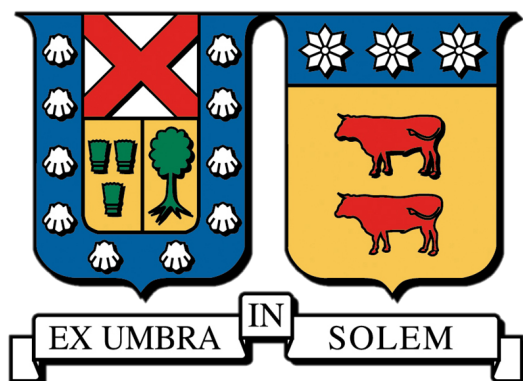


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

VALPARAISO-CHILE



Estudio de la Electrodinámica Generalizada de Podolsky

BENJAMÍN GOUDEAU MARTINEZ

PROYECTO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN FÍSICA

PROFESOR GUÍA: ALFONSO ZERWEKH

PROFESORES CO-REFERENTES:

MARAT SIDDIKOV

RODOLFO GALLARDO

MARZO-2024

Resumen

Cuando uno quiere generalizar la electrodinámica clásica a partir de su lagrangiano y al mismo tiempo conservar la linealidad de la teoría, uno encuentra varias propuestas como son las de Procca y la de Podolsky. En esta investigación, nos concentraremos en la propuesta de Podolsky, donde investigaremos, entre otras cosas, las nuevas ecuaciones de campo obtenidas y veremos como esto resuelve el problema de la energía de la carga puntual. También discutiremos brevemente el nuevo propagador del fotón para esta teoría.

Abstract

When one wants to generalize classical electrodynamics starting from its Lagrangian while simultaneously preserving the linearity of the theory, several proposals are encountered, such as those of Procca and Podolsky. In this research, we will focus on Podolsky's proposal, where we will investigate, among other things, the new field equations obtained and see how this resolves the problem of the energy of the point charge. We will also briefly discuss the new photon propagator for this theory.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todos mis profesores que aportaron en mi educación hasta este momento y un especial agradecimiento a mi profesora de física en el colegio, quién es la que me introdujo a los diversos formalismos de la física.

Quiero agradecer a mis padres quienes me han apoyado en todo lo que he necesitado y específicamente a mi padre, quién cultivó el pensamiento científico en mí, sin mí padre no hubiera podido estudiar lo que amo.

Tabla de Contenidos

1	Introducción	1
1.1	La electrodinámica de Maxwell	1
1.2	Ondas en la teoria de Maxwell	2
1.3	La carga puntual.	3
1.4	La electrodinámica de Podolsky	4
2	Marco Teórico	5
2.1	Nuevo lagrangiano	5
2.2	Ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianos con segundas derivadas.	5
2.3	Tensor momento-energía para lagrangianos con segundas derivadas.	6
2.4	Propagadores	8
3	Resultados	10
3.1	Ecuaciones de campo para lagrangiano de Podolsky.	10
3.2	Tensor energía-momentum en teoría de Podolsky	14
3.3	Ondas	17
3.4	Nuevo propagador	19
3.5	Desviaciones en la energía del átomo de hidrógeno	20
4	Conclusiones	22

Glosario

Símbolo	Significado
$\eta^{\mu\nu}$	Métrica de Minkowski con signatura $(+, -, -, -)$
A^μ	4-vector potencial electromagnético, de la forma $(\phi, \vec{A})$
$F^{\mu\nu}$	Tensor electromagnético, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$
J^μ	4-vector corriente de la forma $(\rho, \vec{j})$
q	Carga fundamental

Capítulo 1

Introducción

1.1 La electrodinámica de Maxwell

Antes de hablar de la generalización propuesta por Podolsky, revisaremos las principales características de la electrodinámica de Maxwell y los fenómenos que podemos encontrar en ella, partiremos mostrando qué es invariante de gauge, mediante su densidad lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu.$$

La transformación de gauge toma la forma $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda$, donde Λ es una función de x^μ , usando esto podemos ver que el tensor electromagnético es invariante de gauge, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu \\ &= \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \Lambda) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \Lambda), \end{aligned}$$

suponiendo que las derivadas conmutan,

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \Lambda \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &= F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Usando esta información veremos cómo cambia el lagrangiano con una transformación de gauge,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - J^\mu A'_\mu \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu(A_\mu - \partial_\mu\Lambda) \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu - J^\mu\partial_\mu\Lambda \\
&= \mathcal{L} - J^\mu\partial_\mu\Lambda,
\end{aligned}$$

esto escrito de otra forma es $\delta\mathcal{L} = -J^\mu\partial_\mu\Lambda$. Podemos reescribir esto recordando que el lagrangiano esta dentro de una integral, por lo que podemos integrar por partes y suponer que J^μ se anula en los bordes. Con esto la expresión queda,

$$\delta\mathcal{L} = \Lambda\partial_\mu J^\mu.$$

Podemos exigir que la simetría de gauge sea una simetría del lagrangiano, de esto concluimos,

$$\partial_\mu J^\mu = 0,$$

vemos que la cantidad conservada de la simetría de gauge es el cuadrivector corriente, en otras palabras, la conservación de la carga es consecuencia de la simetría de gauge de la teoría.

Otra característica importante de la teoría Maxwelliana: es una teoría lineal, esto significa que las ecuaciones de campo que contiene son ecuaciones diferenciales lineales, esto se ve explícitamente en las ecuaciones de campo, las cuales son,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \tag{1.1}$$

esta es la forma covariante de la ley de Gauss y la ley de Ampère, en otras palabras las leyes que relacionan los campos con sus fuentes, también podemos ver rápidamente que las ecuaciones de campo son invariantes de gauge ya que $F^{\mu\nu}$ es invariante de gauge.

