la sintaxis técnica.

Es imperativo destacar que todo el desarrollo conceptual, la formulación matemática, el modelamiento numérico mediante Elementos Finitos, la optimización multiobjetivo y el análisis crítico de los resultados corresponden íntegra y exclusivamente al trabajo intelectual y analítico del autor de esta memoria.

Capítulo 4

Resultados y discusión: desempeño mecánico y viabilidad técnico-económica

En el presente capítulo se exponen y analizan los resultados obtenidos a partir de los modelos analíticos paramétricos y las simulaciones por elementos finitos desarrolladas en Ansys Workbench. El objetivo principal es evaluar el desempeño estructural y la viabilidad financiera de las distintas topologías de refuerzo aplicadas al sustrato de madera (*Pinus radiata*).

El análisis se estructura en cuatro etapas secuenciales. En primer lugar, se presenta una validación cruzada entre la formulación matemática de la sección transformada y el modelo numérico lineal elástico, garantizando la fidelidad de las predicciones. Posteriormente, se cuantifica el incremento en la capacidad de carga estructural aportado por el Titanio Grado 2 y el polímero reforzado con fibra de carbono (CFRP) en sus configuraciones plana y en U. En tercer lugar, se despliega el impacto económico asociado a cada variable geométrica de diseño. Finalmente, los resultados convergen en un análisis de optimización multiobjetivo, identificando mediante fronteras de Pareto las configuraciones óptimas que maximizan la ganancia mecánica minimizando la inversión de capital.

4.1. Validación Analítica vs. Numérica

El paso inicial para el análisis paramétrico de optimización requiere validar la precisión de los modelos numéricos de Ansys contrastándolos con las soluciones teóricas de la mecánica de materiales deducidas mediante el método de la sección transformada (programadas en Python).

Para esta verificación cruzada, se extrajeron los valores de la carga de falla límite elástica ($P_{m\acute{a}x}$) y la deflexión máxima en el centro de la luz ($\delta_{m\acute{a}x}$) para tres escenarios de control: la viga de madera aislada, y las configuraciones de refuerzo plano interfacial con Titanio ($t_t = 5$ mm) y CFRP. El compendio exhaustivo de las curvas analíticas de esfuerzo versus deflexión, así como la evolución paramétrica de la carga y deflexión máxima del sistema obtenidas a partir del algoritmo, se documentan íntegramente en el Anexo B. Los resultados comparativos puntuales para estos tres escenarios se consolidan en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Comparación entre el modelo analítico y el modelo de elementos finitos para las distintas configuraciones de viga.

Configuración	Carga límite elástica (kN)			Deflexión máxima (mm)	
	Analítico	Numérico	Error (%)	Analítico	Numérico
Viga sin reforzar	73,62	68,27	7,27	3,47	6,68
Viga con titanio plano (5 mm)	96,13	109,62	14,03	2,04	6,64
Viga con CFRP plano (2 capas)	84,28	90,00	6,78	3,56	6,40

Discusión de la Validación y Fenómenos de Corte

El análisis de la Tabla 4.1 revela dos comportamientos mecánicos fundamentales que justifican la implementación del modelo de elementos finitos tridimensional:

1. **Convergencia en la Capacidad de Carga ($P_{m\acute{a}x}$):** Las predicciones de carga límite entre el modelo de Python y el entorno de Ansys presentan una excelencia

te correlación, con un error promedio del 9,3 %. La diferencia radica en que el cálculo analítico determina el esfuerzo nominal asumiendo una distribución lineal pura de tensiones (flexión de Bernoulli). Por el contrario, el modelo numérico captura las concentraciones locales de esfuerzo tridimensionales bajo el rodillo de aplicación de carga y en las singularidades de la línea de adhesivo. No obstante, el bajo porcentaje de error valida la robustez de la teoría de la sección transformada para predecir umbrales de falla en sistemas compuestos.

2. **Divergencia en la Matriz de Rigidez y Deflexiones:** Se observa una discrepancia significativa en las deflexiones máximas, siendo los valores numéricos considerablemente mayores a los analíticos (cuya tendencia lineal subestimada puede corroborarse en las curvas teóricas del Anexo B). Este fenómeno tiene una explicación física rigurosa: el modelo desarrollado en Python se basó en la teoría clásica de vigas de Euler-Bernoulli asumiendo a la madera como un material isotrópico equivalente. Sin embargo, la viga en estudio posee una luz de ensayo de $L = 500$ mm y un peralte de $h = 152,4$ mm, arrojando una relación de esbeltez $L/h \approx 3,28$.

En vigas profundas ($L/h < 10$), las deformaciones por corte (Timoshenko) no son despreciables. El modelo numérico de Ansys, al integrar la matriz ortotrópica real del pino radiata con un módulo de corte bajo ($G_{xy} = 831,3$ MPa), logra capturar con precisión la pérdida de rigidez que sufre la madera por distorsión angular. Esto demuestra empíricamente que, para luces cortas de madera estructural, los cálculos analíticos unidimensionales subestiman gravemente las deflexiones, haciendo imperativa la simulación por elementos finitos para evaluar correctamente los Estados Límites de Servicio (ELS).

4.1.1. Análisis Estructural: Capacidad de Carga Soportada y Estado de Esfuerzos

En esta sección se analiza cuantitativamente el impacto mecánico derivado de la incorporación de los sistemas de refuerzo compuestos en el sustrato de madera. El estudio evalúa de forma comparativa la evolución de la capacidad de carga máxima elástica ($P_{m\acute{a}x}$) y la redistribución de los campos tensionales del continuo al modificar las variables geométricas de diseño (espesor de la placa metálica y número de capas del compuesto polimérico) para las configuraciones plana y en U.

Línea Base: Respuesta Mecánica de la Viga Sin Reforzar

La viga homogénea de pino radiata sin intervenir opera como el modelo de control experimental de la investigación. Al resolver numéricamente el dominio sólido bajo las condiciones cinemáticas del ensayo de flexión en tres puntos, el algoritmo de optimización paramétrica determinó que la capacidad de carga máxima en el régimen elástico lineal está estrictamente acotada a:

$$P_{\text{máx,base}} = 68,27 \text{ kN} \quad (4.1)$$

Este límite de carga se encuentra gobernado de forma exclusiva por el Estado Límite Último (ELU) de falla por tracción de la madera. Al alcanzar los 68,27 kN de componente vertical, las fibras inferiores extremas del centro de la luz de la viga experimentan un esfuerzo normal longitudinal de tracción coincidente con su límite admisible de diseño de $\sigma_x = 46,8 \text{ MPa}$.

Debido a la baja esbeltez de la sección ($L/h \approx 3,28$), el patrón de esfuerzos exhibe una fuerte concentración de tensiones distorsionales en la zona del plano neutro medio, provocando que la viga experimente una deflexión máxima central de $\delta_{\text{máx}} = 6,68 \text{ mm}$. La distribución tridimensional de las tensiones normales de flexión elástica se ilustra en la Figura 4.1, donde se constata el gradiente tensional lineal clásico, con un bloque superior trabajando a compresión pura y un bloque inferior en tracción crítica, punto donde se inicia la rotura súbita del sustrato.

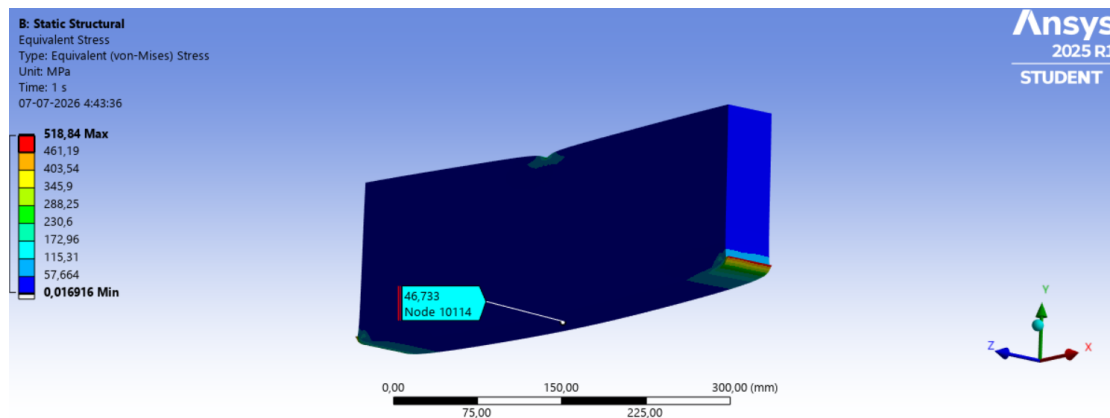


Figura 4.1: Contorno de esfuerzos normales longitudinales (σ_x) en la viga de madera sin reforzar bajo la carga límite elástica de 68,27 kN (unidades en MPa).

Desempeño del Refuerzo de Titanio Grado 2 (Plano vs. U)

La incorporación de la placa de Titanio Grado 2 demostró un incremento sustancial y continuo en la capacidad de carga del sistema a medida que se aumentó el espesor paramétrico (t_t). Al analizar la configuración plana, la adición de una lámina metálica de 2 mm elevó la carga admisible a 74,29 kN (un incremento del 8,8 % respecto a la línea base). Al proyectar el espesor hacia valores superiores, la capacidad ascendió a 119,44 kN para $t_t = 6$ mm, alcanzando un límite máximo de 160,68 kN con un bloque metálico de 12 mm (incremento del 135 %).

El análisis del estado tensional reveló un fenómeno fundamental en esta configuración: el colapso elástico del sistema está gobernado exclusivamente por el titanio. Debido a su alto módulo elástico (105 GPa), la placa metálica absorbe la mayor fracción de los esfuerzos por flexión en la zona de tracción, alcanzando su límite de fluencia ($\sigma_y = 315$ MPa) de manera prematura, mientras que la madera y el adhesivo permanecen por debajo de sus tensiones críticas. Esta falla por fluencia del metal garantiza una plastificación controlada y dúctil antes del colapso frágil de la madera.

Al evaluar la configuración en U, el salto cualitativo en la resistencia estructural fue notable. El confinamiento lateral y el aumento drástico del momento de inercia equivalente generaron que, para un espesor idéntico de 2 mm, la viga soportara 90,59 kN. Esta tendencia de hiper-resistencia se acentuó al aumentar la masa metálica, registrando 168,24 kN para $t_t = 6$ mm y unos excepcionales 276,68 kN para un perfil en U de 12 mm (una resistencia 4 veces superior a la viga original de madera).

En la Figura 4.2, se aprecian los contornos de esfuerzo equivalente (Equivalent Stress) generados por Ansys, donde es evidente cómo las alas laterales del perfil en U redistribuyen el flujo de tensiones hacia los flancos, aliviando la cara basal de tracción pura.

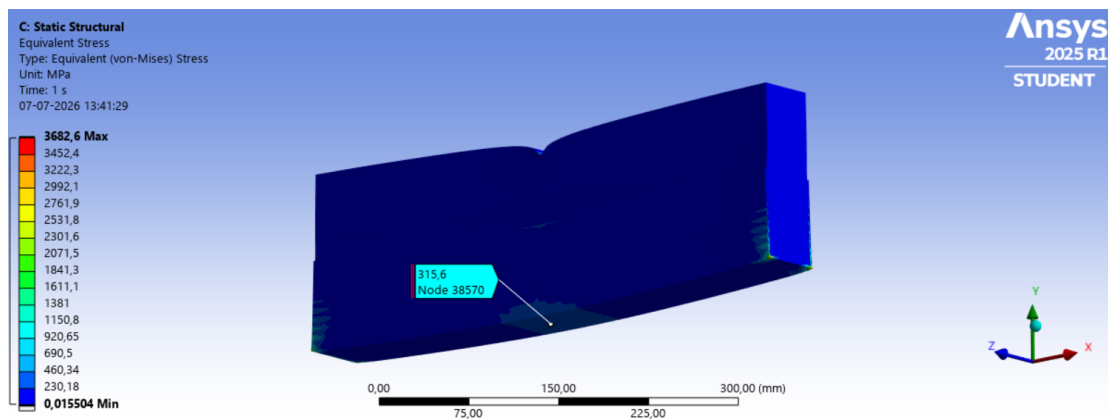


Figura 4.2: Contornos de esfuerzo equivalente en la configuración de Titanio en U, mostrando la fluencia del metal en la cara inferior como mecanismo gobernante de falla.

Desempeño del Refuerzo de CFRP (Plano vs. U)

El polímero reforzado con fibra de carbono (CFRP) presentó un comportamiento estructural diametralmente distinto al del metal, evidenciando una relación resistencia-peso excepcionalmente alta en calibres delgados.

Para la configuración plana, la sola adición de una única capa de tejido unidireccional ($t_{\text{cfpr}} = 0,2 \text{ mm}$) elevó la carga elástica a 81,63 kN (un incremento del 19,5 % respecto a la línea base empleando un espesor geoméricamente despreciable). Al iterar el modelo hasta 3 capas (0,6 mm), el sistema soportó 100,65 kN, y con el laminado máximo evaluado de 6 capas (1,2 mm), la capacidad alcanzó los 134,16 kN.

De la matriz de soluciones numéricas se extrae un hallazgo concluyente sobre los modos de falla: a diferencia del escenario metálico, en la viga reforzada con CFRP el evento de falla está gobernado de forma incondicional por la madera. Debido a la extraordinaria resistencia a la tracción del tejido de carbono (2,400 MPa), el refuerzo opera muy por debajo de su capacidad límite. A medida que la carga aumenta, las fibras de celulosa del pino radiata colapsan al superar su esfuerzo crítico de rotura (46,8 MPa) mucho antes de que el CFRP o la interfaz epóxica alcancen el colapso.

Por su parte, la configuración de CFRP en U maximizó el brazo de palanca del polímero al envolver los laterales del sustrato. Con una sola capa (0,2 mm), la carga máxima ascendió a 84,30 kN. El comportamiento mantuvo un crecimiento casi lineal escalonado a 118,55 kN (3 capas) y alcanzó una carga de falla prematura de la madera de 172,12 kN al aplicar un laminado lateral de 6 capas continuas (1,2 mm), lo que representa un aumento estructural del 152 % respecto a la línea base de control.

