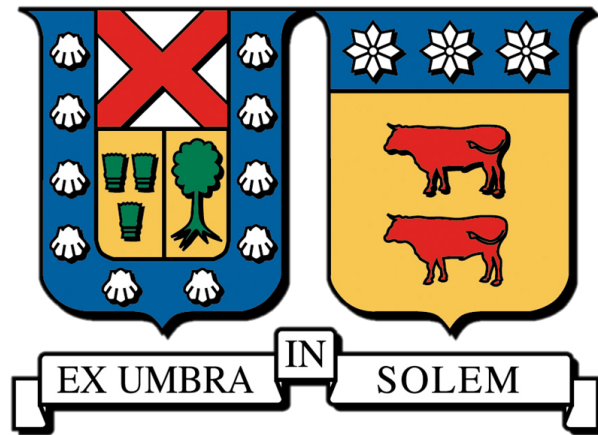




Transporte electrónico y formación de estados ligados en el continuo a través de un anillo AB-Rashba con impurezas

Miguel Ángel Figueroa Villegas

Director de tesis: Pedro Orellana D.
Codirector de tesis: Vladimir Juričić

Tesis Licenciatura en Ciencias Mención Física

Universidad Técnica Federico Santa María

Agradecimientos

A mis profesores guías, Dr. Pedro Orellana y Dr. Vladimir Juričić, por su paciencia, el conocimiento entregado y por permitirme conocer de cerca la labor de un científico.

A mis amigos y compañeros, los cuales me han acompañado en este proceso.

Agradecer en particular a mi familia, a mi padre y mi madre, mis grandes fuentes de inspiración, a quienes amo y admiro. También a mis hermanos y mi sobrino, por alegrar infinitamente mi vida y por su comprensión cuando no podía jugar con ellos al dedicarme a esta investigación.

Finalmente, agradecer al proyecto Fondecyt 1201876 por financiar este trabajo.

Resumen

El transporte electrónico a través de un anillo acoplado tangencialmente a un canal unidimensional en presencia de un campo magnético y eléctrico transversal e impurezas elásticas localizadas es investigado. Aplicando el formalismo de Landauer derivamos expresiones analíticas de la conductancia para un número generalizado de impurezas distribuidas simétricamente. Se ha encontrado que para esta configuración la transmisión es máxima cuando las energías son las correspondientes al anillo desacoplado, mientras que el mínimo ocurre para cuando ondas estacionarias se forman con respecto al acople. Además, reportamos la formación de resonancias Fano y su colapso, el cual se asocia a estados ligados en el continuo incluso para las configuraciones simétricas más simples. Sugerimos que este fenómeno puede ocurrir mientras existan estados protegidos asociados a ciertos comportamientos del transporte. Finalmente discutimos su posible aplicación como filtro de espín junto a las limitaciones del modelo.

Índice general

1. Introducción	1
2. Fundamentos teóricos	3
2.1. Transporte electrónico: Formalismo de Landauer	3
2.1.1. Conductor balístico perfecto	3
2.1.2. Fórmula de Landauer	6
2.2. Efecto Aharonov-Bohm	7
2.3. Interacción espín-órbita de Rashba	9
2.4. Resonancias Fano	9
2.5. Estados ligados en el continuo	11
3. Modelo	13
3.1. Funciones de onda y condiciones de borde	15
3.2. Resolución	16
4. Resultados y análisis	19
4.1. Efectos de la geometría e impurezas	19
4.2. Efectos AB-RSOI	26
5. Discusión	33
6. Conclusión	35
Referencias	37

Índice de figuras

2.1.	Conductor balístico estrecho de largo L acoplado a dos contactos amplios que sirven como reservorios a potencial electroquímico μ_1 y μ_2 . Sobre el conductor, los estados que viajan hacia la derecha ($+k$) llegan al contacto opuesto sin reflejarse, de igual manera que los estados viajeros hacia la izquierda ($-k$).	4
2.2.	Conductor con una probabilidad de transmisión T (representado por el cuadrado medio) acoplado a los contactos a través de dos uniones.	6
2.3.	Ilustración esquemática de la dispersión a través de un anillo de radio a de dos caminos con un solenoide infinito de radio b en su centro.	8
2.4.	Perfil Fano normalizado por un factor $1/(1+q^2)$ para distintos valores de q con $\Gamma = 1$	10
3.1.	Esquema de un anillo mesoscópico con impurezas (círculos negros) acoplados a un canal unidimensional con un flujo Aharonov-Bohm y un campo de Rashba a través del centro del anillo. Ondas planas inciden desde la izquierda, siendo reflejadas y transmitidas sobre el canal. Orientación del acople se indica mediante el ángulo θ según la última impureza medida en sentido horario	14
3.2.	Esquema de resolución mediante matriz de transferencia que incluye todas las rupturas de fase debido a las impurezas locales en el anillo.	16
4.1.	Gráfica de conductancia en función de ka . Comportamiento oscilatorio entre el mínimo nulo y el doble del cuanto de conductancia al ser la transmisión de ambas polarizaciones iguales $G = (2e^2/h)T$	20
4.2.	Gráfica de conductancia en función de ka para (a) tres, (b) ocho y (c) quince impurezas. En todos los casos se considera una magnitud de potencial $V_0 = 8[\hbar^2/m^*a^2]$ y una simetría axial $\theta = \Delta\phi/2$	22
4.3.	Gráfica de conductancia en función de ka para una impureza con $V_0 = 1[\hbar^2/m^*a^2]$ cuando la configuración tiene simetría axial $\theta_0 = \Delta\phi/2$ y un desplazamiento $\theta = \theta_0 - \Delta/2$ con $\Delta = 0.05\pi$. Ambas curvas se muestran como comparativa en torno a $ka = 1$, donde para la configuración desplazada muestra un perfil asimétrico.	24
4.4.	Gráfica de conductancia en función de ka para (a) una, (b) ocho y (c) quince impurezas con un potencial $V_0 = 1[\hbar^2/m^*a^2]$ cuando la configuración tiene un desplazamiento $\Delta = 0.1/N$ (curva continua) y cuando se aplica el ajuste según la “convolución” de la Ec. (4.15) (curva punteada roja).	25
4.5.	Gráfica proporcional ajustada por un factor 0.5 a la densidad de estado local (LDOS) en función de ka para una impureza con potencial $V_0 = 1[\hbar^2/m^*a^2]$ y un desplazamiento $\Delta = 0.05\pi$. En el lado superior derecho se muestra el perfil Fano formado en la curva de conductancia como muestra de una posible correspondencia.	26
4.6.	(a) Gráfica conductancia en función de ka para un anillo puro con flujo magnético $\Phi = 0.05\Phi_0$. Curva punteada muestra la conductancia cuando el campo es nulo. (b) Gráfica de conductancia en función de Φ/Φ_0 para $ka = 1.9$. (c) Gráfica de la densidad de estados local $LDOS$ en función de ka para $\Phi/\Phi_0 = 0.025$	28

- 4.7. Gráfica de conductancia en función de ka para (a) $\Phi = 0.25\Phi_0$, $\omega_{SO} \approx 1.12\Omega$ y (b) $\Phi = 0.35\Phi_0$, $\omega_{SO} \approx 1.25\Omega$. Para la primera hay un desfase total, logrando una conductancia constante $G = 1[e^2/h]$, mientras que para la segunda ambas curvas presentan los perfiles Fano y el desfase no es completo. (c) Gráfica de conductancia en función del flujo Φ/Φ_0 para $ka = 0.99$ y $\omega_{SO} \approx 1.12\Omega$. Obsérvese que al ser una energía cercana a donde se forma el perfil la conductancia es prácticamente nula en ciertos valores del flujo. (d) Gráfica de conductancia en función de Φ/Φ_0 para $ka = 1.1$ y $\omega_{SO} \approx 3.25\Omega$ 29
- 4.8. Gráficas de conductancia en función de ka desde una a cuatro impurezas para simetría axial $\theta = \Delta\phi/2$, $\Phi = 0.15\Phi_0$, $\omega_{SO} \approx 1.12\Omega$ y un potencial $V_0 = 1[\hbar^2/m^*a^2]$. 30

Introducción

El estudio de dispositivos en bajas dimensiones sobre el régimen mesoscópico y nanoscópico ha sido de interés para científicos e ingenieros por al menos las últimas décadas debido a la miniaturización y novedosos fenómenos de naturaleza puramente cuántica. Un comportamiento importante en el transporte electrónico de estos sistemas es que la conductancia muestra características de interferencias, lo que ha llevado a considerar estos dispositivos como guías de ondas cuánticas. En particular, los anillos mesoscópicos de dos contactos ha sido uno de los objetos de estudio, ya que según se ha demostrado es posible manipular los grados de libertad del espín de las cargas conductoras mediante el efecto Aharonov-Bohm y el acoplamiento espín-órbita de Rashba.

En este trabajo estudiamos estos fenómenos sobre el transporte electrónico modificando la configuración a un anillo mesoscópico de un solo contacto y estudiamos los efectos que ocurren al perturbar las fases topológicas adquiridas por las cargas viajeras mediante impurezas elásticas localizadas. Así mismo, ya que el transporte se efectúa similar a ondas dispersadas, discutimos la posibilidad de que se formen estados ligados sobre el continuo de ondas irradiadas bajo el enfoque de las resonancias Fano. Además, utilizando las distintas configuraciones del modelo, investigamos las propiedades que se conservan debido a la geometría.

Esta tesis se organiza de la siguiente manera: El capítulo 2 presenta el formalismo utilizado para el cálculo de las propiedades electrónicas junto a los fenómenos mencionados. El capítulo 3 muestra el modelo utilizado junto al método de resolución, mientras que el capítulo 4 indica los principales resultados y su análisis. Capítulo 5 presenta una pequeña discusión interpretando la manera que se efectúa el transporte y los límites del modelo y finalmente, el capítulo 6 presenta las conclusiones y proyecciones para un trabajo futuro.

Fundamentos teóricos

2.1 | Transporte electrónico: Formalismo de Landauer

Uno de los primeros modelos teóricos en la descripción del transporte a escalas mesoscópicas y nanoscópicas es el formalismo de Landauer [1, 2], que relaciona la conductancia a través de la probabilidad de transmisión

$$G = \frac{2e^2}{h} T \quad (2.1)$$

Actualmente este método es ampliamente utilizado, debido a que para el transporte coherente la transmisión puede entenderse según la teoría de la dispersión. Ya que en este trabajo estudiamos las propiedades electrónicas de un dispositivo interferente mediante este formalismo, presentamos una pequeña derivación de la Ec. (2.1) junto a las principales implicaciones del modelo.

2.1.1. Conductor balístico perfecto

Para deducir la relación y sus consecuencias, iniciemos considerando una pieza de un conductor balístico coherente estirado entre dos contactos incoherentes en equilibrio de un largo L menor al camino libre medio ($L \ll L_m$) y una diferencia de potencial electroquímico aplicado $\mu_1 - \mu_2$, como se muestra en la Fig. (2.1). Asumiendo contactos que no reflejan, los quasi-niveles de Fermi F^+ (para electrones que se mueven a la derecha) y F^- (electrones que se mueven a la izquierda) siempre son iguales a μ_1 y μ_2 respectivamente, a pesar de que una diferencia de potencial sea aplicada. Ya que el conductor es estrecho, los estados presentan diferentes modos transversales o sub-bandas, cada una con una energía de corte $\varepsilon_N = E(N, k = 0)$ sobre las cuales no se pueden propagar. Por ello, el número de modos transversales a energía E está dado por

$$M(E) = \sum_N \theta(E - \varepsilon_N) \quad (2.2)$$

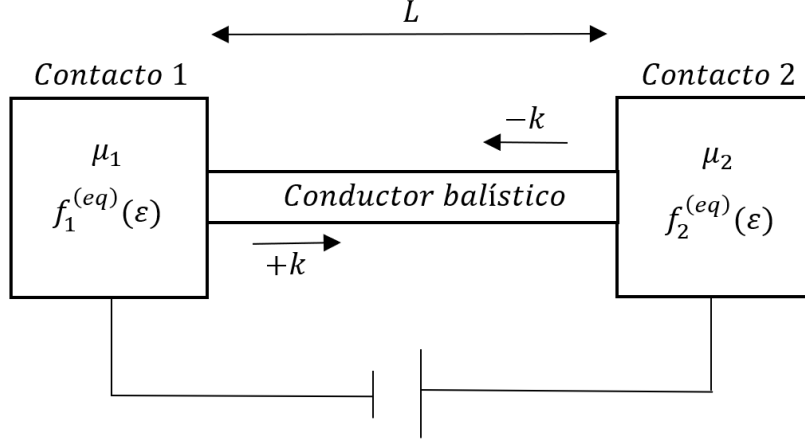


Fig. 2.1. Conductor balístico estrecho de largo L acoplado a dos contactos amplios que sirven como reservorios a potencial electroquímico μ_1 y μ_2 . Sobre el conductor, los estados que viajan hacia la derecha ($+k$) llegan al contacto opuesto sin reflejarse, de igual manera que los estados viajeros hacia la izquierda ($-k$).