1.2 Ondas en la teoria de Maxwell

Ahora hablaremos de los tipos de ondas que predice la teoría de Maxwell, para esto dejaremos la ecuación 1.1, en términos de A^μ , ya que vimos que las ecuaciones de campo son invariante de gauge las escribiremos en el gauge de Lorenz,

$$\square A^\mu = 0, \tag{1.2}$$

donde $\square$ es el operador D'Alembert que en notación no covariante es $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$. Suponiendo que la solución es una onda plana de la forma $A^\mu = A_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$, tenemos,

$$\square A^\mu = A_0 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} = 0,$$

Para que se cumpla la ecuación anterior se debe cumplir que,

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

despejando k , tenemos,

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Vemos que obtenemos la relación de dispersión a la que estamos acostumbrados. Si calculamos la energía de esta onda a través de la relación $E = \hbar\omega$, tenemos,

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega \\ &= \hbar ck \\ &= cp. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Si comparamos esto con la formula de Einstein para la energía vemos que esta es una onda que representa una partícula sin masa.

1.3 La carga puntual.

Ahora calcularemos el campo eléctrico generado por una partícula puntual y su autoenergía, para el campo eléctrico usaremos la ley de Gauss,

$$\nabla \cdot E = 0.$$

Suponiendo simetría esférica, obtenemos la siguiente solución,

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{r^2} \hat{r}, \tag{1.4}$$

vemos que esta solución es en efecto finita para todo r excepto en 0, donde diverge. Usando este campo calcularemos la autoenergía de la carga puntual, la expresión que usaremos es,

$$U = \int H dV,$$

donde H es el hamiltoniano del sistema, el hamiltoniano general para un sistema electromagnético es,

$$H = \frac{1}{2}(E^2 + B^2).$$

Usando esta expresión con el campo eléctrico ya calculado y $B = 0$, ya que la carga es estacionaria, tenemos,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int E^2 dV \\ &= \frac{q^2}{2} \int \frac{1}{r^4} dV \\ &= 4\pi q^2 \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= -4\pi q^2 \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{0} \right) \\ &= \infty. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Como podemos ver la autoenergía para una carga puntual diverge, esto es uno de los problemas que soluciona la generalización de Podolsky, como veremos en los capítulos siguientes.

1.4 La electrodinámica de Podolsky

Al buscar una generalización de la electrodinámica clásica uno preferiría una teoría que conserve la mayoría las propiedades de la teoría Maxwelliana, como el carácter lineal de las ecuaciones de campo o la invariancia de gauge. La electrodinámica de Podolsky [1], propuesta a principios de los años cuarenta, es una generalización de la electrodinámica clásica la cual busca que la teoría mantenga un carácter lineal, esto lo consigue modificando el lagrangiano clásico agregando términos proporcionales a las segundas derivadas de los campos, de la siguiente manera,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu + \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\rho F_{\mu\rho},$$

con esto se obtienen ecuaciones de campo con un orden mayor a dos, dando como consecuencia un resultado finito para el cálculo de la energía de una carga puntual. Esto, además conlleva otros cambios, uno de los principales es la aparición de un modo masivo del fotón, veremos que puede significar esto en los próximos capítulos.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Nuevo lagrangiano

El lagrangiano propuesto es,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu + \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\rho F_{\mu\rho},$$

inmediatamente vemos que este lagrangiano presenta segundas derivadas de los campos, por lo que tendremos que derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange, al igual que una expresión para el tensor momento energía, para lagrangianos de este tipo, esto lo haremos en la siguiente parte.

Como se vio en la sección anterior, $F^{\mu\nu}$ es invariante de gauge por lo que, al igual que el lagrangiano de la teoría Maxwelliana, la variación del lagrangiano es la misma $J^\mu\partial_\mu\Lambda$ ante una transformación de gauge, por lo tanto, al igual que la teoría Maxwelliana en la teoría de Podolsky, también se conserva la carga y por ende es invariante de gauge.

2.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianos con segundas derivadas.

Puesto que el lagrangiano generalizado presenta segundas derivadas en los campos, derivaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano de este tipo. Ya que normalmente solo se toma en cuenta la variación del lagrangiano hasta la primera derivada del campo. Empezamos enunciando el principio de mínima acción, como se ve en la ecuación 2.1,

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi) dx^4 = 0, \quad (2.1)$$

usando la expresión de la variación del lagrangiano en la ecuación 2.1, la variación de la acción queda,

$$\delta S = \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta (\partial_\mu \varphi) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \delta (\partial_\nu \partial_\mu \varphi) dx^4. \quad (2.2)$$

Suponiendo que δ y ∂ conmutan e integrando por partes el primer y el segundo termino, tenemos,

$$\int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \partial_\mu (\delta \varphi) dx^4 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \Big|_{borde} - \int \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \varphi dx^4, \quad (2.3)$$

$$\int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \partial_\nu \partial_\mu (\delta \varphi) dx^4 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \partial_\mu (\delta \varphi) \Big|_{borde} - \partial_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \Big|_{borde} + \int \partial_\nu \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \delta \varphi dx^4, \quad (2.4)$$

usando las expresiones 2.3 y 2.4 en 2.2, se obtiene,

$$\delta S = \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \varphi + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \delta \varphi dx^4 = 0.$$

Ya que la integral es 0 y tiene que serlo para cualquier variación de φ , esto implica que el integrando debe ser 0, o sea,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} = 0. \quad (2.5)$$

Estas son las ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano con segundas derivadas de un campo escalar, con un procedimiento similar se puede ver que para el caso de un campo vectorial, son,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_\lambda} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi_\lambda} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi_\lambda} = 0. \quad (2.6)$$

2.3 Tensor momento-energía para lagrangianos con segundas derivadas.

Para demostrar que la autoenergía de una carga puntual ya no es infinita usaremos la componente 00 del tensor momento energía, por lo que necesitaremos derivar una expresión para el mismo para un lagrangiano con segundas derivadas. Partimos suponiendo que $\delta \varphi$ es una simetría de la acción, o sea,

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu B^\mu,$$

usando la expresión de la variación del lagrangiano, tenemos,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \partial_\mu (\delta \varphi) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \partial_\nu \partial_\mu (\delta \varphi) = \partial_\mu B^\mu,$$

usando 2.5 en la expresión anterior, tenemos,

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \varphi - \partial_\nu \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta (\partial_\mu \varphi) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \delta (\partial_\nu \partial_\mu \varphi) = \partial_\mu B^\mu. \quad (2.7)$$