La Figura 4.3 ilustra la concentración tensional en la zona inferior de la madera justo en el instante en que alcanza los 46,8 MPa, dejando en evidencia que el polímero actúa como un puente de transferencia de carga que detiene la fisuración, pero que se encuentra subutilizado en su límite elástico propio.

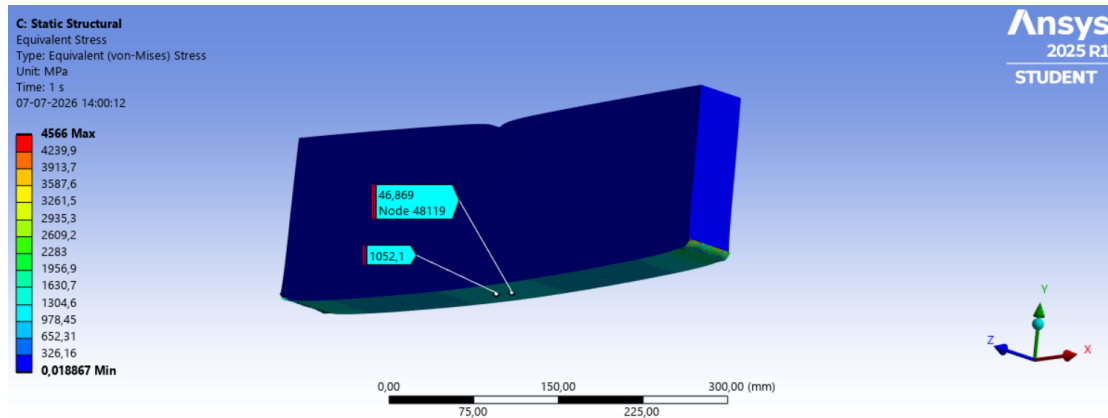


Figura 4.3: Distribución de tensiones longitudinales (σ_x) en la viga con CFRP plano, evidenciando que el sustrato de madera alcanza la rotura a tracción mientras el refuerzo continúa en rango elástico.

4.1.2. Análisis Paramétrico de Costos

Para determinar la viabilidad comercial de las soluciones estructurales, se evaluó el impacto financiero derivado del incremento de masa y área de refuerzo. El modelo de costos fue programado para calcular la inversión total de un lote estándar de 10 vigas compuestas, integrando simultáneamente el costo del sustrato de madera, el consumo volumétrico de la resina epóxica (matriz/adhesivo) y el valor de mercado del material de refuerzo (Titanio o CFRP).

Evolución del Costo para Refuerzo Metálico (Titanio Grado 2)

La incorporación de placas de titanio demostró una escalabilidad económica altamente dependiente de la configuración geométrica. En la configuración plana, el costo total del lote base inició en 148,19 USD para un espesor de 2 mm. A medida que se incrementó el calibre, la curva de costos mostró un ascenso proporcional, registrando 273,10 USD para 6 mm y alcanzando los 412,05 USD para el límite superior de 12 mm.

Sin embargo, al migrar a la configuración en U, la pendiente financiera se disparó drásticamente debido al masivo incremento del volumen de metal mecanizado y del

área de impregnación de resina en los laterales. El perfil base de 2 mm quintuplicó el costo de la viga original, situándose en 528,44 USD. Al escalar el espesor, la inversión total rompió la barrera de los mil dólares (1.078,00 USD para 6 mm) y alcanzó un máximo crítico de 1.759,10 USD para el perfil de 12 mm, evidenciando que el titanio continuo en tres caras representa una solución estructuralmente robusta, pero financieramente restrictiva. Las Figuras 4.4 y 4.5 ilustran las curvas de crecimiento para ambas topologías metálicas.

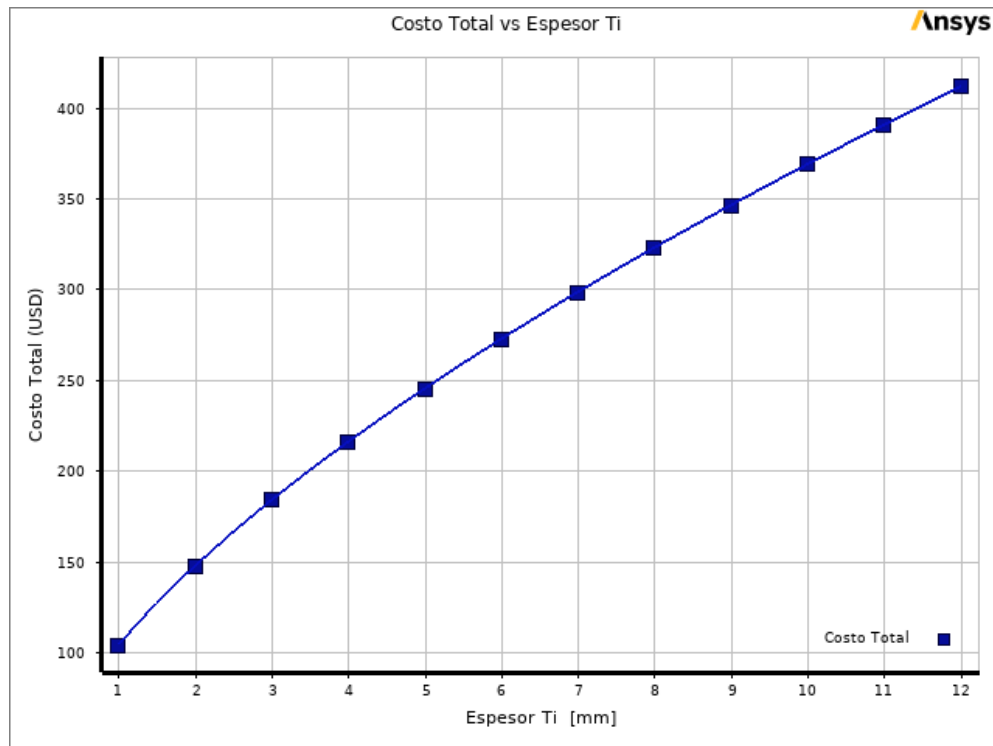


Figura 4.4: Curva paramétrica del costo total en función del espesor de titanio (t_t) para la configuración de refuerzo plano (lote de 10 vigas).

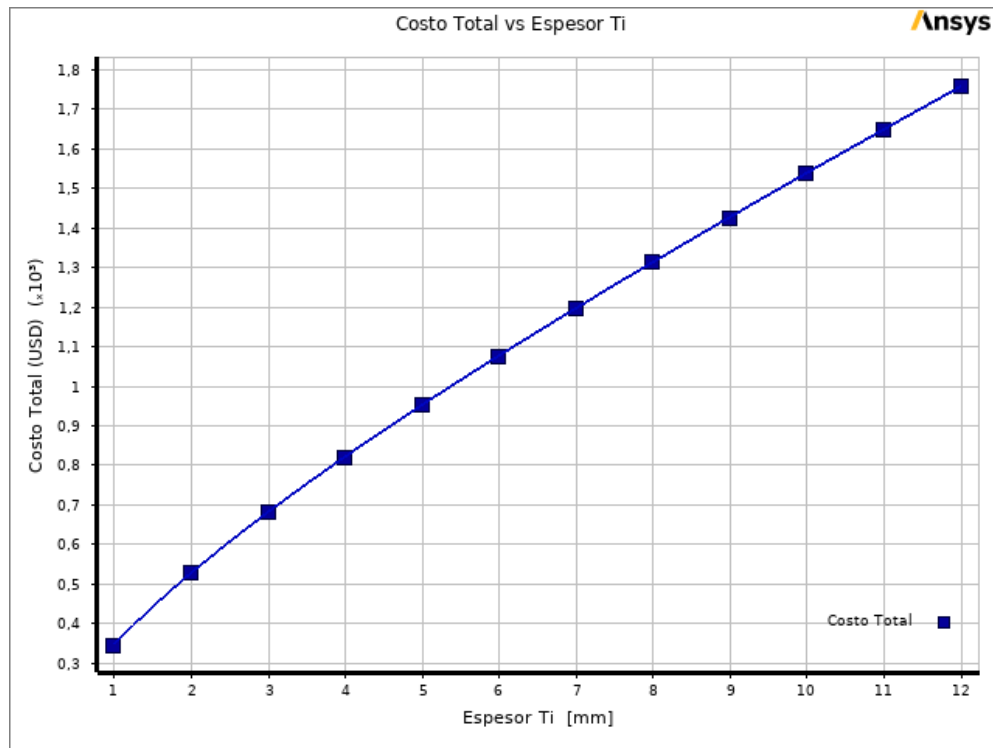


Figura 4.5: Curva paramétrica del costo total en función del espesor de titanio (t_t) para la configuración de refuerzo en U (lote de 10 vigas).

Evolución del Costo para Refuerzo Polimérico (CFRP)

El análisis del compuesto laminado de fibra de carbono arrojó una curva de costos notablemente más contenida. En su configuración plana, la aplicación de 1 capa nominal (0,2 mm) implicó un costo total de apenas 65,40 USD. Al engrosar el laminado a 3 capas (0,6 mm), el lote se valorizó en 129,40 USD, y su máxima iteración de 6 capas (1,2 mm) se mantuvo en el rango de alta viabilidad económica con 219,73 USD.

Al envolver la sección en la configuración en U, el costo aumentó por el salto directo en los metros lineales de tejido textil consumidos. La base de 1 capa arrojó un costo de 172,83 USD, subiendo a 406,79 USD con 3 capas, y cerrando el espacio de diseño en 740,93 USD para las 6 capas continuas. Las tendencias polinómicas de este comportamiento se grafican en las Figuras 4.6 y 4.7.

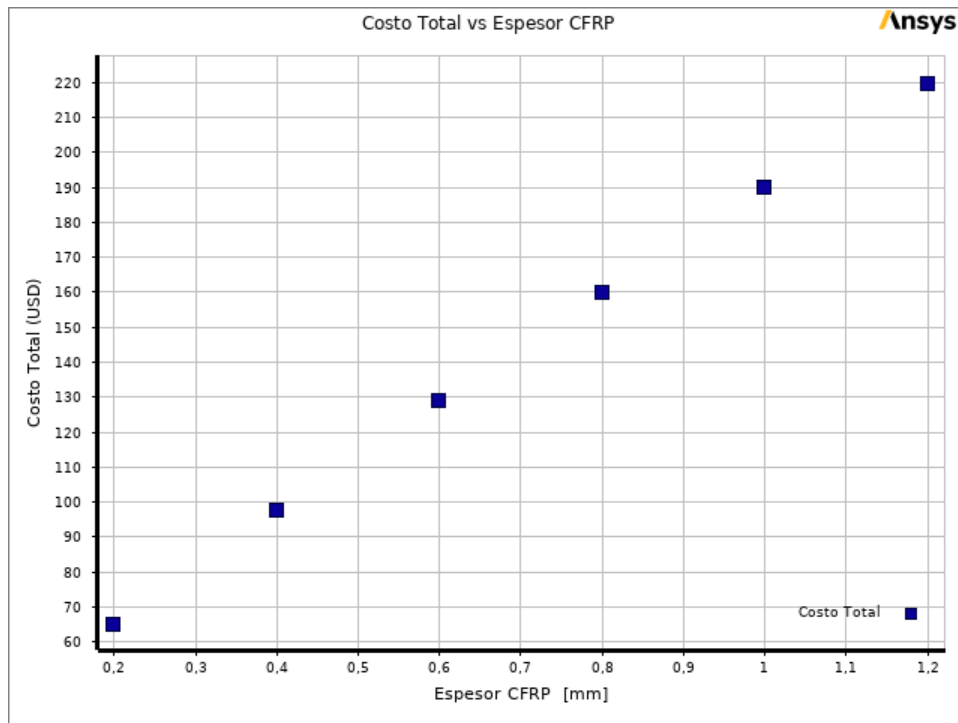


Figura 4.6: Curva paramétrica del costo total en función del espesor de la fibra de carbono (t_c) para la configuración de refuerzo plano (lote de 10 vigas).

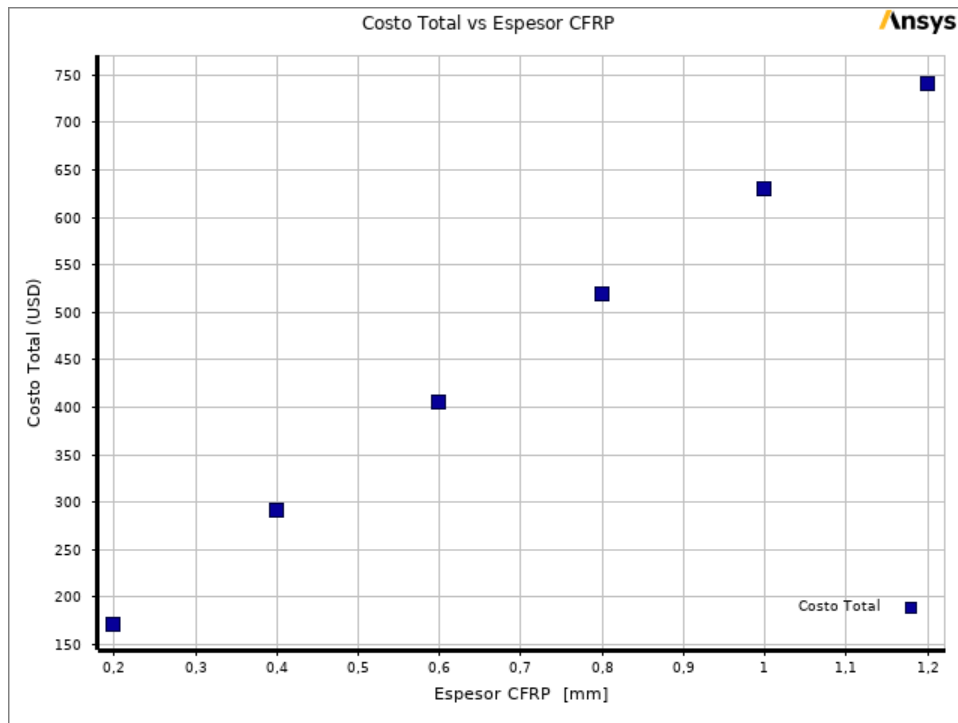


Figura 4.7: Curva paramétrica del costo total en función del espesor de la fibra de carbono (t_c) para la configuración de refuerzo en U (lote de 10 vigas).