Para un solo modo transversal con estados moviéndose a la derecha $+k$, las partículas son pobladas en el camino izquierdo según la función de distribución de Fermi en equilibrio del contacto izquierdo $f_I^{eq}(E)$ y por lo tanto, la corriente sobre un conductor de largo L está dada según

$$I_{I \rightarrow D} = \frac{e}{L} \sum_k \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} f_I^{eq}(E) \quad (2.3)$$

donde $v = \hbar^{-1} \partial E / \partial k$ es la velocidad de grupo. Asumiendo conservación de la energía con su modo transversal y pasando al continuo asumiendo condición periódica, notemos que la expresión puede extenderse a sistemas con múltiples modos contabilizando los modos $M(E)$ que están sobre la energía de corte a energía E ,

$$I_{I \rightarrow D} = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} M(E) f_I^{eq}(E) dE \quad (2.4)$$

Este resultado es general e independiente de la ecuación de dispersión del sistema estudiado. Una expresión similar puede obtenerse de la corriente de los electrones provenientes desde la derecha

$$I_{D \rightarrow I} = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} M(E) f_D^{eq}(E) dE \quad (2.5)$$

lo cual permite obtener la corriente neta del sistema

$$I = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} M(E) (f_I^{eq}(E) - f_D^{eq}(E)) dE \quad (2.6)$$

La propiedad de los contactos de no reflejar es de gran importancia en este formalismo y según cálculos numéricos puede darse desde conductores estrechos a contactos amplios cuando las energías no están cerca del fondo de la banda [3]. Esto implica que los electrones originados en el contacto izquierdo son los únicos que en el conductor ocupan los estados viajeros hacia la derecha y se vacían por completo en el contacto opuesto al no ocurrir reflexión. Así mismo viceversa. Esto justifica también que los quasi-niveles de Fermi sean iguales a μ_1 y μ_2 , ya que si se cambia el potencial del contacto derecho desde μ_1 a μ_2 , no debe haber efecto en el quasi-nivel izquierdo, ya que no hay relación causal entre el contacto derecho y los estados $+k$.

Del resultado de la corriente neta del sistema, si el sistema está a temperatura cero y el número de modos M es constante sobre el rango de energía $\mu_1 > E > \mu_2$, la conductancia está dada por

$$G = \frac{I}{(\mu_1 - \mu_2)/e} = \frac{2e^2}{h} M \quad (2.7)$$

Lo que indica que la conductancia es finita incluso en el caso de un conductor perfecto. Es común llamar al valor de un solo canal como el cuanto de conductancia

$$G_0 = \frac{2e^2}{h} = \frac{1}{12.9} [k\Omega^{-1}] \quad (2.8)$$

La aparición de la resistencia aparece como resultado de la interface entre el conductor y los contactos, ya que sobre este último hay una gran cantidad de modos transversales, mientras que dentro del conductor solo unos cuantos. Luego, la relajación de la energía por dispersión inelástica, la “termalización” y la pérdida de fase de los electrones incidentes justifica las condiciones aplicadas sobre los contactos.

Como hemos visto, la dependencia en el número de modos es un comportamiento que no se deriva de la descripción clásica. Una estimación del número de modos puede darse según la parte entera de la fracción entre el rango permitido en el espacio de momento (hasta la energía de Fermi) y el espaciamiento dado por la condición de periodicidad. En metales, la longitud de onda de Fermi es del orden de la distancia entre átomos, lo que implica un gran número de modos. No así para semiconductores, donde la longitud de onda de Fermi es del orden de los 30[nm] y el número de modos es ampliamente menor. El comportamiento predicho por la Ec. (2.7) ha sido reportado justamente en semiconductores [4, 5], lo que permitió demostrar la existencia de la resistencia de la interface y la realidad de los modos transversales cuando se trabaja en conductores estrechos.

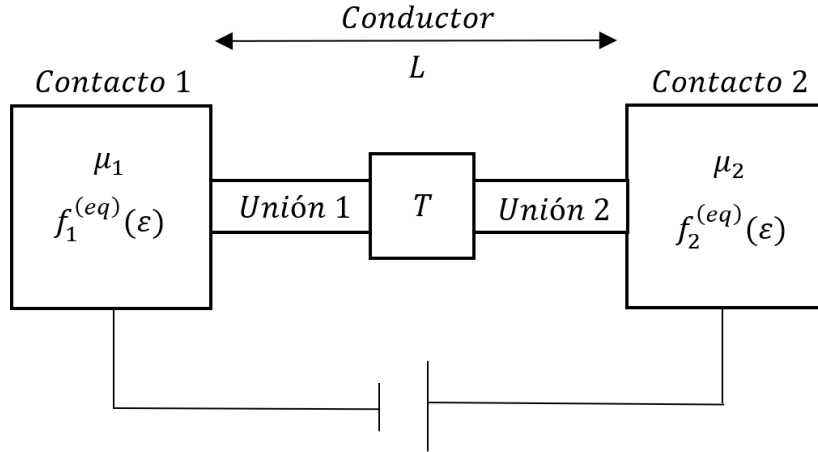


Fig. 2.2. Conductor con una probabilidad de transmisión T (representado por el cuadrado medio) acoplado a los contactos a través de dos uniones.

2.1.2. Fórmula de Landauer

La fórmula de Landauer puede derivarse con un razonamiento similar al visto en la sección anterior. Bajo las mismas condiciones, considérese ahora el conductor acoplado a los contactos mediante dos uniones balísticas coherentes que funcionan como guías de onda. Como muestra la Fig. (2.2), la idea central de este enfoque es considerar el conductor como un centro de dispersión, lo que permite definir una probabilidad media T de que un electrón inyectado en la unión 1 se transmita a la unión 2. Esta transmisión puede depender tanto de la energía como del número de modo, lo que modifica las ecuaciones de corriente desde la unión izquierda a derecha y viceversa según la Ec. (2.9) y (2.10).

$$I_{I \rightarrow D} = \frac{2e}{h} \sum_N \left(\int_{-\infty}^{\infty} T_N^{(I \rightarrow D)}(E) \theta(E - \varepsilon_N) f_I^{eq}(E) dE \right) \quad (2.9)$$

$$I_{D \rightarrow I} = \frac{2e}{h} \sum_N \left(\int_{-\infty}^{\infty} T_N^{(D \rightarrow I)}(E) \theta(E - \varepsilon_N) f_D^{eq}(E) dE \right) \quad (2.10)$$

De esta manera, si las transmisiones son iguales en ambas direcciones $T_N^{(I \rightarrow D)}(E) = T_N^{(D \rightarrow I)}(E)$, se tiene que la corriente neta está dada por

$$I = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} T(E) (f_I^{eq}(E) - f_D^{eq}(E)) dE \quad (2.11)$$

donde $T(E) = \sum_N T_N^{(I \rightarrow D)}(E) \theta(E - \varepsilon_N)$. Finalmente, considerando temperatura cero y una transmisión aproximadamente constante en el rango de energías $\mu_1 > E > \mu_2$, conseguimos la

fórmula de Landauer

$$G = \frac{2e^2}{h} T \quad (2.12)$$

2.2 | Efecto Aharonov-Bohm

El efecto Aharonov-Bohm [6] es un efecto de naturaleza puramente cuántica que involucra conceptos de localidad, periodicidad y fases. Este efecto muestra que una partícula cargada es afectada por un campo magnético incluso si la partícula se encuentra en una región en donde el campo magnético $\vec{B}$ está ausente, lo cual implica que actúa no-localmente.

En electrodinámica clásica, los campos magnéticos y eléctricos describen completamente los campos electromagnéticos y los fenómenos que envuelven la interacción de la materia con los fotones. Por otro lado, los potenciales φ y $\vec{A}$ se presentan como herramientas matemáticas que no son directamente medibles

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.13)$$

Estas ecuaciones y las cantidades físicas son todas invariantes de gauge. Es decir, siempre es posible cambiar los potenciales con una función Λ dependiente de la posición y el tiempo

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \quad (2.14)$$

sin afectar las mediciones.

En la mecánica cuántica, en cambio, los potenciales juegan un rol más significativo. Para el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\vec{A} \right)^2 + q\varphi \quad (2.15)$$

es claro que desde el formalismo canónico los potenciales no pueden ser eliminados de las ecuaciones básicas, aún cuando sigan siendo invariantes de gauge.

Con el propósito de describir el efecto en simples términos consideremos, como en la Fig. (2.3), una partícula que incide a una zona restringida a moverse en una circunferencia de radio a , creando dos caminos que vuelven a encontrarse. Sobre el eje, un solenoide infinito de radio $b < a$ con corriente I constante produce un campo magnético uniforme en su interior $\vec{B} = B_z \Theta(b - r) \hat{z}$, mientras que fuera del solenoide el campo es nulo $\vec{B} = 0$, aunque el vector potencial no lo sea. Adoptando convenientemente la condición de gauge $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, el vector potencial que describe este sistema puede ser escrito según

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (2.16)$$

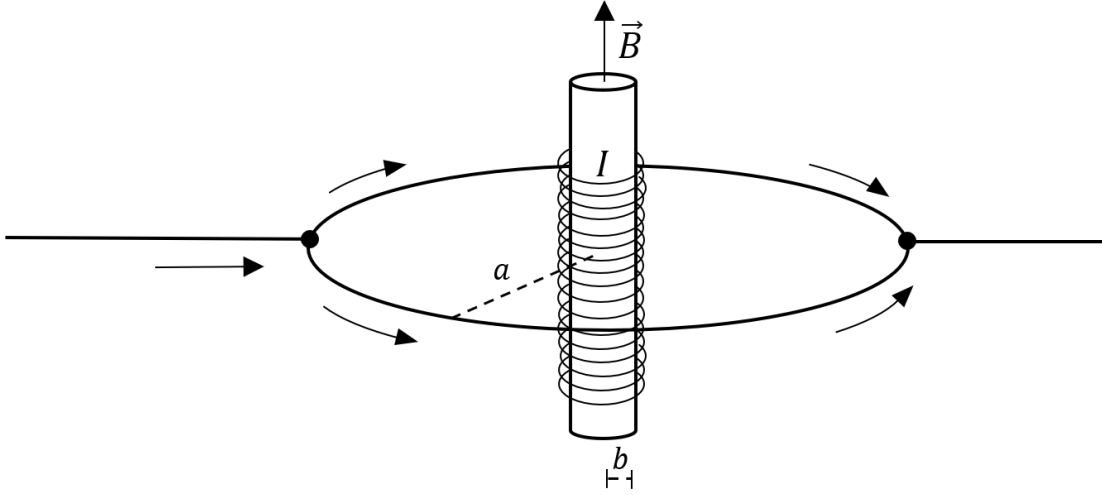


Fig. 2.3. Ilustración esquemática de la dispersión a través de un anillo de radio a de dos caminos con un solenoide infinito de radio b en su centro.

donde Φ es el flujo magnético. Ya que el vector potencial es estático, la ecuación de Schrödinger

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q \vec{A} \right)^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.17)$$

puede ser simplificada escribiendo

$$\Psi = e^{i\Phi_{AB}} \Psi' \quad (2.18)$$

donde

$$\Phi_{AB}(\vec{r}) = \frac{q}{\hbar} \int_{\vec{O}}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (2.19)$$

Colocando esta expresión en la Ec. (2.17) y cancelando el factor exponencial, la ecuación diferencial equivalente es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} \quad (2.20)$$

la cual no es más que la ecuación de Schrödinger de una partícula libre. De esta manera, cuando la partícula incidente atraviesa los diferentes caminos, la Ec. (2.19) implica que las dos ondas llegan con diferentes fases

$$\Phi_{AB} = \frac{q}{\hbar} \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar} \quad (2.21)$$

Con el signo positivo aplicado a partículas viajando en la misma dirección que $\vec{A}$ y que la corriente del solenoide.

La cantidad Φ_{AB} es llamada la fase de Aharonov-Bohm y fue por primera vez confirmada experimentalmente en 1960 [7] y verificada posteriormente en campos magnéticos toroidales [8], nanotubos de carbono [9], entre otros. Como predijo Aharonov y Bohm, los resultados

experimentales son funciones periódicas de Φ_{AB} con periodo

$$\Phi_0 = \frac{\hbar}{e} \quad (2.22)$$

el cual sirve como unidad de cuanto de flujo. Notemos que este efecto no hace el vector potencial $\vec{A}$ medible, solo afecta los resultados experimentales por interferencias dadas por el factor de fase.