El primer y el tercer termino se pueden escribir como una derivada total,

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \right) - \partial_\nu \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \partial_\mu \varphi} \delta (\partial_\nu \partial_\mu \varphi) = \partial_\mu B^\mu,$$

ahora escribimos los dos últimos términos como una derivada total de la siguiente manera,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \delta (\partial_\alpha \partial_\mu \varphi) - \partial_\alpha \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \delta \varphi = \partial_\mu \left(\partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \right) - 2 \partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \right) \delta \varphi \right),$$

con esto 2.7 se puede escribir como,

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \varphi + \partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \right) - 2 \partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \right) \delta \varphi \right) = \partial_\mu B^\mu.$$

Para transformaciones infinitesimales, o sea $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$, tenemos que,

$$\begin{aligned} \delta \varphi &= \xi^\nu \partial_\nu \varphi \\ B^\mu &= \xi^\mu \mathcal{L}, \end{aligned}$$

usando esto tenemos:

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \xi^\nu \partial_\nu \varphi + \partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \xi^\nu \partial_\nu \varphi \right) - 2 \partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \right) \xi^\nu \partial_\nu \varphi - \xi^\mu \mathcal{L} \right) = 0,$$

ya que ξ^ν es constante puede salir de las derivadas, haciendo esto y factorizando por ξ_ν , tenemos,

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \partial^\nu \varphi + \partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \partial^\nu \varphi \right) - 2 \partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \right) \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0,$$

con esto encontramos una cantidad que se conserva, la cual es el tensor momento energía,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \partial^\nu \varphi + \partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \partial^\nu \varphi \right) - 2 \partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha \partial_\mu \varphi} \right) \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Nuevamente con un procedimiento análogo podemos obtener el tensor momento energía para campos vectoriales,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_\lambda}\partial^\nu\varphi_\lambda + \partial_\alpha\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\alpha\partial_\mu\varphi_\lambda}\partial^\nu\varphi_\lambda\right) - 2\partial_\alpha\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\alpha\partial_\mu\varphi_\lambda}\right)\partial^\nu\varphi_\lambda - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

2.4 Propagadores

En teoría cuántica de campos un propagador es una función que indica la amplitud de probabilidad que una partícula viaje con una cierta energía y momento, el modulo cuadrado de esta función nos dirá la densidad de probabilidad que la partícula viaje con una cierta energía y momento. Como ejemplo de un propagador, calcularemos el propagador del fotón en la teoría Maxwelliana, partimos con la ecuación de campo en el gauge de Lorenz,

$$\square A_\lambda = J_\lambda.$$

El propagador será la función de Green de esta ecuación, en el espacio de momentum, la función de Green en el espacio de posiciones debe cumplir,

$$\eta^{\mu\nu}\square\Delta_{\nu\alpha}(x-x') = i\delta^{(4)}(x-x')\delta^\mu_\alpha. \quad (2.8)$$

Recordamos que la relación entre las funciones de Green es a través de la transformada de Fourier,

$$\Delta_{\nu\alpha}(x-x') = \int e^{-ikx}\Delta_{\nu\alpha}(k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4},$$

también recordamos que la delta Dirac se puede escribir como,

$$\delta^{(4)}(x-x') = \int e^{-ikx}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}.$$

Reemplazamos estas expresiones en 2.8,

$$-\int e^{-ikx}\eta^{\mu\nu}k^2\Delta_{\nu\alpha}(k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4} = i\delta^\mu_\alpha\int e^{-ikx}\frac{d^4k}{(2\pi)^4},$$

igualamos lo que esta dentro de las integrales,

$$-\eta^{\mu\nu}k^2\Delta_{\nu\alpha}(k) = i\delta^\mu_\alpha,$$

multiplicamos ambos lados por $\eta_{\beta\mu}$ y despejamos la función de Green,

$$\Delta_{\beta\alpha}(k) = -\frac{i\eta_{\beta\alpha}}{k^2}.$$

Este es el propagador del fotón en la teoría Maxwelliana.

Capítulo 3

Resultados

3.1 Ecuaciones de campo para lagrangiano de Podolsky.

El lagrangiano propuesto es,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu + \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\rho F_{\mu\rho},$$

con este lagrangiano y la ecuación 2.6 obtendremos las ecuaciones de campo, con esto tendremos que el primer término es,

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\lambda} &= -J^\mu \frac{\delta A_\mu}{\delta A_\lambda} \\ &= -J^\mu \delta_\mu^\lambda \\ &= -J^\lambda.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Para el segundo término tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\alpha A_\lambda} &= -\frac{1}{4}\frac{\delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{\delta\partial_\alpha A_\lambda} \\ &= -\frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\frac{\delta F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}}{\delta\partial_\alpha A_\lambda} \\ &= -\frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\left(\frac{\delta F_{\mu\nu}}{\delta\partial_\alpha A_\lambda}F_{\sigma\rho} + F_{\mu\nu}\frac{\delta F_{\sigma\rho}}{\delta\partial_\alpha A_\lambda}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\left(\left(\frac{\delta\partial_\mu A_\nu}{\delta\partial_\alpha A_\lambda} - \frac{\delta\partial_\nu A_\mu}{\delta\partial_\alpha A_\lambda}\right)F_{\sigma\rho} + F_{\mu\nu}\left(\frac{\delta\partial_\sigma A_\rho}{\delta\partial_\alpha A_\lambda} - \frac{\delta\partial_\rho A_\sigma}{\delta\partial_\alpha A_\lambda}\right)\right)\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha A_\lambda} &= -\frac{1}{4} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} \left((\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\lambda - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\lambda) F_{\sigma\rho} + F_{\mu\nu} (\delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\lambda - \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\lambda) \right) \\
&= -\frac{1}{4} \left((\eta^{\alpha\sigma} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\lambda\sigma} \eta^{\alpha\rho}) F_{\sigma\rho} + F_{\mu\nu} (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\alpha}) \right) \\
&= -\frac{1}{4} (F^{\alpha\lambda} - F^{\lambda\alpha} + F^{\alpha\lambda} - F^{\lambda\alpha}) \\
&= F^{\lambda\alpha},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

derivamos la expresi3n anterior,

$$\partial_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\alpha A_\lambda} = \partial_\alpha F^{\lambda\alpha}. \tag{3.4}$$