Análisis Comparativo de Eficiencia Financiera

Al cruzar los resultados de la simulación estructural (Sección 4.1.1) con el modelo financiero paramétrico, emerge un diagnóstico contundente a favor de los polímeros avanzados frente a las aleaciones isotrópicas clásicas.

A modo de ejemplo representativo, la viga reforzada con Titanio en U de 6 mm es capaz de soportar una carga máxima de 168,24 kN con una inversión de 1,078,00 USD. En contraste, la viga con CFRP en U de 6 capas (1,2 mm) soporta una carga superior de 172,12 kN por un costo total de 740,93 USD. Es decir, el compuesto de matriz epóxica logra superar el desempeño de carga del metal, requiriendo un 31 % menos de capital. Estas diferencias de eficiencia hacen indispensable el uso de algoritmos de optimización de Pareto para determinar el punto exacto de rentabilidad máxima, el cual se desarrolla en la siguiente sección.

4.2. Optimización Técnico-Económica Multiobjetivo (Frentes de Pareto)

Las secciones precedentes han demostrado la existencia de objetivos en conflicto inherentes al diseño estructural de vigas compuestas: la maximización de la capacidad de carga ($P_{\text{máx}}$) conlleva invariablemente una penalización en el costo total del proyecto (C_{Total}). Para resolver matemáticamente esta disyuntiva, se analizó el espacio de soluciones mediante algoritmos de agregación en el entorno Response Surface Optimization de Ansys.

A continuación, se presentan los tres “Puntos Candidatos” (Candidate Points) arrojados por el algoritmo para cada configuración. Estos puntos representan las soluciones no dominadas en el Frente de Pareto, identificando los espesores exactos que garantizan el máximo aprovechamiento mecánico minimizando la inversión.

4.2.1. Candidatos Óptimos para Refuerzo Metálico (Titanio Gr 2)

En la Tabla 4.2 se exponen los resultados de optimización para las variantes de titanio. Para la configuración plana, el algoritmo descartó los extremos del dominio y se concentró en la zona de transición central (7 a 9 mm), demostrando que esta franja ofrece el mejor equilibrio (Trade-off) antes de que el costo marginal supere a la ganancia estructural marginal. El Candidato 2 (8 mm) destaca como el punto de inflexión ideal, superando los 136 kN con un presupuesto acotado.

Por otro lado, para la configuración en U, la superficie de respuesta arrojó candidatos que mapean las fronteras operativas del sistema. El Candidato 1 (1 mm) representa la solución de costo mínimo, mientras que el Candidato 2 (12 mm) representa la maximización absoluta de carga, llevando a la viga a resistir 276,68 kN a cambio de una fuerte penalización financiera (1,759,10 USD). El Candidato 3 (10 mm) actúa como la solución de compromiso de alto rendimiento.

Tabla 4.2: Puntos candidatos óptimos arrojados por el Frente de Pareto para el Titanio Grado 2.

Topología	Candidato	Espesor (t_t)	Carga Límite ($P_{\text{máx}}$)	Costo Total (USD)
Plana	Candidato 1	7 mm	128,29 kN	\$ 298,85
	Candidato 2	8 mm	136,25 kN	\$ 323,33
	Candidato 3	9 mm	143,36 kN	\$ 346,75
En “U”	Candidato 1	1 mm	69,49 kN	\$ 347,19
	Candidato 2	12 mm	276,68 kN	\$ 1.759,10
	Candidato 3	10 mm	240,83 kN	\$ 1.540,30

Para visualizar gráficamente el comportamiento mecánico que da origen a esta selección de candidatos y comprender cómo escala el desempeño del sistema frente a la adición de material, resulta imperativo analizar la evolución de la capacidad de carga en función del espesor del refuerzo.

Las Figuras 4.8 y 4.9 ilustran esta relación paramétrica para ambas topologías. Este análisis es el respaldo fundamental del Frente de Pareto, ya que evidencia de forma gráfica los puntos de inflexión donde el aumento de masa (y costo) deja de traducirse en una ganancia estructural proporcional.

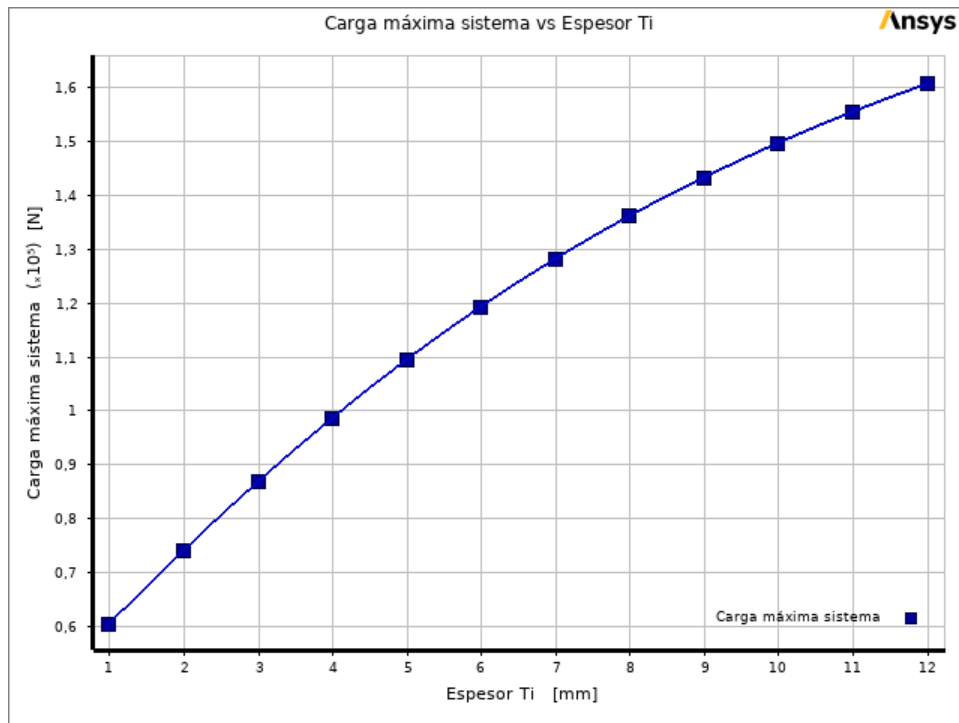


Figura 4.8: Evolución de la capacidad de carga máxima admisible en función del espesor del refuerzo de Titanio Grado 2 para la configuración plana.

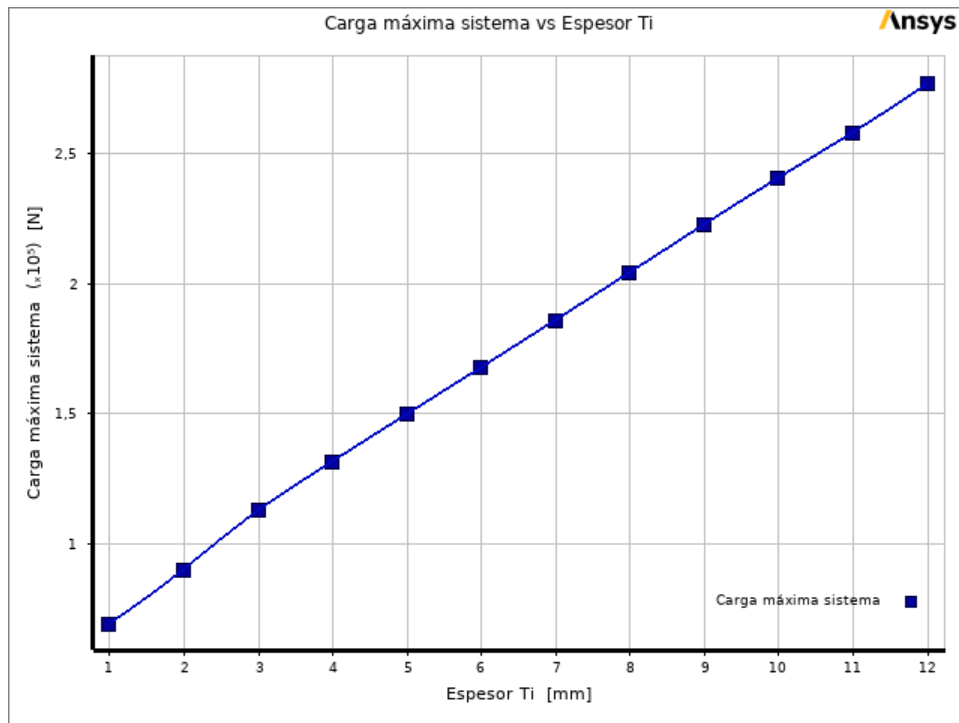


Figura 4.9: Evolución de la capacidad de carga máxima admisible en función del espesor del refuerzo de Titanio Grado 2 para la configuración en "U".

Al observar la Figura 4.8 (configuración plana), se evidencia un incremento sostenido de la resistencia a la flexión a medida que aumenta el espesor de la placa. Sin embargo, la pendiente de la curva refleja que las ganancias marginales en capacidad de carga son decrecientes, validando rigurosamente por qué el algoritmo de optimización confinó los candidatos a la franja de los 7 a 9 mm.

Por su parte, la configuración en “U” (Figura 4.9) exhibe una eficiencia estructural superior que escala de manera más agresiva. La adición de las alas laterales incrementa drásticamente el momento de inercia global del sistema, permitiendo alcanzar los elevados niveles de resistencia documentados en la Tabla 4.2 (hasta 276,68 kN). Al cruzar el comportamiento de esta curva con el modelo de costos, queda justificada la selección de candidatos extremos que maximizan la métrica de kN/USD según los requerimientos específicos del diseño.

Para visualizar gráficamente este cruce definitivo entre desempeño e inversión, las Figuras 4.10 y 4.11 expone la capacidad de carga frente al capital requerido, consolidando el Frente de Pareto empírico del refuerzo metálico.

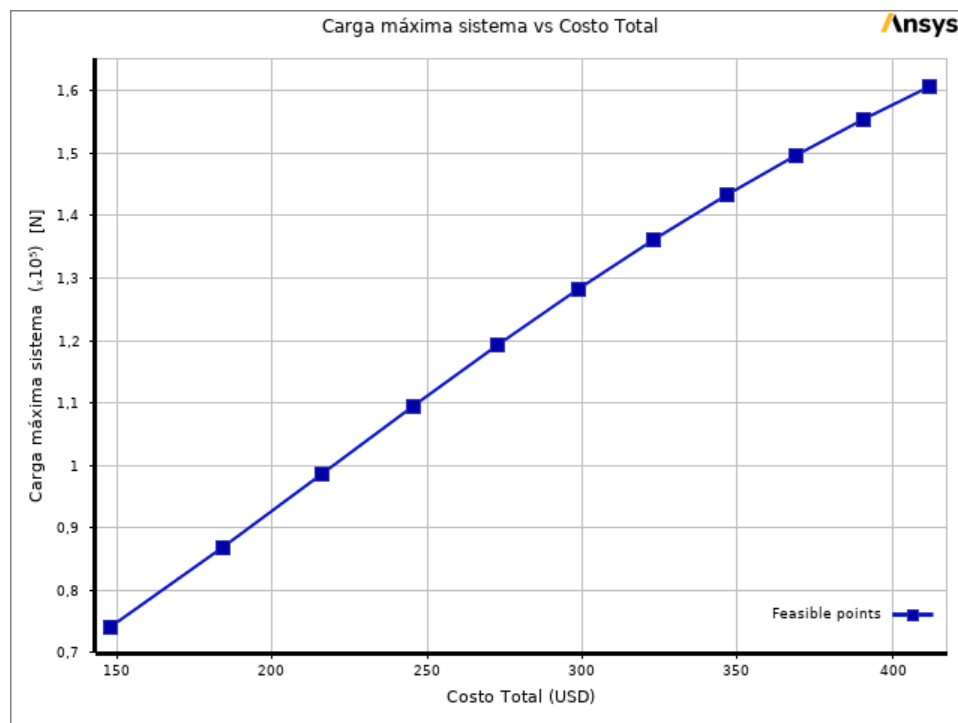


Figura 4.10: Frente de Pareto para la optimización multiobjetivo entre el costo total del lote y la capacidad de carga máxima de vigas reforzadas con Titanio Grado 2 en la configuración plana.

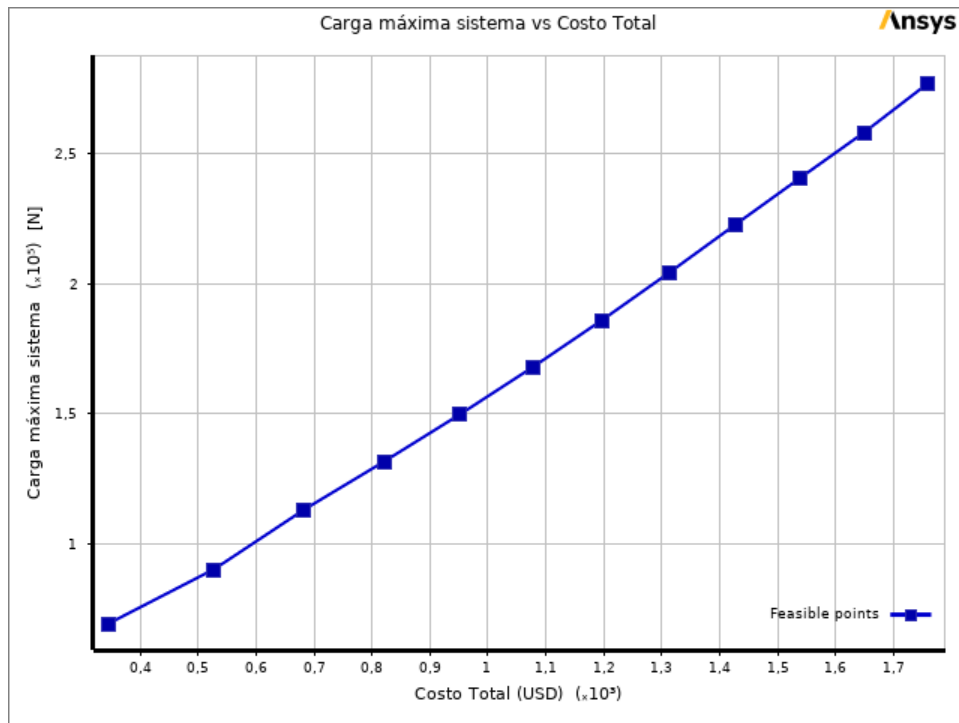


Figura 4.11: Frente de Pareto para la optimización multiobjetivo entre el costo total del lote y la capacidad de carga máxima de vigas reforzadas con Titanio Grado 2 en la configuración en “U”.