2.3 | Interacción espín-órbita de Rashba

Otro fenómeno que produce interferencia debido a la adquisición de una fase geométrica (véase fase de Berry [10]) es la interacción espín-órbita de Rashba (RSOI), la cual mediante un campo eléctrico transversal produce un hamiltoniano de la forma

$$H_{SO} = \alpha \hat{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) \quad (2.23)$$

o bien, sobre anillos unidimensionales [11]

$$H_{1D} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{\alpha}{a} (\cos \phi \sigma_x + \sin \phi \sigma_y) \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - i \frac{\alpha}{2a} (\cos \phi \sigma_y - \sin \phi \sigma_x) \quad (2.24)$$

donde α es la constante de Rashba. El origen de esta expresión se remonta al trabajo realizado por Bychkov y Rashba [12], en un intento de explicar las peculiaridades de la resonancia de espín del electrón en semiconductores bidimensionales mediante términos relativistas. Una explicación heurística de la Ec. (2.23) puede verse desde el sistema de referencia en reposo del electrón. Ya que en este, la partícula experimenta un campo magnético efectivo $\vec{B}_{eff} \sim \vec{E} \times \vec{p}/mc^2$ (donde c es la velocidad de la luz) que induce una energía de Zeeman dependiente del momento. Sin embargo, lejos de describir por completo el fenómeno estudiado originalmente, resultó en un efecto particularmente interesante debido a que se acopla al momento magnético del electrón. Lo que implicaría que las corrientes sobre un dispositivo estarían polarizadas por espín y se podrían manipular mediante la variación del campo eléctrico.

2.4 | Resonancias Fano

La resonancia o perfil Fano es convencionalmente entendido como resultado de la interferencia entre procesos resonantes y no resonantes. Fue por primera vez observado en física atómica y nuclear y posteriormente, en una variedad de estudios de espectroscopia. La primera descripción de este fenómeno fue dada por Ugo Fano [13, 14] mediante la teoría de la

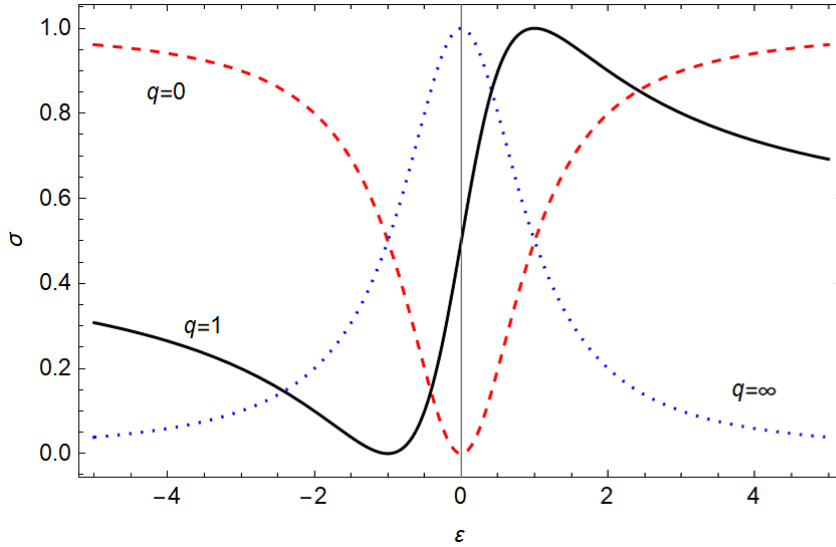


Fig. 2.4. Perfil Fano normalizado por un factor $1/(1 + q^2)$ para distintos valores de q con $\Gamma = 1$.

interacción de configuraciones cuando se encontró estudiando los inusuales perfiles asimétricos formados en el espectro de absorción de gases nobles. En este contexto, Fano describió en un enfoque perturbativo el proceso de fotoionización mediante dos alternativas. Uno mediante la excitación directa sobre el umbral de ionización y otra mediante el paso intermedio de un nivel quasi-discreto que espontáneamente se ionizaba. Entendiendo este último mecanismo como un acople entre el estado ligado de un canal con un continuo de estados de otro, se entiende que, por superposición, cuando ambos estados se acoplen por las diferentes alternativas puede ocurrir interferencia. Fue mediante este análisis que finalmente Fano obtuvo la fórmula de la forma del perfil resonante

$$\sigma_F = \frac{|\varepsilon + q\Gamma|^2}{\varepsilon^2 + \Gamma^2} \quad (2.25)$$

donde q es un parámetro fenomenológico, ε es una energía reducida y Γ es un ancho característico. Sin embargo, la idea fundamental de un proceso guiado por un continuo de estados y niveles discretos es un mecanismo que se puede dar en otros contextos de la física, como en dispositivos mesoscópicos que contienen puntos cuánticos, nanotubos de carbón, entre otros. En el paper original, Fano introdujo el parámetro q como una tasa de transición del estado intermedio al continuo. Bajo este punto de vista, en el límite $|q| \rightarrow \infty$, la transición es dominada desde el nivel discreto, lo que en consecuencia forma un perfil lorentziano. Por otro lado, cuando q es del orden de la unidad, se entiende que ambos mecanismos ocurren por igual, resultando en la formación de un perfil asimétrico y la posibilidad de una interferencia destructiva (Fig. (2.4)). Naturalmente, la interferencia destructiva y constructiva se corresponde respectivamente con el mínimo y máximo de transmisión, mientras que la distancia entre ellos es proporcional al ancho del perfil $\Gamma \sim |E_{max} - E_{min}|$. En principio, ambas pueden estar muy cerca, resultando en un perfil muy estrecho $\Gamma \rightarrow 0$, lo que últimamente ha sido relacionado a estados quasi-ligados

de larga vida sobre el continuo de estados.

2.5 | Estados ligados en el continuo

Los estados ligados en el continuo son ondas que se mantienen localizadas incluso si co-existen en un espectro continuo de ondas irradiadas. A pesar de haber sido propuestas por primera vez en la mecánica cuántica, son un fenómeno general de ondas y desde entonces, han sido identificadas en ondas electromagnéticas, ondas acústicas, ondas sobre sólidos, entre otros. La primera publicación referida a este fenómeno fue realizada por von Neumann y Wigner en 1929 [15], bajo la idea de que un electrón permanezca en una órbita estacionaria a pesar de que tenga la suficiente energía para librarse del sistema de atracción circundante.

En experimentos de dispersión, las ondas provenientes del infinito excitan las resonancias causando una respuesta por medio de ondas dispersadas. Sin embargo, estas ondas no pueden excitar los estados ligados en el continuo debido a que están completamente desacopladas a ellas. Por lo tanto, un estado ligado en el continuo puede considerarse como una resonancia sin pérdidas y de largo tiempo de vida.

Como mostramos en este trabajo, este fenómeno se encuentra presente en anillos unidimensionales y son de particular relevancia para entender la manera en que se efectúa el transporte.

Capítulo 3

Modelo

Consideremos el sistema unidimensional de un anillo de un solo acople tangencial a un canal, ambos con un ancho transversal estrecho tal que pocas sub-bandas efectúan el transporte de manera balística y coherente. Ondas planas etiquetadas por el vector de onda k inciden por la izquierda y son dispersadas en el contacto. Por lo tanto, de la ecuación de Schrödinger la relación de dispersión está dada por el continuo de energías

$$E = E_s + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} > 0 \quad (3.1)$$

donde m^* es la masa efectiva del material conductor. El anillo de radio a presenta N impurezas idénticas distribuidas simétricamente que actúan como dispersores que rompen la fase de manera elástica. Trabajando en el régimen mesoscópico, las modelamos localmente

$$V^{(l)} = V_0 \delta(\phi - \phi_l) \quad (3.2)$$

Sobre el centro, un campo magnético localizado en un radio menor ($b < a$) atraviesa el anillo transversalmente, mientras que un campo eléctrico perpendicular al plano $\vec{E} = E_z \hat{z}$ produce un efecto de acople espín-órbita. Luego, el “hamiltoniano” en esta zona intermedia considerando ambos efectos está dado por [11]

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hbar\Omega \left(i\partial_\phi + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - \hbar\omega_{so} (\cos\phi\sigma_x + \sin\phi\sigma_y) \left(i\partial_\phi + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \\ & - i\frac{\hbar\omega_{so}}{2} (\cos\phi\sigma_y - \sin\phi\sigma_x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $\hbar\Omega = \hbar^2/2m^*a^2$, $\omega_{so} = E_z\alpha_{so}/a$, $\Phi_0 = h/e$, $\sigma_{x,y,z}$ son las matrices de Pauli y α es la constante de Rashba. Definiendo $\sigma_r = \cos\phi\sigma_x + \sin\phi\sigma_y$ y despreciando la constante aditiva $\omega_{so}^2/4\Omega^2$, el hamiltoniano adimensional

$$\bar{H} = \frac{\hat{H}}{\hbar\Omega} = \left(-i\partial_\phi - \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{\omega_{so}}{2\Omega}\sigma_r \right)^2 \quad (3.4)$$

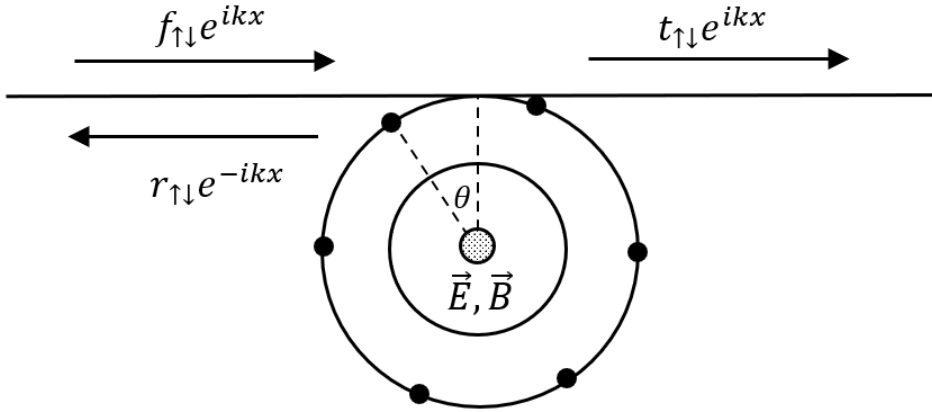


Fig. 3.1. Esquema de un anillo mesoscópico con impurezas (círculos negros) acoplados a un canal unidimensional con un flujo Aharonov-Bohm y un campo de Rashba a través del centro del anillo. Ondas planas inciden desde la izquierda, siendo reflejadas y transmitidas sobre el canal. Orientación del acople se indica mediante el ángulo θ según la última impureza medida en sentido horario

tiene soluciones [16]

$$\begin{aligned}\Psi_n^{(1)} &= e^{in\phi} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta'}{2} \end{pmatrix} \\ \Psi_n^{(2)} &= e^{in\phi} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta'}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta'}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.5}$$

El espectro de energía adimensional $\bar{E}_n^{(i)}$ etiquetado por n y los autoestados $i = 1, 2$ están dados por la ecuación

$$\bar{E}_n^{(i)} = \bar{E}_s + \left(n + \alpha_i - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2\tag{3.6}$$

donde $\alpha_i = 1/2 + (-1)^{i+1} \sqrt{1/4 + \omega_{so}^2/4\Omega^2}$ y $\theta' = 2 \arctan(\alpha_1 \cdot (\omega_{so}/2\Omega)^{-1})$. Para entender esta nueva etiqueta, notamos que de la conservación de la energía con las ondas planas del canal en su forma adimensional ($\bar{E}_c = E_c/\hbar\Omega = k^2a^2$), se debe satisfacer

$$n = \pm ka + \frac{\Phi}{\Phi_0} - \alpha_i\tag{3.7}$$

De esta manera, el cambio en el vector de onda k en una magnitud $\Delta k^{(i)} = (\Phi/\Phi_0 - \alpha_i)/a$ indica que la carga adquiere un factor de fase para cada autoestado

$$\Lambda = e^{\pm i \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - \alpha_i \right) \phi}\tag{3.8}$$

desde que ingresa por el contacto.

