



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Obras Civiles

ESTUDIO DE LOS PARÁMETROS DEL SUELO Y SU INFLUENCIA EN EL DISEÑO DE FUNDACIONES DE MOLINOS SAG Y BOLAS

Memoria de Título presentada por

José Miguel Galleguillos Paredes

como requisito parcial para optar al título de la carrera de

Ingeniería Civil

Profesores guía
Héctor Urrutia González
Sergio Zuñiga Valdivieso
Fredy Aglony Díaz

Profesor Correferente
Cristian Emanuel Cruz Doggenweiler

Marzo 2026



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Estudio de los parámetros del suelo y su influencia en el diseño de fundaciones de molinos SAG y Bolas

Nombre del candidato(a): José Miguel Galleguillos Paredes

Carrera / Grado: Ingeniería civil en obras civiles

Campus: San Joaquín **Departamento:** Obras civiles

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Cristian Cruz, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

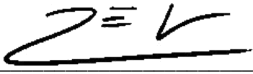
El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

6 meses 12 meses 2 años 3 años 5 años 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 11/05/2026 Firma: 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 11/05/2026 Firma: 

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.



ESTUDIO DE LOS PÁRAMETROS DEL SUELO Y SU INFLUENCIA EN EL DISEÑO DE FUNDACIONES DE MOLINOS SAG Y BOLAS

José Miguel Galleguillos Paredes¹, Héctor Urrutia², Sergio Zuñiga², Fredy Aglony², Cristián Cruz¹

¹ Universidad Técnica Federico Santa María

² Fluor Chile

Resumen

Los molinos industriales (SAG y Bolas) son equipos de alto costo cuya operación está fuertemente influenciada por su comportamiento vibratorio, el cual depende de diversos factores, siendo uno de los más relevantes la velocidad de propagación de ondas de corte en el suelo (V_s). Esta memoria tiene como objetivo evaluar cómo el valor de V_s y otros parámetros afectan la respuesta vibratoria del equipo, con el fin de determinar la factibilidad de fundar en suelos con V_s inferiores a 900 m/s, lo que permitiría reducir la profundidad de fundación y obtener optimización de recursos para aquellos proyectos en donde el estrato de roca sana se encuentra a una profundidad importante, determinando fuertemente el layout de la molienda.

La metodología consistió en calcular las amplitudes de vibración para distintos valores de V_s , y además variar otros parámetros como el coeficiente de Poisson, el tipo de fundación, la rigidez de los pedestales y las dimensiones del mat de fundación. Los resultados se compararon con los límites admisibles de amplitud establecidos por los proveedores de los equipos.

Los resultados indican que es posible fundar en suelos con V_s menores a 900 m/s, aunque cada proyecto debe evaluarse individualmente. Se observó que la variación del coeficiente de Poisson, la rigidez de los pedestales y el tipo de fundación tiene un impacto limitado en la respuesta vibratoria, mientras que aumentar el tamaño del mat de fundación puede ser beneficioso en suelos de baja rigidez. En suelos con altos valores de V_s , esta medida resulta poco efectiva. Finalmente, se concluye que elevar el nivel de sello de fundación representa una alternativa viable para optimizar costos sin comprometer el desempeño operacional.

Palabras claves: Velocidad de onda de corte, fundación de molinos, vibración, análisis dinámico de molinos, interacción suelo estructura.



1. Introducción

Tanto en el mundo como en Chile, las actividades extractivas de materia prima como la minería sustentan el sistema económico y seguirán siendo indispensables para el funcionamiento de la sociedad moderna en un futuro previsible. En estos procesos mineros la maquinaria juega un papel fundamental, siendo de los más importantes los molinos SAG y Bolas, los cuales permiten reducir el tamaño de partícula del mineral. Asimismo, las cargas dinámicas requieren una preocupación particular en este tipo de equipos, ya que, tienden a contener niveles muy altos de energía, grandes fuerzas y vibraciones. Las vibraciones excesivas aumentan la tensión en los rotores, acortan su vida útil y aumentan el riesgo de colisiones entre rotor y estator, lo que puede ocasionar daños en el equipo y en algunos casos provocar accidentes graves.

En este contexto el diseño de las fundaciones de los molinos SAG y bolas en proyectos de la gran minería en Chile han priorizado, tradicionalmente, instalarlos sobre estratos de roca de buena calidad como requisito principal. Actualmente el desarrollo de proyectos de plantas concentradoras está en aumento, con requisitos de procesamiento de mineral, que alcanzan o superan los 180 ktpd¹, lo cual ha generado un impacto directo en la cantidad de molinos a utilizar en la molienda, pasando de una configuración típica de 1 molino SAG y 1 o 2 molinos de bolas, a una configuración de 2 molinos SAG y 3 o 4 molinos de bolas. Para estas condiciones, ubicar una gran planta de molienda sobre un estrato de roca de buena calidad se transforma en un desafío relevante y su cumplimiento tiene un impacto importante en los costos y plazos de ejecución del proyecto.

Uno de los principales parámetros del suelo que afecta el diseño de las fundaciones de los molinos y equipos vibratorios es el módulo de corte dinámico, el cual se relaciona de forma directa con la velocidad de onda de corte en el suelo de fundación. Tradicionalmente en el diseño se busca ubicar las fundaciones de molinos en suelo rocoso, considerando niveles velocidad de onda mayores a 900 m/s, lo cual asegura el control de la amplitud de las vibraciones en los molinos definidas por el proveedor del equipo.

En este estudio se propone analizar el efecto de colocar las fundaciones de los molinos en suelos con velocidades de onda menores a 900 m/s y ver su efecto en el cumplimiento de las restricciones y requisitos que indica el proveedor para asegurar la performance del equipo.

¹ Miles de toneladas por día de mineral procesado



2. Definición del problema

Para la planta de molinera de proyectos mineros se procura fundar los molinos sobre suelos de buena calidad geotécnica, esto es en suelos rocosos con velocidades de onda de corte mayores a 900 [m/s], en ocasiones se debe excavar grandes cantidades de material para alcanzar el estrato de roca competente. A modo de ejemplo se muestran en la **Tabla 1**, registros geotécnicos de 6 proyectos analizados.

Tabla 1: Registros geotécnicos de proyectos analizados

Proyecto	Peso unitario	Modulo G	Vs	Profundidad de sello de fundación
[Unidad]	[Ton/m ³]	[MPa]	[m/s]	[m]
Proyecto 1	2.6	17785	2600	18
Proyecto 2	2.5	1704	825	-
Proyecto 3	2.6	6000	1519	15
Proyecto 4	2.5	1813	870	23
Proyecto 5	2.5	1813	870	26
Proyecto 6	2.1	3613	1321	9

Se puede observar que el nivel de excavación necesaria para estos proyectos está en el rango de 9 a 26 metros de profundidad aproximadamente. Dado el tamaño de una planta concentradora, se vuelve necesario considerar la posibilidad de fundar sobre suelos de menor calidad. Esto se debe a que los niveles de excavación requeridos para alcanzar suelos más competentes implican desafíos económicos, logísticos y de plazos de construcción. Para abordar esta problemática, se propone analizar el comportamiento dinámico de las fundaciones, con el objetivo de evaluar la factibilidad de construir sobre suelos cuya velocidad de onda de corte sea inferior a 900 m/s. Para ello, es fundamental identificar que parámetros del suelo y/o de la fundación deben ser controlados para garantizar el correcto funcionamiento de los equipos.

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Determinar cómo la velocidad de onda de corte influye en el comportamiento vibratorio de las fundaciones de los molinos, con el fin de establecer un rango mínimo de valores que aseguren el rendimiento óptimo de los equipos.

3.2. Objetivos específicos

3.2.1. Identificar los parámetros del suelo de fundación, incluyendo la velocidad de onda de corte, que influyen en el análisis vibratorio de los molinos, y evaluar su relevancia basándose en proyectos mineros previamente ejecutados

3.2.2. Establecer rangos mínimos o límites de parámetros, como la velocidad de onda de corte del suelo de fundación, que aseguren el cumplimiento de los requerimientos técnicos especificados por el proveedor de los molinos.



3.2.3. Analizar la rigidez y deformaciones de la fundación comparándolas con el rango de parámetros del suelo, estableciendo si es posible o conveniente, en costo y plazos disminuir la calidad del suelo vs aumentar la rigidez de la fundación.

Para cumplir con el objetivo general, primero se busca identificar los parámetros geotécnicos del suelo de fundación que influyen directamente en el comportamiento vibratorio de los molinos, con especial énfasis en la velocidad de onda de corte. Esta identificación se realizará a partir del análisis de proyectos mineros previamente ejecutados, lo que permitirá evaluar la relevancia de cada parámetro en contextos reales y establecer una base comparativa.

Posteriormente, se buscará establecer rangos mínimos o límites críticos para dichos parámetros, que aseguren el cumplimiento de los requerimientos técnicos definidos por los proveedores de los equipos. Finalmente, se analizará la rigidez y las deformaciones de la fundación en función de estos rangos, evaluando la viabilidad técnica y económica de modificar la calidad del suelo versus aumentar la rigidez estructural de la fundación, considerando los costos y plazos involucrados en cada alternativa.

4. Marco Teórico

4.1. Antecedentes de la investigación y conceptos teóricos

Para comprender de forma íntegra este estudio se hace imperioso definir los siguientes conceptos:

- **Coefficiente de balasto:** El coeficiente de balasto es una medida de la rigidez del suelo, que relaciona la presión aplicada con el asentamiento elástico que produce. Se expresa como la relación entre la presión y el desplazamiento vertical en un punto específico del suelo (Das, 2010).
- **Frecuencia natural:** La frecuencia natural es la frecuencia a la que un sistema tiende a oscilar en ausencia de fuerzas externas. Depende de las propiedades de masa y rigidez del sistema (Chopra, 2017).
- **Condición de Resonancia:** La resonancia ocurre cuando la frecuencia de una fuerza externa coincide con la frecuencia natural de un sistema, lo que resulta en una amplificación significativa de las vibraciones (Clough et Penzien, 1993)
- **Módulo de deformación:** El módulo de deformación es una medida de la rigidez de un material bajo carga, que relaciona la tensión aplicada con la deformación resultante. Es una propiedad clave en la mecánica de suelos y rocas (Craig, 2004). Se puede expresar como:

$$E = \frac{\sigma}{\xi} \quad (1)$$

Donde σ es el esfuerzo normal y ξ es la deformación unitaria. Este módulo caracteriza la rigidez axial del material.

- **Módulo elástico de corte:** El módulo elástico de corte, es una medida de la resistencia de un material a la deformación por corte. Relaciona el esfuerzo cortante con la deformación angular (Terzaghi et al., 1996). Para materiales elásticos, homogéneos e isótropos, se puede expresar en función del módulo de Young (E) y la relación de Poisson (μ_s) mediante la siguiente relación:

$$G_e = \frac{E}{2(1 + \mu_s)} \quad (2)$$

Por otra parte, en el contexto de la dinámica del suelo y la geotecnia, el módulo de corte se relaciona directamente con la velocidad de propagación de ondas de corte (V_s) y la densidad del medio (ρ), según la expresión:

$$G = \rho V_s^2 \quad (3)$$

- Suelo común: Estrato de suelo que se puede remover con excavadoras o palas mecánicas. Esta clasificación incluye a rocas muy meteorizadas o altamente fracturadas.
- Roca ripable: Estrato de suelo que se puede excavar con maquinaria especializada como bulldozers equipados con “rippers”, sin necesidad de tronaduras.
- Roca: Hace referencia a roca no ripable, es decir, requieren tronadura para ser fracturado. Este tipo de suelo solo puede ser removido mediante explosivos.

La clasificación de suelos cumple un rol fundamental en el estudio de fundaciones y en la evaluación de su capacidad de soporte. En Chile, según la norma NCh2369 (2023), se especifican 5 tipos de suelo, desde el tipo A, que representa suelos cementados o roca, hasta el tipo E, que corresponde a suelos de consistencia media a baja. El criterio utilizado para esta clasificación es la velocidad promedio de las ondas de corte dentro de los primeros 30 metros de profundidad de suelo, conocida como V_{s30} . A continuación se presenta la **Figura 1** correspondiente a esta clasificación.

Suelo Tipo	V_{s30} [m/s]	T_g [s]	
A	Roca, suelo cementado	≥ 900	$< 0,15$ (o H/V plano)
B	Roca blanda o fracturada, suelo muy denso o muy firme	≥ 500	$< 0,30$ (o H/V plano)
C	Suelo denso o firme	≥ 350	$< 0,40$ (o H/V plano)
D	Suelo medianamente denso, o firme	≥ 180	$< 1,00$
E	Suelo de compacidad, o consistencia mediana	< 180	

Figura 1. Clasificación de suelos, NCh2369 (2023)

La industria minera históricamente, ha buscado fundar los equipos vibratorios de gran tamaño y masa, tales como los molinos SAG y Bolas sobre suelos que garanticen su integridad y correcto funcionamiento. Por esta razón, los proyectos generalmente consideran excavar a hasta alcanzar un suelo rocoso. En la **Tabla 2** se presenta un resumen de los parámetros de suelos obtenidos en algunos proyectos desarrollados en la última década. Por motivos de confidencialidad y considerando el carácter público de este documento, no se explicitan los nombres de cada proyecto.

Tabla 2: Parámetros de suelo proyectos de referencia

Proyecto	Poisson	Peso unitario	Modulo E	Angulo φ	Cohesión C	Módulo G	V _s
<i>[Unidad]</i>	<i>[-]</i>	<i>[Ton/m³]</i>	<i>[Mpa]</i>	<i>[°]</i>	<i>[Ton/m²]</i>	<i>[MPa]</i>	<i>[m/s]</i>
Proyecto 1	0.22	2.63	51141	26	489	17785	2600
Proyecto 2	0.26	2.50	429	34	270	1704	825
Proyecto 3	0.25	2.60	14500	55	51	6000	1519
Proyecto 4	0.25	2.50	635	38	109	1813	870
Proyecto 5	0.25	2.50	635	38	109	1813	870
Proyecto 6	0.22	2.72	61790	48	100	61790	1153

Como muestra **Tabla 2**, la velocidad de onda de corte para los proyectos revisados, presentan valores cercanos a los 900 [m/s] o incluso muy por encima de este valor. Esta elección busca garantizar, en suelos rocosos, un adecuado control de las vibraciones de los equipos, dado su alto costo e importancia para la industria.

Debido a la importancia de los molinos SAG y bolas en la producción de cobre, es esencial comprender el funcionamiento de estos equipos, los cuales desempeñan un papel clave en el proceso de conminución del mineral, el cual tiene como objetivo reducir el tamaño de las rocas extraídas del rajo de la mina a un valor que represente el óptimo para asegurar una adecuada recuperación metalúrgica.

Inicialmente, el mineral es obtenido a partir de tronaduras en los pit o rajos, con tamaños entre 15 [cm] y 1 [m]. Posteriormente, mediante camiones tolva, el mineral es transportado al chancador, donde se reduce nuevamente su tamaño a un rango no mayor de 30 a 50 [cm], dependiendo de cada proyecto. Luego, el mineral se almacena en el “stockpile”, desde donde es derivado al subproceso de molienda, en el cual intervienen los molinos. En esta etapa, el mineral pasa primero por el molino SAG, que normalmente es más corto, pero de mayor radio, y luego por el molino de bolas, que tiende a ser más alargado y de menor diámetro.

El funcionamiento de los molinos comienza con el ingreso del mineral a través del “chute de alimentación”, el cual lo conduce al tambor o cilindro, donde permanece en rotación. El objetivo de este movimiento es que el impacto del mineral contra sí mismo y contra los cuerpos moledores (bolas de acero) reduzca progresivamente el tamaño de partícula. Posteriormente, el mineral triturado cae en el “chute de descarga”, desde donde, dependiendo del tamaño alcanzado, avanza al siguiente proceso o permanece en el molino hasta alcanzar el tamaño requerido.

La principal diferencia entre ambos tipos de molino radica en que el molino SAG recibe partículas de mayor tamaño, por lo que las bolas de acero utilizadas en su interior también son de mayor tamaño. El tamaño de partícula alcanzado en este molino varía entre 2000 y 8000 [μm]. Luego, el mineral ingresa al molino de bolas, donde, al tratarse de un tambor más alargado, el tiempo de residencia es mayor. En este caso, se utilizan bolas de acero más pequeñas, lo que permite alcanzar tamaños de partícula más finos, en el rango de 120 a 250 [μm].

En la **Figura 2** se puede observar una fundación que sostiene un molino SAG accionado por un motor anillo o también conocido como gearless. Este motor se aprecia en color verde, corresponde a la estructura que abraza el molino, también conocido como estator y que mediante fuerza electromagnética produce el movimiento del molino.

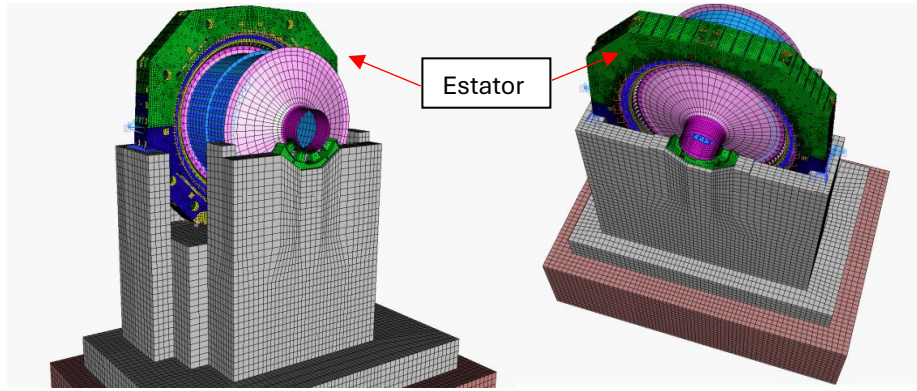


Figura 2. Modelo fundación proyecto 4

El torque generado por la fuerza electromagnética es recibido por el rotor, el cual se puede observar en la **Figura 3**, lo cual da origen al giro de este y el movimiento del mineral en su interior.