Para el tercer t3rmino se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} &= \frac{a^2}{2} \frac{\delta \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\gamma F_{\mu\gamma}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} \\
&= \frac{a^2}{2} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} \eta^{\xi\gamma} \frac{\delta \partial_\nu F_{\sigma\rho} \partial_\xi F_{\mu\gamma}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} \\
&= \frac{a^2}{2} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} \eta^{\xi\gamma} \left(\frac{\delta \partial_\nu F_{\sigma\rho}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} \partial_\xi F_{\mu\gamma} + \partial_\nu F_{\sigma\rho} \frac{\delta \partial_\xi F_{\mu\gamma}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} \right) \\
&= \frac{a^2}{2} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} \eta^{\xi\gamma} \left(\left(\frac{\delta \partial_\nu \partial_\sigma A_\rho}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} - \frac{\delta \partial_\nu \partial_\rho A_\sigma}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} \right) \partial_\xi F_{\mu\gamma} + \partial_\nu F_{\sigma\rho} \left(\frac{\delta \partial_\xi \partial_\mu A_\gamma}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} - \frac{\delta \partial_\xi \partial_\gamma A_\mu}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} \right) \right),
\end{aligned}$$

en el siguiente paso hay que tener en cuenta que el t3rmino $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda}$ es sim3trico en los 3ndices α y β , ya que las derivadas conmutan, esto se ve reflejado en que las expresiones del tipo $\frac{\delta \partial_\nu \partial_\sigma A_\rho}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda}$ son igual a $\delta_\nu^\beta \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\lambda + \delta_\sigma^\beta \delta_\nu^\alpha \delta_\rho^\lambda$ en ves de $\delta_\nu^\beta \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\lambda$, ya que el primero es sim3trico en α y β y el segundo no, esto ser3 importante m3s adelante. Tomando esto en cuenta tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} &= \frac{a^2}{2} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} \eta^{\xi\gamma} \left((\delta_\nu^\beta \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\lambda + \delta_\sigma^\beta \delta_\nu^\alpha \delta_\rho^\lambda - \delta_\nu^\beta \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\lambda - \delta_\rho^\beta \delta_\nu^\alpha \delta_\sigma^\lambda) \partial_\xi F_{\mu\gamma} \right. \\
&\quad \left. + \partial_\nu F_{\sigma\rho} \left(\delta_\xi^\beta \delta_\mu^\alpha \delta_\gamma^\lambda + \delta_\mu^\beta \delta_\xi^\alpha \delta_\gamma^\lambda - \delta_\xi^\beta \delta_\gamma^\alpha \delta_\mu^\lambda - \delta_\gamma^\beta \delta_\xi^\alpha \delta_\mu^\lambda \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} &= \frac{a^2}{2} \left((\eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\lambda} \eta^{\xi\gamma} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\lambda} \eta^{\xi\gamma} - 2\eta^{\mu\lambda} \eta^{\beta\alpha} \eta^{\xi\gamma}) \partial_\xi F_{\mu\gamma} \right. \\
&\quad \left. + \partial_\nu F_{\sigma\rho} (\eta^{\alpha\sigma} \eta^{\nu\rho} \eta^{\beta\lambda} + \eta^{\beta\sigma} \eta^{\nu\rho} \eta^{\alpha\lambda} - 2\eta^{\lambda\sigma} \eta^{\nu\rho} \eta^{\beta\alpha}) \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} = \frac{a^2}{2} \left((\eta^{\beta\lambda} \partial_\xi F^{\alpha\xi} + \eta^{\alpha\lambda} \partial_\xi F^{\beta\xi} - 2\eta^{\beta\alpha} \partial_\xi F^{\lambda\xi}) + (\eta^{\beta\lambda} \partial_\nu F^{\alpha\nu} + \eta^{\alpha\lambda} \partial_\nu F^{\beta\nu} - 2\eta^{\beta\alpha} \partial_\nu F^{\lambda\nu}) \right)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} = a^2 \left(\eta^{\beta\lambda} \partial_\xi F^{\alpha\xi} + \eta^{\alpha\lambda} \partial_\xi F^{\beta\xi} - 2\eta^{\beta\alpha} \partial_\xi F^{\lambda\xi} \right). \quad (3.5)$$

Por lo visto anteriormente la expresión 3.5 es simétrica en los índices α y β , pero en el segundo paper de Podolsky [2], la expresión para este término no es simétrico en estos índices, esta diferencia va a provocar la aparición de un factor de $\sqrt{2}$ multiplicando la constante a . Derivando 3.5 dos veces tenemos,

$$\partial_\beta \partial_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} = a^2 \left(\partial^\lambda \partial_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\xi} + \partial^\lambda \partial_\beta \partial_\xi F^{\beta\xi} - 2\partial^2 \partial_\xi F^{\lambda\xi} \right),$$

observando esta expresión nos damos cuenta que el primer y segundo término son iguales y además iguales a 0, esto lo justificaremos por un argumento de simetría que veremos a continuación,

$$\begin{aligned} 2\partial_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\xi} &= \partial_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\xi} - \partial_\alpha \partial_\xi F^{\xi\alpha} \\ &= \partial_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\xi} - \partial_\xi \partial_\alpha F^{\xi\alpha} \\ &= \partial_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\xi} - \partial_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\xi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con esto tenemos que,

$$\partial_\beta \partial_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\beta \partial_\alpha A_\lambda} = -2a^2 \partial^2 \partial_\xi F^{\lambda\xi}. \quad (3.6)$$

Con esto reemplazamos las expresiones en 3.1, 3.4 y 3.6 en 2.6, obteniendo,

$$(1 + 2a^2 \square) \partial_\xi F^{\xi\lambda} = J^\lambda,$$

de esta ecuación se obtienen las leyes de Gauss y Ampère-Maxwell generalizadas,

$$\begin{aligned} (1 + 2a^2 \square) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, \\ (1 + 2a^2 \square) \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] &= \vec{j}. \end{aligned}$$