3.1 | Funciones de onda y condiciones de borde

La función de onda sobre el canal para la zona entrante y saliente en el set completo de autoestados espinorial $\chi^{(i)}(\phi)$ está dada por

$$\begin{aligned}\Psi_I^C(x) &= \sum_{i=1}^2 \Psi_I^{(i)}(x) \chi_i(0) \quad x \in [-\infty, 0] \\ \Psi_{II}^C(x) &= \sum_{i=1}^2 \Psi_{II}^{(i)}(x) \chi_i(0) \quad x \in [0, \infty]\end{aligned}\tag{3.9}$$

donde

$$\begin{aligned}\Psi_I^{(i)}(x) &= (e^{ikx} f_i + e^{-ikx} r_i) \\ \Psi_{II}^{(i)}(x) &= e^{ikx} t_i\end{aligned}\tag{3.10}$$

siendo el coeficiente incidente, reflejado y transmitido definido según polarización de espín. Para describir las funciones de onda dentro del anillo establecemos una referencia para las impurezas. Considerando el contacto como origen y midiendo el ángulo en sentido horario, éstas están situadas según la ecuación

$$\phi_l = \frac{2\pi l}{N} - \theta \quad l = 1, \dots, N\tag{3.11}$$

Bajo esta definición, las funciones de onda son

$$\Psi_l^R(\phi) = \sum_{i=1}^2 \Psi_l^{(i)}(\phi) \chi_i(\phi) \quad \phi \in [\phi_{l-1}, \phi_l]\tag{3.12}$$

con

$$\Psi_l^{(i)}(\phi) = (A_l^{(i)} e^{ik_+^{(i)} a \phi} + B_l^{(i)} e^{ik_-^{(i)} a \phi})\tag{3.13}$$

donde se redefine $l = 1, \dots, N + 1$, $\phi_0 = 0$, $\phi_{N+1} = 2\pi$ y $k_{\pm}^{(i)} = n_{\pm}^{(i)}/a$. Las condiciones de borde, las cuales determinan los coeficientes, incluyen el contacto y las impurezas. Para el primero, se tiene la condición de continuidad

$$\Psi_I^C|_{x=0} = \Psi_{II}^C|_{x=0} = \Psi_1^R|_{\phi=0} = \Psi_{N+1}^R|_{\phi=2\pi}\tag{3.14}$$

y la condición de Griffith [17]

$$\partial \Psi_{II}^C|_{x=0} - \partial \Psi_I^C|_{x=0} = \frac{1}{a} \left(\partial \Psi_1^R|_{\phi=0} - \partial \Psi_{N+1}^R|_{\phi=2\pi} \right)\tag{3.15}$$

la cual se sigue de requerir un hamiltoniano hermitiano para todo ket en representación espacial.

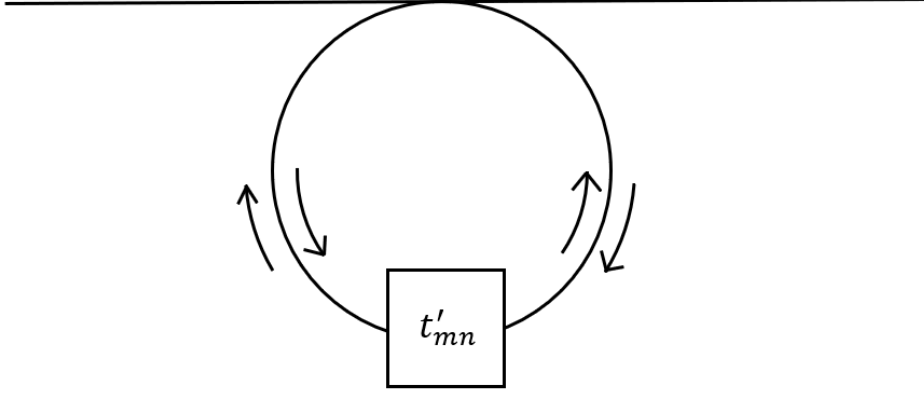


Fig. 3.2. Esquema de resolución mediante matriz de transferencia que incluye todas las rupturas de fase debido a las impurezas locales en el anillo.

Para las interacciones, introduciendo el conjunto completo de los autoestados en Ec. (3.2), la función de onda satisface

$$\Psi_{l+1}^R|_{\phi=\phi_l} = \Psi_l^R|_{\phi=\phi_l} \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{a} \left(\partial \Psi_{l+1}^R|_{\phi=\phi_l} - \partial \Psi_l^R|_{\phi=\phi_l} \right) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \Psi_l^R|_{\phi=\phi_l}$$

tal como en el problema unidimensional sin espín.

3.2 | Resolución

La teoría de dispersión en el transporte sólo puede ser usada si los electrones se transmiten coherentemente a través del dispositivo, y que por lo tanto, permite definir una matriz S de dispersión. Según hemos mencionado, éste es el caso del sistema estudiado. Sin embargo, en vez de definir una matriz de dispersión total (incluyendo el contacto), definimos una matriz de transferencia que solo incluyen todas las dispersiones que rompen la fase electrónica (véase Fig. (3.2)).

Proyectando en los autoestados, la Ec. (3.16) permite resolver el sistema de ecuaciones para cada modo por separado. En un sistema lineal la solución al problema de una impureza en el origen y funciones de onda en la forma de la Ec. (3.13) es, en forma matricial

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - i \frac{mV_0}{k\hbar^2} & -i \frac{mV_0}{k\hbar^2} \\ i \frac{mV_0}{k\hbar^2} & 1 + i \frac{mV_0}{k\hbar^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

donde hemos hecho uso de que la diferencia entre los vectores de onda en sentido horario y antihorario sobre el anillo $k_+ - k_-$ es igual a dos veces el vector de onda k en el canal.

Llamamos la matriz que relaciona los coeficientes como M , la matriz de interacción en el origen. Si la interacción es puesta en otra posición, la situación sería la misma si $x \rightarrow x - a\phi$. Luego, de la Ec. (3.13) los coeficientes pueden modificarse según

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_l \\ \bar{B}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik^{(+)}a\phi} & 0 \\ 0 & e^{ik^{(-)}a\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

para obtener la relación de interacción como si estuviesen en el origen. De esta manera, refiriéndonos a $D(\phi)$ a esta matriz de desplazamiento y a A la matriz de coeficientes, $DA_1 = MDA_0$. Para la siguiente impureza situada a la misma distancia, se tiene $\bar{A}_2 = M\bar{A}_1 = MD^2A_1$. O bien, de la primera relación, $\bar{A}_2 = (MD)^2A_0$. Iterando este proceso, el primer y último coeficiente están inmediatamente relacionados

$$D^N \begin{pmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{pmatrix} = (MD)^N \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Una expresión analítica generalizada es obtenida diagonalizando la matriz MD , pero primero es necesario reorganizar la configuración acorde a las posiciones definidas (Ec. (3.11)), dado que la primera impureza debe acercarse un ángulo θ igual al que la N -ésima impureza se aleja.

La matriz de desplazamiento $D(\phi)$ satisface propiedades similares a las matrices de rotación. Luego, usando $\Delta\phi = 2\pi/N$, la Ec. (3.19) se modifica según

$$D(\phi_N) \begin{pmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{pmatrix} = (MD(\Delta\phi))^N D(-\theta) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

o, desplazando un ángulo θ

$$\begin{pmatrix} A_{N+1}e^{ik^{(+)}2\pi a} \\ B_{N+1}e^{ik^{(-)}2\pi a} \end{pmatrix} = D(\theta)Q^N(\Delta\phi)D(-\theta) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Como podemos ver, de la forma explícita de las condiciones de borde Ec. (3.14)-(3.15)

$$\begin{aligned} f + r = t = A_1 + B_1 &= A_{N+1}e^{2\pi ik^{(+)}a} + B_{N+1}e^{2\pi ik^{(-)}a} \\ k(t - f + r) &= k^{(+)}(A_1 - A_{N+1}e^{2\pi ik^{(-)}a}) + k^{(-)}(B_1 - B_{N+1}e^{2\pi ik^{(+)}a}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

los términos $A_{N+1}e^{2\pi ik^{(+)}a}$ y $B_{N+1}e^{2\pi ik^{(-)}a}$ se relacionan con A_1 y B_1 por la Ec. (3.21) y por lo tanto, usando las definiciones de k_+ y k_- , el sistema de ecuaciones puede ser inmediatamente resuelto en función de los coeficientes de incidencia polarizados.

Aplicando el formalismo de Landauer, tenemos que la conductancia es relacionada con la

función de transmisión

$$\bar{T}(E) = \sum_m \sum_n |t_{nm}|^2 = \text{Tr}(tt^\dagger) \quad (3.23)$$

mediante

$$G = \frac{e^2}{h} \bar{T}(E) \quad (3.24)$$

Análogo a una guía de onda, el elemento t_{nm} de la matriz de transmisión total (considerando el contacto) indica la amplitud de un electrón incidente en el modo m para transmitirse al modo n a la derecha del sistema. Ya que los coeficientes de transmisión son separables o independientes de polarización, la Ec. (3.23) se reduce simplemente a la suma sobre los coeficientes de transmisión $T^{(i)} = |t^{(i)}|^2 / |f^{(i)}|^2$.

Resultados y análisis

Mediante el método de matriz de transferencia, los coeficientes de transmisión polarizados están dados por

$$T^{(\mu)} = \frac{(U_{N-1}(f(ka))g(ka, \theta))^2}{(\cos(2\pi a \Delta k^{(\mu)}) - T_N(f(ka)))^2 + (U_{N-1}(f(ka))g(ka, \theta))^2} \quad (4.1)$$

donde T_N , U_N son los polinomios de Chebyshev de primer y segundo tipo de orden N , y las funciones $f(ka)$ y $g(ka, \theta)$ están definidos por

$$f(ka) = \Re(z) \quad g(ka, \theta) = \Im(z) + \frac{m^* V_0}{k \hbar^2} \cos(ka(\Delta\phi - 2\theta)) \quad (4.2)$$

donde $z = (1 - i \frac{m^* V_0}{k \hbar^2}) e^{ika \Delta\phi}$. Para analizar e interpretar estos resultados acorde al formalismo de Landauer dividimos esta sección entre los efectos propios de la geometría e impurezas y los efectos de la aplicación de los campos externos que producen la fase geométrica.

4.1 | Efectos de la geometría e impurezas

Comencemos estudiando la configuración en ausencia de impurezas. Como es de intuir, para obtener su transmisión, la Ec. (4.1) debe reducirse a una única expresión cuando $V_0 = 0$. Sin embargo, esto parece ser no muy evidente debido a su dependencia en N . Pues en principio se definieron N impurezas y $N+1$ segmentos, los cuales forman en su totalidad la circunferencia. Para resolver esta aparente paradoja es necesario notar que las Ec. (4.2) se reducen a simples formas sinusoidales del argumento $ka \Delta\phi$ y que mediante la propiedad de los polinomios de Chebyshev

$$T_N(\cos(\alpha)) = \cos(N\alpha) \quad U_{N-1}(\cos(\alpha)) = \frac{\sin(N\alpha)}{\sin(\alpha)} \quad (4.3)$$

la transmisión se reduce a una única ecuación

$$T^{(\mu)} \Big|_{\Delta k^{(\mu)}=0} = \left(\frac{\sin(2\pi ka)^2}{(\cos(2\pi a \Delta k^{(\mu)}) - \cos(2\pi ka))^2 + \sin(2\pi ka)^2} \right) \Big|_{\Delta k^{(\mu)}=0} = \cos(\pi ka)^2 \quad (4.4)$$

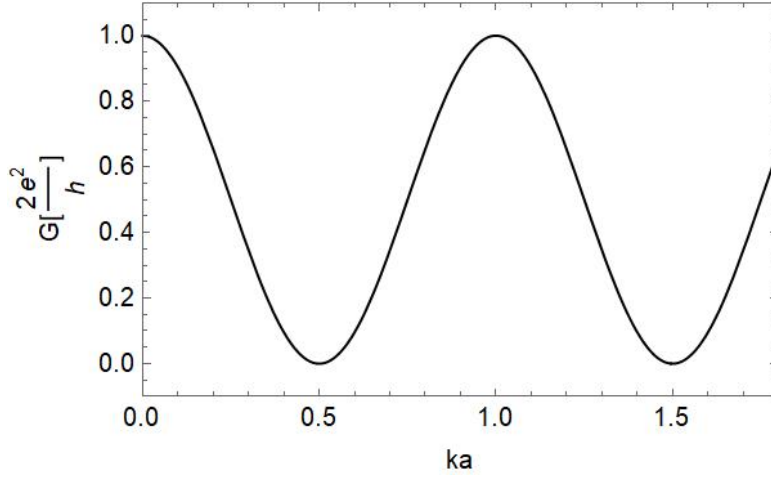


Fig. 4.1. Gráfica de conductancia en función de ka . Comportamiento oscilatorio entre el mínimo nulo y el doble del cuanto de conductancia al ser la transmisión de ambas polarizaciones iguales $G = (2e^2/h)T$.

o bien, aplicando la fórmula de Landauer

$$G = \frac{2e^2}{h} \cos(\pi ka)^2 \quad (4.5)$$

La Fig. (4.1) muestra esta conductancia en función de ka . Notamos que cuando no hay campo magnético ni campo de Rashba, la curva tiene un comportamiento periódico sinusoidal al ser ambos modos iguales $T^{(1)} = T^{(2)}$, siendo el máximo de conductancia $G = 2e^2/h$ cuando ka es entero. Estos valores coinciden precisamente con el vector de onda correspondiente a las energías permitidas de un electrón libre confinado a un anillo unidimensional. En efecto, la energía de este sistema desacoplado se encuentra discretizada debido a la condición de periodicidad $\psi(x) = \psi(x + 2\pi a)$ y más implícitamente, debido a la suavidad de la función de onda por la isotropía del sistema. Para entender esta correspondencia con las energías del sistema acoplado al canal, es más conveniente pensar la energía E (o bien ka) como una variable independiente y ver la respuesta del sistema para electrones incidentes con dicha energía.