En estas proyecciones se evidencia de forma contundente la disyuntiva del diseño: a partir de los puntos óptimos seleccionados (como el Candidato 2 en la configuración plana), la pendiente geométrica de la curva se aplanan progresivamente. Esto indica matemáticamente que un incremento marginal en el costo financiero no se traduce en un retorno proporcional de la capacidad de carga, penalizando drásticamente la viabilidad económica del proyecto en los espesores superiores del dominio.

4.2.2. Candidatos Óptimos para Refuerzo Polimérico (CFRP)

Debido a la restricción paramétrica de iteración discreta basada en la adición física de laminas de fibra de carbono, los candidatos de Pareto presentados en la Tabla 4.3 coinciden con capas exactas del material.

Para la configuración plana, el Candidato 1 sugiere directamente la utilización del límite superior de diseño (1,2 mm, equivalente a 6 capas). Esta selección del algoritmo es reveladora: dado que el tejido de CFRP es significativamente más económico por unidad de rigidez que el titanio, el solucionador matemático identifica que es financieramente viable saturar el espesor disponible para alcanzar 134,20 kN de resistencia.

En la configuración en U, el salto en los costos del tejido es más agresivo debido al desarrollo perimetral. El algoritmo entrega el Candidato 3 (0,4 mm, 2 capas) como un punto dulce de optimización intermedia, superando los 100 kN de resistencia manteniéndose por debajo del umbral de los 300 USD. El Candidato 2 (1,2 mm) se posiciona como la opción de máxima demanda para cargas pesadas.

Tabla 4.3: Puntos candidatos óptimos arrojados por el Frente de Pareto para el laminado de CFRP.

Topología	Candidato	Espesor (t_{cfRP})	Carga Límite ($P_{\text{máx}}$)	Costo Total (USD)
Plana	Candidato 1	1,2 mm (6 capas)	134,20 kN	\$ 219,73
	Candidato 2	0,2 mm (1 capa)	81,63 kN	\$ 65,40
	Candidato 3	1,0 mm (5 capas)	122,70 kN	\$ 190,09
En “U”	Candidato 1	0,2 mm (1 capa)	84,37 kN	\$ 172,83
	Candidato 2	1,2 mm (6 capas)	172,66 kN	\$ 740,93
	Candidato 3	0,4 mm (2 capas)	101,87 kN	\$ 291,75

Para comprender cabalmente la selección de estos candidatos y visualizar el impacto de la adición discreta de capas de fibra de carbono, resulta indispensable analizar la evolución de la capacidad de carga frente al incremento escalonado del espesor del laminado. Las Figuras 4.12 y 4.13 ilustran este comportamiento, evidenciando cómo la métrica de costo-efectividad domina el espacio de soluciones.

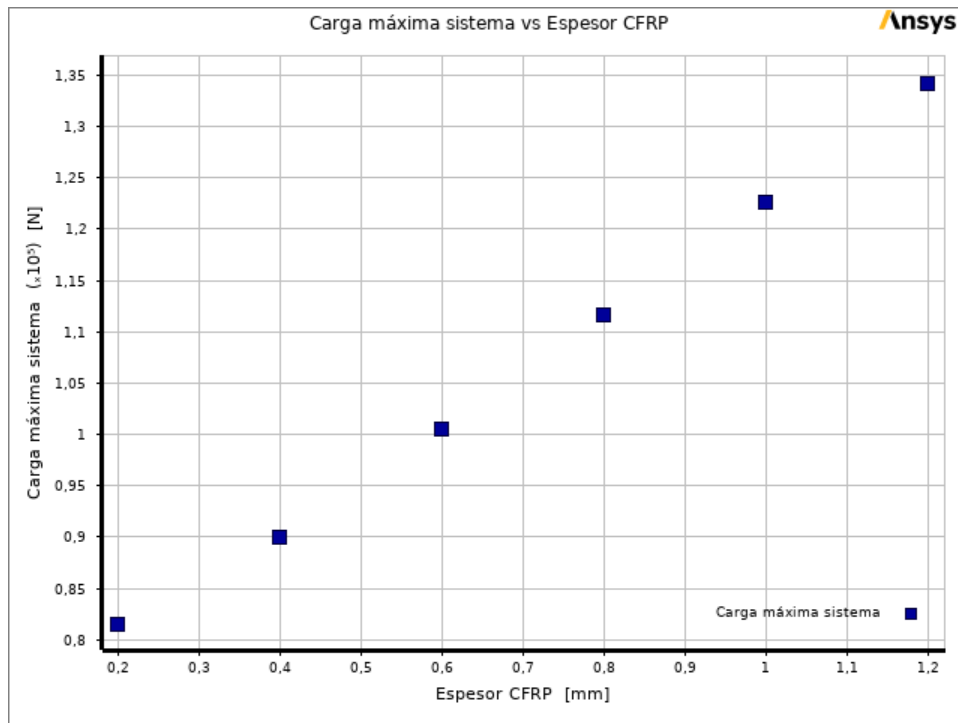


Figura 4.12: Evolución de la capacidad de carga máxima admisible en función de la adición discreta de capas de CFRP (0,2 mm por capa) para la configuración plana.

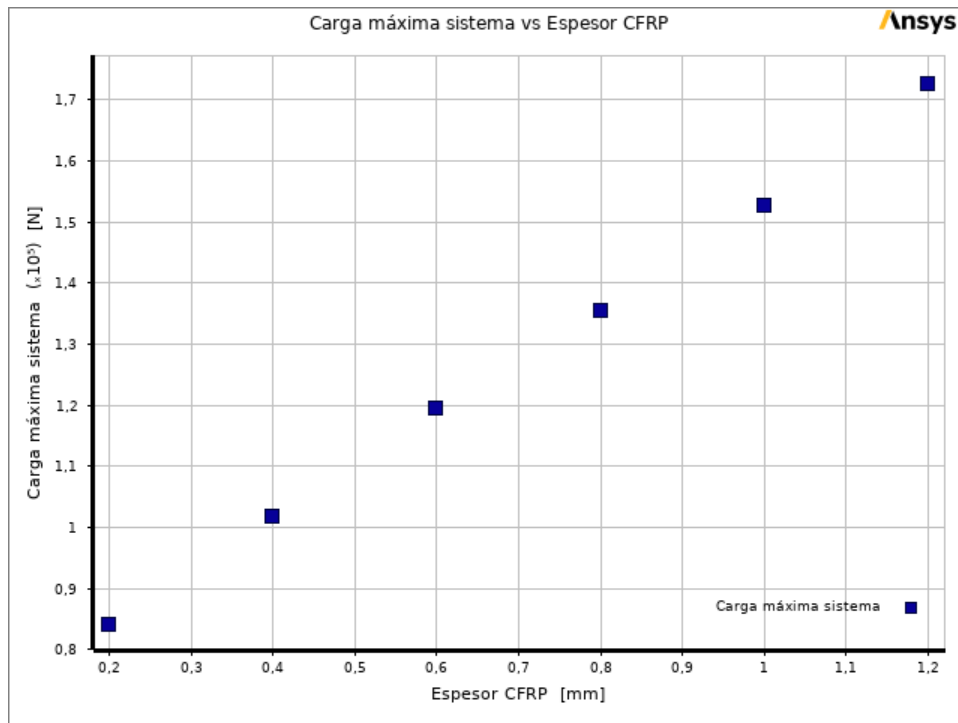


Figura 4.13: Evolución de la capacidad de carga máxima admisible en función de la adición discreta de capas de CFRP (0,2 mm por capa) para la configuración en "U".

Al analizar la Figura 4.12 (configuración plana), se observa una tendencia de crecimiento mecánico sostenido que no se ve severamente penalizada por el costo del material. Esta es la demostración visual de por qué el algoritmo converge hacia el límite superior del dominio (6 capas); la alta eficiencia financiera del tejido unidireccional justifica la acumulación de capas para maximizar el desempeño estructural.

Por el contrario, la Figura 4.13 para la configuración en “U” muestra una tasa de incremento de carga mucho más pronunciada, pero asociada a un encarecimiento acelerado debido a la cantidad de tejido requerida para cubrir los laterales de la viga. Esta curva justifica rigurosamente la elección del Candidato 3 (2 capas) como la solución de compromiso óptima, ya que captura la fase más eficiente del incremento de inercia antes de que la adición de área perimetral dispare el presupuesto por encima de lo justificable para aplicaciones estándar.

La toma de decisiones sobre el laminado óptimo se fundamenta visualmente en la proyección bidimensional de este espacio de diseño. Las Figuras 4.14 y 4.14 exponen la correlación directa entre la inversión monetaria y el límite de falla elástica del sistema, definiendo el Frente de Pareto empírico para el material compuesto.

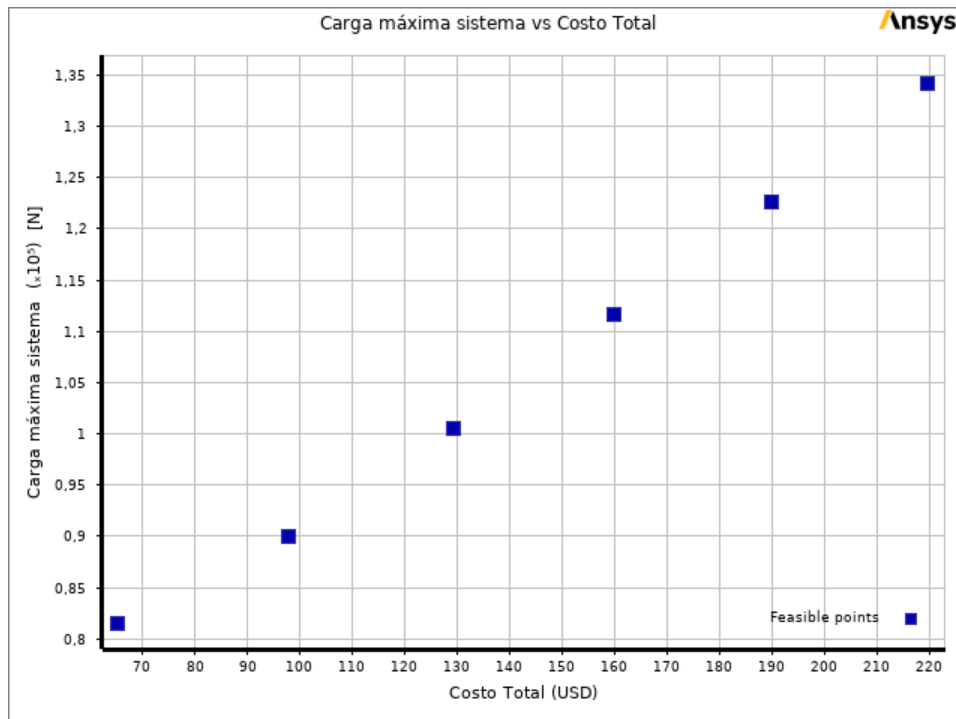


Figura 4.14: Frente de Pareto para la optimización multiobjetivo entre el costo total del lote y la capacidad de carga máxima de vigas reforzadas con laminados de CFRP en la configuración plana.

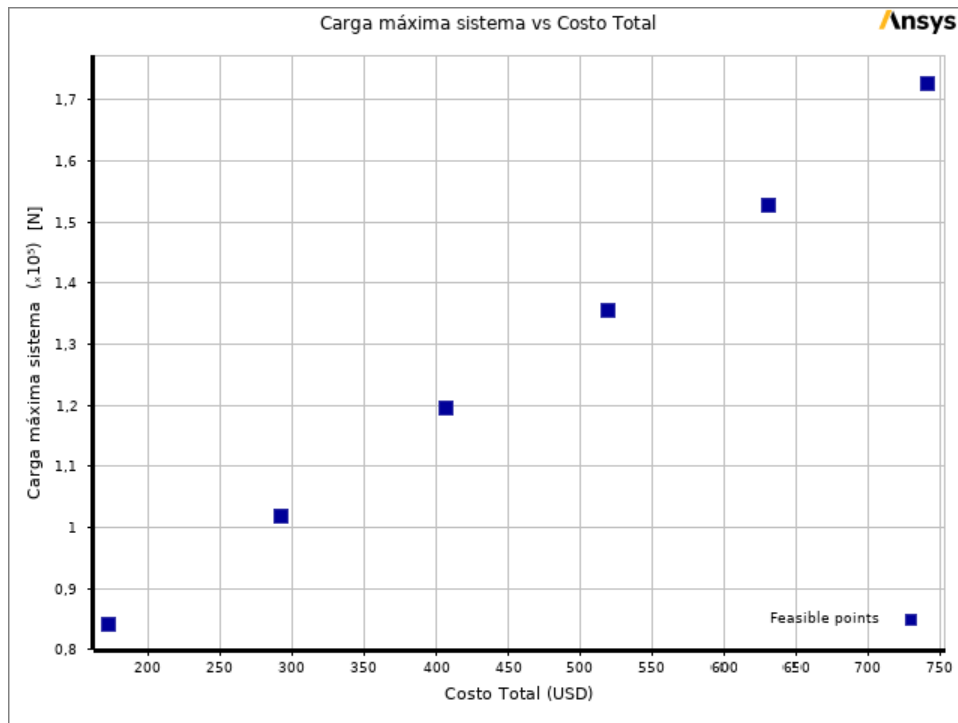


Figura 4.15: Frente de Pareto para la optimización multiobjetivo entre el costo total del lote y la capacidad de carga máxima de vigas reforzadas con laminados de CFRP en la configuración en “U”.