Para nuestro estudio solo usaremos la primera de estas expresiones para obtener el campo generado por una partícula puntual estacionaria. En este contexto, tenemos,

$$(1 - 2a^2 \nabla^2) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0.$$

Usaremos la relación $E = -\nabla\phi$ en la ecuación anterior para obtener,

$$(1 - 2a^2 \nabla^2) \nabla^2 \phi = 0, \quad (3.7)$$

para resolver esta ecuación supondremos que el potencial tiene simetría esférica y que es de la forma $\phi(r) = \frac{f(r)}{r}$, usando esto en 3.7 y aplicando los operadores, tenemos la siguiente ecuación diferencial para $f(r)$,

$$f''(r) - 2a^2 f^{(4)}(r) = 0,$$

haciendo el reemplazo $g(r) = f''(r)$, vemos que $g(r)$, cumple con una ecuación diferencial de resultado conocido, este siendo: $g(r) = c_1 e^{\frac{r}{\sqrt{2a}}} + c_2 e^{-\frac{r}{\sqrt{2a}}}$, con esto tenemos,

$$f''(r) = c_1 e^{\frac{r}{\sqrt{2a}}} + c_2 e^{-\frac{r}{\sqrt{2a}}},$$

integrando dos veces, tenemos,

$$f(r) = 2a^2 \left(c_1 e^{\frac{r}{\sqrt{2a}}} + c_2 e^{-\frac{r}{\sqrt{2a}}} \right) + rc_3 + c_4,$$

con esto vemos que el potencial eléctrico de una carga puntual es,

$$\phi(r) = 2a^2 \frac{\left(c_1 e^{\frac{r}{\sqrt{2a}}} + c_2 e^{-\frac{r}{\sqrt{2a}}} \right)}{r} + \frac{c_4}{r} + c_3,$$

de aquí podemos ver que si queremos que $\phi(r)$ sea finito cuando $r \rightarrow \infty$, c_1 tiene que ser igual a 0, además la constante c_3 la podemos ignorar ya que esta no afectará el campo eléctrico resultante, tomando en cuenta esto se tiene,

$$\phi(r) = 2a^2 \frac{c_2 e^{-\frac{r}{\sqrt{2a}}}}{r} + \frac{c_4}{r}.$$

Si queremos también que $\phi(r)$ sea finito cuando $r \rightarrow 0$, al tomar el limite nos damos cuenta que se tiene que cumplir $c_4 = -2a^2 c_2$, con esto tenemos,

$$\phi(r) = c_4 \frac{1 - e^{-\frac{r}{\sqrt{2a}}}}{r}, \quad (3.8)$$

con esto tenemos una solución que es finita en todo r y que se va a cero en el infinito, nos podemos dar cuenta que la constante c_4 es la carga de la carga puntual, con esto el campo eléctrico generado por una carga puntual es,

$$\vec{E}(r) = q \left(\frac{1 - e^{-\frac{r}{\sqrt{2a}}}}{r^2} - \frac{e^{-\frac{r}{\sqrt{2a}}}}{\sqrt{2a}r} \right) \hat{r}. \quad (3.9)$$

Vemos que este campo hereda las propiedades del potencial, o sea, es finito en todo r y se va a cero en el infinito, esto significa que el campo eléctrico tiene un valor $\frac{q}{4a^2}$ en $r = 0$, a diferencia del campo eléctrico de Maxwell que diverge en $r = 0$. En la Figura 3.1 vemos el comportamiento del campo para diferentes valores de a y se comparara con el campo obtenido en 1.4.

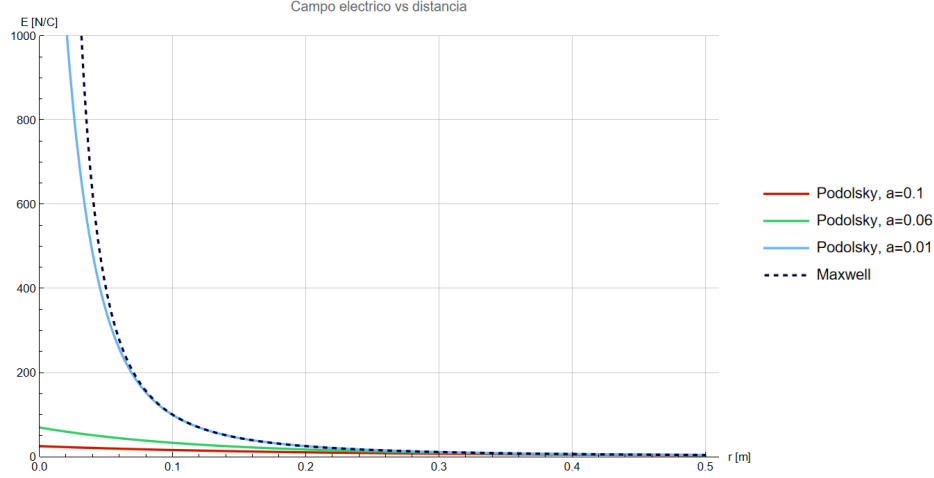


Figura 3.1: Gráfico de campo eléctrico vs. distancia para los campos de Maxwell y Podolsky para distintos valores de a

Como se puede ver en el gráfico para un valor de a de 0.01 el campo es casi idéntico al campo de Maxwell, tomando en cuenta que la constante a tiene que ser varios ordenes de magnitud más pequeña, como se ve en [3] y el campo de Posolsky se acerca cada vez más al campo de Maxwell para a pequeños, podemos deducir que el campo de Podolsky solo sería distinguible del campo de Maxwell a distancias muy pequeñas (del orden de a).