Ya que la función de onda siempre es continua sobre el contacto, cuando se alcanza una de las energías discretizadas la función de onda debe ser suave en todo punto dentro del anillo. Luego, de la condición de Griffith (Ec. 3.15), esto implica que también lo es sobre el canal y que por lo tanto, la onda incidente no es afectada y es completamente transmitida.

Otra interpretación puede verse de la corriente de probabilidad

$$j(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m^*} \Im(\Psi^* \nabla \Psi) \quad (4.6)$$

Para el mismo estado, en el contacto el sistema se comporta como desacoplado, con la

misma corriente circulando sobre el anillo sin pérdidas. A diferencia de las otras energías del continuo, donde sí habrá intercambio de corrientes con el canal.

Este análisis es también válido para el caso generalizado de N impurezas. Desde el punto de vista del electrón rotando sobre el anillo los potenciales son periódicos e infinitos. Luego, en vez de resolver con el método de la matriz de transferencia, podemos describir las funciones de onda mediante el teorema de Bloch

$$\psi(x + a\Delta\phi) = e^{iKa\Delta\phi}\psi(x) \quad (4.7)$$

que, con la condición de periodicidad $\psi(x) = \psi(x + Na\Delta\phi)$, cuantizará las energías. Escribiendo la función de onda inmediatamente adyacente por la izquierda al segmento $0 < x < a\Delta\phi$ y aplicando la condición, las energías están determinadas por la ecuación trascendental

$$\cos(Ka\Delta\phi) = \cos(ka\Delta\phi) + \frac{mV_0}{k\hbar^2} \sin(ka\Delta\phi) \quad (4.8)$$

donde Ka es entero debido a que $\psi(x + Na\Delta\phi) = \psi(x) \rightarrow e^{iKNa\Delta\phi} = 1$. El lado derecho de la Ec. (4.8) no es más que la función de $f(ka)$ definida anteriormente (Ec. (4.2)). Luego, bajo la interpretación de la energía E como variable independiente, cuando se logra la energía cuantizada dada por la ecuación trascendental, tenemos por las propiedades de los polinomios de Chebyshev (Ec. (4.2)), $T_N(f(ka)) = 1$ y en consecuencia, una transmisión máxima. Es trivial comprobar que todas las energías resonantes corresponden a estas energías.

Este análisis es equivalente al visto en un modelo de juguete de un sólido cristalino unidimensional [18], donde la condición de periodicidad es análoga a la condición de Born-von Karman, solo que en vez de incluirlas como propiedades del bulto, se consideran por la geometría del sistema. Como señala Griffith's en *Introduction to Quantum Mechanics*, $f(ka)$ tiene regiones que se escapan del rango $(-1, 1)$ y que por lo tanto, no tienen posibilidad de resolver la ecuación trascendental. Luego, el modelo comparte esencialmente las características cualitativas de la formación de bandas y brechas en conductores y aislantes. Sin embargo, en nuestro caso, depende del segmento $a\Delta\phi$ y por lo tanto, un mayor número de impurezas cambia el rango de bandas y brechas de ka (véase Fig. (4.2)). Así también, es importante notar que la circunferencia mantiene un largo definido y en consecuencia, un número demasiado grande de impurezas (como se supone en un cristal) se escapa de los límites aceptables del modelo. Extendiendo al continuo de energías, este comportamiento es visualizado como *peaks* y valles pronunciados con zonas de transición suaves del máximo al mínimo (o viceversa) que representan las brechas. Estas formaciones son sensibles a la magnitud del potencial V_0 , siendo la agrupación más notoria cuando $aV_0 \gg ka$. Sin embargo, esto está lejos de representar una perturbación localizada, ya que el modelo utilizado es válido mientras el tamaño de las impurezas y la magnitud del potencial sea pequeño.

A pesar de ser una discusión académica, esto muestra la independencia de las energías

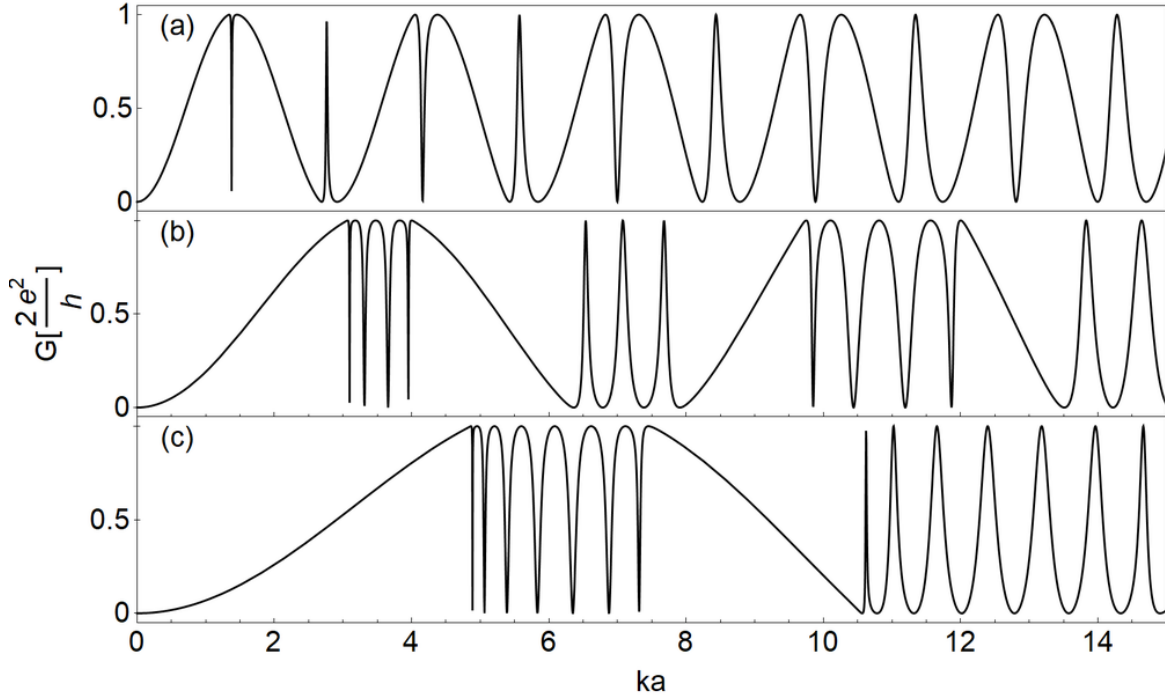


Fig. 4.2. Gráfica de conductancia en función de ka para (a) tres, (b) ocho y (c) quince impurezas. En todos los casos se considera una magnitud de potencial $V_0 = 8[\hbar^2/m^*a^2]$ y una simetría axial $\theta = \Delta\phi/2$.

resonantes del sistema a la orientación del acople. De hecho, esto puede ser visto de inmediato al identificar este máximo de transmisión como el primer término del denominador en la expresión del coeficiente de transmisión polarizado (Ec. (4.1)). Luego, en una banda los $\lceil N/2 \rceil$ máximos estarán conservados, a menos que coincida precisamente con uno de los mínimos dictados por el numerador y la expresión sea indefinida.

Estos mínimos se identifican físicamente como aquellas energías donde la función de onda es nula en el contacto o donde ondas planas estacionarias son formadas a través del anillo. Analizando el término, tenemos que las antiresonancias estarán dadas cuando cualquiera de los dos factores, $U_{N-1}(f(ka))$ o $g(ka, \theta)$, sea nulo. En cualquier caso, la resolución involucra ecuaciones trascendentales, pero como antes, podemos encontrar este fenómeno interferente en ciertas situaciones especiales.

En la simetría axial ($\theta = \Delta\phi/2$), cuando ka es múltiplo de N , la resonancia y antiresonancia ocurren simultáneamente y la transmisión es indeterminada. Para notarlo, observemos que de la definición $f(ka)$ está compuesto de la parte real del número complejo $z = \left(1 - i\frac{m^*V_0}{k\hbar^2}\right) e^{ika\Delta\phi}$, mientras que $g(ka, \theta)$ contiene la parte imaginaria más un término dependiente de la orientación. Luego, para que este sea un mínimo en esta configuración se requiere que

$$\Im(z) = -\frac{m^*V_0}{k\hbar^2} \quad (4.9)$$

el cual se cumple si el factor exponencial de z es igual a la unidad o bien, si $ka = m(N)$, con $m \in \mathbb{Z}$. Esto implica a su vez que

$$\Re(z) = 1 \quad (4.10)$$

lo que confirma la interferencia de los estados al ser el caso $Ka = 0$ de la ecuación trascendental de resonancia. No obstante, además de la posible contradicción de que un proceso resonante y antiresonante estén ocurriendo por simultáneo, ambos estados pueden seguir interfiriendo incluso si no coinciden exactamente en el vector de onda o energía característica. Esto puede verse de la Fig. (4.12), donde el sistema fue desplazado de la simetría $\theta = \Delta\phi/2 - \Delta/2$. Expandiendo en series para esta configuración [19], encontramos que el coeficiente transmitido t en la vecindad de la resonancia $x_m = m(N)$ resulta ser

$$t \approx \frac{1}{1 - iN \frac{\beta}{x_m}} \frac{\left(x - x_m - \frac{\beta}{x_m} \frac{(x_m \Delta)^2}{4\pi}\right)}{\left(x - x_m - \frac{\beta}{x_m} \frac{(x_m \Delta)^2}{4\pi}\right) - i \frac{N \left(\frac{\beta}{x_m}\right)^2 \frac{(x_m \Delta)^2}{4\pi}}{1 + N^2 \left(\frac{\beta}{x_m}\right)^2}} f \quad (4.11)$$

donde hemos definido $x = ka$, $\beta = m^* V_0 a / \hbar^2$ y hemos restringido el orden según $\max(|x - x_m|) \sim \Delta^2$. Comparando con la Ec. (2.25) notamos que esta expresión se corresponde con el perfil derivado por Fano, donde el parámetro q y la amplitud Γ está dado por

$$q = N \frac{\beta}{x_m} \quad \Gamma = \frac{N \left(\frac{\beta}{x_m}\right)^2 \frac{(x_m \Delta)^2}{4\pi}}{1 + N^2 \left(\frac{\beta}{x_m}\right)^2} \quad (4.12)$$

y el perfil está multiplicado por un factor de normalización

$$|t_0|^2 = \frac{1}{1 + N^2 \left(\frac{\beta}{x_m}\right)^2} \quad (4.13)$$

La Fig. (4.3) muestra además la curva de conductancia en función de ka en el caso de una sola impureza con simetría axial (curva punteada) donde no se observa ningún perfil, en correspondencia con el comportamiento del ancho característico $\Gamma \sim \Delta^2$. Por otro lado, para un pequeño desplazamiento angular $\Delta = 0.05\pi$ (curva continua), notemos que la mayor diferencia ocurre en el entorno de la formación del perfil, lo que justifica el orden de expansión $\max(|x - x_m|) \sim \Delta^2 \sim \Gamma$. De esta manera, a medida que $\Gamma \rightarrow 0$, es de intuir que la curva se ajuste cada vez más al valor

$$\lim_{x \rightarrow x_m} T(x, \frac{\Delta\phi}{2}) = \frac{1}{1 + N^2 \left(\frac{\beta}{x_m}\right)^2} \quad (4.14)$$

el cual es justamente el valor de $|t_0|^2$. Ya que $T(x, \Delta\phi/2)$ es suave en torno a x_m , esto motiva a reemplazarlo directamente por el factor de normalización (que es independiente del desplazamiento Δ). Así, $T(x, \Delta\phi/2)$ podría determinarse como una función de fondo [20], mientras que

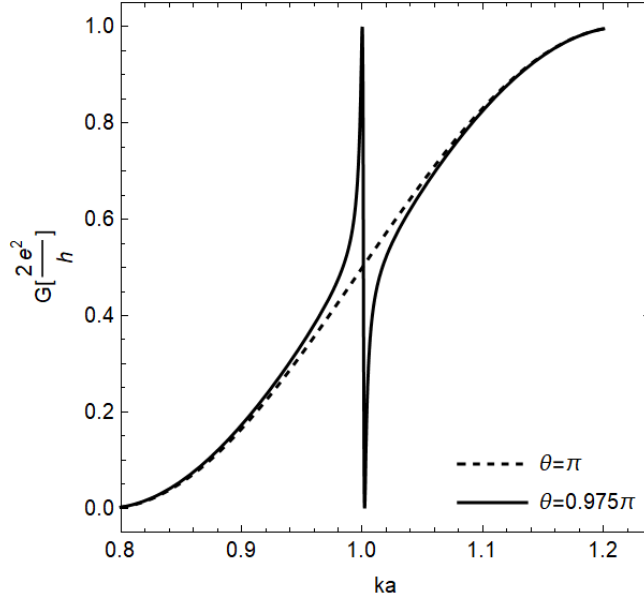


Fig. 4.3. Gráfica de conductancia en función de ka para una impureza con $V_0 = 1[\hbar^2/m^*a^2]$ cuando la configuración tiene simetría axial $\theta_0 = \Delta\phi/2$ y un desplazamiento $\theta = \theta_0 - \Delta/2$ con $\Delta = 0.05\pi$. Ambas curvas se muestran como comparativa en torno a $ka = 1$, donde para la configuración desplazada muestra un perfil asimétrico.

la “convolución”

$$T(x) = T(x, \Delta\phi/2) \cdot \left| \frac{t}{t_0} \right|^2 \quad (4.15)$$

actuaría como una aproximación de las curvas para configuraciones con pequeños desplazamientos.

