

Exploración del espacio paramétrico de la geometría de un pit
para determinar la mejor situación geomecánica bajo el criterio
de Mohr-Coulomb

Esteban Hernán Román Catafau

Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Valparaíso, Chile
2017

Exploración del espacio paramétrico de la geometría de un pit
para determinar la mejor situación geomecánica bajo el criterio
de Mohr-Coulomb

Esteban Hernán Román Catafau

Memoria presentada como requisito para optar al título de:
Ingeniero Civil Matemático

Profesor Guía:
Dr. Patricio Toledo

Profesor Co-Tutor:
Dr. Eduardo Godoy

Profesor:
Dr. Elías Tuma

Profesor:
Dr. Mario Durán

Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Valparaíso, Chile
2017

Agradecimientos

Quiero agradecer el apoyo constante de toda mi familia, mis dos hermanos Emmanuel y Américo y mis padres Margarita y Ricardo. Su constante preocupación y fe, a pesar de todo, en mi, me hacen una mejor persona. Fueron varios años de apoyo que agradeceré siempre.

A quienes me dieron esta oportunidad agradezco de forma infinita, Patricio Toledo y Eduardo Godoy, mil gracias por su apoyo, tiempo, paciencia, dedicación y enseñanzas. También quiero agradecer a Mario Durán y a INGMAT Centro I+D por permitirme participar en este proyecto.

A mis amigos y compañeros de carrera, Juan Araya, Enrique Otarola y Alejandro Allendes, gracias por ser quienes son, siempre he estado orgulloso de que sean mis amigos, espero verlos y celebrar este hito personal con ustedes.

A todos los profesores que tuve en la Universidad Santa María, en particular a Elías Tuma, por sus clases, consejos y momentos compartidos. Son quienes me dieron los conocimientos fundamentales que me permitieron desarrollar esta memoria. No puedo dejar afuera mis eternos agradecimientos a dos personas muy especiales, mi hada madrina Verónica Gruenberg y también a Myriam Flores.

A mis compañeros de trabajo también les agradezco su constante apoyo y buena onda, Katia V., Rely P., Marcelo V., Alejandra M., Salvador Y., Paula M., Lorenzo R., Gustavo C., Juan Daniel S., Roberto P. y Pamela M. gracias por todo, tanto el apoyo para terminar la memoria como por mejorar mis días en el trabajo.

Para terminar quiero agradecer a mis amigos de la vida, Nicolas L., Natan G., Maria Jose M. Felipe L., Andres A. y Pamela B. por confiar ciegamente en mi y mis capacidades.

Gracias a todos, siempre estarán presentes.

Resumen

Dada la baja sostenida en las leyes de los yacimientos, se hace necesario llegar a mayores profundidades para extraer los minerales utilizando métodos de cielo abierto. Este hecho puede producir inestabilidad geomecánica por tener la excavación una geometría más empinada. Usualmente, para estudiar la estabilidad, se debe determinar el estado tensional del macizo en el cual está la excavación usando algún método numérico, a lo que debe agregarse un criterio que indique si hay o no estabilidad. En la práctica, las deformaciones inducidas tienen largo alcance, por tanto, ha de tenerse en cuenta que se trabaja sobre un dominio no acotado. Luego, es necesario aplicar alguna herramienta matemática para tratar esto: se propone el uso del operador Dirichlet-to-Neumann (DtN). El uso de este exige resolver dos problemas acoplados, uno interior y otro exterior. Para el problema exterior se aplica una solución analítica, mientras que para el problema interior se aplica un método de elementos finitos. Para medir la estabilidad del macizo se usa el criterio de Mohr-Coulomb, en donde se calcula una distancia γ desde un círculo que representa el estado tensional en un punto a una recta que representa el criterio de falla. Si la distancia es positiva, se considera estable. El problema que se plantea es parametrizar la geometría de una excavación, calcular el estado tensional (vía el operador DtN) y determinar la estabilidad de un conjunto de configuraciones de interés. Se analizaron dos geometrías diferentes: la primera representa un *pit* real, con una secuencia de peldaños heterogénea. Se encontró que para los materiales y dimensiones comúnmente usadas en la minería se tienen casos estables. La segunda geometría esta parametrizada por dos ángulos, β que determina la pendiente global del *pit* y α que determina la pendiente del banco. Se exploraron 140 combinaciones de estos para estudiar la estabilidad de todos ellos. Nuevamente se encontró que para los materiales estudiados, las configuraciones son estables. Una oportunidad a futuro es la necesidad de estudiar la estabilidad bajo condiciones de heterogeneidad del medio y bajo la acción de fuerzas externas como tronaduras, cargas estáticas o deslizamientos. Finalmente queda por recalcar que la metodología propuesta habilita el estudio, en tiempos razonables, de problemas de geomecánica aplicados en condiciones de simetría axial.

Palabras clave: Elementos finitos, DtN, *pit*, estabilidad, Mohr-Coulomb.

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen	IV
1 Introducción	3
1.1 Estado del arte	4
2 Objetivos	6
2.1 Objetivo Principal	6
2.2 Objetivos Específicos	6
3 Metodología	7
4 Formulación del Modelo	8
4.1 Generalidades	8
4.2 Modelo elastoestático axisimétrico	9
4.3 Formulación de MEF en el dominio computacional	10
4.3.1 Problema con valor en la frontera acotado equivalente	10
4.3.2 Formulación débil	11
4.3.3 Discretización MEF	12
4.4 Criterio de falla de Mohr-Coulomb	14
5 Resultados	18
5.1 Caso Base	19
5.2 Caso Real	22
5.3 Caso General α y β	26
5.4 Cotas para S_0	28
6 Discusión	29
7 Conclusiones	30
8 Apéndice	31
8.1 Trabajo previo	31
8.1.1 Aproximación de las condiciones de contorno artificiales exactas	31
8.2 Figuras y resultados	45
8.2.1 Caso Base	45
8.2.2 Caso Real	54
8.2.3 Caso General α y β	63

1 Introducción

Dada la baja sostenida en las leyes de los yacimientos [28], la profundidad de la minas es cada vez mayor. Esto produce que la geometría de los *pits* sea más empinada. Una posible consecuencia de este hecho es la inestabilidad geomecánica, con efectos adversos en términos de disminución de recursos y reservas mineras, pérdidas de equipos, tiempo y riesgos a los trabajadores.