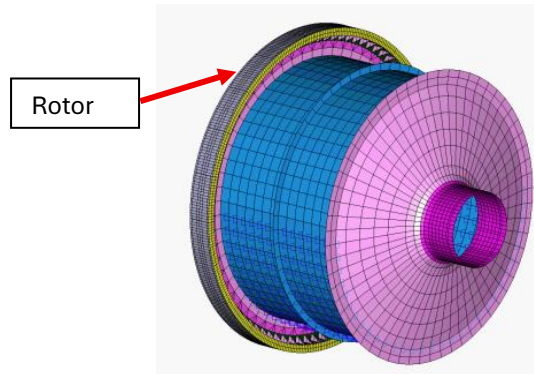


Figura 3. Modelo molino proyecto 4

Un aspecto importante que considerar es que el rotor y el estator, al funcionar con energía electromagnética, no están en contacto directo. Entre ambos existe un “GAP de aire” que permite el giro del molino. Este espacio debe ser controlado en todo momento, ya que su tolerancia es milimétrica y definida por el fabricante. En la **Figura 4** se muestra lo descrito anteriormente.

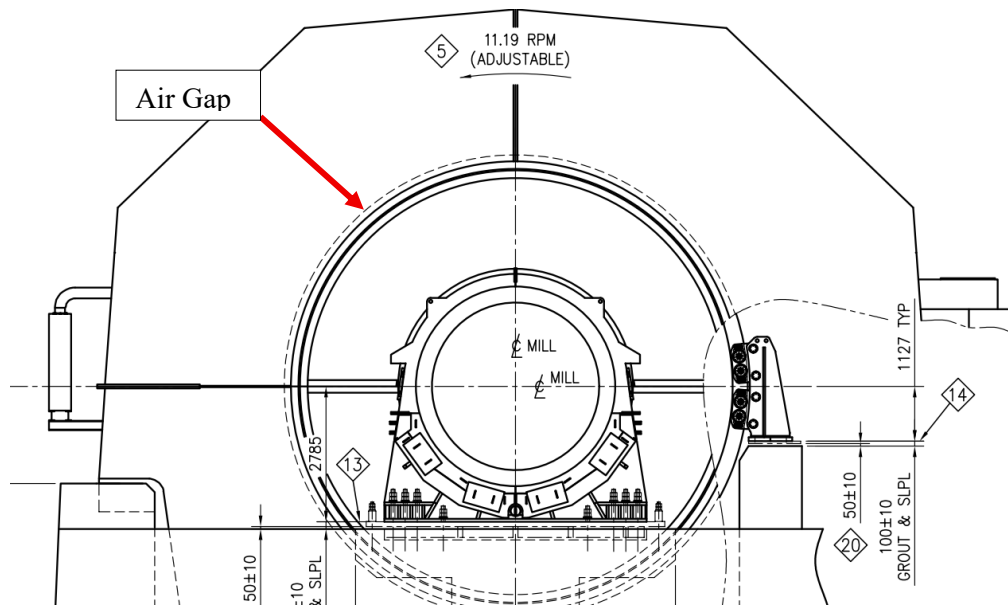


Figura 4. Modelo rotor - estator proyecto 6 (Vendor)

Por último, en la zona interna del molino, donde el mineral está en constante colisión, se produce naturalmente un desgaste en las paredes internas del cuerpo del molino. Para prevenir y controlar este desgaste, y evitar la necesidad de reemplazar el molino completo cada vez que este se vea comprometido, se instalan liners. Estos son placas que actúan como protección de la carcasa interna del molino y pueden ser reemplazadas cuando presentan desgaste.

Para optimizar el proceso de molienda, sobre los liners se incluyen los lifters, que son elementos en forma de barras o salientes cuya función es levantar el mineral y promover su caída, facilitando así la conminución. El número de lifters influye directamente en el comportamiento dinámico del molino, aspecto que se analiza en detalle más adelante. Los elementos mencionados se pueden observar en la **Figura 5**.

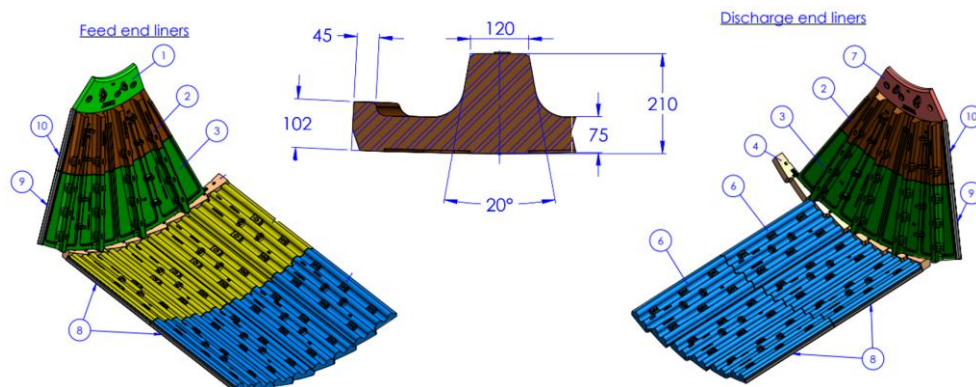


Figura 5. Plano de Liners - Lifters proyecto 6

Además de estas definiciones, existen 3 conceptos clave que se abordan a lo largo de la investigación: “Interacción suelo fundación”, “Análisis dinámico y control de vibración” y “Rigidez de fundación”.

4.2. Interacción suelo fundación

El análisis y diseño de estructuras y fundaciones sometidas a vibraciones se considera un problema altamente complejo, debido a la interacción entre la ingeniería estructural, ingeniería geotécnica y la teoría de vibraciones (Arya,1970). Estas vibraciones tienen su origen en distintas fuentes, una de ellas es la excentricidad generada por el mineral que cae al interior del molino, generando fuerzas desbalanceadas, como se muestra en la **Figura 6** obtenida del libro de fundaciones para equipos vibratorios (Arya,1970).

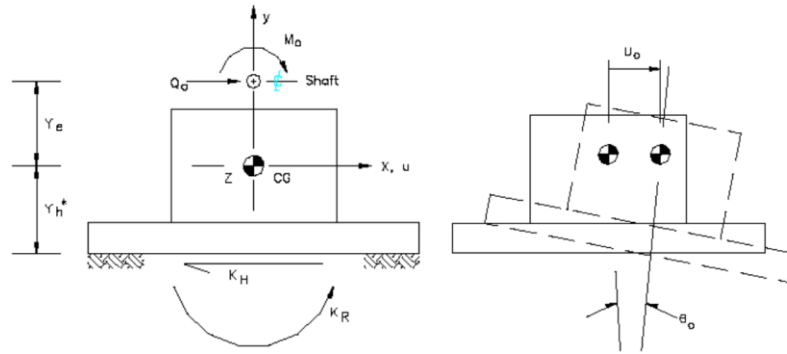


Figura 6. Esquema de excentricidad de fundación (Arya,1970)

El modelo utilizado para representar esta interacción corresponde al modelo del semi-espacio. Este se emplea para representar el comportamiento del suelo bajo una fundación y considera que este se extiende infinitamente en el plano horizontal y vertical hacia abajo, quedando libre en la parte superior. Como principios básicos se asume que el suelo se comporta como un medio isotrópico, homogéneo y elástico, siguiendo la ley de Hooke.

Al modelar la reacción de un suelo, se tienen 6 grados de libertad: 3 traslacionales (2 horizontales y 1 en dirección vertical), 2 de cabeceo o “rocking” y uno correspondiente a torsión. El objetivo es determinar las constantes de resorte considerando una fundación rígida. Las fórmulas para el cálculo de rigideces que representan el suelo de fundación, obtenidas de Arya (1970), se presentan a continuación en la **Tabla 3**.

Tabla 3: Ecuaciones para constantes de resortes del suelo

Modo de vibración	Fundación circular	Fundación Rectangular
Vertical	$k_V = \frac{4Gr_0}{1-\mu}$ (4)	$k_V = \frac{G}{1-\mu} \beta_V \sqrt{BL} \eta_V$ (5)
Horizontal	$k_H = \frac{32(1-\mu)Gr_0}{7-8\mu}$ (6)	$k_V = 2(1-\mu)G\beta_H \sqrt{BL} \eta_H$ (7)
Rocking/Cabeceo	$k_R = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\mu)}$ (8)	$k_R = \frac{G}{1-\mu} \beta_R BL^2 \eta_V$ (9)
Torsión	$k_v = \frac{16Gr_0}{3}$ (10)	S.S.

Donde:

G = Módulo de corte dinámico



r_0 = Radio equivalente

μ = Módulo de Poisson del suelo

β = Factor de rigidez para constante de resorte (ábaco)

η = Factor de amortiguamiento por enterramiento

Las ecuaciones correspondientes, así como las utilizadas para calcular los factores mostrados en la **Tabla 2**, se encuentran en Arya (1970) y se muestran en el **Anexo 1**.

4.3. Análisis dinámico y control de vibración

El análisis dinámico del sistema suelo – fundación – molino está compuesto de 3 etapas. La primera consiste en el cálculo de los resortes desacoplados, de acuerdo con la **Tabla 3**. Con las constantes de resorte calculadas en el punto anterior (interacción suelo fundación) se pueden obtener las frecuencias naturales no amortiguadas y amortiguadas. Las ecuaciones utilizadas fueron obtenidas de la guía de diseño “vibrating machinery foundations on soil” de Fluor y se muestran a continuación.

Para frecuencia no amortiguada, que depende únicamente de la masa y la rigidez:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_i}{m}} \text{ (para modos traslacionales)} \quad (11)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_i}{I}} \text{ (para modos rotacionales)} \quad (12)$$

Con:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \omega_n \quad (13)$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} \quad (14)$$

Para frecuencias amortiguadas:

$$f_d = \frac{f_n}{\sqrt{1 - 2(D_i)^2}} \quad (15)$$

Donde:

m = Masa del sistema

ω_n = Frecuencia angular del sistema

f_d = frecuencia amortiguada del sistema

D_i = Coeficientes de amortiguamiento

En sistemas no amortiguados, si la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural, la amplitud teórica tiende a infinito o diverge. En sistemas amortiguados la amplitud no diverge, sin embargo, aún puede ser muy grande y por lo tanto, inaceptable. Para evitar este fenómeno de altas amplitudes cercanas a la resonancia, la frecuencia calculada en la **Ecuación (15)** debe encontrarse fuera del rango que se muestra en la **Ecuación (16)**.

$$\frac{f_m \cdot 0.67}{\sqrt{1 - 2(D_i)^2}} \leq f_d \leq \frac{f_m \cdot 1.5}{\sqrt{1 - 2(D_i)^2}} \quad (16)$$

Donde:

f_m = Frecuencia del equipo

En este sistema se consideran dos tipos de amortiguamiento: el interno, y el amortiguamiento por radiación o geométrico. El primero de estos, es de menor importancia en la mayoría de los casos y se considera igual a 0.05 para todas las condiciones. El amortiguamiento por radiación implica la pérdida de energía a través de la propagación de ondas elásticas en la vecindad de la fundación. Para obtenerlo primero se calcula la relación de masa adimensional y luego la relación de amortiguamiento por radiación como se muestra en la **Tabla 4**.

Tabla 4: Ecuaciones de masa adimensional y amortiguamiento

Movimiento	Relación de masa adimensional		Relación de amortiguamiento por radiación	
Vertical	$B_V = \frac{1 - \mu}{4} \cdot \frac{w}{\gamma r_0^3}$	(17)	$D_V = \frac{0.425}{\sqrt{B_V}}$	(18)
Horizontal	$B_H = \frac{7 - 8\mu}{32(1 - \mu)} \cdot \frac{w}{\gamma r_0^3}$	(19)	$D_H = \frac{0.288}{\sqrt{B_H}}$	(20)
Rocking	$B_R = \frac{3(1 - \mu)}{8} \cdot \frac{w}{\gamma r_0^3}$	(21)	$D_R = \frac{0.15}{(1 + B_R)\sqrt{B_R}}$	(22)
Torsión	$B_T = \frac{I_T g}{\gamma r_0^5}$	(23)	$D_T = \frac{0.5}{1 + 2B_T}$	(24)

Las relaciones de masa pequeñas, es decir, $Br < 5$, utilizadas en el cálculo del amortiguamiento en el movimiento rocking, requieren realizar una corrección en la inercia. Esta corrección se calcula de la siguiente forma:

Si $Br \leq 1$:

$$n_R = \frac{1.219}{B_R^{0.169}} \quad (25)$$

Si $1 < Br < 5$:

$$n_R = \frac{1.219}{B_R^{0.078}} \quad (26)$$

Con el factor de corrección n_R se corrige la inercia de la siguiente forma:

$$I_{Ref} = n_R I_R \quad (27)$$

La segunda etapa consiste en acoplar los resortes, para este estudio se considera únicamente el acoplamiento del modo horizontal en Y con el cabeceo en X y viceversa, ya que los demás modos de vibración demuestran seguir un comportamiento similar al sistema no acoplado. Para las frecuencias acopladas del eje X con cabeceo en Y se debe encontrar las raíces del siguiente polinomio:



$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{k_x}{msg} + \frac{k_{rx} + k_x Y_H^2}{I_{yef}} \right) + \frac{k_x k_{rx}}{msg I_{yef}} = 0 \quad (28)$$

Donde:

msg = masa del sistema

I_{yef} = Inercia corregida respecto a Y

Y_H = Distancia vertical entre el centro de gravedad y la parte inferior de la fundación.

Para la tercera y última etapa se deben calcular las coordenadas modales del sistema, las cuales describen el movimiento del sistema vibratorio en sus modos naturales de vibración. Luego de esto se calcula respecto de las coordenadas modales lo siguiente: masas generalizadas, razón de amortiguamiento modal equivalente, fuerzas generalizadas, respuesta o amplitud máxima de desplazamientos y el ángulo de fase. Con estos valores se obtiene la amplitud de vibración, la cual es el término que controlará la vibración del molino. Las ecuaciones utilizadas se muestran a continuación.

Coordenadas modales:

$$u_i = \frac{K_h Y_h}{K_h - M \omega_i^2} \quad (29)$$

Masas generalizadas:

$$\bar{M}_i = m u_i^2 + I \quad (30)$$

Fuerzas Generalizadas:

$$\bar{F}_i = Q_0 u_i + M_0 + Q_0 Y_e \quad (31)$$

Donde:

Q_0 = Fuerza desbalanceada debido a la maquina vibrante

M_0 = Momento desbalanceado debido a la maquina vibrante

Y_e = Distancia vertical entre centro de gravedad y el eje de rotación del molino

Relaciones de amortiguamiento modal equivalente:

$$D_i^* = \frac{u_i^2 K_h D_h + K_r D_r}{u_i^2 K_h + K_r} \quad (32)$$

Valores máximos de respuesta en estado estacionario:

$$q_i = \frac{F_i}{M_i} [(\omega_i^2 - \Omega^2)^2 + (2D_i^* \omega_i \Omega)^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (33)$$

Con:

$$\Omega = 2\pi f \quad (34)$$

Donde:

f = Frecuencia primaria de excitación

Ángulos de fase:

$$\alpha_i = \tan^{-1} \left[\frac{2D_i^* \omega_i \Omega}{\omega_i^2 - \Omega^2} \right] \quad (35)$$

Adición vectorial de los componentes modales

$$U_{0i} = u_{1i}q_{1i} + u_{2i}q_{2i} \quad (36)$$

$$\Theta_{0i} = q_{1i} + q_{2i} \quad (37)$$

Amplitudes de vibración en estado estacionario:

$$A = u_0 + \Theta_0 Y_e \quad (38)$$

Deflexión vertical estática:

$$S = \frac{Q_0}{K_v} \quad (39)$$

Si bien existe la rotación de torsión estática y contribuciones de torsión a los modos traslacionales de vibración, al ser significativamente menores en magnitud no se consideran en los cálculos.

Con la amplitud de vibración y la frecuencia de vibración del sistema se puede verificar el nivel de las vibraciones e identificar si la amplitud de vibración obtenida se encuentra en límites admisibles. Con los valores de frecuencia y amplitud de vibración se ingresa al gráfico de Reiher Meister mostrado en la **Figura 7**, obtenido del código ACI.351.3R-18 (Committee, 2018).