Este ajuste es mostrado en la Fig. (4.4) para $m = 1$ en distintos números de impurezas sobre el dominio $[x_1 - 0.1, x_1 + 0.1]$ considerando una amplitud pequeña al fijarse la magnitud del potencial $V_0 = 1[\hbar^2/m^*a^2]$ y un desplazamiento $\Delta = 0.1/N$. En general se observa que el ajuste es una buena aproximación a la curva original (curva punteada). Sin embargo, estas no son los únicos perfiles formados, al menos para $N > 1$. Esto ya pudo ser visto en la Fig. (4.2) donde algunas de las $[N/2]$ resonancias están perdidas. Luego, al igual que la Ec. (4.11) podríamos realizar un ajuste similar para estas otras energías interferentes que han de ser resueltas por medio de la ecuación trascendental original $g(ka, \Delta\phi/2) = 0$.

Hasta ahora hemos estudiado las resonancias Fano y las hemos caracterizado según ambos estados interfieren. Ya que en nuestro análisis hemos visto que ambos se corresponden a sus respectivas situaciones físicas podemos concluir que cuando ambas interfieren, ambas situaciones están ocurriendo por simultáneo. Es decir, en este caso la función de onda es continua, suave y nula sobre el contacto. Viendo nuevamente la Ec. (3.22) lo anterior implica automáticamente en nuestra resolución que $f = r = t = 0$, o bien, que no hay función de onda proyectada sobre el canal. Esto puede pensarse como una situación especial, ya que a pesar de que estemos

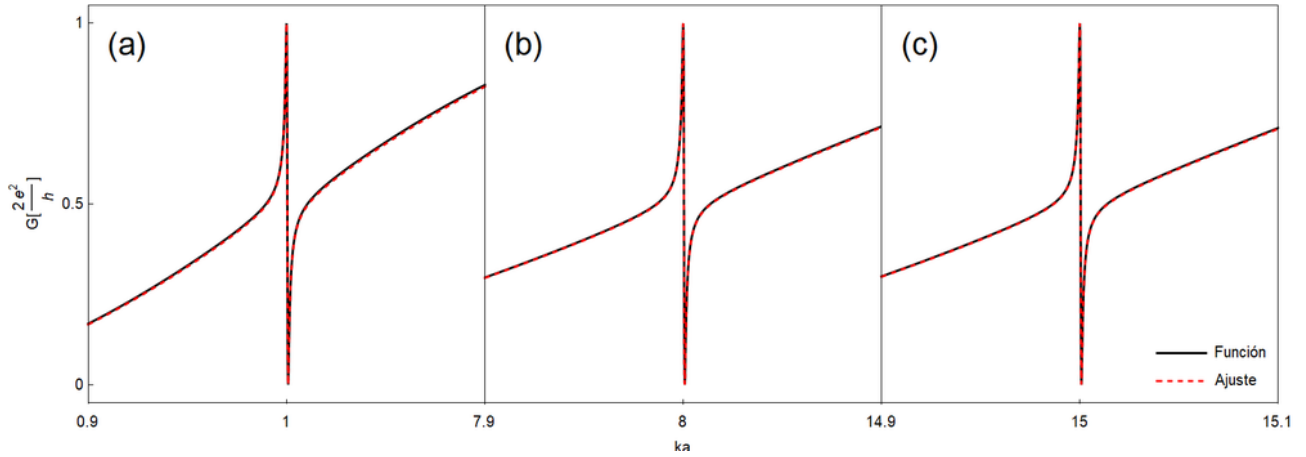


Fig. 4.4. Gráfica de conductancia en función de ka para (a) una, (b) ocho y (c) quince impurezas con un potencial $V_0 = 1[\hbar^2/m^*a^2]$ cuando la configuración tiene un desplazamiento $\Delta = 0.1/N$ (curva continua) y cuando se aplica el ajuste según la “convolución” de la Ec. (4.15) (curva punteada roja).

trabajando con ondas irradiadas en un continuo de energías, la función de onda se encuentra ligada a una región en particular, el anillo.

Con el propósito de estudiar los estados ligados en el continuo más allá de un posible límite del modelo, calculamos la densidad de estados local (LDOS). De la definición en modelos *tight-binding* o funciones base localizadas en $\vec{d}$ se tiene que

$$LDOS(\vec{d}, E) = \sum_n |\Psi(\vec{d})|^2 \delta(E - \varepsilon_n) \quad (4.16)$$

donde ε_n es el set de autovalores de energía del hamiltoniano. Extendiendo la definición al continuo de estados y al continuo del sistema, esto se reduce simplemente a la probabilidad de la función de onda sobre el anillo.

$$LDOS(E) = \int_{Anillo} |\Psi_E(\vec{r})|^2 dr \quad (4.17)$$

Por simplicidad, veamos el caso de una sola impureza. La Fig. (4.5.a) muestra una curva proporcional a la densidad de estados local $LDOS$ en función de ka cuando $V_0 = 1[\hbar^2/m^*a^2]$ y $\Delta = 0.05\pi$. Es importante notar que la proporcionalidad se debe a que en los cálculos todos los coeficientes fueron resueltos en función del coeficiente de incidencia f y que formalmente las ondas planas tratadas en la resolución no son funciones de onda debido a que no son normalizables. Sin embargo, si estas lo fueran, sería esta normalización la que determinaría f . Luego, entendiendo que la curva indica la fracción de la función de onda dentro del anillo respecto al sistema completo, los picos pronunciados representan la formación de una quasi-ligadura, mientras que la ligadura total se forma en la configuración de simetría axial y es vista

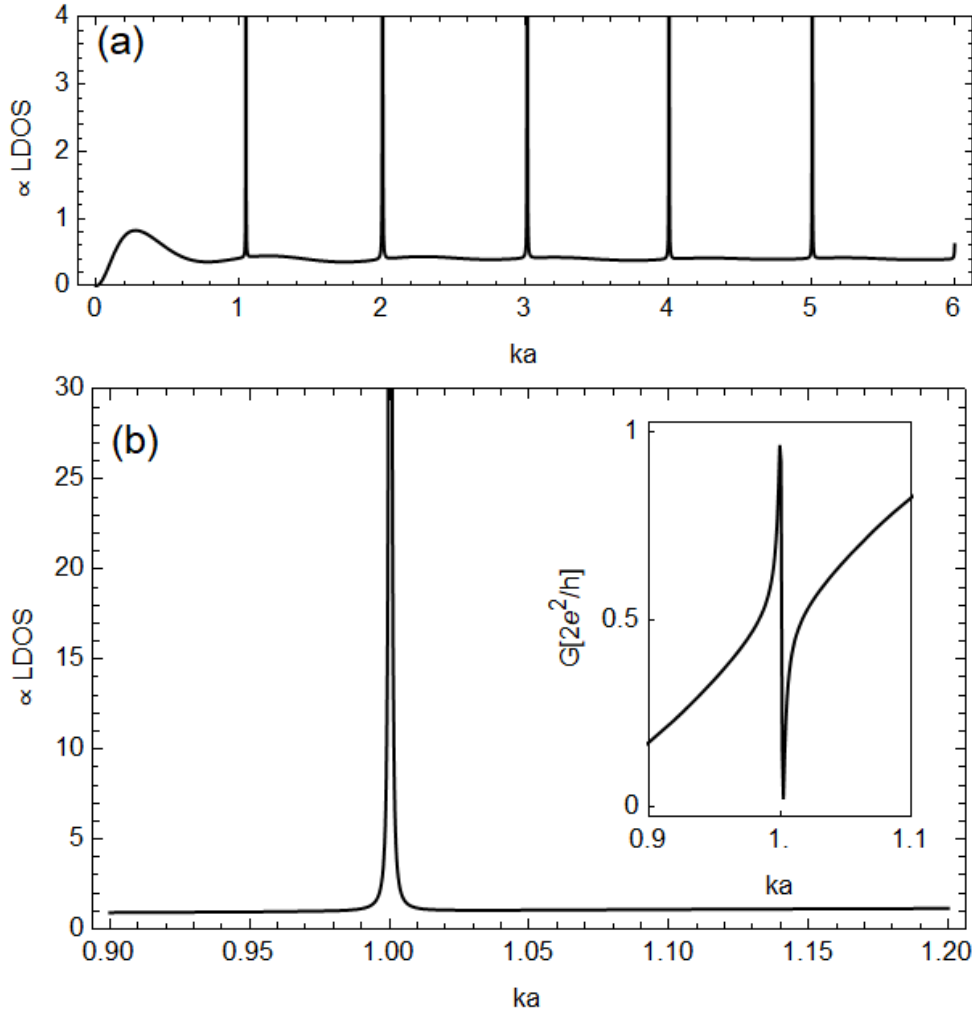


Fig. 4.5. Gráfica proporcional ajustada por un factor 0.5 a la densidad de estado local (LDOS) en función de ka para una impureza con potencial $V_0 = 1[\hbar^2/m^*a^2]$ y un desplazamiento $\Delta = 0.05\pi$. En el lado superior derecho se muestra el perfil Fano formado en la curva de conductancia como muestra de una posible correspondencia.

como una divergencia y un colapso de los perfiles al adquirir un ancho infinitesimal al igual que el visto en la formación de las resonancias Fano. Fig. (4.5.b) muestra la densidad de estados localizada en torno al primer perfil formado, con la conductancia mostrada en la Fig. (4.3) en el costado superior derecho como muestra de la posible correspondencia.

4.2 | Efectos AB-RSOI

En la Sección 3 mencionamos que las soluciones del hamiltoniano en el anillo $\Psi(\phi)$ eran ondas planas que adquirirían una fase geométrica dada según la Ec. (4.18),

$$\Lambda = e^{\pm i\left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - \alpha_i\right)\phi} \quad (4.18)$$

lo cual equivalentemente se podía entender como un cambio en el vector de onda k

$$\Delta k^{(\mu)} = \frac{1}{a} \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - \frac{1}{2} + (-1)^\mu \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\omega_{so}^2}{4\Omega^2}} \right) \quad (4.19)$$

y que por lo tanto, podría afectar las propiedades del sistema. Obsérvese que en el coeficiente de transmisión polarizado los efectos de los campos externos están solamente incorporados en el factor $\cos(2\pi a \Delta k^{(\mu)})$ del denominador. Esto es importante de destacar, debido a que esencialmente se pueden encontrar configuraciones equivalentes entre el campo magnético y el campo eléctrico y que además, permite utilizar el formalismo de Landauer al mantener la misma transmisión para corrientes desde el contacto izquierdo a derecho, o viceversa ($T^{(I \rightarrow D)}(E) = T^{(D \rightarrow I)}(E)$), al ser invariante ante inversión de los campos. Para obtener una comprensión de los efectos en la conductancia, iniciamos estudiando nuevamente el anillo puro.