A diferencia del comportamiento asintótico severo del titanio, la configuración plana de CFRP (Figura 4.14) mantiene una pendiente de eficiencia ascendente muy pronunciada y continua en todo su dominio, corroborando matemáticamente la pertinencia de agotar el espesor disponible (Candidato 1). En contraparte, la configuración en U (Figura 4.15) revela un codo de encarecimiento acelerado provocado por el desarrollo perimetral de la fibra, validando rigurosamente la elección de un laminado moderado (Candidato 3, de 2 capas) como el punto de máxima rentabilidad de la frontera operativa.

4.2.3. Veredicto Técnico y Selección de la Configuración Óptima Global

Para establecer un dictamen técnico definitivo entre aleaciones metálicas y materiales compuestos avanzados, se formuló un Índice de Eficiencia Financiera (η_f), definido como la capacidad de carga obtenida por cada unidad monetaria invertida (kN/USD). Al someter a los candidatos más competitivos a este escrutinio, emergen

los verdaderos campeones del proyecto:

- **Mayor Eficiencia Global:** El Candidato 1 de la configuración de CFRP Plana (6 capas) entrega 134,20 kN a un costo de 219,73 USD. Esto genera un índice $\eta_f = 0,61$ kN/USD. Al compararlo con su equivalente más cercano en carga, el Titanio Plano de 8 mm (Candidato 2), que logra 136,25 kN pero cuesta 323,33 USD ($\eta_f = 0,42$ kN/USD), el CFRP plano demuestra ser un 45 % más eficiente financieramente, coronándose como la intervención óptima para estructuras de sollicitación media.
- **Mayor Capacidad Absoluta:** Para escenarios de altas sollicitaciones que requieran superar los 170 kN, la decisión radica en las configuraciones en U. El Titanio en U permite alcanzar resistencias brutales (Candidato 3: 240 kN), pero su índice de eficiencia se desploma a $\eta_f = 0,15$ kN/USD. En contraste, el CFRP en U de 6 capas (Candidato 2) logra unos masivos 172,66 kN con un índice de $\eta_f = 0,23$ kN/USD.

El uso de la placa de Titanio Grado 2, si bien mecánicamente predecible por su falla dúctil a la fluencia, se encuentra injustificado desde la perspectiva económica debido a sus altos costos de material. La aplicación de laminados de CFRP interfacial domina el frente de optimización, siendo la configuración plana de 6 capas la decisión gerencial más rentable del estudio. La configuración de CFRP en U queda reservada estrictamente para vigas donde las limitaciones de gálibo arquitectónico exijan maximizar la carga sin poder incrementar el peralte natural de la madera.

4.3. Limitaciones Intrínsecas de la Matriz Lignocelulósica y Mitigación de Costos

A pesar de las excelentes propiedades específicas del pino radiata, su naturaleza higroscópica y biológica impone desafíos ineludibles en el diseño estructural a largo plazo. A diferencia de los componentes del refuerzo (donde el polímero reforzado con fibra de carbono y el Titanio Grado 2 presentan una inmunidad casi absoluta a la corrosión ambiental), la madera base es susceptible a dos fenómenos de degradación principales:

1. Variabilidad Higroscópica: Fluctuaciones en la humedad relativa del ambiente provocan hinchamiento y contracción de las fibras de la madera. Estos cambios dimensionales cíclicos pueden inducir esfuerzos residuales de corte en la capa de adhesivo epóxico, promoviendo una delaminación prematura en la interfaz madera-refuerzo.
2. Degradación Biológica: La exposición prolongada a la humedad crea un entorno propicio para el ataque de hongos de pudrición e insectos xilófagos, comprometiendo drásticamente la sección transversal resistente.

Estrategia de Mitigación y Estimación de Impacto Económico: Para neutralizar estas vulnerabilidades sin alterar la rigidez de la probeta, el estándar industrial dicta la aplicación de tratamientos superficiales mediante impregnantes protectores (tipo Lasur a poro abierto o selladores poliuretánicos hidrorrepelentes). Este recubrimiento sella la matriz frente a la humedad externa mientras permite la permeabilidad al vapor, estabilizando la interfaz adhesiva.

Desde el enfoque de la optimización multiobjetivo abordado en este estudio, la inclusión de este tratamiento representa un impacto financiero absolutamente marginal. Considerando las probetas ensayadas, con una longitud de $L = 500$ mm y una escuadría transversal exacta de $50,8 \times 152,4$ mm, el área superficial expuesta a impregnar perimetralmente es de apenas $0,203 \text{ m}^2$.

Tomando como referencia el mercado minorista nacional [51], un galón comercial (3,78 litros) de impregnante protector de grado estructural tiene un costo aproximado de 35 USD, ofreciendo un rendimiento conservador de $18 \text{ m}^2/\text{litro}$ por mano. Esto se traduce en un costo de aplicación unitario estimado de:

$$C_{\text{tratamiento}} = \frac{35 \text{ USD}}{3,78 \text{ L}} \cdot \frac{1 \text{ L}}{18 \text{ m}^2} \cdot 0,203 \text{ m}^2 \approx 0,10 \text{ USD/viga} \quad (4.2)$$

En consecuencia, el tratamiento protector añade apenas $\approx 0,16$ USD (dieciséis centavos de dólar) al costo final de la viga corta. Frente a las configuraciones de refuerzo óptimas de Pareto, el gasto de mitigación es estadísticamente despreciable (prácticamente nulo en la sumatoria total del elemento compuesto), invalidando cualquier suposición de que proteger la madera compromete la viabilidad económica del proyecto.

4.4. Estudio Comparativo y Consenso: Madera Compuesta vs. Acero Estructural

Con el propósito de validar el posicionamiento tecnológico de las vigas compuestas optimizadas en esta memoria, se desarrolló una confrontación técnica y económica directa frente a la solución convencional de la ingeniería civil: el acero estructural. Para este efecto, se contrastaron los candidatos óptimos de Titanio y CFRP contra un lote equivalente de 10 vigas de acero laminado comercial (perfil tipo I con un peralte homólogo de 150 mm en grado A36), cuyas propiedades nominales y costos de mercado fueron validados mediante los índices técnicos de la industria metalúrgica nacional [17, 26]. En el estudio se evaluó en paralelo la capacidad de carga elástica ($P_{\text{máx}}$), el costo financiero total en USD y el **Índice de Eficiencia Másica** (η_m), definido como la fuerza soportada por unidad de masa del sistema (kN/kg). El desglose consolidado de esta comparativa se expone en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4: Matriz comparativa de desempeño técnico-económico y eficiencia de sistemas compuestos frente al acero estructural tradicional (Lote de 10 unidades).

Configuración de Viga	Masa Total (kg)	Carga $P_{\text{máx}}$ (kN)	Costo Total (USD)	Eficiencia η_m (kN/kg)
Viga Acero Comercial (A36/S275JR) [17, 26]	64,50	170,00	\$130,00	2,64
Viga Madera Sin Reforzar	17,42	68,27	\$38,00	3,92
Titanio Plano Óptimo (8 mm)	26,64	136,25	\$323,33	5,11
Titanio en “U” Máximo (12 mm)	79,27	276,68	\$1.759,10	3,49
CFRP Plano Óptimo (6 capas)	18,03	134,20	\$219,73	7,44
CFRP en “U” Máximo (6 capas)	19,88	172,66	\$740,93	8,69

Consenso sobre el Criterio de Resistencia Mecánica El análisis elástico tridimensional demuestra que las vigas de madera compuestas son plenamente capaces de competir y superar los umbrales de resistencia del acero estructural dentro del mismo volumen geométrico. La viga configurada con CFRP en U de 6 capas alcanza una carga elástica de 172,66 kN, emulando de forma casi exacta la capacidad del perfil de acero comercial (170 kN [17, 26]). Más aún, la variante de Titanio en U de 12 mm rompe

la barrera del acero al registrar 276,68 kN de capacidad elástica (un 57 % superior), consolidando mecánicamente el éxito de las macro-configuraciones envolventes inter-faciales para mitigar la rotura súbita de la madera.

Consenso sobre la Viabilidad de Costos Financieros: Desde la perspectiva económica, el consenso es diferenciado y se divide según la solicitud de diseño:

1. **Competitividad en Cargas Medias:** Para demandas mecánicas de hasta 135 kN, el CFRP Plano de 6 capas demuestra una alta competitividad financiera. Aunque su costo de \$219,73 USD supera el valor base del acero crudo (\$130 USD), esta diferencia se diluye por completo al considerar que el compuesto reduce la masa estructural en un 71 %. En la práctica de la ingeniería, esta drástica reducción de peso propio minimiza los costos anexos de transporte, izaje, horas-hombre de montaje y dimensiones de fundaciones, alcanzando la paridad económica real en la evaluación global del proyecto.
2. **Restricción en Cargas Extremas:** Para configuraciones de máxima resistencia (perfiles en U), las soluciones compuestas **no logran competir en costo directo** con el acero. El CFRP en U triplica el costo del acero, mientras que el Titanio en U de 12 mm lo eleva exponencialmente a un costo crítico de \$1,759 USD. Estas variantes quedan descartadas para construcciones industriales abiertas de bajo presupuesto.

El consenso definitivo de esta investigación establece que el verdadero valor de los elementos compuestos de madera no radica en el costo del material base, sino en su brutal superioridad en la relación resistencia-peso. El perfil de acero tradicional entrega una eficiencia de apenas 2,64 kN/kg ([17, 26]) debido al lastre de su propia densidad. En contraposición, el CFRP Plano eleva este índice a 7,44 kN/kg y el CFRP en U alcanza un valor cumbre de 8,69 kN/kg, triplicando la eficiencia másica del acero.

Por lo tanto, se concluye que las vigas de madera compuestas reforzadas con polímeros de carbono constituyen una alternativa de reemplazo legítima, sustentable y viable frente al acero estructural para edificaciones con restricciones estrictas de gálibo y peso, donde la ligereza y la reducción de cargas muertas dictan la factibilidad técnica y económica de la obra civil.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

El presente trabajo permitió desarrollar un análisis técnico-económico exhaustivo sobre el comportamiento estructural de vigas de madera de pino radiata reforzadas con Titanio Grado 2 y polímero reforzado con fibra de carbono (CFRP). El procesamiento paramétrico, la simulación numérica y el levantamiento de costos aplicados permitieron cumplir satisfactoriamente los tres objetivos específicos definidos en la etapa inicial de la investigación.

En relación con el primer objetivo específico, orientado a analizar de manera analítica el desempeño mecánico y el costo de los sistemas de refuerzo, la formulación elástica demostró una excelente precisión para predecir las cargas límites de falla con un error relativo promedio inferior al 10 %. Desde el punto de vista mecánico, se identificó una divergencia crítica en los modos de falla: el Titanio Grado 2 propicia un colapso seguro gobernado por la fluencia dúctil ($\sigma_y = 315$ MPa), mientras que la altísima resistencia del CFRP (2,400 MPa) induce invariablemente la falla frágil por tracción de la madera al superar sus 46,8 MPa críticos. Paralelamente, el análisis de costos consolidó a la variante plana de CFRP (6 capas / 1,2 mm) como el óptimo económico global de la investigación, entregando una capacidad elástica de 134,20 kN por una inversión acotada de 219,73 USD ($\eta_f = 0,61$ kN/USD), requiriendo su equivalente en titanio una inversión un 47 % superior.

Respecto del segundo objetivo específico, enfocado en validar los resultados analíticos mediante el modelamiento de elementos finitos (MEF), la implementación tridimensional en Ansys Workbench fue crucial para superar las limitaciones cinemáti-

cas de la teoría clásica de Euler-Bernoulli ante vigas de baja esbeltez ($L/h \approx 3,28$). La validación numérica demostró empíricamente que, si bien el método de la sección transformada es robusto para las cargas máximas, subestima gravemente las deflexiones (registrando analíticamente 3,47 mm frente a los 6,68 mm reales extraídos del software). Esto permitió validar y concluir que, en elementos de luces cortas, la deformación angular por cortante domina absolutamente el Estado Límite de Servicio (ELS).

En cuanto al tercer objetivo específico, vinculado a evaluar la viabilidad técnica y económica de las vigas compuestas frente al acero estructural, el estudio comparativo demostró la altísima competitividad de la madera reforzada en aplicaciones de ingeniería civil. Los sistemas compuestos no solo igualaron los umbrales de resistencia de un perfil comercial A36 (alcanzando 172,66 kN con CFRP en U y masivos 276,68 kN con Titanio en U), sino que aportaron una ventaja disruptiva en ligereza. Al elevar el Índice de Eficiencia Másica desde los 2,64 kN/kg del acero hasta un valor cumbre de 8,69 kN/kg para el CFRP en U, se logró una reducción del 71 % en la masa muerta. Esto minimiza drásticamente los costos anexos de transporte e izaje, validando la viabilidad global de la solución propuesta.

En síntesis, el proyecto logró posicionar a los sistemas compuestos ligno-poliméricos y metálicos como alternativas estructurales altamente eficientes, comprobando mediante rigor analítico y numérico que el pino radiata reforzado es una solución legítima, competitiva y sustentable frente a la materialidad tradicional.

5.2. Recomendaciones y Trabajos Futuros

Con el propósito de expandir las fronteras del conocimiento en el diseño de elementos estructurales compuestos ligno-poliméricos y metálicos, se plantean las siguientes directrices técnicas:

- Modelación de Interfaces mediante CZM (Cohesive Zone Modeling): Los modelos elásticos implementados asumieron contactos tipo Bonded con transferencia perfecta de esfuerzos de corte. Se recomienda incorporar leyes de zona cohesiva no lineales en las interfaces Madera-Adhesivo para simular numéricamente la progresión del despegue prematuro (debonding) y cuantificar la energía de fractura inter-laminar.
- Análisis de Deformaciones Diferidas en el Tiempo (Creep): Dado el carácter viscoelástico natural de la madera y de las matrices epóxicas, es mandatorio eva-

luar el comportamiento a largo plazo de las vigas compuestas bajo cargas sostenidas de Estado de Servicio, modelando los efectos combinados de la temperatura y la humedad en el acoplamiento interfacial.