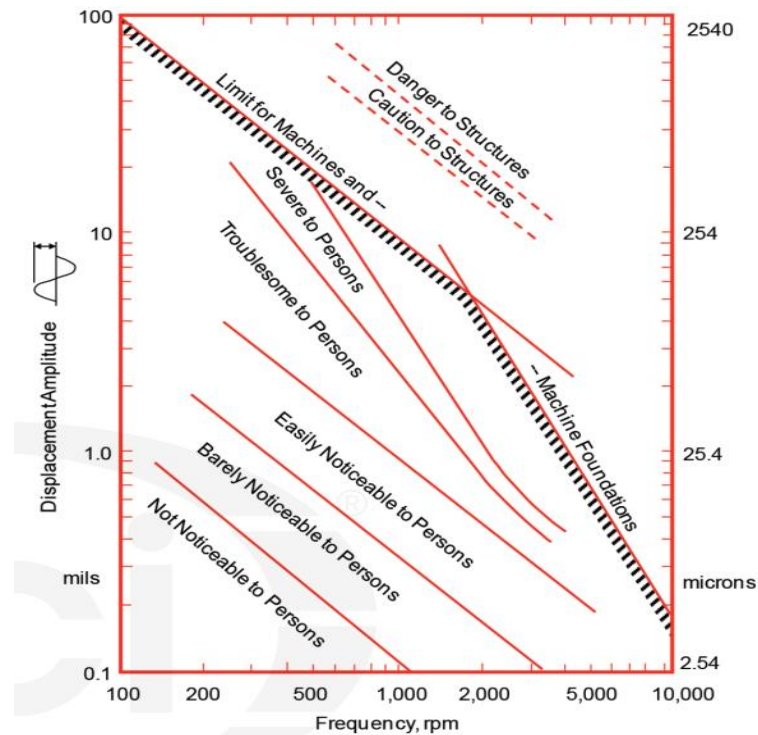


Figura 7. Vibraciones aceptables, gráfico de Reiher Meister

4.4. Rigidez de fundación

Como todos los motores eléctricos tipo “Gearless”, el campo magnético del estator utilizado en el accionamiento del molino desarrolla fuerzas magnéticas atractivas. Estas fuerzas tienen una componente radial y otra tangencial, donde la magnitud radial es función del espacio de aire entre los devanados del estator y los polos del rotor. La fuerza atractiva aumenta a medida que este espacio de aire o Air Gap se reduce.

Si el estator y el rotor estuvieran perfectamente alineados, las fuerzas radiales serían uniformes a lo largo de toda la circunferencia del molino, por tanto, no se generaría ninguna fuerza neta. En la práctica siempre existe excentricidad, ya sea por tolerancias de fabricación, instalación o deformaciones bajo carga. Esto produce una distribución desigual del espacio de aire, en consecuencia, fuerzas magnéticas excéntricas que intentan atraer el rotor en mayor medida en dirección de la excentricidad inicial.

Este fenómeno se puede observar gráficamente en la **Figura 8** que se muestra a continuación.

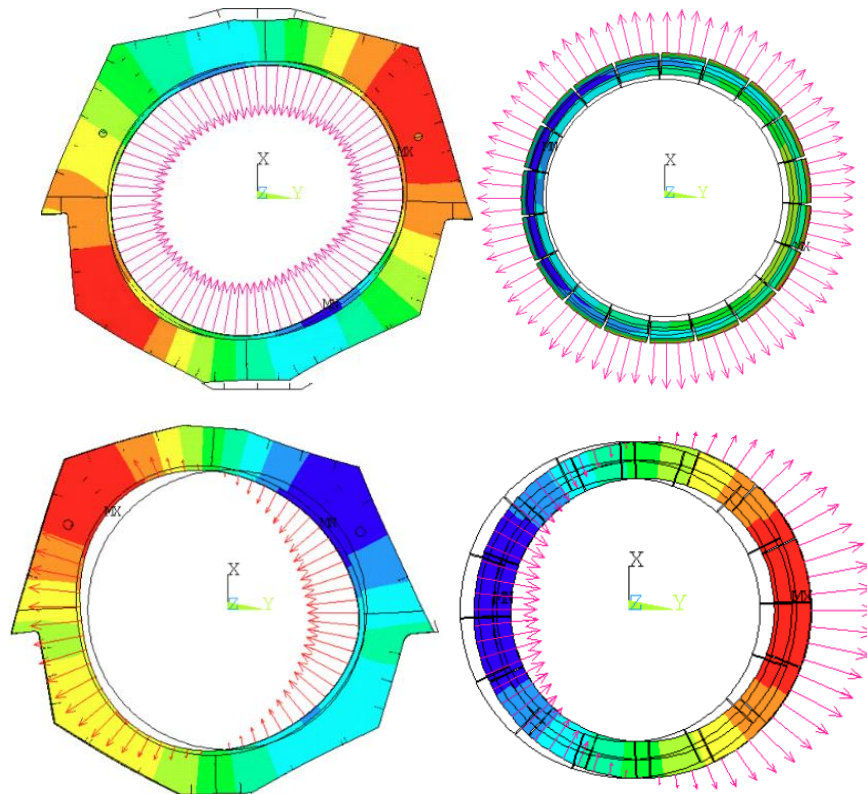


Figura 8. Modelo de fuerzas radiales estator - rotor

Tanto el sistema mecánico como la respectiva fundación deben proveer la rigidez necesaria para limitar la inestabilidad inherente y la consiguiente reducción del espacio de aire o “air gap” entre rotor y estator controlando no sobrepasar los límites establecidos por el proveedor.

El mismo proveedor de los equipos entrega un criterio de rigidez mínima de fundaciones y maquinaria para asegurar el correcto funcionamiento de estos, en el cual se definen las siguientes ecuaciones.

$$F_f = C_{mec}(e_f - e_i) = C_{mag}e_f \quad (40)$$

$$e_f = \frac{C_{mec}}{C_{mec} - C_{mag}} e_i \leq e_{warn} \quad (41)$$

$$C_{mec} = \frac{e_{warn} C_{mag}}{e_{warn} - e_i} \quad (42)$$

$$\frac{1}{C_{mec}} = \frac{1}{C_{stator}} + \frac{1}{C_{mill}} + \frac{1}{C_{fdn}} \quad (43)$$

$$C_{fdn} = \frac{1}{\frac{1}{C_{fdn_{rotor}}} + \frac{1}{C_{fdn_{stator}}}} \quad (44)$$

En estas ecuaciones se encuentran implícitos los valores máximos de tolerancia de “Air gap” en e_{warn} y e_i . Una vez definida la rigidez necesaria de fundación se descompone la rigidez horizontal requerida en cada uno de los puntos de apoyo molino-fundación como se observa en la **Figura 9** y se definen las ecuaciones que siguen.

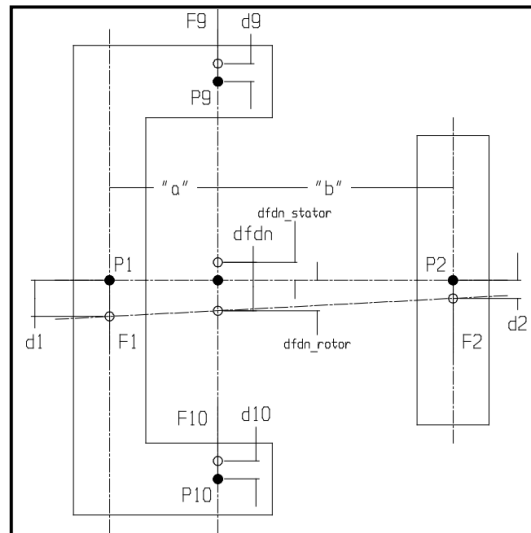


Figura 9. Esquema de rigidez de fundación (Proveedor)

$$d_i = \frac{F_i}{C_i} \quad (45)$$

$$F_1 = \frac{b}{a + b} F_f \quad (46)$$

$$F_2 = \frac{a}{a + b} F_f \quad (47)$$



$$F_9 = F_{10} = \frac{1}{2} F_f \quad (48)$$

$$d_{fdn_{rotor}} = \frac{b}{a+b} \frac{F_1}{C_1} + \frac{a}{a+b} \frac{F_2}{C_2} = \left[\left(\frac{b}{a+b} \right)^2 \frac{1}{C_1} + \left(\frac{a}{a+b} \right)^1 \frac{1}{C_2} \right] F_f \quad (49)$$

$$d_{fdn_{stator}} = \frac{1}{2} \left(\frac{F_9}{C_9} + \frac{F_{10}}{C_{10}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{C_9} + \frac{1}{C_{10}} \right) F_f \quad (50)$$

Donde:

C_{mec} = Rigidez mecánica del sistema.

C_{stator} = Rigidez del estator.

C_{mill} = Rigidez del molino.

C_{fdn} = Rigidez de la fundación.

$C_{fdn_{rotor}}$ = Rigidez de la fundación del rotor.

$C_{fdn_{stator}}$ = Rigidez de la fundación del estator.

C_{mag} = Constante de resorte magnético (encendido).

F_f = Fuerza final.

e_f = excentricidad final.

e_i = excentricidad inicial.

e_{warn} = excentricidad de alarma.

El valor de rigidez se obtiene del cociente entre una fuerza aplicada y el desplazamiento o deflexión que esta provoca, por lo tanto, se tiene que:

$$C_{fdn_{rotor}} = \frac{F_f}{d_{fdn_{rotor}}} \quad (51)$$

$$C_{fdn_{estator}} = \frac{F_f}{d_{fdn_{estator}}} \quad (52)$$

Si se toman las ecuaciones (49) - (51) y (50) - (52) se obtiene:

$$\frac{d_{fdn_{rotor}}}{F_f} = \frac{1}{C_{fdn_{rotor}}} = \left[\left(\frac{b}{a+b} \right)^2 \frac{1}{C_1} + \left(\frac{a}{a+b} \right)^1 \frac{1}{C_2} \right] \quad (53)$$

$$C_{fdn_{rotor}} = \frac{F_f}{d_{fdn_{rotor}}} = \left[\left(\frac{b}{a+b} \right)^2 \frac{1}{C_1} + \left(\frac{a}{a+b} \right)^1 \frac{1}{C_2} \right] F_f \quad (54)$$

$$C_{fdn_{estator}} = \frac{F_f}{d_{fdn_{estator}}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{C_9} + \frac{1}{C_{10}} \right) F_f \quad (55)$$

Finalmente se obtienen las siguientes expresiones:

$$\left(\frac{b}{a+b} \right)^2 \frac{1}{C_1} + \left(\frac{a}{a+b} \right)^2 \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{fdn_{rotor}}} \quad (56)$$

$$\frac{0.25}{C_9} + \frac{0.25}{C_{10}} = \frac{1}{C_{fdn_{estator}}} \quad (57)$$

Estas expresiones son el requerimiento de rigidez final entregado por el proveedor, el cual entrega para cada equipo en específico, las 2 ecuaciones mostradas anteriormente con los valores de a y b ya ingresados y también siendo las rigideces del rotor y estator datos conocidos. De la misma forma se asume un valor para F_f de 1000 kN, con el objetivo de obtener un desplazamiento y así poder calcular las rigideces solicitadas. En la **Figura 10**, se muestra un ejemplo, obtenido del plano Vendor del equipo del **Proyecto 1**.

THE REQUIRED HORIZONTAL ($\pm Y$) AND VERTICAL ($\pm Z$) FOUNDATION STIFFNESS TO RESIST THE MOTOR ECCENTRIC FORCES IS GIVEN BY THE EQUATION:	
EQUATION A:	$\frac{0.645}{C_1} + \frac{0.039}{C_2} \leq \frac{1}{30,000 \text{ mm OF DEFLECTION}}$
EQUATION B:	$\frac{0.250}{C_9} + \frac{0.250}{C_{10}} \leq \frac{1}{12,000 \text{ mm OF DEFLECTION}}$
WHERE C1 & C2 ARE THE STIFFNESSES AT LOCATIONS P1 AND P2; AND C9 & C10 ARE THE STIFFNESSES AT THE STATOR SUPPORT LOCATIONS P9 & P10 .	

Figura 10. Ecuación de rigidez Vendor (proveedor)

Con estos antecedentes, se genera un modelo computacional (para este caso SAP2000) y se obtienen las deformaciones en los puntos de interés con respecto de un punto de referencia, el cual se ubica en el nivel basal de los pedestales bajo la intersección del eje de rotación del molino con el eje del estator. Con la carga aplicada y las respectivas deformaciones en los puntos de interés, se obtienen las rigideces de los pedestales, las cuales se utilizan en la verificación de las ecuaciones provistas por el Vendor.

5. Parámetros que influyen la vibración del equipo

Dentro de la base de datos analizada se encuentran 6 proyectos a los cuales se revisan los estudios de suelo y fundación disponibles, verificando que parámetros se extraen de estos mismos para realizar el análisis vibratorio. En la **Tabla 2** y **Tabla 5**, se muestran los parámetros utilizados en el análisis de cada proyecto. Cabe destacar que los parámetros de suelos encontrados para el **Proyecto 4** y el **Proyecto 5** son idénticos. Esto se debe a que uno corresponde a un molino Bolas y el otro a un molino SAG respectivamente, pero ambos se encuentran emplazados en el mismo sitio.



Tabla 5: Parámetros de fundación proyectos de referencia

Proyecto [Unidad]	Dimensión molino (D x L) [m]	Tipo	MAT de fundación [m]		
			L	B	H
Proyecto 1	7.90 x 13.40	Bolas	26.50	24.50	3.00
Proyecto 2	7.92 x 17.32	Bolas	21.50	26.69	2.73
Proyecto 3	8.80 x 19.30	Bolas	24.30	22.90	4.70
Proyecto 4	12.20 x 7.30	SAG	34.00	18.50	3.00
Proyecto 5	8.50 x 13.60	Bolas	27.40	23.50	3.00
Proyecto 6	8.23 x 18.23	Bolas	25.50	26.00	3.00

Si bien en los proyectos se realizan estudios de suelo detallados, que incluyen una amplia gama de parámetros, las tablas anteriores presentan únicamente aquellos parámetros que fueron indicados en las memorias de cálculo del diseño de los molinos. Estos valores caracterizan el sitio específico de estudio, es decir, determinados a partir de sondajes o ensayos realizados en las cercanías de las plataformas de molienda o en las proximidades de los molinos.

El módulo de Young E y el coeficiente de Poisson se emplean para calcular el módulo de corte estático. Asimismo, el peso unitario y la velocidad de onda de corte se utilizan para calcular el módulo de corte dinámico G , el cual constituye el parámetro más significativo en los cálculos. En algunos casos, no se entrega el valor de V_s , ya que se proporciona directamente el valor de G . También se debe considerar que el coeficiente de Poisson es utilizado en el cálculo de las constantes de resorte, como se observa en la **Tabla 3**. Por lo tanto, los parámetros de interés son el módulo de Poisson y la velocidad de onda de corte. Los demás parámetros que se utilizan en el cálculo de la amplitud de vibración de los equipos se muestran en la **Tabla 6** a continuación.

Tabla 6: Parámetros utilizados en el cálculo de amplitud de vibración

Origen	Parámetro
Suelo	Coficiente de Poisson
	Módulo de deformación E
	Peso específico
	Velocidad de onda de corte
Fundación	Largo mat
	Ancho mat
	Altura mat
	Enterramiento mat
	Inercia fundación
	Masa fundación
Equipo Molino - Estator	Peso
	Frecuencia operación
	Fuerzas desbalanceadas

6. Variación de parámetros

6.1. Variación de velocidad de onda de corte

Con los parámetros de cada proyecto, se calculan las amplitudes de vibración. Como se observa en la **Tabla 1**, la mayor velocidad de onda de corte es 2600 [m/s] correspondiente al **Proyecto 1** y el menor valor se encuentra en el **Proyecto 2** con una velocidad de onda de corte de 825 [m/s].

Para realizar un análisis completo de los distintos tipos de suelo, se recalculan las amplitudes de vibración de los proyectos 1, 2, 3, 6, para un rango de velocidades de onda de corte desde los 2600 hasta 200 [m/s], manteniendo los otros parámetros constantes. A continuación, en la **Figura 11**, **Figura 12**, **Figura 13**, **Figura 14**, se presentan los gráficos donde se puede observar la amplitud de vibración vertical y las dos amplitudes horizontales acopladas, es decir, amplitud de vibración traslacional en Y con cabeceo en X y traslacional en X con cabeceo en Y, para los proyectos 1, 2, 3 y 6 respectivamente.