La expresión de transmisión polarizada en esta configuración se muestra en la Ec. (4.20)

$$T^{(\mu)} = \frac{\sin(2\pi k a)^2}{(\cos(2\pi a \Delta k^{(\mu)}) - \cos(2\pi k a))^2 + \sin(2\pi k a)^2} \quad (4.20)$$

y como podemos apreciar, la transmisión de este sistema es diferente para cada modo μ , en excepción de ciertas configuraciones, como es el caso cuando uno de los campos es nulo. La Fig. (4.6.a) muestra la conductancia en función de ka cuando no hay campo de Rashba presente. Observamos que para la curva continua con un flujo $\Phi = 0.05\Phi_0$ un nuevo cero aparece en los valores enteros de ka y el pico de la energía resonante parece dividirse en dos. Esta división puede entenderse intuitivamente de la cuantización de la energía del anillo desacoplado, ya que el campo magnético rompe la degeneración de las ondas viajeras en sentido horario y antihorario, causando que las nuevas energías estén dadas por el vector de onda $ka = n \pm \Phi/\Phi_0$ para $n \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, el nuevo cero de conductancia es el mismo comportamiento tratado en las resonancias Fano y la formación de estados ligados (Fig. (4.6.c)). En efecto, para el valor del vector de onda resonante la expresión de transmisión está indeterminada. Expandiendo nuevamente en series en torno a los valores enteros de ka con un pequeño flujo magnético se obtiene el perfil Fano

$$t \approx \frac{(ka - n)}{(ka - n) - i\pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2} f \quad (4.21)$$

donde se mantuvo los órdenes menores con $\max(|ka - n|) \sim (\Phi/\Phi_0)^2$ y se identifican los parámetros

$$q = 0 \quad \Gamma = \pi(\Phi/\Phi_0)^2 \quad (4.22)$$

en coherencia con el límite de la "función de fondo"

$$\lim_{ka \rightarrow n} T(ka, \Phi = 0) = \frac{1}{1 + q^2} \quad (4.23)$$

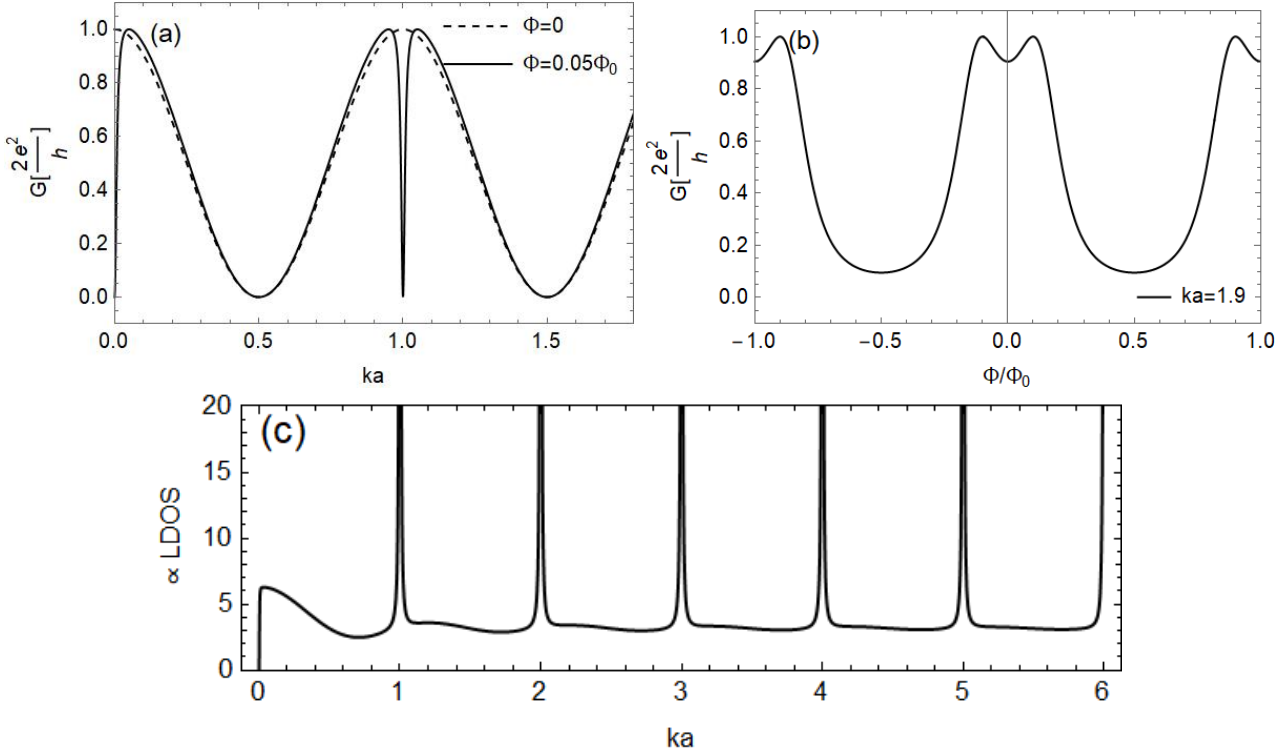


Fig. 4.6. (a) Gráfica conductancia en función de ka para un anillo puro con flujo magnético $\Phi = 0.05\Phi_0$. Curva punteada muestra la conductancia cuando el campo es nulo. (b) Gráfica de conductancia en función de Φ/Φ_0 para $ka = 1.9$. (c) Gráfica de la densidad de estados local $LDOS$ en función de ka para $\Phi/\Phi_0 = 0.025$.

El cuanto de flujo Φ_0 cobra su relevancia visualizando la gráfica de la conductancia en función del flujo. La Fig. (4.6.b) muestra esta situación para $ka = 1.9$. Notamos que la conductancia tiene un comportamiento oscilatorio y que por lo tanto, no depende directamente de la magnitud del campo magnético sobre el anillo, sino de la fracción del flujo sobre el cuanto Φ_0 , en correspondencia a lo predicho por Aharonov-Bohm. Una afirmación análoga se puede hacer sobre el campo eléctrico de Rashba, solo que la relación ya no es lineal al estar introducido sobre la raíz en α_i .

Como se ha mencionado, en general las transmisiones ya no serán iguales para cada modo $T^{(1)} \neq T^{(2)}$, en especial en el caso en que ambos campos estén presentes. De esta manera, las energías resonantes respectivas serán modificadas según $ka = n \pm a\Delta k^{(\mu)}$ con n entero, lo cual nos indica que es posible sintonizar cada transmisión manipulando la diferencia de los campos y que es posible crear configuraciones donde el sistema funciona como filtro de espín.

La Fig. (4.7.a) muestra la gráficas de conductancia en función de ka para parámetros Φ/Φ_0 y ω_{SO} donde las transmisiones polarizadas están completamente desfasadas y la conductancia es constante. Notemos que para los valores enteros o semienteros el sistema transmite por completo uno de los modos, funcionando como filtro de espín. Sin embargo, las configuraciones más

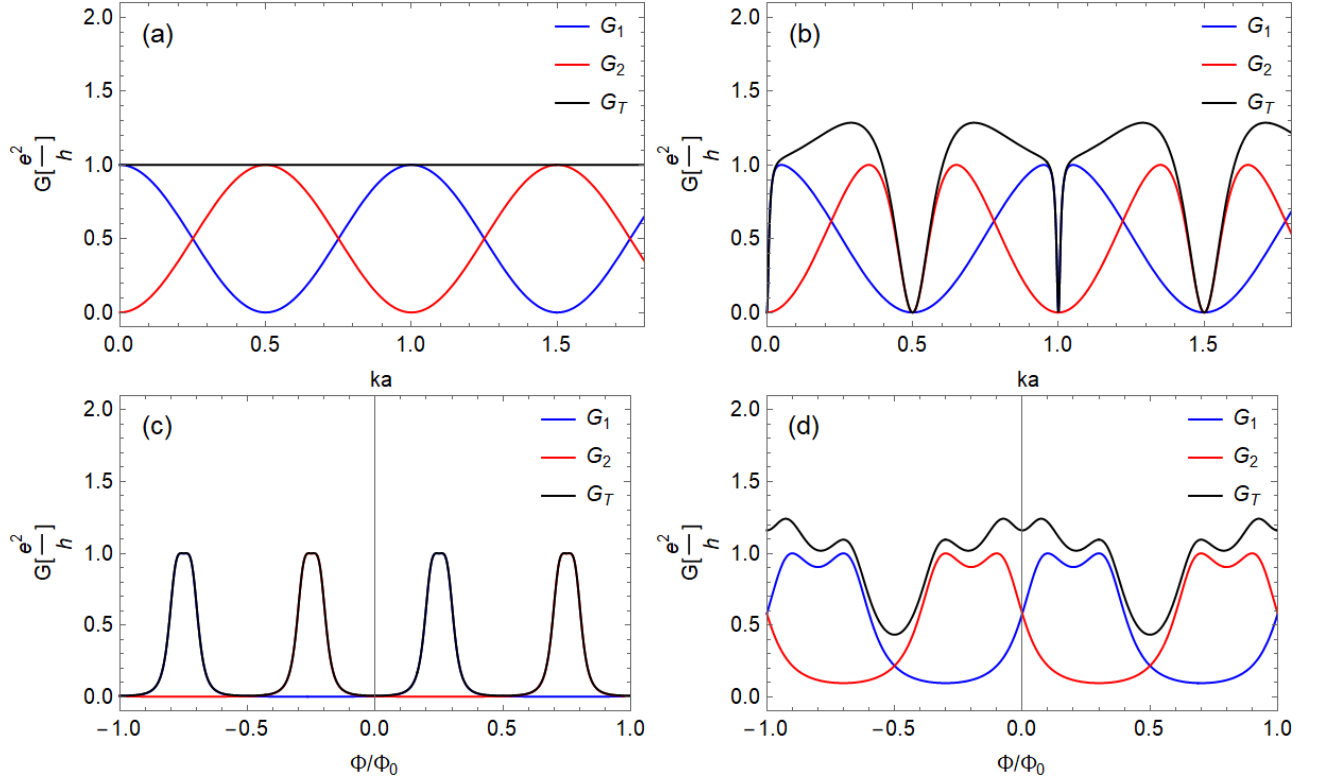


Fig. 4.7. Gráfica de conductancia en función de ka para (a) $\Phi = 0.25\Phi_0$, $\omega_{SO} \approx 1.12\Omega$ y (b) $\Phi = 0.35\Phi_0$, $\omega_{SO} \approx 1.25\Omega$. Para la primera hay un desfase total, logrando una conductancia constante $G = 1[e^2/h]$, mientras que para la segunda ambas curvas presentan los perfiles Fano y el desfase no es completo. (c) Gráfica de conductancia en función del flujo Φ/Φ_0 para $ka = 0.99$ y $\omega_{SO} \approx 1.12\Omega$. Obsérvese que al ser una energía cercana a donde se forma el perfil la conductancia es prácticamente nula en ciertos valores del flujo. (d) Gráfica de conductancia en función de Φ/Φ_0 para $ka = 1.1$ y $\omega_{SO} \approx 3.25\Omega$.

generales se visualizan como en la Fig. (4.7.b), donde el desfase no es completo y la conductancia total es la superposición de ambos modos. Fig. (4.7.c). muestra la conductancia en función del flujo Φ/Φ_0 para ka cercano a la resonancia con un campo de Rashba presente. Observamos que al ser un valor cercano a la resonancia la conductancia es máxima si ambos campos son nulos, pero a medida que ocurre la división de las energías cuantizadas la conductancia cae bruscamente según lo visto por el perfil Fano. Es por esto que solo para ciertos valores del flujo magnético $G = 1[e^2/h]$ y debido a que ambos campos están presentes, que permite distinguir cada modo transmitido. Fig. (4.7.d) muestra una configuración más general donde la curva de conductancia es nuevamente la superposición de ambos modos.

El caso con N impurezas se puede tratar de igual manera. Las energías cuantizadas del anillo desacoplado pueden obtenerse aplicando el mismo método del teorema de Bloch y las

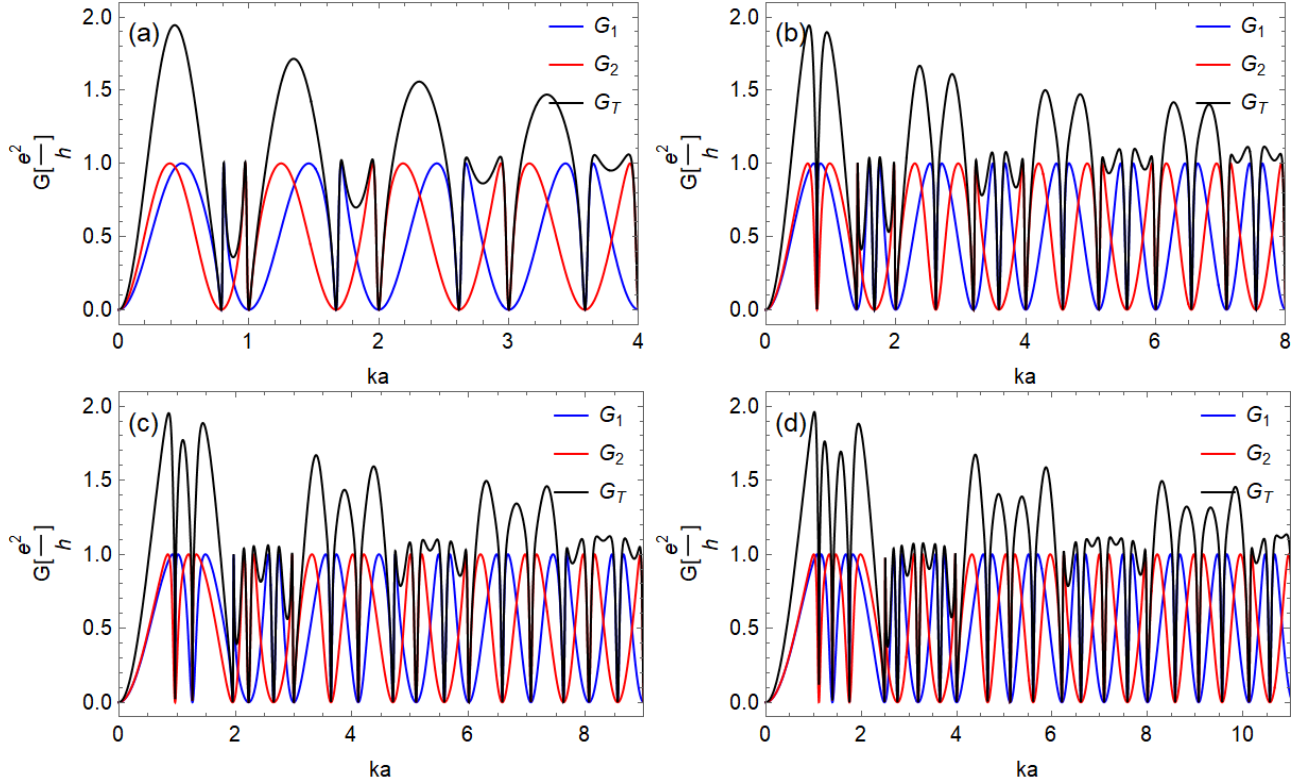


Fig. 4.8. Gráficas de conductancia en función de ka desde una a cuatro impurezas para simetría axial $\theta = \Delta\phi/2$, $\Phi = 0.15\Phi_0$, $\omega_{SO} \approx 1.12\Omega$ y un potencial $V_0 = 1[\hbar^2/m^*a^2]$.

condiciones de borde. De esto, la ecuación trascendental se modifica según

$$\cos(\Delta\phi a(\Delta k^\mu - K)) = \cos(ka\Delta\phi) + \frac{mV_0}{k\hbar^2} \sin(ka\Delta\phi) \quad (4.24)$$

donde Ka es entero.