3.2 Tensor energía-momentum en teoría de Podolsky

Recordemos los resultados obtenidos en secciones anteriores,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_\lambda}\partial^\nu\varphi_\lambda + \partial_\alpha\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\alpha\partial_\mu\varphi_\lambda}\partial^\nu\varphi_\lambda\right) - 2\partial_\alpha\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\alpha\partial_\mu\varphi_\lambda}\right)\partial^\nu\varphi_\lambda - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A_\lambda} = F^{\lambda\mu}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\partial_\alpha A_\lambda} = a^2(\eta^{\mu\lambda}\partial_\xi F^{\alpha\xi} + \eta^{\alpha\lambda}\partial_\xi F^{\mu\xi} - 2\eta^{\mu\alpha}\partial_\xi F^{\lambda\xi}), \quad (3.12)$$

reemplazando 3.11 y 3.12, en 3.10, tenemos,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & F^{\lambda\mu}\partial^\nu A_\lambda + \partial_\alpha\left(a^2(\eta^{\mu\lambda}\partial_\xi F^{\alpha\xi} + \eta^{\alpha\lambda}\partial_\xi F^{\mu\xi} - 2\eta^{\mu\alpha}\partial_\xi F^{\lambda\xi})\partial^\nu A_\lambda\right) \\ & - 2\partial_\alpha\left(a^2(\eta^{\mu\lambda}\partial_\xi F^{\alpha\xi} + \eta^{\alpha\lambda}\partial_\xi F^{\mu\xi} - 2\eta^{\mu\alpha}\partial_\xi F^{\lambda\xi})\right)\partial^\nu A_\lambda \\ & + \eta^{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\rho F_{\mu\rho}\right), \end{aligned}$$

aplicamos la derivada en el segundo término,

$$T^{\mu\nu} = F^{\lambda\mu} \partial^\nu A_\lambda + a^2 (\eta^{\mu\lambda} \partial_\xi F^{\alpha\xi} + \eta^{\alpha\lambda} \partial_\xi F^{\mu\xi} - 2\eta^{\mu\alpha} \partial_\xi F^{\lambda\xi}) \partial_\alpha \partial^\nu A_\lambda \\ - a^2 \partial_\alpha (\eta^{\mu\lambda} \partial_\xi F^{\alpha\xi} + \eta^{\alpha\lambda} \partial_\xi F^{\mu\xi} - 2\eta^{\mu\alpha} \partial_\xi F^{\lambda\xi}) \partial^\nu A_\lambda + \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{a^2}{2} \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\mu\rho} \right),$$

ahora hacemos lo mismo con el tercer término, viendo que el primer elemento dentro del paréntesis es 0 por lo visto anteriormente, con esto, tenemos,

$$T^{\mu\nu} = F^{\lambda\mu} \partial^\nu A_\lambda + a^2 \partial_\xi F^{\alpha\xi} \partial_\alpha \partial^\nu A^\mu + a^2 \partial_\xi F^{\mu\xi} \partial_\alpha \partial^\nu A^\alpha - 2a^2 \partial_\xi F^{\lambda\xi} \partial^\mu \partial^\nu A_\lambda \\ - a^2 (\partial^\lambda \partial_\xi F^{\mu\xi} - 2\partial^\mu \partial_\xi F^{\lambda\xi}) \partial^\nu A_\lambda + \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{a^2}{2} \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\mu\rho} \right),$$

reordenamos la expresión, se tiene,

$$T^{\mu\nu} = (F^{\lambda\mu} - a^2 \partial^\lambda \partial_\xi F^{\mu\xi} + 2a^2 \partial^\mu \partial_\xi F^{\lambda\xi}) \partial^\nu A_\lambda + a^2 \partial_\xi F^{\alpha\xi} \partial_\alpha \partial^\nu A^\mu + a^2 \partial_\xi F^{\mu\xi} \partial_\alpha \partial^\nu A^\alpha \\ - 2a^2 \partial_\xi F^{\lambda\xi} \partial^\mu \partial^\nu A_\lambda + \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{a^2}{2} \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\mu\rho} \right).$$

Notamos que $T^{\mu\nu}$, escrito de esta forma no es simétrico, a continuación veremos si es invariante de gauge,

$$T'^{\mu\nu} = (F'^{\lambda\mu} - a^2 \partial^\lambda \partial_\xi F'^{\mu\xi} + 2a^2 \partial^\mu \partial_\xi F'^{\lambda\xi}) \partial^\nu A'_\lambda + a^2 \partial_\xi F'^{\alpha\xi} \partial_\alpha \partial^\nu A'^\mu + a^2 \partial_\xi F'^{\mu\xi} \partial_\alpha \partial^\nu A'^\alpha \\ - 2a^2 \partial_\xi F'^{\lambda\xi} \partial^\mu \partial^\nu A'_\lambda + \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} - \frac{a^2}{2} \partial_\nu F'^{\mu\nu} \partial^\rho F'_{\mu\rho} \right),$$

$$T'^{\mu\nu} = (F^{\lambda\mu} - a^2 \partial^\lambda \partial_\xi F^{\mu\xi} + 2a^2 \partial^\mu \partial_\xi F^{\lambda\xi}) \partial^\nu (A_\lambda - \partial_\lambda \Lambda) + a^2 \partial_\xi F^{\alpha\xi} \partial_\alpha \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \Lambda) \\ + a^2 \partial_\xi F^{\mu\xi} \partial_\alpha \partial^\nu (A^\alpha - \partial^\alpha \Lambda) - 2a^2 \partial_\xi F^{\lambda\xi} \partial^\mu \partial^\nu (A_\lambda - \partial_\lambda \Lambda) \\ + \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{a^2}{2} \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\mu\rho} \right),$$

distribuyendo los términos en paréntesis e identificando los términos que forman $T^{\mu\nu}$, tenemos,

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - (F^{\lambda\mu} - a^2 \partial^\lambda \partial_\xi F^{\mu\xi} + 2a^2 \partial^\mu \partial_\xi F^{\lambda\xi}) \partial^\nu \partial_\lambda \Lambda - a^2 \partial_\xi F^{\alpha\xi} \partial_\alpha \partial^\nu \partial^\mu \Lambda \\ - a^2 \partial_\xi F^{\mu\xi} \partial_\alpha \partial^\nu \partial^\alpha \Lambda + 2a^2 \partial_\xi F^{\lambda\xi} \partial^\mu \partial^\nu \partial_\lambda \Lambda.$$

Con esto vemos que $T^{\mu\nu}$ no es invariante de gauge, pero podemos reescribir el mismo para que lo sea, como se ve en [4], este nuevo tensor es,