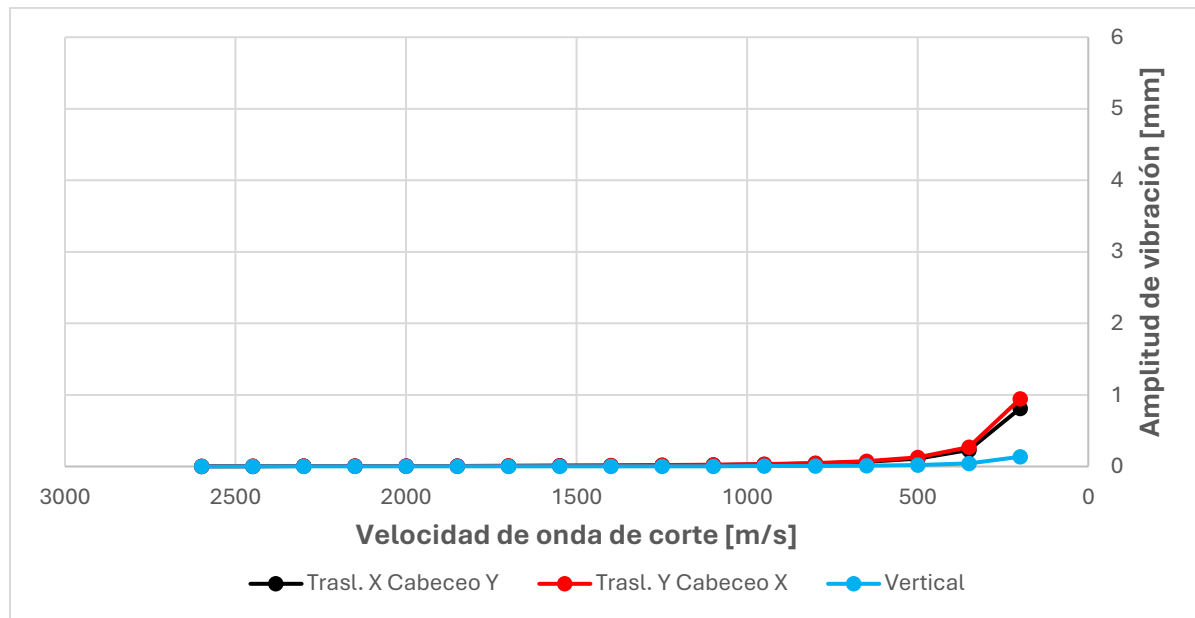


Figura 11. Amplitud de vibración vs velocidad onda corte proyecto 1

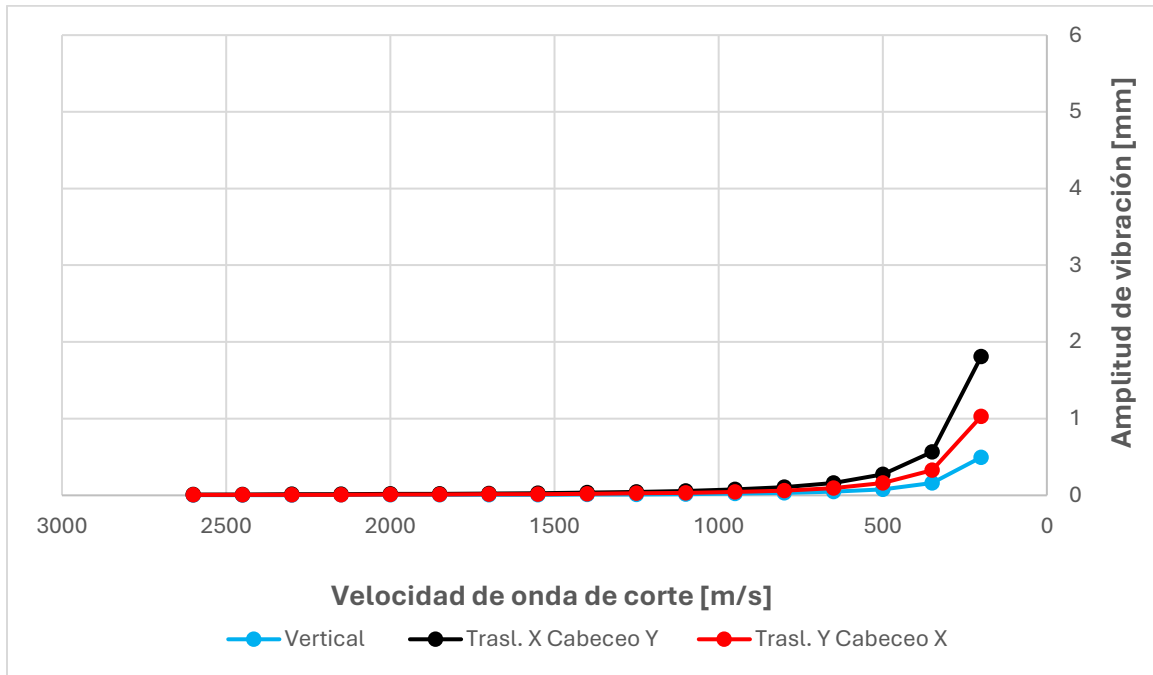


Figura 12. Amplitud de vibración vs velocidad onda corte proyecto 2

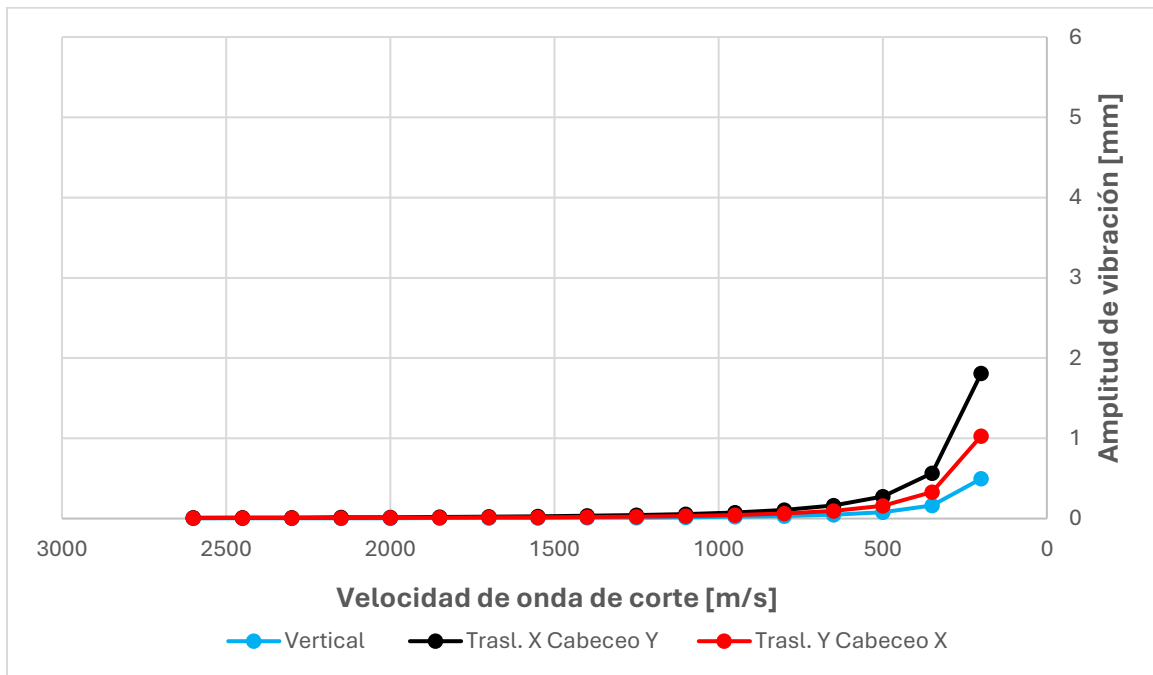


Figura 13. Amplitud de vibración vs velocidad onda corte proyecto 3

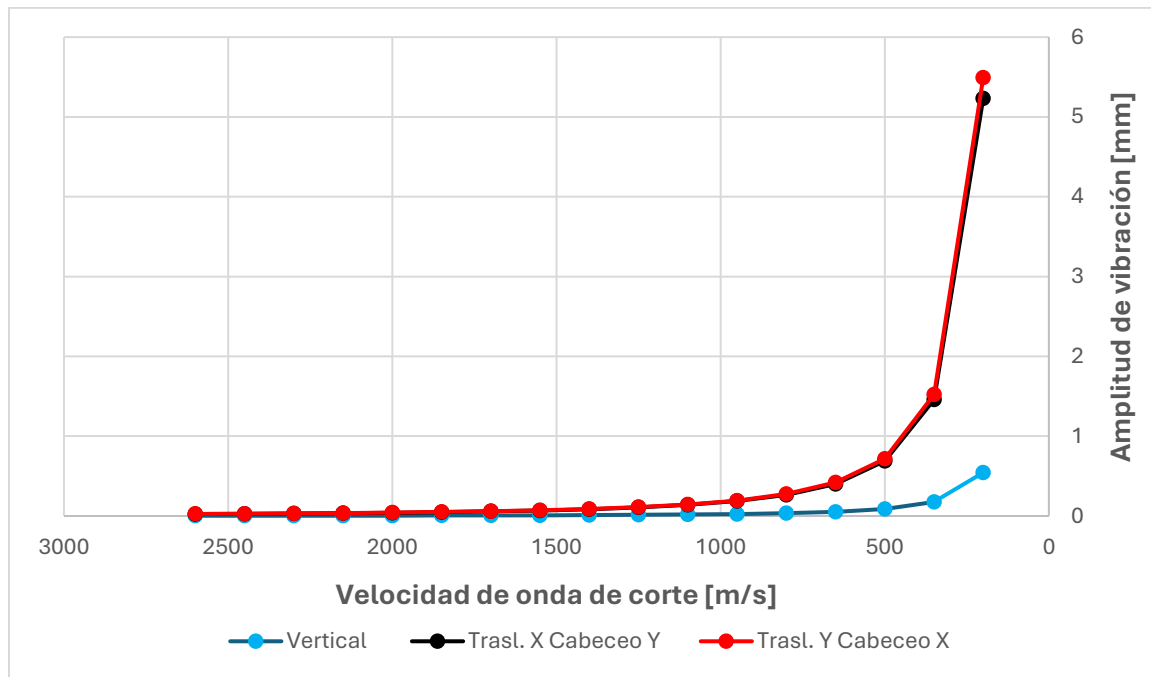


Figura 14. Amplitud de vibración vs velocidad onda corte proyecto 6

En las figuras anteriores se observa el comportamiento de la amplitud de vibración al variar la velocidad de onda de corte. Este comportamiento muestra que la amplitud vertical es menor en comparación con las amplitudes horizontales acopladas; sin embargo, las tres presentan curvas de tendencia similares. Se observa que al disminuir la velocidad de onda de corte se produce un incremento cada vez mayor en la amplitud. En rangos superiores a 900 m/s, correspondientes a suelos rocosos, la amplitud se mantiene baja y con escaso incremento. En cambio, en rangos inferiores a 500 m/s, la pendiente de la curva se incrementa notablemente.

Considerando la amplitud horizontal de cada proyecto, se comparan los casos de estudio con sus respectivos límites operacionales, según se muestra en la **Figura 15**. E_{warn} corresponde al valor a partir del cual se activa la alarma de funcionamiento, mientras que $E_{shutdown}$ representa el límite en el cual el equipo se apaga automáticamente.

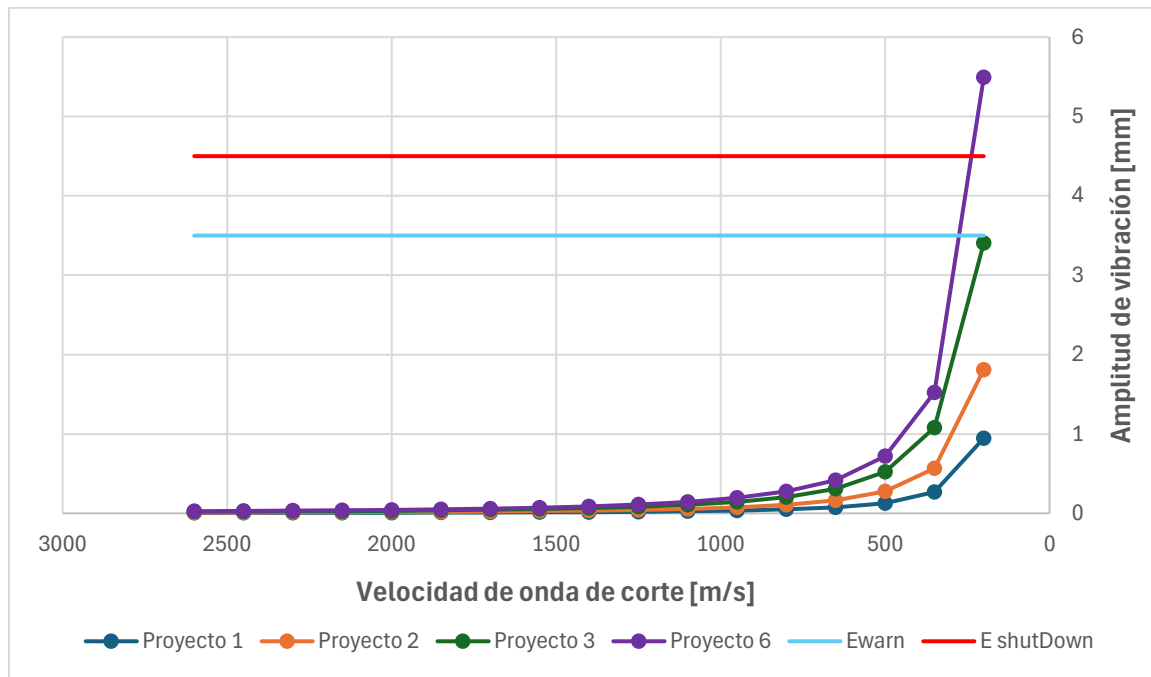


Figura 15. Amplitud de vibración vs velocidad onda corte proyectos de 1, 2, 3 y 6

La **Tabla 7** presenta el incremento de la amplitud en función de la variación de velocidad de onda de corte, considerando el valor correspondiente a la amplitud en el límite inferior del rango, respecto del valor obtenido en el límite superior. Estos valores se obtienen promediando los aumentos en los 4 proyectos analizados.

Al analizar el comportamiento de la amplitud de vibración del molino, se observa que, desde los 2600 [m/s] hasta los 1100 [m/s] de velocidad de onda de corte, presenta variaciones reducidas, con un incremento promedio que varía entre un 13% y un 29% por cada rango. Al repetir este análisis en el rango inferior a 1100 [m/s], se evidencia que, a menor velocidad de onda de corte, mayor es el incremento en la amplitud, alcanzando en el último rango (200 a 350 [m/s]) un aumento de 237%.

Tabla 7: Incremento promedio por rangos

Rango	Incremento promedio %
2600 – 2450	13
2450 – 2300	13
2300 – 2150	14
2150 – 2000	16
2000 – 1850	17
1850 – 1700	18
1700 – 1550	21
1550 – 1400	23
1400 – 1250	25
1100 – 950	34

Rango	Incremento promedio %
950 – 800	42
800 – 650	52
650 – 500	71
500 – 350	109
350 – 200	237

Un factor relevante en el análisis de la amplitud de vibración es asegurar que no resulte perjudicial para la máquina, resguardando así su integridad operativa. La operación del molino genera diversas fuerzas dinámicas, a su vez asociadas a diferentes frecuencias, dependiendo del componente que origina el fenómeno, tales como la rotación del molino, la caída del mineral, la interacción entre estator y rotor, el desgaste de los liners, entre otros.

Para este propósito, se emplea el gráfico de Reiher-Meister. En primer lugar, se analiza la vibración generada por la caída del mineral. Se propone utilizar la misma amplitud de vibración calculada anteriormente, considerando directamente la frecuencia de operación del equipo. Al ingresar estos valores al gráfico de Reiher-Meister, se observa que los puntos se ubican hacia el extremo izquierdo del gráfico sobre su eje, donde, debido a la baja frecuencia, los proyectos cumplen con el criterio de estar por debajo del límite perjudicial para la maquinaria. Esta situación se presenta en la **Figura 16** a continuación.

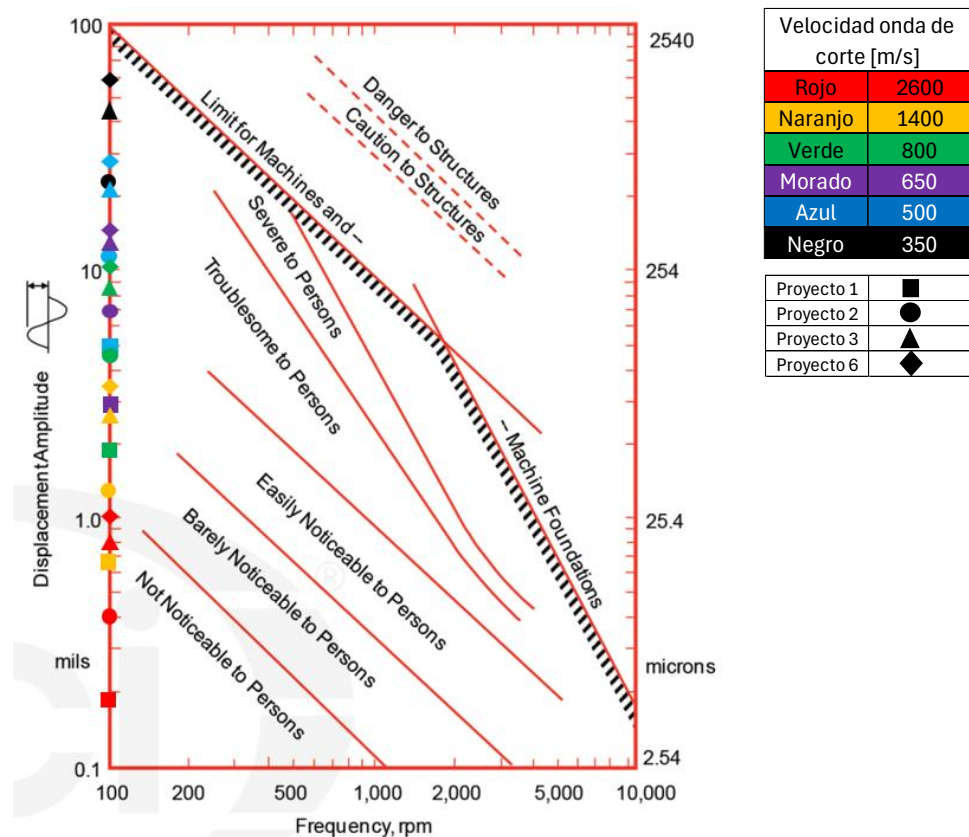


Figura 16. Amplitudes aceptables sujetas a frecuencia de operación

Es posible realizar un análisis más conservador, este análisis considera, por una parte, la frecuencia de operación del molino, ponderada según el número de lifters que posee; y por otra, las amplitudes de vibración previamente calculadas. A partir de estos dos parámetros se obtienen los puntos amplitud–frecuencia, los cuales se presentan en la **Figura 17**.