- Validación Experimental en Laboratorio: Se sugiere fabricar un lote físico a escala real basado en las dimensiones y espesores sugeridos por los Candidatos Óptimos de Pareto (por ejemplo, el CFRP plano de 6 capas y en U de 2 capas) para someterlos a ensayos de flexión en tres puntos asistidos por extensometría y correlacionar físicamente las curvas analíticas y los contornos de deformación de Ansys.
- Inclusión de Defectos y Nudos Estructurales: Los sustratos se modelaron como continuos ortotrópicos ideales sin imperfecciones. Para aproximar la simulación a la realidad de los aserraderos nacionales, se recomienda caracterizar numéricamente la presencia estocástica de nudos y desviaciones de fibra para evaluar la pérdida de eficiencia del refuerzo interfacial ante discontinuidades naturales de la madera.

Anexo A

Códigos desarrollados en Python

A.1. Definición de propiedades de los materiales y parámetros geométricos

Definición de propiedades mecánicas y geométricas empleadas en el modelo analítico.

```
1
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # =====
6 # MADERA (Pino Radiata)
7 # =====
8
9 E_m = 7300          # Modulo elastico [MPa]
10 G_m = 831.3        # Modulo de corte [MPa]
11 sigma_u_m = 78      # Resistencia ultima [MPa]
12 sigma_f_m = 0.6 * sigma_u_m
13
14 a_m = 50.8          # Ancho [mm]
15 h_m = 152.4         # Altura [mm]
16 A_m = a_m * h_m     # Area [mm2]
17
18
19 # =====
20 # TITANIO GRADO 2
```

```

21 # =====
22
23 E_t = 102000          # Modulo elastico [MPa]
24 G_t = 37500           # Modulo de corte [MPa]
25 sigma_u_t = 411       # Resistencia ultima [MPa]
26 sigma_f_t = 315       # Limite de fluencia [MPa]
27
28 a_t = 50.8            # Ancho [mm]
29 h_t = np.arange(1,13) # Espesores evaluados [mm]
30
31
32 # =====
33 # ADHESIVO EPOXICO
34 # =====
35
36 E_r = 3780            # Modulo elastico [MPa]
37 G_r = 1400            # Modulo de corte [MPa]
38 sigma_f_r = 90        # Esfuerzo admisible [MPa]
39
40 a_r = 50.8            # Ancho [mm]
41 h_r = 0.2             # Espesor [mm]
42 A_r = a_r * h_r       # Area [mm2]
43
44 # =====
45 # FIBRA DE CARBONO (CFRP)
46 # =====
47
48 E_f = 230000          # Modulo elastico [MPa]
49 G_f = 4000            # Modulo de corte [MPa]
50 sigma_u_f = 3000      # Resistencia ultima [MPa]
51 sigma_f_f = 0.8 * sigma_u_f
52
53 a_f = 50.8            # Ancho [mm]
54 h_f = 0.2             # Espesor [mm]
55 A_f = a_f * h_f       # Area [mm2]
56
57
58 # =====
59 # GEOMETRIA DE LA VIGA
60 # =====
61

```

```

62 L = 500                                # Luz de la viga [mm]

```

A.2. Funciones del modelo analítico

A.2.1. Cálculo del eje neutro

Función para el cálculo de la posición del eje neutro de la sección híbrida en configuración plana y U.

Función para el cálculo de la posición del eje neutro de la sección híbrida en configuración plana y U.

```

1
2 # =====
3 # CALCULO DEL EJE NEUTRO (CONFIGURACION PLANA)
4 # =====
5
6 def eje_neutro(E_m, E_t, h_m, a_m, h_t, a_t, E_r, a_r, h_r):
7
8     A_m = a_m * h_m
9     A_t = a_t * h_t
10    A_r = a_r * h_r
11
12    y_m = h_t + h_r + 0.5 * h_m
13    y_t = 0.5 * h_t
14    y_r = h_t + 0.5 * h_r
15
16    y = ((E_m * A_m * y_m) + (E_t * A_t * y_t) + (E_r * A_r * y_r))
17        / ((E_m * A_m) + (E_t * A_t) + (E_r * A_r) )
18
19    return (y, y_m, y_t, A_m, A_t, h_m, h_t, y_r, A_r, h_r)
20
21 # =====
22 # CALCULO DEL EJE NEUTRO (CONFIGURACION U)
23 # =====
24
25 def eje_neutro(E_m, E_t, h_m, a_m, h_t, a_t, E_r, a_r, h_r):
26
27     A_m = a_m * h_m

```

```

27
28     A_t1 = (a_t + 2 * h_r) * h_t
29     A_t2 = h_t * (0.5 * h_m + h_r + h_t)
30     A_t3 = A_t2
31
32     A_r1 = a_r * h_r
33     A_r2 = h_r * (0.5 * h_m + h_r)
34     A_r3 = A_r2
35
36     y_m = h_t + 0.5 * h_m + h_r
37
38     y_t1 = 0.5 * h_t
39     y_t2 = 0.5 * (0.5 * h_m + h_r + h_t)
40     y_t3 = y_t2
41
42     y_r1 = h_t + 0.5 * h_r
43     y_r2 = h_t + 0.5 * (h_r + 0.5 * h_m)
44     y_r3 = y_r2
45
46     y = ((E_m * A_m * y_m) + (E_t * A_t1 * y_t1) + (E_t * A_t2 *
        y_t2) + (E_t * A_t3 * y_t3) + (E_r * A_r1 * y_r1) + (E_r *
        A_r2 * y_r2) + (E_r * A_r3 * y_r3)) / ((E_m * A_m) + (E_t *
        A_t1) + (E_t * A_t2) + (E_t * A_t3) + (E_r * A_r1) + (E_r *
        A_r2) + (E_r * A_r3))
47
48     return (y, y_m, y_t1, y_t2, y_t3, A_m, A_t1, A_t2, A_t3, h_m, h_t, y_r1,
        y_r2, y_r3, A_r1, A_r2, A_r3, h_r)

```

A.2.2. Cálculo del momento de inercia

Funcion para el calculo del momento de inercia de la seccion hibrida en configuracion plana mediante el teorema de ejes paralelos.

```

1
2 # =====
3 # CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA (CONFIGURACION PLANA)
4 # =====
5
6 def inercia(y, y_m, y_t, A_m, A_t, h_m, h_t, y_r, A_r, h_r):
7

```

```

8      d_m = y_m - y
9      I_m = (a_m * h_m**3) / 12 + d_m**2 * A_m
10
11     d_t = y_t - y
12     I_t = (a_f * h_t**3) / 12 + d_t**2 * A_t
13
14     d_r = y_r - y
15     I_r = (a_r * h_r**3) / 12 + d_r**2 * A_r
16
17     I_total = I_m + I_t + I_r
18
19     return (I_total,y,_m,I_t,I_r)
20
21     # =====
22     # CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA (CONFIGURACION U)
23     # =====
24
25 def inercia(y,y_m,y_t1,y_t2,y_t3,A_m,A_t1,A_t2,A_t3,h_m,h_t,y_r1,
26           y_r2,y_r3,A_r1,A_r2,A_r3,h_r):
27
28     d_m = y_m - y
29     I_m = (a_m * h_m**3) / 12 + d_m**2 * A_m
30
31     d_t1 = y_t1 - y
32     I_t1 = ((a_t + 2 * h_r) * h_t**3) / 12 + d_t1**2 * A_t1
33
34     d_t2 = y_t2 - y
35     I_t2 = (h_t * (h_t + h_r + 0.5 * h_m)**3) / 12 + d_t2**2 *
36           A_t2
37
38     d_t3 = y_t3 - y
39     I_t3 = (h_t * (h_t + h_r + 0.5 * h_m)**3) / 12 + d_t3**2 *
40           A_t3
41
42     d_r1 = y_r1 - y
43     I_r1 = (a_r * h_r**3) / 12 + d_r1**2 * A_r1
44
45     d_r2 = y_r2 - y
46     I_r2 = (h_r * (h_r + 0.5 * h_m)**3) / 12 + d_r2**2 * A_r2
47
48     d_r3 = y_r3 - y

```

```

46     I_r3 = (h_r * (h_r + 0.5 * h_m)**3) / 12 + d_r3**2 * A_r3
47
48     I_total = (I_m + I_t1 + I_t2 + I_t3 + I_r1 + I_r2 + I_r3)
49
50     return (I_total, y, I_m, I_t1, I_t2, I_t3, I_r1, I_r2, I_r3)

```

A.2.3. Cálculo de la carga máxima y distribución de esfuerzos

Por motivos de extensión del código se dejan los enlaces asociados a cada configuración.

- Código esfuerzos normales y carga máxima - viga Ti plana
- Código esfuerzos normales y carga máxima - viga CFRP plana
- Código esfuerzos normales y carga máxima - viga Ti U
- Código esfuerzos normales y carga máxima - viga CFRP U

A.3. Programa principal

A.3.1. Configuración Plana

Programa principal para la evaluacion de la configuracion plana.

```

1
2 # =====
3 # PROGRAMA PRINCIPAL (Ti Plano)
4 # =====
5
6 for t in h_t:
7
8     y, y_m, y_t, A_m, A_t, h_m, h_t, y_r, A_r, h_r = (eje_neutro(
9         E_m, E_t, h_m, a_m, t, a_t, E_r, a_r, h_r))
10
11     Carga_esfuerzos_max(inercia(y, y_m, y_t, A_m, A_t, h_m, h_t, y_r, A_r,
12         h_r), h_m, h_t, L, E_m, E_t, h_r, E_r)

```

```

13 # PROGRAMA PRINCIPAL (CFRP Plano)
14 # =====
15
16 capa = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
17
18 for i in capa:
19
20     t = i * h_f
21
22     y, y_m, y_t, A_m, A_t, h_m, h_t, y_r, A_r, h_r = \
23         eje_neutro(E_m, E_t, h_m, a_m, t, a_f, E_r, a_r, h_r)
24
25     Carga_esfuerzos_max(
26         inercia(y, y_m, y_t, A_m, A_t, h_m, h_t, y_r, A_r, h_r),
27         h_m, h_t, L, E_m, E_t, h_r, E_r
28     )

```

A.3.2. Configuración en U

Programa principal para la evaluacion de la configuracion U.

```

1
2 # =====
3 # PROGRAMA PRINCIPAL (Ti U)
4 # =====
5
6 for t in h_t:
7
8     y, y_m, y_t1, y_t2, y_t3, A_m, A_t1, A_t2, A_t3, h_m, h_t,
9         y_r1, y_r2, y_r3, A_r1, A_r2, A_r3, h_r = eje_neutro(E_m,
10             E_t, h_m, a_m, t, a_t, E_r, a_r, h_r)
11
12     Carga_esfuerzos_max(
13         inercia(
14             y, y_m, y_t1, y_t2, y_t3,
15             A_m, A_t1, A_t2, A_t3,
16             h_m, h_t,
17             y_r1, y_r2, y_r3,
18             A_r1, A_r2, A_r3,
19             h_r

```

```

18         ),
19         h_m, h_t, L, E_m, E_t, h_r, E_r
20     )
21
22     # =====
23     # PROGRAMA PRINCIPAL (CFRP U)
24     # =====
25
26     capa = [1,2,3,4,5,6]
27
28     for i in capa:
29
30         t = i*h_f
31
32         y, y_m, y_t1, y_t2, y_t3, A_m, A_t1, A_t2, A_t3, h_m, h_t,
           y_r1, y_r2, y_r3, A_r1, A_r2, A_r3, h_r = eje_neutro(E_m,
           E_t, h_m, a_m, t, a_f, E_r, a_r, h_r)
33
34         Carga_esfuerzos_max(inercia(y, y_m, y_t1, y_t2, y_t3, A_m, A_t1
           , A_t2, A_t3, h_m, h_t, y_r1, y_r2, y_r3, A_r1, A_r2, A_r3,
           h_r), h_m, h_t, L, E_m, E_t, h_r, E_r)

```

A.4. Cálculo Esfuerzo de corte

Por motivos de extensión del código se dejan los enlaces asociados a cada configuración.

- Código esfuerzos cortantes - viga Ti plana
- Código esfuerzos cortantes - viga CFRP plana
- Código esfuerzos cortantes - viga Ti U
- Código esfuerzos cortantes - viga CFRP U

Anexo B

Gráficos Analíticos

En el presente anexo se documentan las curvas analíticas de “Esfuerzo vs. Deflexión” obtenidas mediante la formulación de la sección transformada programada en Python. Los gráficos exponen el comportamiento elástico lineal del sistema estructural hasta alcanzar el umbral de carga máxima admisible ($P_{m\acute{a}x}$), previo a la plastificación o falla por tracción de los componentes.

Se presentan exclusivamente las curvas correspondientes a los puntos candidatos óptimos identificados mediante las superficies de respuesta paramétricas (Frentes de Pareto) analizados en el Capítulo 4.