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} + 2a^2 \left(F^{\mu\rho} \square F_\rho{}^\nu + F^{\nu\rho} \square F_\rho{}^\mu - \partial_\lambda F^{\mu\lambda} \partial_\rho F^{\nu\rho} \right) + \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F^{\rho\lambda} F_{\rho\lambda} + a^2 F^{\rho\lambda} \square F_{\rho\lambda} + a^2 \partial_\lambda F^{\sigma\lambda} \partial^\rho F_{\sigma\rho} \right),$$

con el tensor en esta forma vemos que ahora si es simétrico, invariante de gauge y con divergencia 0, a partir de esto calcularemos la componente 00,

$$T^{00} = F^0{}_\rho F^{\rho 0} + a^2 \left(F^{0\rho} \square F_\rho{}^0 + F^{0\rho} \square F_\rho{}^0 - \partial_\lambda F^{0\lambda} \partial_\rho F^{0\rho} \right) + \eta^{00} \left(\frac{1}{4} F^{\rho\lambda} F_{\rho\lambda} + a^2 F^{\rho\lambda} \square F_{\rho\lambda} + a^2 \partial_\lambda F^{\sigma\lambda} \partial^\rho F_{\sigma\rho} \right),$$

dejando esto en términos de los campos eléctrico y magnético, se tiene,

$$T^{00} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + 2a^2 E \square E - a^2 (\nabla \cdot E)^2 + 2a^2 B \square B - \left(\nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} \right)^2.$$

Llevando esto en el contexto de la electrostática tenemos,

$$T^{00} = \frac{1}{2} E^2 - 2a^2 E \cdot \nabla^2 E - a^2 (\nabla \cdot E)^2,$$

para reducir esta expresión usaremos una identidad del calculo vectorial,

$$\nabla^2 E = \nabla (\nabla \cdot E) - \nabla \times (\nabla \times E),$$

ya que estamos en electrostática la expresión anterior se reduce a,

$$\nabla^2 E = \nabla (\nabla \cdot E).$$

Ahora, usando un argumento en el paper original de Podolsky calcularemos $\nabla \cdot (E \nabla \cdot E)$ y lo igualaremos a 0,

$$\nabla \cdot (E \nabla \cdot E) = (\nabla \cdot E)^2 + E \cdot (\nabla (\nabla \cdot E)) = 0,$$

de esto podemos ver,

$$(\nabla \cdot E)^2 = -E \cdot (\nabla (\nabla \cdot E)),$$

usando la igualdad obtenida anteriormente,

$$(\nabla \cdot E)^2 = -E \cdot \nabla^2 E.$$

Reemplazando esto en la expresión del tensor, tenemos,

$$T^{00} = \frac{1}{2}E^2 + a^2 (\nabla \cdot E)^2,$$

con esto podemos calcular la energía de una partícula puntual, donde usaremos la expresión para el campo obtenida en 3.9,

$$U = \frac{1}{2} \int E^2 + 2a^2 (\nabla \cdot E)^2 dV,$$

el resultado de esta integral es,

$$U = \frac{q^2}{\sqrt{8}a}.$$

En [5] se intenta explicar la masa del electrón como consecuencia de su autoenergía electromagnética, si hacemos lo mismo con la autoenergía obtenida, tenemos,

$$m_e c^2 = \frac{q^2}{\sqrt{8}a},$$

$$m_e = \frac{q^2}{\sqrt{8}ac^2}.$$

Puesto que ya sabemos cuánto es la masa del electrón podemos obtener un valor para la constante a , para que la masa del electrón sea de origen puramente electromagnético, este valor tendría que ser $0.996[fm]$.

3.3 Ondas

Usando las ecuaciones de campo e imponiendo el gauge de Lorenz, o sea $\partial_\mu A^\mu = 0$, tenemos,

$$(1 + 2a^2 \square) \square A^\lambda = 0.$$

Suponiendo ondas planas de la forma $A^\lambda = A_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$, calcularemos la expresión $\square A^\lambda$,

$$\square A^\lambda = A_0 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t},$$

usando esto tenemos,

$$A_0 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + 2a^2 A_0 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} = 0,$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) + 2a^2 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^2 = 0,$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left(1 + 2a^2 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right) = 0,$$

vemos que esta ecuación tiene dos soluciones, cuando el primer término es 0 y cuando el segundo es 0. En el primer caso obtenemos la relación de dispersión esperada $k = \frac{\omega}{c}$ y en el otro, al despejar obtenemos,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{2a^2}. \quad (3.13)$$

Según la mecánica cuántica esta onda tendría una energía de,

$$E^2 = (\hbar\omega)^2,$$

despejando ω^2 de 3.13 y reemplazándolo en la ecuación anterior, se tiene,

$$E^2 = \frac{c^2 \hbar^2}{2a^2} + \hbar^2 c^2 k^2,$$

$$= \frac{c^2 \hbar^2}{2a^2} + c^2 p^2.$$

Si comparamos esto con la ecuación de Einstein para la energía, nos damos cuenta que esta onda tiene energía asociada a una masa, igualando los términos de masa, tenemos,

$$m^2 c^4 = \frac{c^2 \hbar^2}{2a^2},$$

despejando para la masa,

$$m = \frac{\hbar}{\sqrt{2}ac}.$$

Usando el valor de a obtenido suponiendo que la masa del electrón es de origen electromagnético, tenemos que la masa del modo masivo del fotón es: $140.063[MeV]$.

3.4 Nuevo propagador

Nuevamente usaremos las ecuaciones de campo y el gauge de Lorenz, obteniendo,

$$(1 + 2a^2 \square) \square A_\lambda = J_\lambda.$$

Ahora, el propagador sera la función de Green de esta ecuación, en el espacio de momentum, la función de Green en el espacio de posiciones debe cumplir,

$$\eta^{\mu\nu} (1 + 2a^2 \square) \square \Delta_{\nu\alpha} (x - x') = i\delta^{(4)} (x - x') \delta_\alpha^\mu,$$

como vimos, la relación entre las funciones de Green en los distintos espacios es a través de la trasformada de Fourier,

$$\Delta_{\nu\alpha} (x - x') = \int e^{-ikx} \Delta_{\nu\alpha}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4},$$

reemplazando esta definición y aplicando las derivadas, tenemos,

$$- \int e^{-ikx} \eta^{\mu\nu} (1 - 2a^2 k^2) k^2 \Delta_{\nu\alpha}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = i\delta_\alpha^\mu \int e^{-ikx} \frac{d^4k}{(2\pi)^4},$$

ya que tenemos dos integrales iguales los integrandos deben ser iguales,

$$-\eta^{\mu\nu} (1 - 2a^2 k^2) k^2 \Delta_{\nu\alpha}(k) = i\delta_\alpha^\mu,$$

despejando la funcion de Green:

$$\Delta_{\beta\alpha}(k) = -\frac{i\eta_{\beta\alpha}}{(1 - 2a^2 k^2) k^2}.$$

Al separar en fracciones parciales, la expresión queda,

$$\Delta_{\beta\alpha}(k) = -i\eta_{\beta\alpha} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \frac{1}{2a^2}} \right),$$

este es el nuevo propagador del fotón, el cual cuando $a = 0$ es igual al propagador del fotón en la teoría de Maxwelliana, visto en la sección 2.4.