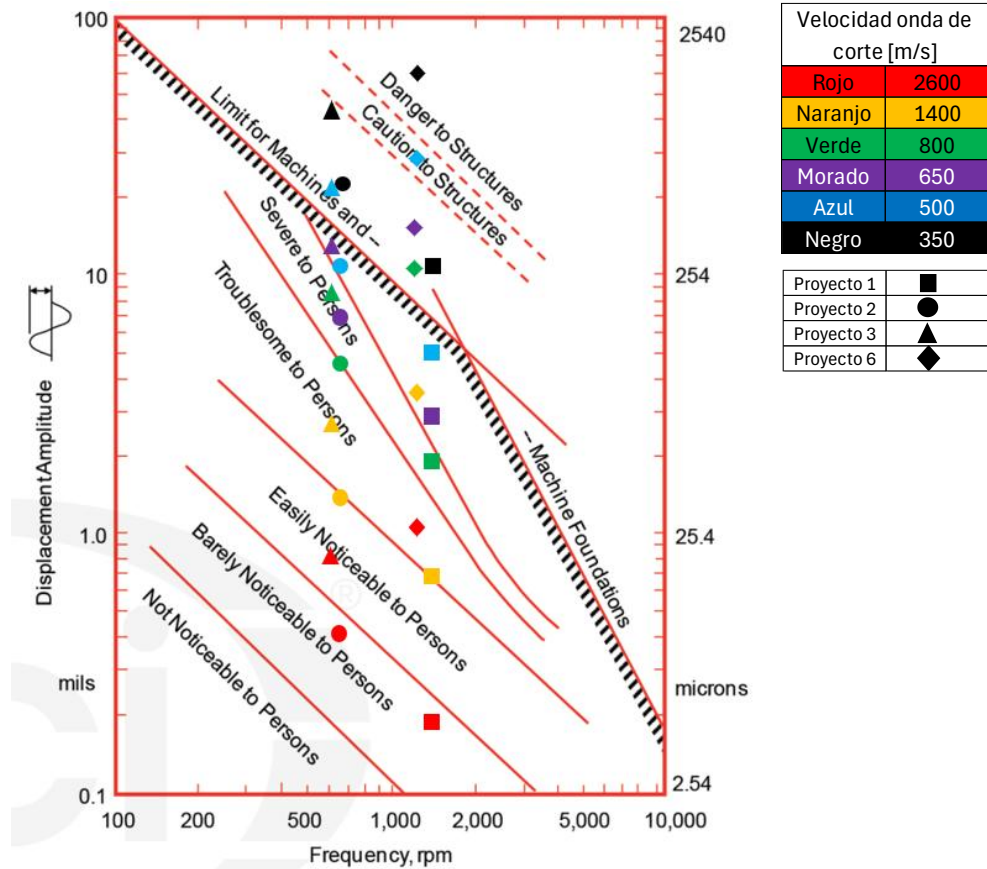


Figura 17. Amplitudes aceptables proyectos de referencia

En la **Figura 17** se observa que los puntos rojo y naranja, correspondientes a velocidades de onda de corte de 2600 y 1400 [m/s], respectivamente, muestran que los cuatro proyectos analizados se encuentran por debajo del límite perjudicial para la máquina. En los puntos verde (800 [m/s]) se aprecia que el **Proyecto 6** sobrepasa dicho límite, mientras que en los puntos morado y azul (650 y 500 [m/s]) solo algunos de los proyectos cumplen el límite permitido. Por último, se observa en los puntos color negro que ningún proyecto cumple con el requerimiento.

Si bien el análisis de esta frecuencia asociada a la caída del mineral debido a los lifters está contemplado por el proveedor del equipo, este mismo indica que la fuerza correspondiente a dicha frecuencia tiende a estar altamente amortiguada en la práctica, y generalmente no se considera de gran relevancia para la operación del molino

6.2. Variación del Coeficiente de Poisson

El coeficiente de Poisson, al igual que la velocidad de onda de corte, se utiliza en el cálculo de las amplitudes de vibración. Según los proyectos analizados, los rangos del coeficiente de Poisson varían entre 2.2 y 2.6. Considerando que para el **Proyecto 3** se dispone de mayor cantidad de información y antecedentes técnicos, lo que permite realizar un análisis más detallado, se selecciona dicho proyecto como caso de estudio. Se procede a variar el módulo de Poisson en dentro de un rango máximo de 3.0 y mínimo de 2.2 y se recalculan las amplitudes de vibración, al realizar esto se obtiene la **Figura 18**.

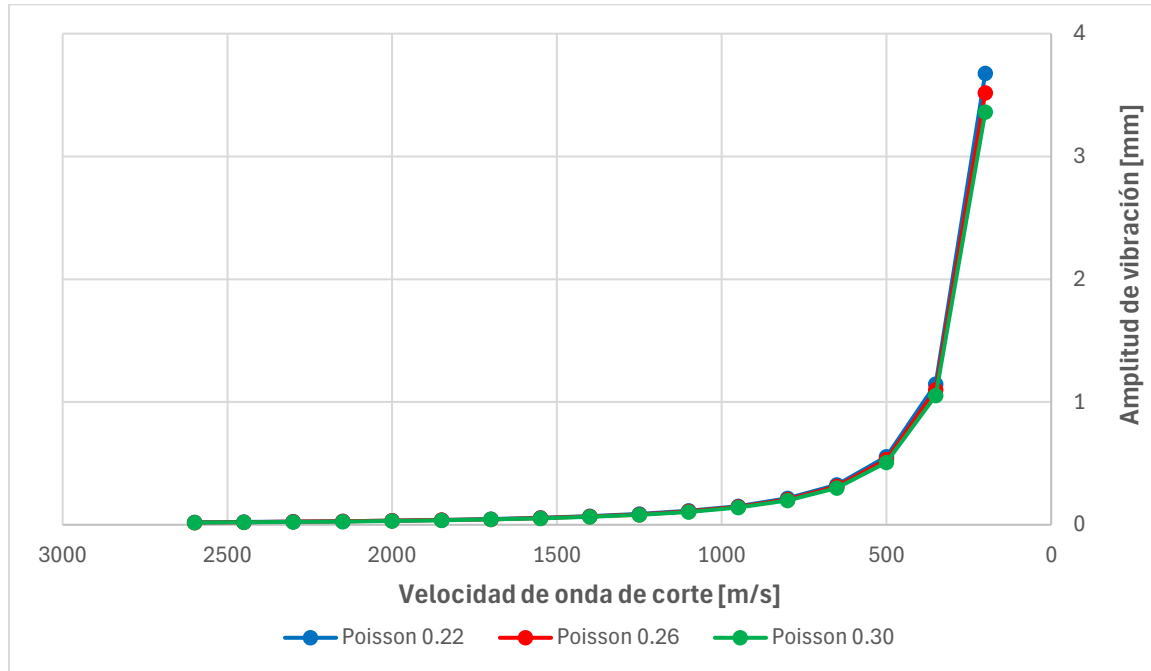


Figura 18. Amplitud de vibración vs velocidad onda corte variando Poisson Proyecto 3

En la **Figura 18** se observa que el comportamiento de la amplitud de vibración, al variar la velocidad de onda de corte para distintos valores del coeficiente de Poisson, presenta bajos niveles de variación. La diferencia máxima se registra en los valores correspondientes a la menor velocidad de onda de corte, donde se evidencia una diferencia de aproximadamente un 9% entre los valores calculados para los coeficientes de 0.22 y 0.30.

6.3. Variación de geometría del MAT de la fundación

Se evalúa la influencia de la geometría del mat de fundación en la amplitud de las vibraciones, lo cual está motivado principalmente porque es una opción de diseño en caso de que se necesite controlar o disminuir la amplitud de vibración. Para analizar este cambio, se considera de referencia el **Proyecto 1** y la amplitud de vibración más desfavorable. Luego se realiza un nuevo cálculo, incrementando tanto el ancho como el largo total del mat de fundación, considerando los cambios correspondientes en su masa e inercia, los cuales se recalculan a partir del volumen agregado y la inercia adicional correspondiente, mediante el teorema de Steiner. En la **Figura 19**, se muestra la amplitud en función de la variación en la geometría de la fundación en tres casos: aumento de 1, 2 y 3 metros tanto el ancho como el largo del mat. Esta variación se realiza de

tal forma que no afecte el centro de gravedad horizontal del mat, es decir, si se aumenta un metro el ancho, se traduce en un aumento de medio metro a cada lado, y de igual forma para los otros casos.

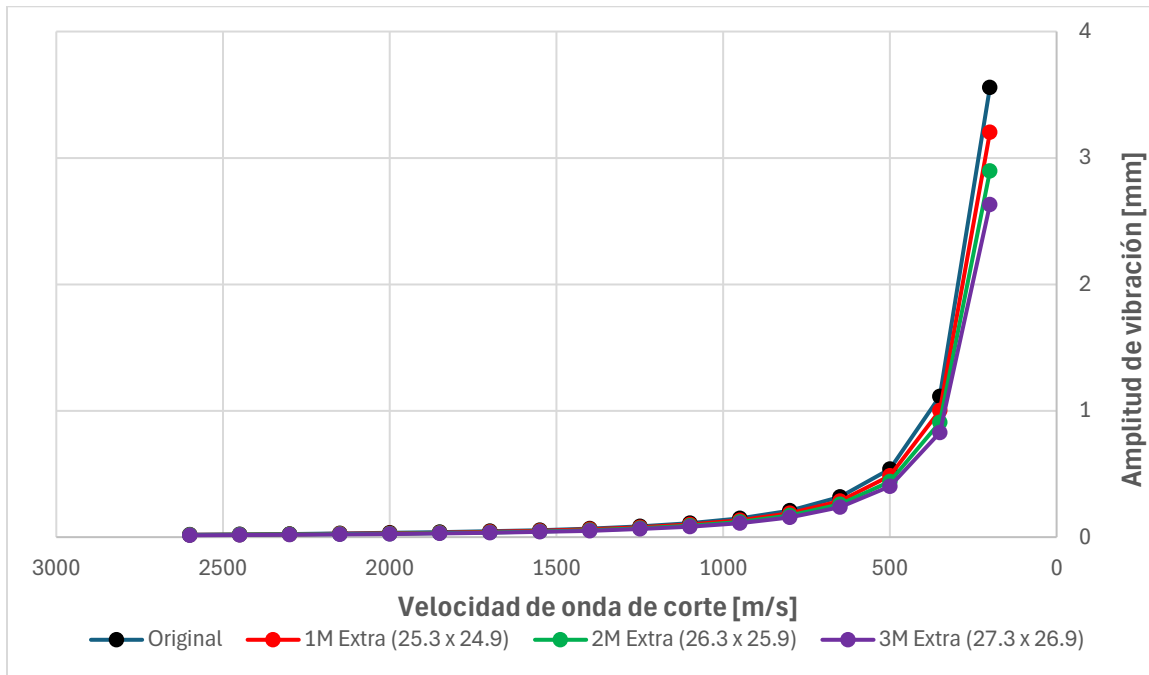


Figura 19. Amplitud de vibración vs velocidad onda corte variando geometría MAT

En la **Figura 19** se observa que, al aumentar el tamaño del mat de fundación, se producen variaciones mayores en la amplitud de vibración en comparación con las obtenidas al variar el coeficiente de Poisson. No obstante, dichas variaciones siguen siendo marginales, ya que se registra una disminución de la amplitud de vibración de 0.138 [mm] (equivalente a 5.42 [mil]) en un estrato con velocidad de onda de corte de 500 [m/s], al aumentar 3 metros tanto el largo como el ancho de la fundación.

7. Rigidez de pedestal de fundación

Se genera un modelo del molino de bolas correspondiente a la planta del **Proyecto 3** utilizando el software SAP2000. Para el modelamiento emplean elementos sólidos, incorporando la constante de balasto mediante “solid – Surface spring”. Las cargas aplicadas en los puntos P1, P2, P9 y P10 se distribuyen entre sus nodos circundantes, los cuales se vinculan mediante la herramienta “body constrain”. En la **Figura 20**, se presenta la vista 3D del modelo anteriormente descrito.

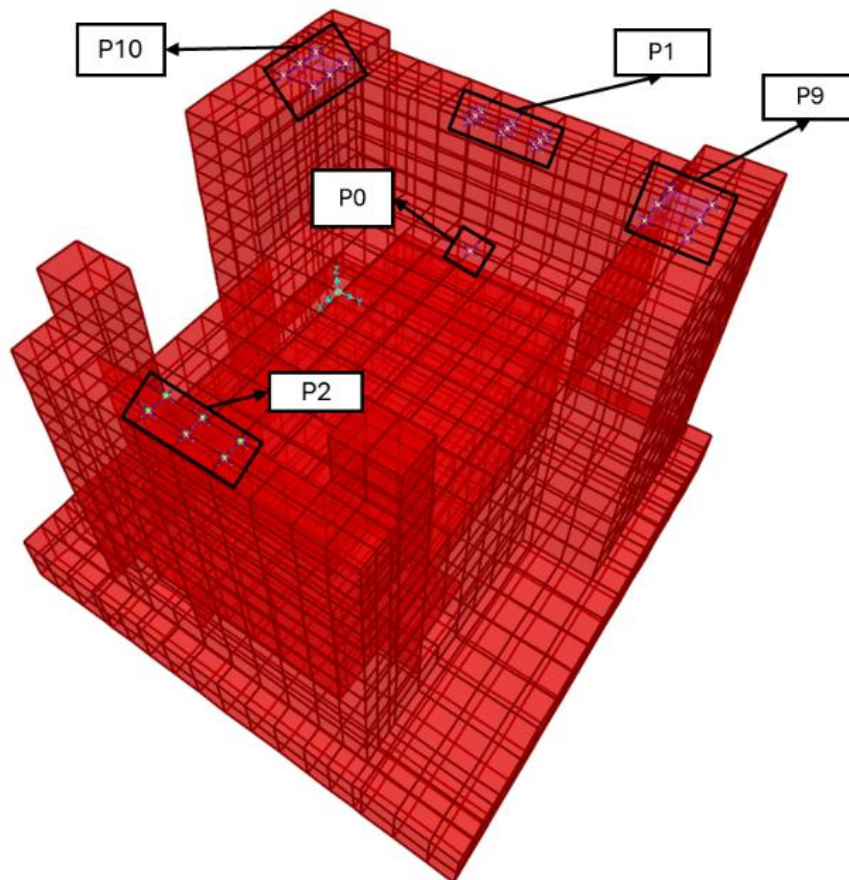


Figura 20. Modelo Sap2000 proyecto 3

A partir del modelo, se obtienen los desplazamientos de los puntos previamente mencionados y considerando el punto P0 como el punto de referencia ubicado bajo la intersección entre el eje del rotor y el eje del molino. A partir de estos desplazamientos y conociendo el valor de la fuerza aplicada, se determinan las rigideces, lo que permite utilizar la **Ecuación (56)** y **Ecuación (57)** para verificar el cumplimiento de los requerimientos establecidos por el proveedor.

Las propiedades del suelo se incorporan mediante el balasto, el cual depende del módulo de corte G , que a su vez está determinado por la velocidad de onda de corte. Para evaluar el comportamiento de la rigidez y valores límite del air gap, se procede a variar los valores de la velocidad de onda de corte, obteniéndose los resultados que se muestran en la **Figura 21**.

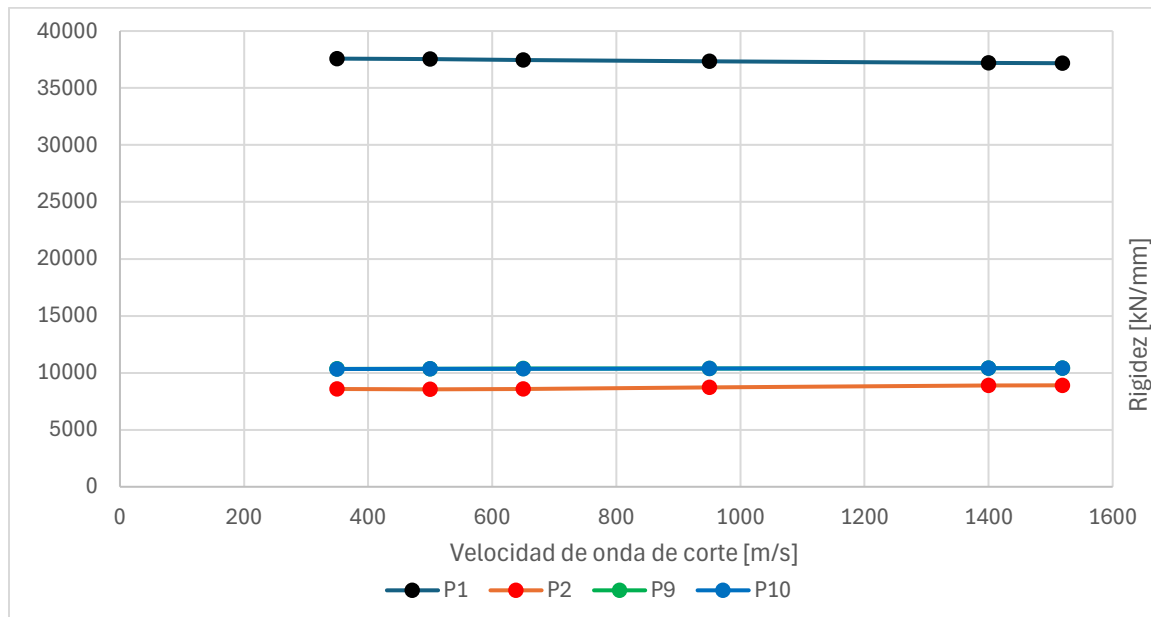


Figura 21. Rigidez puntos de interés Proyecto 3

En la **Figura 21** se observa que las rigideces en los puntos P9 y P10 se superponen, siendo ambas superiores a la rigidez en P2. Por otra parte, se aprecia que la rigidez en P1 es considerablemente mayor en comparación con las otras tres. El aspecto más relevante que se puede destacar es el comportamiento prácticamente constante de la rigidez a lo largo de las distintas velocidades de onda de corte del suelo, presentando variaciones visualmente despreciables. Adicionalmente, se verifica la **Ecuación (56)** y **Ecuación (57)** para valores de velocidad de onda de corte de 1519, 1400, 950, 650, 500 y 350 [m/s], siendo la primera de estas la velocidad originalmente considerada en el proyecto. En la **Tabla 8** se presentan los resultados de la verificación de las ecuaciones del Vendor, es decir, la **Ecuación (56)** que representa el requerimiento de rigidez de los puntos P1 y P2 y la **Ecuación (57)** que representa la rigidez de los puntos P9 y P10.