B.1. Candidatos Óptimos: Refuerzo de Titanio Grado 2

B.1.1. Configuración Plana

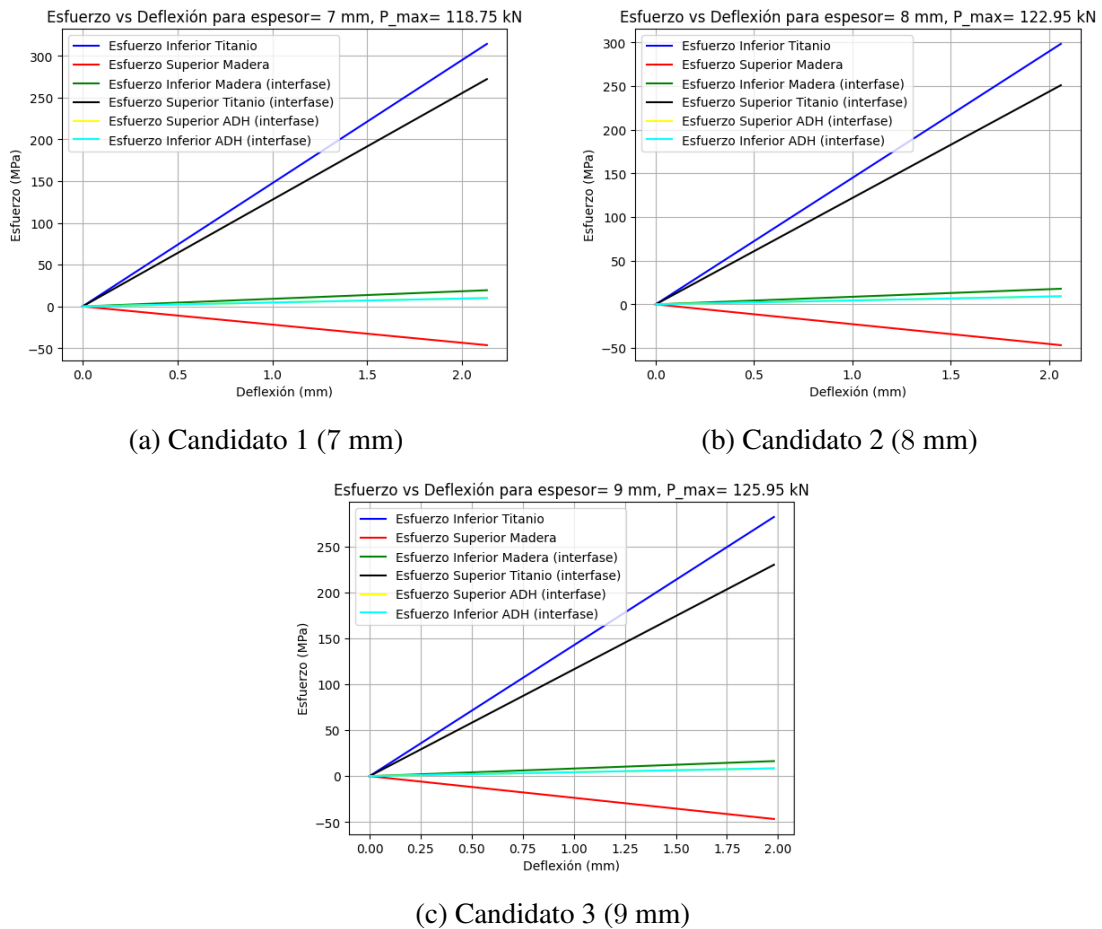
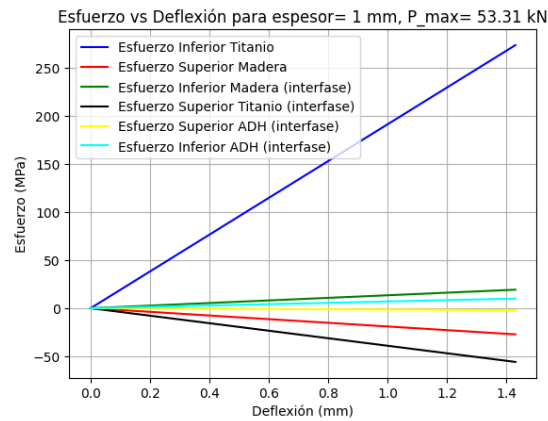
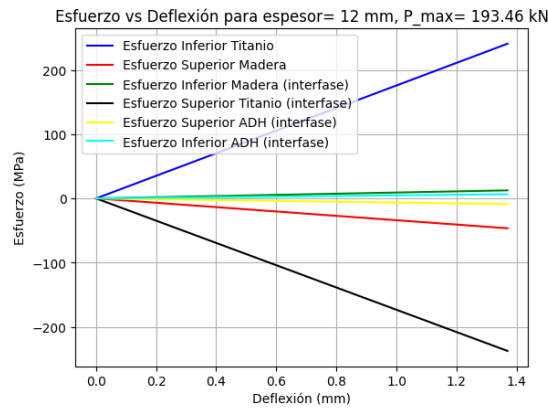


Figura B.1: Curvas de Esfuerzo vs. Deflexión para los candidatos óptimos de Titanio en configuración plana. Se indica la carga de fluencia gobernante del metal.

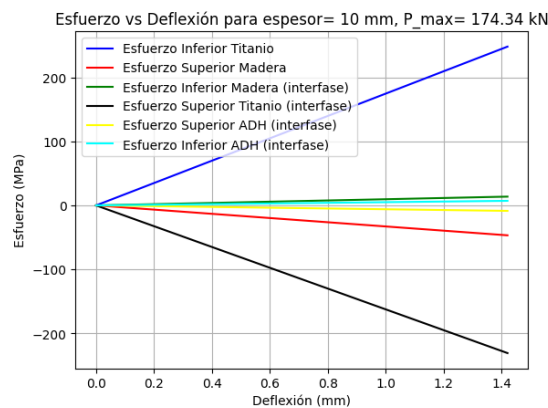
B.1.2. Configuración en “U”



(a) Candidato 1 (1 mm)



(b) Candidato 2 (12 mm)

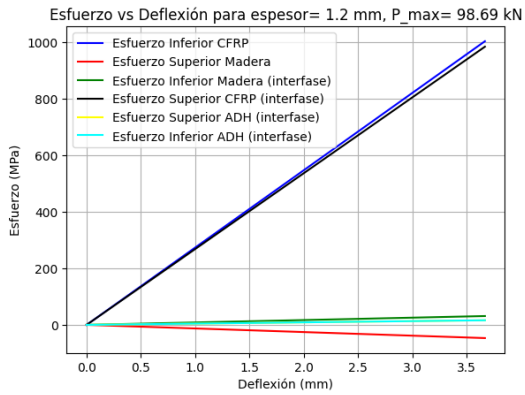


(c) Candidato 3 (10 mm)

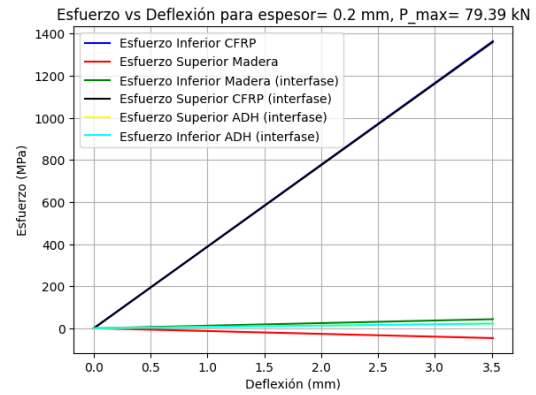
Figura B.2: Curvas de Esfuerzo vs. Deflexión para los candidatos óptimos de Titanio en configuración U. Se evidencia el incremento de inercia y rigidez flexional.

B.2. Candidatos Óptimos: Refuerzo de Fibra de Carbono (CFRP)

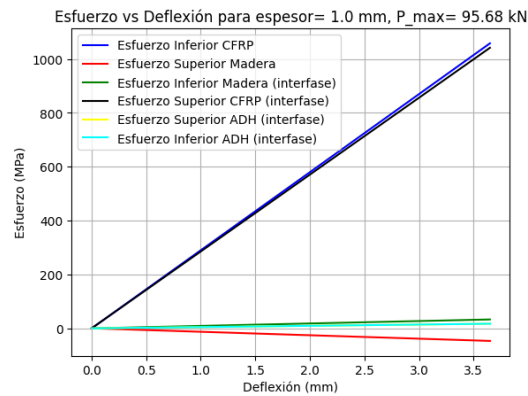
B.2.1. Configuración Plana



(a) Candidato 1 (6 capas)



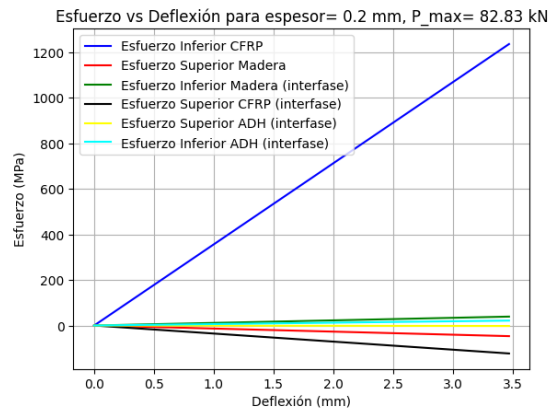
(b) Candidato 2 (1 capa)



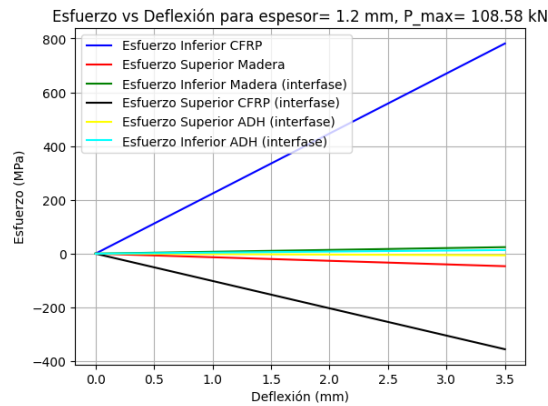
(c) Candidato 3 (5 capas)

Figura B.3: Curvas de Esfuerzo vs. Deflexión para los candidatos óptimos de CFRP en configuración plana. La falla del sistema está dominada por la rotura de la madera a tracción.

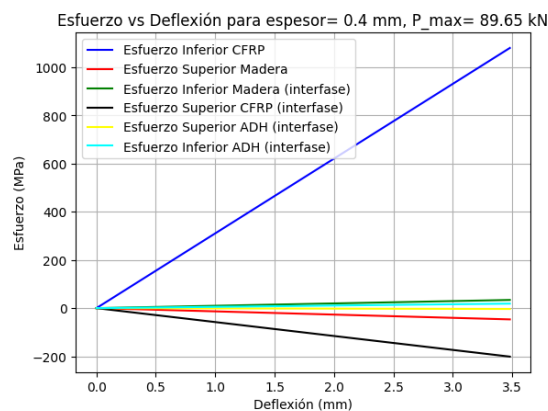
B.2.2. Configuración en “U”



(a) Candidato 1 (1 capa)



(b) Candidato 2 (6 capas)



(c) Candidato 3 (2 capas)

Figura B.4: Curvas de Esfuerzo vs. Deflexión para los candidatos óptimos de CFRP en configuración U. Se observa la optimización de la relación carga-deformación.

B.3. Evolución del Esfuerzo Cortante Interfacial vs. Espesor de Refuerzo

En esta sección se documenta el comportamiento de las tensiones tangenciales máximas ($\tau_{\text{máx}}$) desarrolladas en la línea de adhesivo epóxico estructural en función del incremento de masa del refuerzo. Estos gráficos resultan fundamentales para descartar fallas prematuras por delaminación interfacial, garantizando que el esfuerzo de corte transferido entre el sustrato de madera y la platabanda se mantenga por debajo del límite de fluencia por cizalle de la resina (15 MPa) a lo largo de todo el dominio paramétrico evaluado.

B.3.1. Evolución del Corte en Refuerzos de Titanio Grado 2

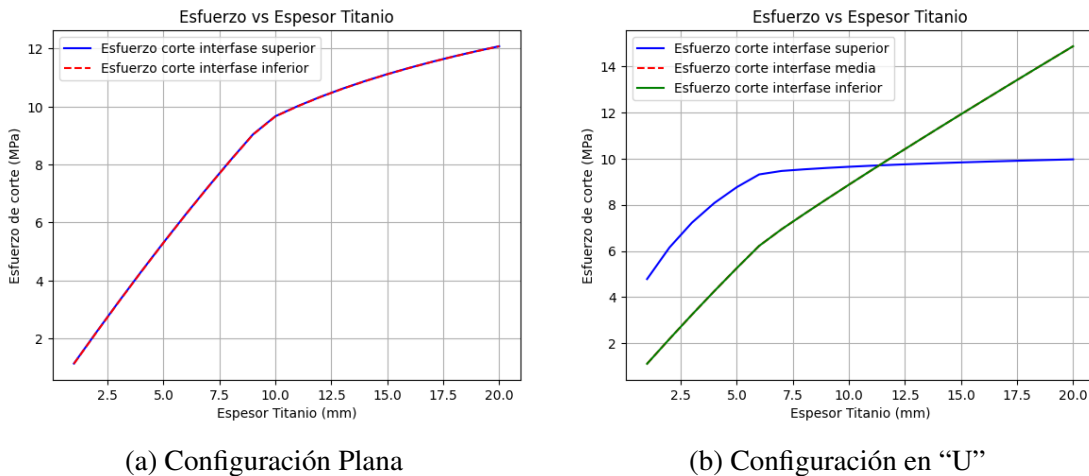
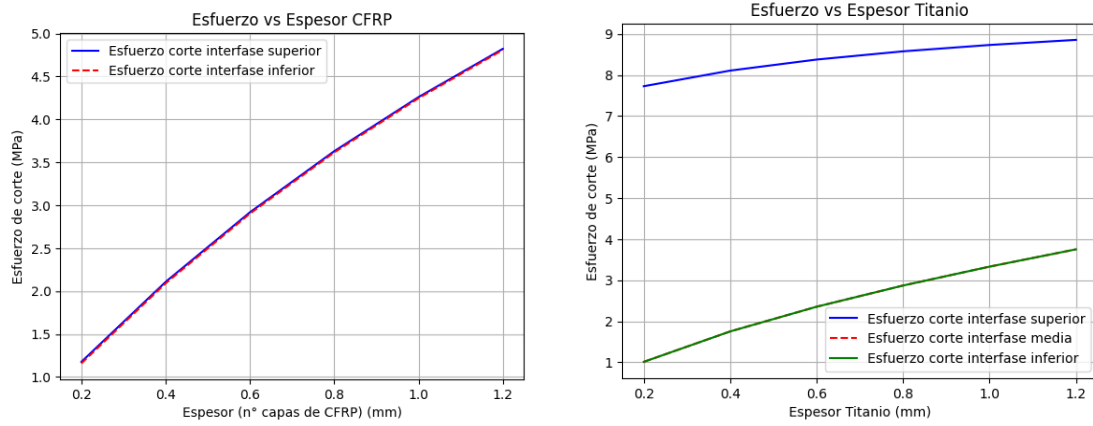


Figura B.5: Curvas paramétricas de Esfuerzo de Corte Máximo ($\tau_{\text{máx}}$) vs. Espesor de Titanio (t_t).