3.5 Desviaciones en la energía del átomo de hidrógeno

Para buscar una desviación de la electrodinámica clásica veremos como cambia la energía del estado fundamental del hidrógeno usando el potencial visto en 3.8. Para esto usaremos el método variacional. El potencial de Podolsky es,

$$\phi(r) = -q_e \frac{1 - e^{-\frac{r}{\sqrt{2}a}}}{r},$$

donde q_e es la magnitud de la carga del electrón, con esto el hamiltoniano sería,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\phi(r).$$

La función de onda propuesta, suponiendo simetría esférica, es,

$$\psi(r) = Ne^{-\gamma r},$$

donde N es la constante de normalización, que es $N = \sqrt{\frac{\gamma^3}{\pi}}$, con esto la energía del estado fundamental sería,

$$E = \int \psi^*(r) \hat{H} \psi(r) = \frac{\gamma^2}{2m} - q_e^2 \gamma + q_e^2 \frac{4\gamma^3}{\left(2\gamma + \frac{1}{a\sqrt{2}}\right)^2},$$

ahora encontraremos el valor de γ que minimiza la energía, de la siguiente manera,

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = \frac{\gamma}{m} - q_e^2 - \frac{16q_e^2 \gamma^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}a} + 2\gamma\right)^3} + \frac{12q_e^2 \gamma^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}a} + 2\gamma\right)^2} = 0,$$

ya que sabemos que el valor de a tiene que ser pequeño usaremos la expansión de Taylor a primer orden en a en la expresión anterior, con esto se tiene,

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = \frac{\gamma}{m} - q_e^2 + O(a^2) = 0,$$

de esto tenemos que el valor de γ es $\gamma = mq_e^2$, evaluando esto en la expresión para la energía obtenemos,

$$E = -\frac{mq_e^4}{2} + \frac{4m^3 q_e^8}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}a} + 2mq_e^2\right)^2},$$

nuevamente usaremos la expansión de Taylor a segundo orden en a en el resultado,

$$E = -\frac{mq_e^4}{2} + 8m^3 q_e^8 a^2 + O(a^3).$$

Vemos que el resultado es una perturbación del resultado ya conocido, por lo que deberíamos esperar que el valor de a sea tal que la cantidad $8m^3q_e^8a^2$ sea menor que la incertidumbre de las mediciones de la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno, usando los valores de la literatura [6], vemos que tenemos una cota superior para el valor de a , $a \leq 3.93[fm]$.

Para determinar desviaciones del electromagnetismo clásico, específicamente, una masa no nula del fotón, en [7] se propuso un experimento basado del uso de un interferómetro. En base a estos resultados, en [3] se calculó que el valor de a debe ser de al menos $0.91[mm]$, para ser detectado en este experimento. Vemos que, cualquier desviación del electromagnetismo producida por el término de Podolsky sería indetectable por este experimento.

Capítulo 4

Conclusiones

En la búsqueda de una generalización lineal e invariante de gauge de la electrodinámica clásica llegamos a la electrodinámica de Podolsky en la cual encontramos solución a varios problemas de la electrodinámica clásica, como son la presencia de infinitos en el campo eléctrico y en la autoenergía de la carga puntual. En el modelo de Podolsky encontramos que el campo eléctrico de una carga puntual en $r = 0$ es $\frac{q}{4a^2}$ y su autoenergía es $\frac{q^2}{\sqrt{8}a}$, usando esto y suponiendo que la masa del electrón se debe a su autoenergía electromagnética obtuvimos que $a = 0.996[fm]$. Además se concluyo que la teoría presenta dos modos de propagación del fotón, el que predice la teoría clásica, mas un modo masivo. Con el valor de a encontrado este modo tendría una masa de $140.063[MeV]$, lamentablemente no se a detectado una partícula neutra de spin 1 con masa $140.063[MeV]$, por lo que explicar la masa del electrón por esta vía no es viable.

En la sección anterior vimos el cambio de la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno producido por el potencial de Podolsky, haciendo esto llegamos a que el valor de a tiene que ser $a \leq 3.93[fm]$ para que estas desviaciones no hayan sido detectadas. Se vio que usando el experimento visto en [7] se podría detectar perturbaciones si $a \geq 0.91[mm]$, por esto las perturbaciones pasarían indetectadas en este experimento.

Referencias

- [1] Boris Podolsky. A generalized electrodynamics part i—non-quantum. *Phys. Rev.*, 62:68–71, Jul 1942.
- [2] Boris Podolsky and Chihiro Kikuchi. A generalized electrodynamics part ii—quantum. *Phys. Rev.*, 65:228–235, Apr 1944.
- [3] De Melo C. a. M. Medeiros L. G. Pompeia P. J. Cuzinatto, R. R. How can one probe podolsky electrodynamics? *International Journal of Modern Physics*, 26(21):3641–3651, 2011.
- [4] Sales J. H. Thibes R. Oliveira, I. G. Bopp–podolsky scalar electrodynamics propagators and energy-momentum tensor in covariant and light-front coordinates. *Eur. Phys. J. Plus*, 135(713), 2020.
- [5] Infeld L. Born, M. Electromagnetic mass. *Nature*, 132(970), 1933.
- [6] Claude et al. Amsler. Review of particle physics. *Physics Letters B*, 667(1-5):1–6, 2008.
- [7] B. Neyenhuis, D. Christensen, and D. S. Durfee. Testing nonclassical theories of electromagnetism with ion interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 99:200401, Nov 2007.
- [8] Wolfram research, inc., mathematica, version 13.3, champaign, il (2023).