Tabla 8: Verificación ecuaciones de rigidez

V_s [m/s]	K [kN/mm ²]	Ecuación de rigidez			
1519	8E-04	Ec. (56)	2.26E-05		4.00E-05
		Ec. (57)	4.8E-05	≤	1.00E-04
1400	7E-04	Ec. (56)	2.26E-05		4.00E-05
		Ec. (57)	4.8E-05	≤	1.00E-04
950	3E-04	Ec. (56)	2.25E-05		4.00E-05
		Ec. (57)	4.81E-05	≤	1.00E-04
650	8E-04	Ec. (56)	2.25E-05		4.00E-05
		Ec. (57)	4.82E-05	≤	1.00E-04
500	2E-04	Ec. (56)	2.25E-05		4.00E-05
		Ec. (57)	4.83E-05	≤	1.00E-04
350	5E-05	Ec. (56)	2.24E-05		4.00E-05
		Ec. (57)	4.84E-05	≤	1.00E-04

8. Variaciones de masa, inercia y centro de gravedad

De acuerdo con los resultados obtenidos en el punto 6.3, la opción de modificar la geometría del MAT de la fundación no conduce a resultados significativamente relevantes, por lo que se evalúan otras alternativas para controlar el comportamiento de las vibraciones.

La masa, inercia y centro de gravedad de la fundación son parámetros utilizados en el cálculo de la amplitud de vibración, y estos dependen del tipo de fundación considerada. Usualmente se han considerado 3 tipos de fundaciones para molinos: abovedada, rellena o maciza. En la **Figura 22** se muestra un esquema con cada tipo de fundación.

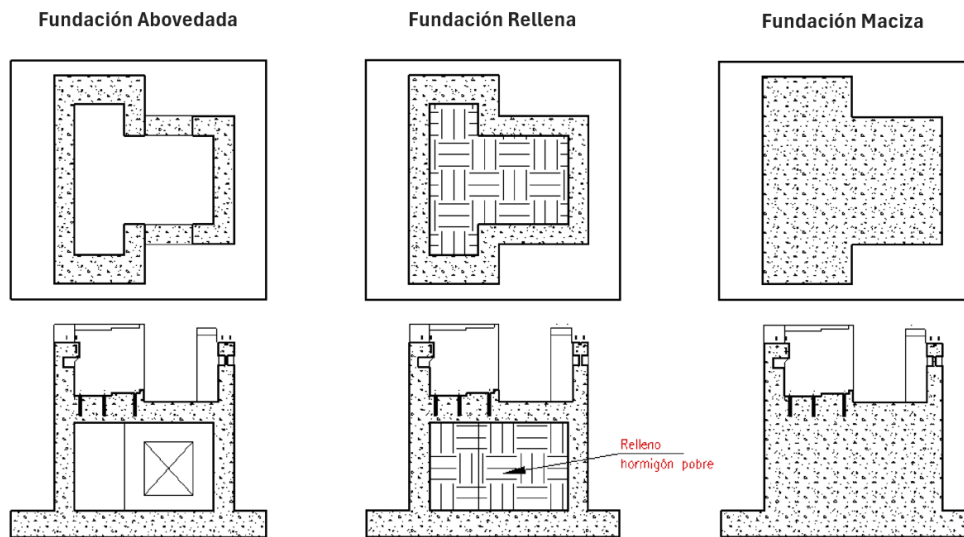


Figura 22. Esquema tipos de fundación

Para revisar como la tipología de la fundación impacta en la amplitud de vibraciones se realiza lo siguiente: (1) Tomar como referencia un proyecto el cual considera una fundación abovedada para los molinos, (2) considerar la fundación seleccionada anteriormente y sumarle un relleno estructural en el espacio disponible de la fundación de manera de obtener una fundación rellena y (3) reemplazar el relleno estructural indicado anteriormente y reemplazarlo por hormigón, con lo cual se obtiene una fundación maciza.

Se analiza el **Proyecto 3** el cual considera una fundación abovedada y se realiza el procedimiento detallado anteriormente. En la **Tabla 9** se muestran las propiedades de la fundación y los parámetros que cambian al considerarla rellena o maciza.

Tabla 9: Propiedades de cada tipo de fundación

	Abovedada	Rellena	Maciza	[Unidad]
Peso Relleno/Hormigón	0	2486	3140	[Tonnesf]
Peso final	12780	15266	15920	[Tonnesf]
Inercia I_{XX}	146597	202478	214971	[Tonnesf m ²]
Inercia I_{YY}	364788	553418	579613	[Tonnesf m ²]
Inercia I_{ZZ}	442017	461834	487670	[Tonnesf m ²]
Centro de gravedad Z_{CG}	10.60	10.02	9.89	[m]

Para confirmar que las 3 tipologías de fundación son factibles a nivel de proyecto, se realiza la verificación del volcamiento, deslizamiento y presión de contacto asumiendo tanto las condiciones originales como la modificación de estas al pasar de ahuecada a rellena o maciza. Los cálculos en detalle se pueden observar en el **Anexo 2**, y los resultados se presentan en la **Tabla 10**:

Tabla 10: Verificación de volcamiento, deslizamiento y presión de contacto

Tipología de fundación	Factor de seguridad		Presión de contacto máxima [MPa]
	Volcamiento	Deslizamiento	
Ahuecada	2.74	3.17	0.41
Rellena	3.03	3.20	0.47
Maciza	3.10	3.21	0.48

Considerando que el factor mínimo de seguridad tanto para el volcamiento como el deslizamiento es 1.5, y presión de contacto admisible según el reporte de mecánica de suelos corresponde a 6 MPa, el cambio en la tipología de fundación no afecta la seguridad del proyecto.

Con estos valores se calculan las diferentes amplitudes de vibración para observar el efecto de variar el tipo de fundación utilizada. Se presenta la **Figura 23** con los resultados obtenidos.

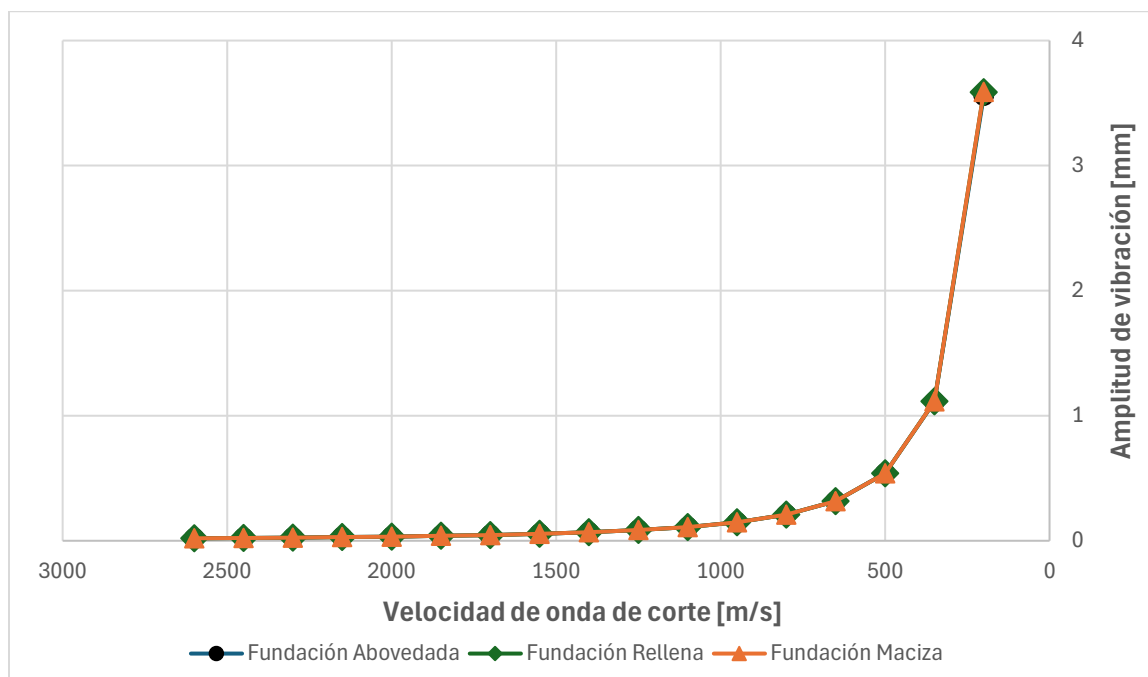


Figura 23. Amplitud de vibraciones según el tipo de fundación

Se observa que la variación en la amplitud de vibración es muy baja entre los distintos tipos de fundaciones y se mantiene prácticamente constante al variar la velocidad de onda de corte. Esto se puede explicar por el hecho de que, al pasar de una fundación abovedada a una rellena y posteriormente a una maciza, los valores de masa e inercia aumentan, lo que podría disminuir la amplitud de vibración, sin embargo, de forma simultánea, el centro de gravedad del sistema se ubica más abajo, acercándose al sello de fundación.

Debido a que la amplitud de vibración es función de la distancia entre el centro de gravedad del sistema y el eje de rotación del molino, un aumento en dicha distancia, a su vez aumenta la amplitud de vibración. Por lo tanto, el efecto beneficioso de incrementar la masa e inercia se ve contrarrestado por el aumento en la distancia entre el centro de gravedad del sistema y el eje de rotación. Lo anterior se ilustra en la **Figura 24**.

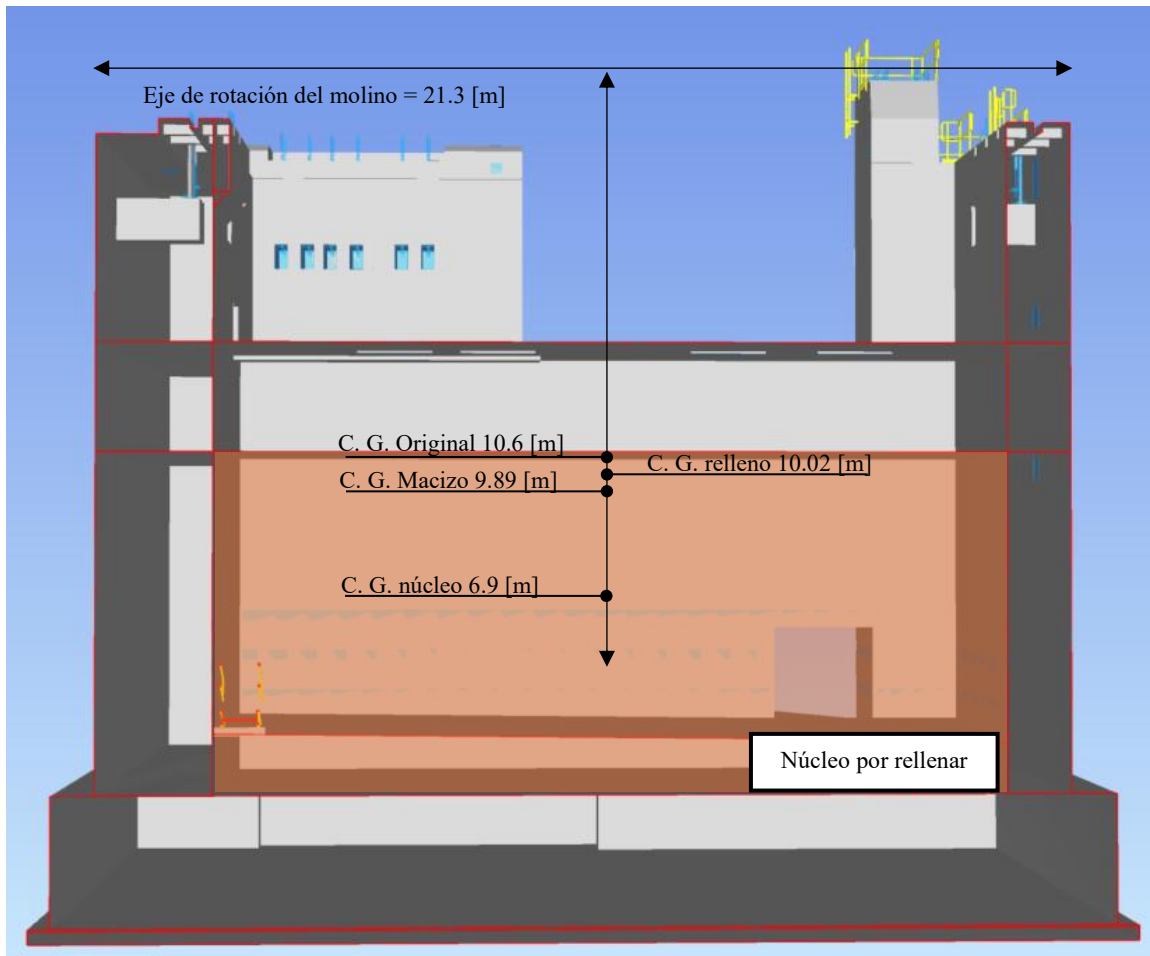


Figura 24. Esquema variación centro de gravedad

9. Análisis de costos

La profundidad en la cual se ubica la fundación del molino SAG o molino bolas impacta significativamente en los costos y plazos de cualquier proyecto, ya que, por lo general, estos equipos determinan la ubicación en altura geográfica de la planta. Esta altura geográfica se traduce en metros cúbicos de excavaciones y rellenos, las cuales son labores fundamentales y a su vez impactan de forma sensible tanto en el presupuesto como en el plazo de un proyecto.

Para poder analizar el impacto económico que conllevaría elevar las fundaciones a un estrato de suelo con una velocidad de onda de corte en un rango entre 800 y 900 [m/s], se toman como referencia los proyectos 3 y 6, cuyas velocidades de onda son de corte son 1519 y 1152 respectivamente. Como se observa en la **Figura 15**, la amplitud de vibración en ambos casos permite ubicar estas fundaciones en un suelo cuya

velocidad de onda de corte se encuentre en el rango mencionado anteriormente. Por lo tanto, al conocer la estratigrafía de ambos proyectos se plantea elevar la profundidad de ambas fundaciones, con el objetivo de cuantificar el ahorro económico que esto implicaría, considerando las cantidades de excavaciones y rellenos respectivas. Cabe destacar que la factibilidad de esta modificación en la altura geográfica del edificio de molinera está sujeta a la compatibilidad con el layout de dichos proyectos.

En la **Figura 25** y **Figura 26** se observan las secciones longitudinales del Proyecto 3 y Proyecto 6 respectivamente. En estas secciones se pueden distinguir los distintos estratos de terreno natural, roca ripable y roca. De la misma forma se observa la ubicación original de ambas fundaciones y en color rojo la nueva ubicación propuesta.