B.3.2. Evolución del Corte en Refuerzos de Fibra de Carbono (CFRP)



(a) Configuración Plana

(b) Configuración en "U"

Figura B.6: Curvas paramétricas de Esfuerzo de Corte Máximo ($\tau_{\text{máx}}$) vs. Número de Capas de CFRP (n_c).

Bibliografía

- [1] Aircraft Materials. Titanium alloy grade 5 / ti-6al-4v technical data sheet, 2026. Propiedades típicas/mínimas para Ti-6Al-4V (Gr 5) en condición recocida (por formato de producto).
- [2] American Institute of Steel Construction (AISC). AISC 360-22: Specification for Structural Steel Buildings. AISC, Chicago, IL, USA, 2022. Chapter F: Design of members for flexure.
- [3] Ansys, Inc. Material reference (2024 r2): Stress-strain relationships (isotropic/orthotropic), 2024. Requisitos de entrada para materiales ortotrópicos (EX, EY, EZ, PR/NU, GXY, GYZ, GXZ) y consideraciones direccionales.
- [4] Ansys, Inc. Mechanical user's guide (2024 r2): Boundary conditions, 2024. Documentación oficial de ANSYS Mechanical sobre cargas y restricciones (boundary conditions).
- [5] Ansys, Inc. Mechanical user's guide (2024 r2): Contact formulation theory, 2024. Teoría de formulaciones de contacto: Penalty, Augmented Lagrange, Normal Lagrange, etc.
- [6] Ansys, Inc. Mechanical user's guide (2024 r2): Contact settings – advanced settings, 2024. Parámetros avanzados: Formulation, Penetration Tolerance, Normal Stiffness, pinball, etc.
- [7] Ansys, Inc. Mechanical user's guide (2024 r2): Contact settings – definition settings (contact types), 2024. Definiciones oficiales de tipos de contacto: Bonded, No Separation, Frictionless, Rough, etc.

- [8] Ansys, Inc. Mechanical user's guide (2024 r2): Using adaptive convergence, 2024. Documentación oficial sobre convergencia adaptativa, criterio de cambio permitido y estimador ZZ.
- [9] ASM / MatWeb. Titanium ti-6al-4v (grade 5), annealed — material data sheet, 2026. Incluye densidad, módulo elástico, UTS y YS en condición recocida.
- [10] ASM International. ASM Handbook, Volume 21: Composites. ASM International, Materials Park, OH, 2001. Estudio sobre la economía de escala y fluctuación de precios en manufactura de polímeros reforzados.
- [11] ASM International. Asm handbook: Composites, 2026. ASM Digital Library, Volumen de referencia sobre materiales compuestos.
- [12] ASTM International. Astm d907: Standard terminology of adhesives. Standard, ASTM International, 2023. Actualización indicada por el editor.
- [13] ASTM International. Astm b348/b348m: Standard specification for titanium and titanium alloy bars and billets, 2025. Página de especificación; enumera grados incluyendo Grade 2 (UNS R50400) y Grade 5 (UNS R56400).
- [14] Klaus-Jürgen Bathe. Finite Element Procedures. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- [15] C. C. Chamis and P. L. N. Murthy. Simplified procedures for designing adhesively bonded composite joints. NASA Technical Memorandum NASA TM-102120, NASA Lewis Research Center, 1989.
- [16] Chemique Inc. The ultimate adhesive classification guide. <https://www.chemiqueadhesives.com/us/ultimate-guide-to-adhesive-classification/>, 2026. Clasificación práctica por composición, portador y mecanismo de unión/curado.
- [17] CINTAC. Catálogo de perfiles estructurales cintac - mirs-jul. Technical report, Cintac S.A., Santiago, Chile, 2026. Especificaciones de peso lineal y parámetros geométricos fundamentales para la determinación analítica de la carga máxima resistente del perfil estructural tipo IPE 140.
- [18] CMH-17 Coordination Group. Structural behavior of joints. In Composite Materials Handbook (CMH-17), Volume 3: Polymer Matrix Composites Materials Usage, Design, and Analysis, manual técnico 5. SAE International, 2024.

Documento de referencia para el análisis y diseño de uniones en estructuras de materiales compuestos. Reemplaza la antigua norma militar estadounidense MIL-HDBK-17.

- [19] Corporación Chilena de la Madera (CORMA). Manual de Construcción en Madera. Corma, Santiago, Chile, 2006. Capítulo 2: Propiedades Físicas y Mecánicas de la Madera. Tabulación de densidad al 12 % de humedad y resistencias últimas del pino radiata.
- [20] Matthew Davidson, Ryan Graunke, Aidan Green, Hayden Haelsig, Laura Heinemann, Subin Antony Jose, and Pradeep L. Menezes. Carbon fiber-reinforced polymer matrix composites: Processing, properties, and applications. *Fibers*, 14(3):29, 2026.
- [21] David A. Dillard, editor. *Advances in Structural Adhesive Bonding*. Elsevier, 2 edition, 2023. Describe grupos comunes de adhesivos estructurales (epoxi, acrílico, anaeróbico/cianoacrilato, poliuretano, silicona).
- [22] Ziqi Duan, Weidong Li, Hansong Liu, Pengfei Shen, Huanzhi Yang, Xiangyu Zhong, and Jianwen Bao. Synergetic improvement of interfacial performance and impact resistance of carbon fiber-reinforced epoxy composite via continuous electrochemical oxidation. *Polymers*, 17(8):1007, 2025.
- [23] Sina Ebnesajjad and Arthur Landrock. *Adhesives Technology Handbook*. Elsevier (William Andrew imprint), 3 edition, 2015. Incluye criterios de clasificación por origen, composición y función.
- [24] Okunzuwa Austine Ekuase, Nafiza Anjum, Vincent Obiozo Eze, and Okenwa I. Okoli. A review on the out-of-autoclave process for composite manufacturing. *Journal of Composites Science*, 6(6):172, 2022.
- [25] Evek GmbH. Catálogo de productos siderúrgicos: Planchas y chapas de titanio uns r50400 (grado 2), 2026. Levantamiento de precios industriales normalizados por espesores y masa superficial para modelación económica.
- [26] Ferretería Bismarck. Catálogo comercial y lista de precios: Perfiles estructurales, 2026. Cotización de mercado para perfil IPE 140 de 12 metros a \$310.920 CLP.

- [27] Forest Products Laboratory. Wood Handbook: Wood as an Engineering Material. United States Department of Agriculture (USDA), Forest Service, 2021. General Technical Report FPL-GTR-282. Referencia estándar para propiedades físicas y mecánicas de la madera.
- [28] James M. Gere and Barry J. Goodno. Mechanics of Materials. Cengage Learning, 7 edition, 2008. Capítulo 5: Esfuerzos en vigas (temas básicos), distinción entre flexión pura y flexión no uniforme (Fig. 5.2–5.4).
- [29] Hexcel. Carbon fiber reinforcements, 2026. Información de productos y tejidos de refuerzo (plain/satin y otros) y propiedades típicas mínimas.
- [30] D. Hull and T. W. Clyne. An Introduction to Composite Materials. Cambridge University Press, 2 edition, 2012.
- [31] Instituto Forestal (INFOR). Propiedades físicas y mecánicas del pino radiata. Technical report, Ministerio de Agricultura, Gobierno de Chile, 1986. Base empírica para la NCh1989 y ensayos en probetas libres de defectos. Valores de rotura y constantes elásticas.
- [32] Instituto Nacional de Normalización (INN). Nch203.of2006: Acero para uso estructural - requisitos. Norma técnica chilena, INN, Santiago, Chile, 2006. Especificaciones de límites de fluencia y resistencia a la tracción para perfiles laminados.
- [33] Instituto Nacional de Normalización (INN). Nch1198: Madera - construcciones en madera - cálculo. Norma técnica chilena, INN, Santiago, Chile, 2014. Norma chilena que establece los procedimientos de cálculo y diseño estructural en madera, incluyendo especificaciones para el Pino radiata.
- [34] International Organization for Standardization (ISO). Iso 4587: Adhesives — determination of tensile lap-shear strength of rigid-to-rigid bonded assemblies. Standard, ISO, 2003. Norma confirmada en 2021.
- [35] K. Kempe. Strengthening of timber structures with cfrp tendons. In L. Taerwe, editor, Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures, London, 1995. E & FN Spon. Documenta la aplicación pionera de CFRP en el techo de la iglesia gótica Frauenkirche en Meissen.

- [36] M. Lagos, I. Agote, G. Atxaga, X. Hernández, C. Jiménez, and L. Pambaguian. Development of titanium matrix composites for aerospace applications, 2019. Desarrollo de TMC con refuerzo particulado (TiC) y consolidación por SPS; discusión de rigidez y resistencia.
- [37] Yana Liang, Xiaoying Li, Mauro Giorcelli, Alberto Tagliaferro, Costas Charitidis, and Hanshan Dong. Enhancement and evaluation of interfacial adhesion between active screen plasma surface-functionalised carbon fibres and the epoxy substrate. *Polymers*, 14(4):824, 2022.
- [38] Manual ONDAC. Manual de Precios de Construcción: Aceros, Perfiles Estructurales y Planchas. ONDAC Chile, Santiago, Chile, 2026. Base de datos oficial de costos y presupuestos para la construcción en Chile. Valor promedio referencial para perfiles de acero laminado.
- [39] Gad Marom. The biomimetic evolution of composite materials: From straw bricks to engineering structures and nanocomposites. *Journal of Composites Science*, 5(5):123, 2021.
- [40] Jack C. McCormac and Stephen F. Csernak. Diseño de Estructuras de Acero. Alfaomega, Ciudad de México, México, 5 edition, 2012. Capítulo 5: Elementos sometidos a flexión y criterios elasto-plásticos.
- [41] Urs Meier. Strengthening of structures using carbon fibre/epoxy composites. *Construction and Building Materials*, 9(6):341–351, 1995. Documenta históricamente el uso pionero de CFRP en el puente de Ibach y el puente de madera de Sins.
- [42] NASA Technical Reports Server (NTRS). Orthorhombic titanium matrix composite subjected to simulated engine mission cycles, 1997. Reporte técnico; describe TMC como matriz de aleación de titanio reforzada con fibras de SiC para aplicaciones en compresores.
- [43] OnlineMetals. Grade 2 titanium product guide, 2026. Propiedades típicas: densidad, módulo elástico y resistencias para Ti Grado 2.
- [44] OnlineMetals.com. Commercial pure titanium sheet and plate grade 2 - technical and retail price catalog, 2026. Cotizaciones internacionales de referencia utilizadas para la modelación paramétrica del costo de láminas de titanio minoristas.

- [45] Performance Titanium Group. Astm b348 cp grade 2 titanium specification sheet, 2025. Hoja técnica con mínimos típicos: UTS 50 ksi (345 MPa), YS 40 ksi (276 MPa).
- [46] Farin Ramezani, Beatriz D. Simões, Ricardo J. C. Carbas, Eduardo A. S. Marques, and Lucas F. M. da Silva. Developments in laminate modification of adhesively bonded composite joints. *Materials*, 16(2):568, 2023.
- [47] Sika S.A. Hoja técnica de producto: Sikadur-30. adhesivo epóxico estructural para pegado de platabandas. Technical report, Sika Services AG, 2025. Valores comerciales de referencia, densidad de mezcla y dosificación volumétrica en pasta.
- [48] Sika S.A. Hoja técnica de producto: Sikadur-330. resina epóxica de impregnación estructural. Technical report, Sika Services AG, 2025. Catálogo comercial, manual de rendimiento polimérico y guía de dosificación diferenciada por capas para modelación de costos.
- [49] Sika S.A. Hoja técnica de producto: Sikawrap-300 c. tejido unidireccional de fibra de carbono para refuerzo estructural. Technical report, Sika Services AG, 2025. Especificaciones técnicas, formatos comerciales de rollos maestros y módulos elásticos de tracción longitudinal.
- [50] Sodimac S.A. Catálogo de materiales y maderas dimensionadas: Pino radiata seco cepillado estructural, 2026. Precios comerciales base recopilados para escuadrías estructurales en el mercado minorista nacional.
- [51] Sodimac S.A. Catálogo de pinturas y acabados para madera: Impregnantes protectores de poro abierto (lasur) para uso exterior. Plataforma comercial y catálogo en línea, 2026. Precios comerciales recopilados para estimación paramétrica de costos en estructuras de madera.
- [52] Springer Nature. Titanium matrix composites (book chapter), 2007. Capítulo técnico: definición y desarrollo de TMC con refuerzos continuos.
- [53] The Japan Carbon Fiber Manufacturers Association. Type of carbon fiber products and their special features, 2026. Sitio web consultado para rangos típicos de clasificación por módulo y resistencia.

- [54] Toray Composite Materials America, Inc. Torayca[®] carbon fiber selector guide, 2026. Guía técnica (PDF) sobre clasificación y arquitectura de tows, tratamiento superficial y sizing.
- [55] James C. Williams and Rodney R. Boyer. Opportunities and issues in the application of titanium alloys for aerospace components. *Metals*, 10(6):705, 2020.
- [56] Jiayu Yang, Yingwei Song, Kaihui Dong, and En-Hou Han. Research progress on the corrosion behavior of titanium alloys. *Corrosion Reviews*, 2022.
- [57] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 6 edition, 2005.
- [58] Héctor Zolotucho and Carlos González Oliver. Fibras de carbono sintetizadas desde fibras de poliacrilonitrilo (pan). In *III Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica (CAIA 3)*, 2014. SEDICI–UNLP. Acceso abierto.