El mismo corrimiento puede ser visto sobre las energías resonantes. Sin embargo, la división por corrientes en sentido horario-antihorario ya no es tan explícita. Esto puede entenderse de la necesidad de la superposición de ambas ondas viajeras. A diferencia del anillo puro las impurezas no permiten la existencia de estas ondas en una sola dirección, pues debido a las condiciones impuestas, esto implicaría una amortiguación de la onda, o bien un k imaginario, lo cual es inadmisibles.

La Fig. (4.8) muestra la conductancia en función de ka para distintos números de impurezas cuando hay campo magnético y campo de Rashba presente. Observamos que a pesar de la simetría axial se forman perfiles Fano en cada una de las polarizaciones debido al corrimiento de las resonancias. En específico, se aprecia que cierto patrón de agrupación se forma en la conductancia total, siendo el máximo de los perfiles atenuado a mayores energías $ka \gg aV_0$, en concordancia con el límite de una perturbación pequeña de las impurezas y una superposición de ambas ondas viajeras como en el anillo puro. Por otro lado, se aprecia que para las conductancias

polarizadas, nuevas energías resonantes aparecen en presencia de los campos, al igual que la división por ondas viajeras en sentido horario-antihorario. Formalmente éstas se encuentran debido a los ceros del polinomio de Chebyshev de segundo tipo U_{N-1} (Ec. (4.1)) y pueden ser tratadas mediante la expansión en series utilizadas anteriormente.

Discusión

Este trabajo ha sido llevado a cabo estudiando en principio cada sistema por separado, los que incluyen un anillo puro, un anillo con campos externos y un anillo con impurezas distribuidas simétricamente, los cuales según hemos demostrado se explican según la ecuación generalizada de transmisión polarizada. Como es de intuir, el factor en común es la manera en que éstos se acoplan al canal y en consecuencia, es lo que nos ha permitido comprender en qué situaciones la transmisión es máxima o nula. No obstante, esto no siempre es tan claro, debido a que comúnmente los anillos unidimensionales se estudian considerando la configuración original de Aharonov-Bohm de dos caminos y esto modifica en gran parte la manera en que se efectúa el transporte. En este contexto, el efecto Aharonov-Bohm, el efecto de acoplamiento espín órbita de Rashba y la formación de resonancias Fano han sido reportados, aunque hasta donde el autor conoce, han sido estudiados por separado (al menos para sistemas continuos). Sobre éste último, el colapso y su relación con los estados ligados han sido descritos por la expansión en series tratadas en esta tesis, siguiendo la línea de que para ciertos parámetros la resonancia y antiresonancia pueden coincidir en su energía o vector de onda característico, dando como resultado una transmisión indefinida. Sin embargo, esto no explica por qué la interferencia solo ocurre entre estos dos estados y no involucra los estados intermedios, ni por qué la interferencia sigue ocurriendo a pesar de que no coincidan precisamente. En este sistema interpretamos este fenómeno bajo el enfoque de la respuesta del sistema a energías específicas. Según mencionamos el estado resonante se correspondía cuando las corrientes del anillo son conservadas, lo que equivale a describir el sistema desacoplado, mientras que por otro lado, el estado antiresonante resultaba cuando el acople servía como un nodo. De esta manera, todos los estados intermedios vendrían siendo configuraciones donde las corrientes se intercambian entre el canal o el anillo, o bien donde el sistema se adapta para conservar las corrientes. Esta facultad adaptativa explicaría que no se produzca la interferencia, ya que no se atribuye a un estado del transporte ni a una situación física específica. Luego, bajo el enfoque de Fano, solo los niveles discretos del anillo interferirían con el transporte directo sobre el canal debido al acople, y así, cuando se forme el nodo, la respuesta del sistema será la de anular la corriente sobre el canal, localizándola por completo sobre el anillo. Este mismo argumento ayudaría a explicar que el fenómeno de estados ligados en el continuo de ondas irradiadas ocurra sobre el anillo y que no se dé en cualquier tipo de geometrías, ya que estos estados asociados a subsistemas

distintos estarían protegidos o conservados. Esto último implicaría que no necesariamente la interferencia tenga que llevarse a cabo entre estados resonantes y antiresonantes.

El enfoque de la respuesta del sistema a energías específicas ha sido de gran utilidad en la comprensión del transporte a las energías cuantizadas del anillo desacoplado. Destacamos esto ya que a priori no es posible establecer este resultado a partir de la resolución con las funciones de onda solución y las condiciones de borde. En sí, esto se demuestra al analizar la expresión de transmisión correspondiente, lo cual a su vez, se verificó por las propiedades de los polinomios estudiados. Como es posible observar, esta propiedad es general mientras la función de onda sea suave y continua sobre el contacto y por lo tanto, podemos argumentar que la misma situación ocurriría si las impurezas localizadas estuviesen distribuidas aleatoriamente o incluso si un potencial $U(\phi)$ sea aplicado sobre el anillo (mientras mantenga el comportamiento mencionado). Por otro lado, la formación de la antiresonancia no es tan trivial y no se obtiene directamente analizando un subsistema por separado. Es más, según hemos estudiado esto podría afectar directamente la formación de estados ligados, ya que hasta donde hemos analizado siempre han estado asociados a configuraciones simétricas, ya sea geométricamente o sobre el vector de onda para ondas viajeras en sentido horario y antihorario. Sin embargo, esto no puede ser confirmado según lo desarrollado en esta tesis.

El modelo utilizado tiene diferentes limitaciones para la práctica. Entre ellas encontramos la naturaleza de las impurezas, donde no necesariamente puedan modelarse localmente ni conservarse los modos, y por otra parte, los campos externos localizados que afecten puramente la zona intermedia del anillo. Por supuesto, esto puede darse bajo ciertas condiciones y pueden incluirse en el modelo, en especial, extendiendo al formalismo de Landauer-Büttiker. Por otro lado, los quasi-estados ligados en el continuo muestran consecuencias directas sobre el método utilizado al producir un cambio repentino en las conductancias, por lo que la diferencia de potencial entre los contactos debe ser muy pequeña. En cualquier caso, de medir directamente estos efectos, sería una muestra directa de que el transporte se está efectuando de manera coherente y que la comprensión de la conductancia mediante la teoría de dispersión es un proceso físico genuino.

Conclusión

Hemos estudiado el transporte electrónico de un anillo unidimensional de acople tangencial en presencia de campo magnético y eléctrico transversal e impurezas elásticas localizadas. Aplicando el formalismo de Landauer y la teoría de la dispersión, encontramos que la conductancia de este sistema contiene propiedades generales que se conservan al considerar las distintas configuraciones. Estas son en particular, los estados extremos del transporte, los cuales pueden atribuirse a los estados del sistema desacoplado y la formación de ondas estacionarias con respecto al acople. Así mismo, reportamos la formación de (quasi)estados ligados en el continuo para configuraciones simétricas, los cuales fueron caracterizados al analizar su aparición en resonancias tipo Fano.

Interpretamos la formación de los estados ligados en el continuo debido a interferencias formadas entre los niveles discretos del anillo y el transporte directo a través del canal debido al acople. Suponemos que estos estados son los únicos que interfieren debido a que son conservados o protegidos, lo que explicaría también que la ligadura ocurra sobre el anillo y que los estados ligados en el continuo no se den para cualquier tipo de geometría. Por otro lado, por medio de analizar la respuesta del sistema a energías específicas extendemos el mismo comportamiento resonante a impurezas localizadas aleatoriamente o si un potencial $U(\phi)$ sobre el anillo contuviera soluciones continuas y suaves sobre el contacto.

En base a los resultados obtenidos, proponemos este dispositivo por su posible aplicación como polarizador de espín y como objeto de estudio de estados ligados en el continuo debido a la sensibilidad del sistema y debido a que sería una muestra directa del transporte coherente. Como trabajo futuro se propone estudiar la relación entre simetría, estados ligados y las resonancias Fano, además de las condiciones donde los estados ligados puedan presentarse.

Referencias

- [1] Rolf Landauer. “Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices”. En: *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics* 21.172 (1970), págs. 863-867. URL: <https://doi.org/10.1080/14786437008238472>.
- [2] Rolf Landauer. “Conductance from transmission: common sense points”. En: *Physica Scripta* 1992.T42 (1992), pág. 110. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/1992/T42/020>.
- [3] Aaron Szafer y A. Douglas Stone. “Theory of Quantum Conduction through a Constriction”. En: *Phys. Rev. Lett.* 62 (3 1989), págs. 300-303. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.62.300>.
- [4] B. J. van Wees et al. “Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas”. En: *Phys. Rev. Lett.* 60 (9 1988), págs. 848-850. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.848>.
- [5] D A Wharam et al. “One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance”. En: *Journal of Physics C: Solid State Physics* 21.8 (1988), pág. L209. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0022-3719/21/8/002>.
- [6] Y. Aharonov y D. Bohm. “Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory”. En: *Phys. Rev.* 115 (3 1959), págs. 485-491. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.485>.
- [7] R. G. Chambers. “Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux”. En: *Phys. Rev. Lett.* 5 (1 1960), págs. 3-5. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.5.3>.
- [8] Nobuyuki Osakabe et al. “Experimental confirmation of Aharonov-Bohm effect using a toroidal magnetic field confined by a superconductor”. En: *Phys. Rev. A* 34 (2 1986), págs. 815-822. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.34.815>.
- [9] Adrian Bachtold et al. “Aharonov–Bohm oscillations in carbon nanotubes”. En: *Nature* 397.6721 (1999), págs. 673-675. URL: <https://doi.org/10.1038/17755>.
- [10] Michael Victor Berry. “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes”. En: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 392.1802 (1984), págs. 45-57. URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1984.0023>.

- [11] F. E. Meijer, A. F. Morpurgo y T. M. Klapwijk. “One-dimensional ring in the presence of Rashba spin-orbit interaction: Derivation of the correct Hamiltonian”. En: *Phys. Rev. B* 66 (3 2002), pág. 033107. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.66.033107>.
- [12] Yu. A. Bychkov y É. I. Rashba. “Properties of a 2D electron gas with lifted spectral degeneracy”. En: *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 39 (1984), pág. 78.
- [13] Ugo Fano. “Sullo spettro di assorbimento dei gas nobili presso il limite dello spettro d’arco”. En: *Il Nuovo Cimento (1924-1942)* 12.3 (1935), págs. 154-161. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02958288>.
- [14] U. Fano. “Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts”. En: *Phys. Rev.* 124 (6 1961), págs. 1866-1878. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.1866>.
- [15] J. von Neumann y E. P. Wigner. *Über merkwürdige diskrete Eigenwerte*. Ed. por Arthur S. Wightman. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1993, págs. 291-293. ISBN: 978-3-662-02781-3. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-02781-3_19.
- [16] B. Molnár, F. M. Peeters y P. Vasilopoulos. “Spin-dependent magnetotransport through a ring due to spin-orbit interaction”. En: *Phys. Rev. B* 69 (15 2004), pág. 155335. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.69.155335>.
- [17] J. Stanley Griffith. “A free-electron theory of conjugated molecules. Part 1.—Polycyclic hydrocarbons”. En: *Transactions of the Faraday Society* 49.0 (1953), págs. 345-351. ISSN: 0014-7672. URL: <https://doi.org/10.1039/TF9534900345>.
- [18] David J. Griffiths y Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3.^a ed. Cambridge University Press, 2018. Cap. 5, págs. 220-224.
- [19] Khee-Kyun Voo y Chon Saar Chu. “Fano resonance in transport through a mesoscopic two-lead ring”. En: *Phys. Rev. B* 72 (16 2005), pág. 165307. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.72.165307>.
- [20] J. W. González et al. “Transport properties of graphene quantum dots”. En: *Phys. Rev. B* 83 (15 2011), pág. 155450. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.83.155450>.