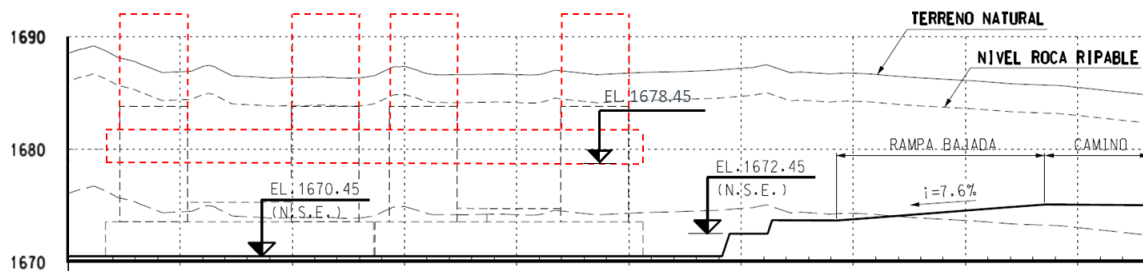


Figura 25. Sección longitudinal Proyecto 3

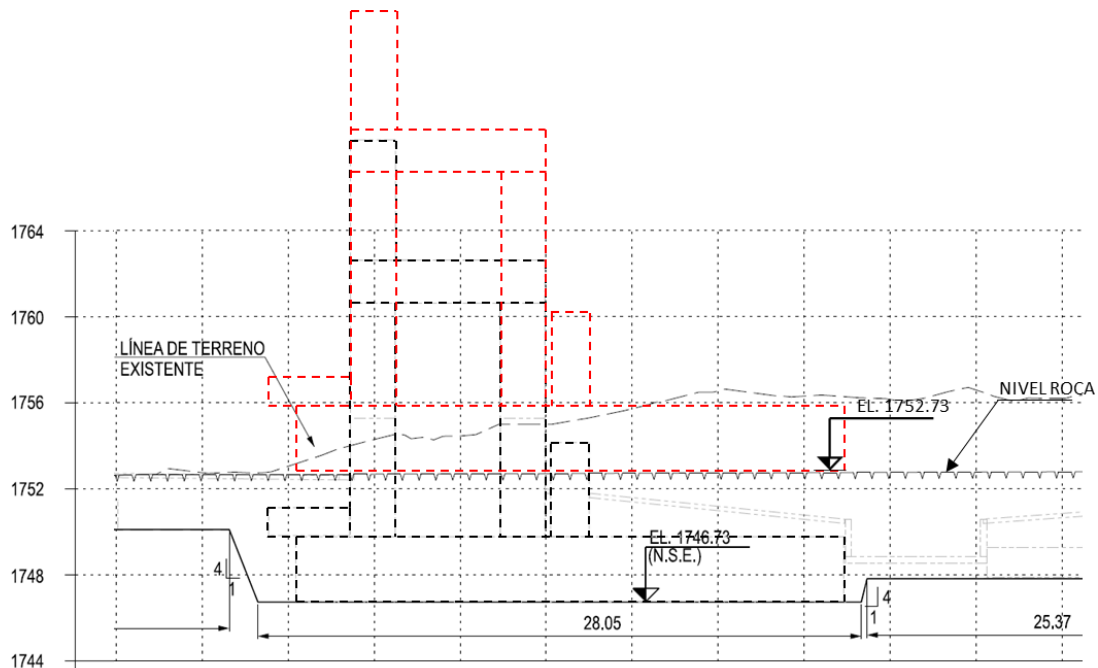


Figura 26. Sección longitudinal Proyecto 6

En el Proyecto 3, la fundación se encuentra a una profundidad de 15 metros aproximadamente. Al elevar el nivel de la fundación en 8 metros se alcanzaría la velocidad de onda de corte de 800 [m/s]. Al realizar esta elevación solo dos de sus plataformas sobrepasarían la línea de terreno existente y por las cuales se incurriría la utilización de relleno estructural. A su vez, en el Proyecto 6 la fundación se encuentra a una profundidad



aproximada de 9 metros, pudiendo elevarse en 6 metros, quedando en un estrato de suelo cuya velocidad de onda de corte es 867 [m/s].

Con la cantidad de excavación ahorrada y relleno necesario, se asigna un precio unitario por metro cúbico y se calcula el costo asociado. En la **Tabla 11** se muestran los resultados del movimiento de tierras y costos realizado al modificar la profundidad del sello de excavación de los proyectos 3 y 6.

Tabla 11: Movimiento de tierra y costos Proyecto 3 y Proyecto 6

	Proyecto	Proyecto 3	Proyecto 6
Cantidad base	Vs original [m/s]	1,519	1,152
	Excavación [m ³]	198,151	26,337
	Relleno [m ³]	433	605
	Excavación [USD \$]	4,826,958	641,569
	Relleno [USD \$]	25,504	35,635
Δh [m]		8	6
Caso elevado	Vs propuesto [m/s]	800	867
	Excavación ahorrada [m ³]	125,377	13,024
	Relleno agregado [m ³]	498	3,150
	Exc. Ahorrada [USD \$]	3,054,183	317,203
	Rell. agregado [USD \$]	29,355	185,423

En base a la estratigrafía de ambos proyectos, los ahorros de excavaciones corresponden a roca ripable. El costo estimado para excavar este tipo de material es de aproximadamente 24 USD/m³ por metro cúbico, lo cual incluye las actividades de excavación, transporte y disposición del material en un botadero designado.

Se considera el uso de “relleno masivo compactado”, cuyo costo incluye los mismos ítems anteriores, además de los costos asociados a la compactación del material, alcanzando un valor estimado de 30 dólares por metro cúbico.

Se observa en la **Tabla 11** que, al elevar el sello de excavación en el **Proyecto 3**, se logra un ahorro aproximado de 125.000 [m³] en movimiento de tierra. Simultáneamente, se requiere incorporar 498 metros cúbicos de relleno, lo que resulta en un ahorro neto de 3 millones de dólares aproximadamente. En el **Proyecto 6** se reducen aproximadamente 13.000 [m³] de excavación, mientras que se agregan 3.150 metros cúbicos de relleno, generando un ahorro estimado de 131 mil dólares.

Los montos indicados consideran únicamente el valor asociado al movimiento de tierra en el sector de molienda. No obstante, esta modificación podría tener un impacto aún mayor, ya que, al elevar el nivel de este sector, podría ser necesario ajustar el nivel de toda la planta. Esto incluye áreas como remolienda, flotación, espesamiento de relaves, entre otras. La magnitud de este impacto dependerá de las condiciones particulares de cada proyecto, y especialmente de la topografía del terreno. En superficies irregulares, es fundamental configurar las instalaciones de manera óptima para adaptarse al entorno y aprovechar la energía potencial en el flujo del mineral privilegiando las conducciones gravitacionales. Por otra parte, esta nueva configuración o elevación de la planta concentradora podría tener restricciones técnicas de otras áreas involucradas en el proyecto, las cuales inhabiliten este eventual levantamiento de la planta, por lo que este ejercicio es solamente conceptual y no necesariamente una opción para el proyecto.

9.1. Aplicación en prefactibilidad de proyecto

En este caso se analiza un proyecto diferente a los vistos anteriormente, ya que este se encuentra en la etapa de prefactibilidad. En esta etapa se evalúa la factibilidad técnica y económica del proyecto, analizando las posibles alternativas de aprovechamiento de la oportunidad para seleccionar la más conveniente.

Se plantea analizar, en base a los resultados obtenidos en este estudio, la posibilidad de emplazar la fundación de este caso proyectado en un estrato ubicado 5 metros por encima del originalmente planificado. La velocidad de onda de corte esperada en el diseño original es de 2648 [m/s]; sin embargo, al elevar el nivel de la fundación, se estima que uno de los molinos de bolas se emplazaría en un estrato con una velocidad de onda de corte de aproximadamente 1800 [m/s].

Se lleva a cabo un análisis de costos similar al presentado anteriormente, considerando una elevación general de la planta que incluye las áreas de stockpile, molienda, flotación y planta de cal. En la **Figura 27** se observa la sección longitudinal del proyecto, y de la misma forma en la **Figura 28** se muestra una proyección en planta de este.

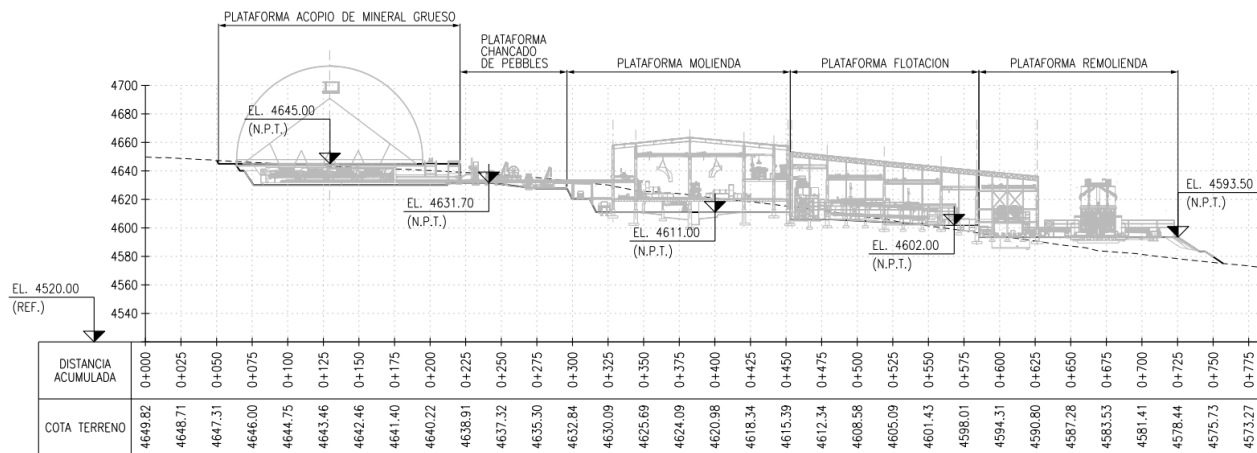


Figura 27. Sección longitudinal planta caso prefactibilidad

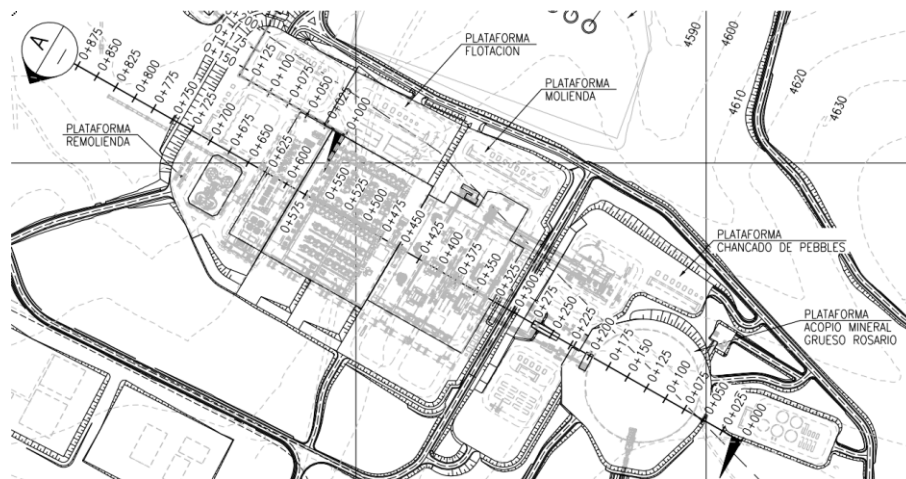


Figura 28. Planta proyectada caso prefactibilidad



En este caso, se contemplan distintos tipos de estratos para las excavaciones: roca, roca ripable y suelo común. Por otra parte, se consideran como elementos de relleno el “relleno masivo compactado” y el “mejoramiento de suelo con hormigón pobre tipo G05”. Los precios unitarios considerados para cada ítem se presentan a continuación en la **Tabla 12**.

Tabla 12: Costos caso proyectado

Costos	
Ítem	[USD/m ³]
Excavación Roca	\$41
Excavación Roca <i>ripable</i>	\$24
Excavación Suelo Común	\$20
Relleno masivo compactado	\$30
Hormigón Pobre - G05	\$982

Con los costos mostrados en la **Tabla 12** se calculan los metros cúbicos evitados de cada estrato y de igual forma los metros cúbicos de relleno que se agregan. El detalle del caso base y el caso base elevado en 5 metros, con sus respectivos movimientos de tierra se muestran a continuación en la **Tabla 13**.

Tabla 13: Costos y movimientos de tierra caso proyectado

Partida [unidad]	Caso Base		Caso Base+5		Diferencia	
	[m ³]	[USD]	[m ³]	[USD]	[m ³]	[USD]
Exc. Roca	232,680	\$9,521,257	129,043	\$5,280,440	103,637	\$4,240,818
Exc. Roca Ripable	470,585	\$11,463,446	251,166	\$6,118,394	219,419	\$5,345,052
Exc. Suelo Común	2,813,058	\$56,204,907	1,546,449	\$30,898,059	1,266,609	\$25,306,848
Rell. Masivo Compactado	590,145	\$17,798,773	928,070	\$27,990,591	337,925	\$10,191,818
Hormigón G05	-	\$0	6,050	\$5,941,100	6,050	\$5,941,100
Total	4,106,468	\$94,988,383	2,860,778	\$76,228,584	1,245,690	\$18,759,799

Como se aprecia en la **Tabla 13**, al elevar la planta en 5 metros se evita la ejecución de aproximadamente 1,6 millones de metros cúbicos de excavación. Simultáneamente, se requiere incorporar cerca de 340 mil metros cúbicos de relleno y 6.000 metros cúbicos de hormigón pobre. Esta modificación implica un ahorro total estimado en aproximadamente 19 millones de dólares.

10. Análisis y discusión

De acuerdo con el desarrollo de este estudio, el parámetro más significativo en los cálculos de amplitud de vibración corresponde al módulo de corte dinámico G . Un aspecto fundamental respecto de este parámetro es su forma de cálculo, ya que normalmente se estima a partir de la velocidad de onda de corte, la cual se obtiene mediante sondajes y ensayos realizados en el suelo.

Es esperable que, a mayor profundidad, se encuentren estratos de suelo más rocosos, lo que implica mayores velocidades de onda de corte y , en consecuencia, valores más altos de G . En los proyectos analizados, se ha considerado el valor de G correspondiente al nivel del sello de excavación, lo cual representa un enfoque conservador. Esto se debe a que, al asumir un menor valor de G , se obtienen mayores amplitudes de vibración, lo que conduce a diseños más robustos.

Una alternativa empleada para el cálculo del módulo de corte dinámico consiste en considerar que el valor de G aumenta con la profundidad, por lo que se puede estimar un valor de G ponderado en una profundidad igual al radio equivalente de la fundación, medido desde el sello de fundación. Las fórmulas para obtener el radio equivalente se detallan en el **Anexo 1-Tabla 15**, obtenidas desde la guía Fluor “vibrating machinery foundations on soil” o de igual forma en el manual ACI 351.3R “reports on foundations for dynamic equipment”. En la **Figura 29** se observa un esquema de las expresiones mencionadas.

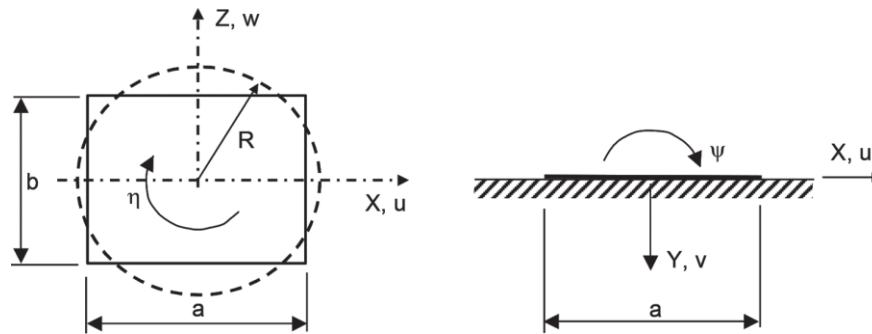


Figura 29. Esquema radio equivalente, ACI 351.3R

En este enfoque, se puede definir el suelo bajo la fundación como distintos estratos de espesor establecido y conociendo para cada uno de ellos un valor de G , por otra parte, estos se ponderan por un factor, asumiendo una distribución triangular, con un valor de 1 en la parte superior y 0 en la inferior. Posteriormente, se ponderan estos valores por el espesor de cada estrato y se obtiene un valor de G efectivo. Este valor considera el efecto del suelo bajo la fundación a una profundidad representativa, y conduce a un análisis menos conservador, ya que se obtienen valores de G mayores al obtenido en el sello de fundación.

Para una mejor comparación, en el **Proyecto 6** se considera un valor de G igual a 3613 [MPa] a nivel del sello de fundación, ubicado aproximadamente a 12 metros de profundidad, asociado a una velocidad de onda de corte de 1153 [m/s]. Si se recalcula el módulo G utilizando el método descrito anteriormente, se obtiene un valor de 4775 [MPa], equivalente a una velocidad de onda de corte de 1519 [m/s]. Esto implica que las amplitudes de vibración serían menores a las inicialmente calculadas, lo que otorga un mayor margen para emplazar la fundación en un estrato de suelo ubicado a menor profundidad.



Otra opción para este cálculo se puede desarrollar asumiendo una distribución lineal del valor de G desde 0 a R_0 , es decir, tomando como valor inicial el valor a nivel de fundación y como valor final, el valor a nivel de fundación más el radio equivalente. Siguiendo una distribución triangular al igual que el caso anterior, definiendo una función $f(x)$ como una función de peso asociada a la profundidad y otra función $g(x)$ para el valor de G , para luego integrar la ponderación de ambas. Las funciones se muestran a continuación.

$$f(x) = 1 - \frac{x}{R_0} \quad (58)$$

$$g(x) = G_0 + (G_1 - G_0) \frac{x}{R_0} \quad (59)$$

Al integrar la ponderación de ambas funciones y obtener el valor de G se obtiene como resultado:

$$G_{pond} = \frac{2G_0 + G_1}{3} \quad (60)$$

Si se utiliza este método en el análisis del **Proyecto 6**, se obtiene un valor de G ponderado igual a 4595 [MPa], lo cual tiene implica menos de un 5% de diferencia, por lo que se considera una buena aproximación.

Al momento de analizar la posibilidad de elevar el nivel del sector de molienda, o de la planta en general, es fundamental considerar el perfil hidráulico establecido para el flujo del mineral, definido por los especialistas mecánicos y de transporte de pulpa. Esto se debe a que, en ciertas ocasiones, elevar una plataforma implica también elevar las plataformas que la anteceden en el proceso, lo cual no siempre resulta factible desde el punto de vista técnico o económico.

Por otra parte, también se debe evaluar la relación entre las cantidades de excavación y las de relleno, procurando mantener un equilibrio entre ambas. Si bien, como se observa en la **Tabla 12**, la aplicación de relleno masivo compactado resulta más económica que la excavación en roca, es importante considerar que el proceso de relleno implica plazos mayores, debido a la necesidad de realizar compactaciones sucesivas que aseguren la estabilidad del terreno.



11. Conclusiones y recomendaciones

Al observar el comportamiento de la amplitud de vibración en las distintas fundaciones analizadas, para diversas velocidades de onda de corte, se puede concluir que existe un margen de movilidad vertical en la capacidad del suelo de los casos estudiados. Este margen se debe a que, por debajo de los 900 [m/s], la amplitud de vibración no presenta incrementos que comprometan los requerimientos mínimos de seguridad del air gap, ya que se mantienen en valores considerablemente bajos. En este contexto, los proyectos analizados podrían haber considerado emplazar sus fundaciones en estratos de suelo con velocidades entre 900 y 500 [m/s], sin comprometer la integridad operativa del equipo. Es recomendable analizar esta alternativa y su factibilidad considerando posibles interferencias con el layout mecánico. No obstante, esto no implica que cualquier fundación pueda ser ubicada en este tipo de suelo, ya que es indispensable realizar un análisis dinámico específico para cada estructura, a fin de asegurar su correcto funcionamiento.

Asimismo, se infiere que el valor del coeficiente de Poisson no afecta de manera significativa las vibraciones del equipo. De igual forma, en caso de presentarse problemas de vibración, es decir, amplitudes que generen inconvenientes en la fundación, se concluye que aumentar la rigidez de los muros más allá de lo que tradicionalmente se han diseñado en la industria, no reduce dichas amplitudes, dado que los pedestales tienden a comportarse como un cuerpo rígido.

Al evaluar la alternativa de modificar o aumentar la geometría del mat de fundación, se deduce que, en suelos rocosos con altas velocidades de onda de corte (900 [m/s] o superiores), no resulta viable ampliar el mat. Los beneficios obtenidos, es decir, la reducción de la amplitud de vibración, disminuyen a medida que aumenta la velocidad de onda de corte del estrato. Ahora bien, esta opción puede considerarse en suelos de menor capacidad con una velocidad de onda de corte baja (cercana a 500 o menos), si bien esta medida no representa una disminución considerable en la amplitud de vibración, en casos particulares, puede aportar un pequeño beneficio de ser necesario. De la misma forma, se concluye que no se presentan ventajas significativas desde el punto de vista del control de vibraciones entre las distintas tipologías de fundación (ahuecada, rellena o maciza), por lo que la elección de esta debe ser enfocada en minimizar el costo económico y acortar plazos de ejecución.

Desde el punto de vista económico, emplazar las fundaciones en estratos más elevados representa un ahorro en el CAPEX (costos de ejecución del proyecto), además de implicar una reducción en los plazos de ejecución. Para evaluar la conveniencia de esta decisión, es necesario considerar diversos factores, tales como la altura geográfica del sello de fundación, la topografía del terreno, la cantidad de excavación evitada y el volumen de relleno requerido. Estos elementos permiten determinar la viabilidad y beneficio final de modificar la altura del sello de fundación y, por ende, la profundidad de excavación.

Finalmente, considerando que los análisis presentados en este estudio se realizaron utilizando el valor más conservador del parámetro G , y sumando a ello la variabilidad de altura geográfica permitida por las distintas velocidades de onda de corte existentes, se concluye que no es estrictamente necesario emplazar las fundaciones en suelos exclusivamente rocosos, con velocidades de onda de corte superiores a 900 [m/s]. Tanto en los casos analizados como en futuros proyectos, se puede considerar la posibilidad de ubicar las fundaciones en estratos de suelo con velocidades de onda de corte en el rango de 900 a 500 [m/s], ya que los niveles de amplitud de vibración, en muchos casos, permiten el uso de este tipo de suelos sin comprometer la integridad operativa del equipo.



12. Referencias

- Arya, S. C., O'Neill, M. W., & Pincus, G. (1979). *Design of structures and foundations for vibrating machines*. Houston, TX: Gulf Publishing Company
- Chopra, A. K. (2017). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Pearson.
- Clough, R. W., & Penzien, J. (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill.
- Committee, A. (2018). *351.3R-18: Report on Foundations for Dynamic Equipment*. www.concrete.org
- Craig, R. F. (2004). *Craig's Soil Mechanics*. Spon Press.
- Das, B. M. (2010). *Principles of Foundation Engineering*. Cengage Learning.
- Ewins, D. J. (2010). Control of vibration and resonance in aero engines and rotating machinery - An overview. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 87(9), 504–510.
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2010.07.001>
- Instituto Nacional de Normalización. (2016). Norma chilena NCh2369: Diseño sísmico de estructuras e instalaciones industriales. Santiago, Chile: Instituto Nacional de Normalización.
- Li, J., Liu, K., Kang, X., & Wang, X. (2025). Design of annular megastructures vibration suppression in rotating machinery. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 228.
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2025.112443>
- Terzaghi, K., Peck, R. B., & Mesri, G. (1996). *Soil Mechanics in Engineering Practice*. Wiley.
- El resto de los documentos utilizados para la confección del presente documento son de carácter confidencial y por lo tanto no pueden ser divulgados.



13. Anexos

13.1. Anexo 1

A continuación, se muestran las ecuaciones necesarias para obtener los factores utilizados en el cálculo de constantes de rigidez.

Tabla 14: Coeficientes de rigidez por enterramiento

Movimiento	Coeficiente de rigidez por enterramiento
Vertical	$N_v = 1 + 0.6(1 - \mu) \left(\frac{H}{r_0}\right)$
Horizontal	$N_H = 1 + 0.55(2 - \mu) \left(\frac{H}{r_0}\right)$
Rocking	$N_r = 1 + 1.2(1 - \mu) \left(\frac{H}{r_0}\right) + 0.2(2 - \mu) \left(\frac{H}{r_0}\right)^3$
Torsión	Sin solución, asumir $N_v = 1$

Donde:

H = Profundidad de enterramiento del mat, usar 2/3 del valor real para ser conservadores

r_0 = radio equivalente

μ = Coeficiente de Poisson

Ecuaciones para obtener el radio equivalente:

Tabla 15: Ecuaciones para radio equivalente

Movimiento	Radio equivalente r_0
Traslación	$r_0 = \sqrt{\frac{bL}{\pi}}$
Rocking	$r_0 = \left(\frac{bL^3}{3\pi}\right)^{0.25}$
Torsión	$r_0 = \left(\frac{bL(b^2 + L^2)}{6\pi}\right)^{0.25}$

Ecuaciones para obtener el coeficiente de enterramiento S:



Tabla 16: Coeficientes de enterramiento

Movimiento	Coefficiente de enterramiento S
Vertical	$S_V = \frac{1 + 1.9(1 - \mu) \left(\frac{H}{r_0}\right)}{\sqrt{N_V}}$
Horizontal	$S_H = \frac{1 + 1.9(2 - \mu) \left(\frac{H}{r_0}\right)}{\sqrt{N_H}}$
Rocking	$S_R = \frac{1 + 0.7(1 - \mu) \left(\frac{H}{r_0}\right) + 0.6(2 - \mu) \left(\frac{H}{r_0}\right)}{\sqrt{N_R}}$
Torsión	$S_T = 1.0$

13.2. Anexo 2

A continuación, se muestran los cálculos para la verificación de volcamiento, deslizamiento y tensión admisible para los casos de fundación ahuecada, rellena y maciza. Estas verificaciones se realizaron tomando la combinación de cargas más desfavorable, es decir, LC7: DL+OP+Ey-Ez para volcamiento y deslizamiento, en el caso de tensión admisible se utilizó LC20: DL+OP. Los estados de carga se definen a continuación:

DL (Dead Load): Cargas de peso propio.

OP (Operational Load): Carga operativa (mineral y bolas).

Ey (Seismic Loads): Carga sísmica horizontal dirección Y (Transversal).

Ez (Seismic Loads): Carga sísmica vertical dirección.

Se considera que el peso extra para la fundación rellena es de 2485.614 tonnef y 3139.72 tonnef en el caso de la fundación maciza.

13.2.1. Volcamiento

Se superponen los efectos de la fundación y los equipos, por lo que se deben considerar las cargas como se muestra a continuación en la **Tabla 17**.



Tabla 17: Efectos equipo - fundación

Elemento	FZ[t]	Fy[t]	Fx[t]	Xg[m]	Yg[m]	Zg[m]	Mx=Fy*Z
P1	1434.2	870.6	0	0.0	0.0	21.3	18544.0
P2	1257.0	720.0	0	19.3	0.0	21.3	15336.0
P3	3.8	2.5	0	17.3	4.6	21.3	53.3
P4	3.8	2.5	0	17.3	-4.6	21.3	53.3
P9	249.3	361.1	0	2.2	8.2	21.3	7691.9
P10	-87.1	177.0	0	2.2	-8.2	21.3	3771.0
Total	2861.0	2133.8	0.0				45449.4

Se definen los siguientes parámetros, los cuales fueron obtenidos desde la memoria de cálculo asociada al **Proyecto 3**.

- $C_{my} = 0.2142$ Coeficiente sísmico del análisis modal resultante dirección Y
- $W_{fa} = 8656.6 \text{ tonnef}$ Peso de fundación que se acelera
- $Z_{gf} = 7.15 \text{ m}$ Posición centro de gravedad dirección Z (vertical):
- $N_{stay102LC7} = 87.1 \text{ tonnef}$ Carga vertical total estator descarga 102 ascendente (incluye sismo vertical)
- $d_{sta102} = 20.1 \text{ m}$ Distancia apoyo 102 estator a punto de rotación
- $N_{molbf5} = 1434.2 \text{ tonnef}$ Carga vertical en apoyo fijo molino en operación (Incluye sismo vertical)
- $N_{molbd5} = 1257 \text{ tonnef}$ Carga vertical en apoyo deslizante molino operación (Incluye sismo vertical)
- $N_{BRop5} = 7.6 \text{ tonnef}$ Carga vertical total freno (Incluye sismo vertical)
- $B_{zap} = 22.9 \text{ m}$ Ancho zapata
- $N_{stay101LC7} = 249.3 \text{ tonnef}$ Carga vertical total estator descarga 101 (Incluye sismo vertical)
- $d_{stay101} = 3.8 \text{ m}$ Distancia apoyo 101 estator a punto de rotación
- $W_f = 12054 \text{ tonnef}$ Peso fundación
- $N_{vf} = 1611.32 \text{ tonnef}$ Carga sismo vertical fundación
- $W_r = 1041.74 \text{ tonnef}$ Peso relleno estructural sobre zapata

Con estos parámetros se procede a calcular la fuerza sísmica horizontal de fundación:

$$Q_{bfy} = C_{my} \cdot W_{fa} = 1725.72 \text{ tonnef}$$



Luego se procede a calcular el momento volcante entorno a X por cargas de operación y sismo en Y combinación 6:

$$MV_{xLC6} = 45449.4 \text{ tonnef m} + Q_{bfy} \cdot Z_{gf} = 57788.32 \text{ tonnef m}$$

Con lo que se obtiene el momento volcante final:

$$MV_{xLC7} = MV_{xLC6} + N_{stay102LC7} \cdot d_{sta102} = 59535.9 \text{ tonnef m}$$

A continuación, se obtiene el momento resistente:

$$MR_{xLC7} = (N_{molbf5} + N_{molbd5} + N_{BRop5}) \frac{B_{zap}}{2} + N_{stay101LC7} \cdot d_{stay101} + (W_f - N_{vf} + W_r) \frac{B_{zap}}{2}$$

$$MR_{xLC7} = 163345.21 \text{ tonnef m}$$

Y se calcula el factor de seguridad

$$FSV_{xLC7} = \frac{MR_{xLC7}}{MV_{xLC7}} = 2.74$$

Si se considera la masa agregada al considerar pasar de una fundación ahuecada a una rellena se obtienen los siguientes resultados:

$$Q_{bfy} = 2258.14 \text{ tonnef}$$

$$MV_{xLC6r} = 61595.12 \text{ tonnef m}$$

$$MV_{xLC7r} = 63345.827 \text{ tonnef m}$$

$$MR_{xLC7r} = 191805.49 \text{ tonnef m}$$

$$FSV_{xLC7r} = \frac{MR_{xLC7r}}{MV_{xLC7r}} = 3.03$$

De la misma forma si se considera una fundación maciza, se obtiene:

$$Q_{bfym} = 2398.25 \text{ tonnef}$$

$$MV_{xLC6m} = 62596.9 \text{ tonnef m}$$

$$MV_{xLC7m} = 64347.615 \text{ tonnef m}$$

$$MR_{xLC7r} = 199295.04 \text{ tonnef m}$$

$$FSV_{xLC7m} = \frac{MR_{xLC7r}}{MV_{xLC7m}} = 3.1$$

Considerando que el factor mínimo de seguridad es 1.5 se concluye que las 3 tipologías de fundación se encuentran sobre el límite de seguridad requerido.



13.2.2. Deslizamiento

Se definen los siguientes parámetros:

$$N_{V_{eqop}} = 4520.9 \text{ tonnef} \quad \text{Cargas verticales equipos en operación (Incluye sismo vertical)}$$

$$N_{vf} = 1611.32 \text{ tonnef} \quad \text{Carga sismo vertical fundación}$$

$$\mu = 0.74 \quad \text{Coeficiente de roce suelo de fundación}$$

$$Q_{yeq} = 1587.2 \text{ tonnef} \quad \text{Fuerza sísmica horizontal transversal equipos}$$

$$F_{yeq} = 426 \text{ tonnef} \quad \text{Fuerza de operación horizontal transversal equipos}$$

Se calcula la fuerza resistente:

$$FR_{LC7} = (N_{V_{eqop}} + W_f - N_{vf} + W_r) \mu = 11843.94 \text{ tonnef}$$

Se calculan las fuerzas deslizantes:

$$FD_{LC7} = (Q_{yeq} + Q_{bfy}) + F_{yeq} = 3738.92 \text{ tonnef}$$

Y el factor de seguridad:

$$FSD_{LC7} = \frac{FR_{LC7}}{FD_{LC7}} = 3.17$$

Al recalculer para una fundación rellena se obtiene:

$$FR_{LC7r} = 13683.29 \text{ tonnef}$$

$$FD_{LC7r} = 4271.34 \text{ tonnef}$$

$$FSD_{LC7r} = \frac{FR_{LC7r}}{FD_{LC7r}} = 3.2$$

De la misma forma, al recalculer para una fundación maciza:

$$FR_{LC7m} = 13683.29 \text{ tonnef}$$

$$FD_{LC7m} = 4271.34 \text{ tonnef}$$

$$FSD_{LC7m} = \frac{FR_{LC7m}}{FD_{LC7m}} = 3.21$$

13.2.3. Presión de contacto

Se definen los siguientes parámetros:

$$\sigma_{alle} = 6 \text{ MPa} \quad \text{Tensión admisible estática según informe geotécnico}$$

$$N_{LC2} = 16888.6 \text{ tonnef} \quad \text{Carga vertical en sello de fundación}$$



$A_{zap} = 556.47 \text{ m}^2$	Área zapata
$I_{yyzap} = 27344.3 \text{ m}^4$	Momento de inercia zapata eje transversal
$I_{xxzap} = 24668.2 \text{ m}^4$	Momento de inercia zapata eje longitudinal
$L_{zap} = 24.3 \text{ m}$	Largo zapata
$B_{zap} = 22.9 \text{ m}$	Ancho zapata
$XG_{zap} = 11.9 \text{ m}$	Centro de gravedad zapata en longitudinal
$M_{xxLC2} = 11815.86 \text{ tonnefm}$	Momento entrono a eje X – cargas de operación

Primero se calcula el momento entrono a Eje Y - Cargas verticales

$$M_{yyLC2} = 0.8352 * N_{LC2} = 14105.36 \text{ tonnef m}$$

Se calcula el modulo resistente 2 eje transversal:

$$W_{yy2} = \frac{I_{yyzap}}{L_{zap} - XG_{zap}} = 2205.19 \text{ m}^3$$

Modulo resistente 1 eje longitudinal:

$$W_{xx1} = \frac{I_{xxzap}}{B_{zap}/2} = 2154.43 \text{ m}^3$$

Finalmente se obtiene la tensión máxima de contacto:

$$\sigma_{maxLC2} = \frac{N_{LC2}}{A_{zap}} + \frac{M_{yyLC2}}{W_{yy2}} + \frac{M_{xxLC2}}{W_{xx1}} = 0.41 \text{ MPa}$$

Si se considera el cambio de masa, se debe modificar la carga vertical sobre el sello de fundación, que a su vez modifica el momento entrono al eje Y por cargas verticales. Los resultados para fundación rellena se muestran a continuación:

$$N_{LC2} = 19374.21 \text{ tonnef}$$

$$M_{yyLC2} = 16181.34 \text{ tonnef m}$$

$$\sigma_{maxLC2} = 0.47 \text{ MPa}$$

Finalmente, los resultados para fundación maciza se muestran a continuación:

$$N_{LC2} = 20028.32 \text{ tonnef}$$

$$M_{yyLC2} = 16727.66 \text{ tonnef m}$$

$$\sigma_{maxLC2} = 0.48 \text{ MPa}$$