Una posible medida de control a los efectos de la inestabilidad geomecánica es el conocimiento preciso del estado tensional del macizo rocoso. Dentro de los métodos más usados para conocer los esfuerzos se encuentran los métodos de elementos finitos [25].

En el ámbito de los métodos de elementos finitos, es común truncar el dominio de cálculo por motivos de eficiencia computacional, con los consecuentes errores. A pesar de que existen algunos métodos capaces de lidiar con este hecho (elementos de frontera y métodos espectrales), estos siguen siendo excesivamente costosos en términos prácticos o requieren elevadas simetrías. Esta dificultad ha motivado la formulación de métodos numéricos eficientes, prácticos y capaces de lidiar con dominios no acotados.

Una de las formulaciones modernas capaces de atacar este problema tiene como núcleo central la utilización de un operador pseudodiferencial, llamado Steklov [26] o Dirichlet-to-Neumann (DtN).

Para aplicar este operador, se requiere una partición del dominio, que es posible apreciar en la **Figura 1-1**

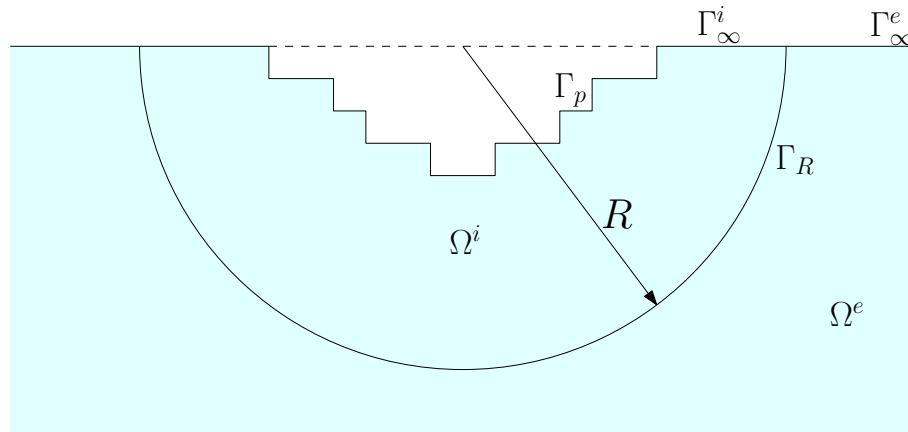


Figura 1-1: Geometría del dominio para ser tratado con el operador DtN

Es posible apreciar un semiespacio en celeste que va a representar la superficie de la Tierra, con una perturbación escalonada Γ_p , que va a representar un *pit* minero. También es posible apreciar un semicírculo de radio R que define una superficie Γ_R sobre la cual operará DtN.

La forma de hacer el cálculo sobre el dominio no truncado es unir una solución analítica sobre el dominio exterior Ω^e con una solución discreta sobre el dominio interior Ω^i .

Se propone calcular los esfuerzos en base a este método sobre dominios no acotados tomando en consideración un material elástico, homogéneo e isotrópico abarcando tanto el dominio interior como exterior.

1.1. Estado del arte

Los estudios realizados en este tipo de dominio, no acotados, existen desde los finales de la década de los 60. Los métodos más populares son los de esquemas explícitos de diferencias finitas para obtener soluciones aproximadas a problemas de propagación de ondas [2, 6, 23, 1, 20]. Estos se resuelven normalmente para un medio no acotado, pero debido a la cantidad limitada de cálculo, tiempo o espacio, la solución sólo puede obtenerse con un número finito de puntos; una alternativa es introducir límites o fronteras artificiales para obtener un modelo truncado (ver **Figura 1-1**). La introducción de estas fronteras, pueden producir ondas que se reflejen hacia el interior, este efecto no es deseado. En el proceso físico real las ondas pasan a través de estas fronteras, sin reflexión. Como son necesarias estas fronteras artificiales, se han buscado condiciones de borde que reduzcan la reflexión en la frontera. Los trabajos posteriores [7, 24], dan condiciones de borde que disminuyen la reflexión. Estos métodos son conocidos como NRBC (Non-reflecting boundary-conditions).

Los problemas de valores en la frontera, (BVP, Boundary Value problems) formulados en dominios no acotados surgen en muchos campos de aplicación, tales como acústica, geofísica, sismología, oceanografía y meteorología, entre otros.

Se han ideado diferentes enfoques matemáticos y numéricos para resolver BVPs en dominios no acotados. Según Givoli [9, 11], se clasifican en cuatro categorías principales: métodos integrales de frontera, métodos de elementos finitos, métodos de capas absorbentes y condiciones de borde artificiales ABC (artificial boundary conditions). Las ventajas y limitaciones de cada uno de ellos se discuten en [12]. Este trabajo es parte de la continuación de una investigación que empezó el 2015 por Godoy et al. [5, 14], la cual se refiere a la última categoría, también conocida como método de frontera artificial [16, 17].

En el método ABC, se trunca el dominio no acotado original introduciendo una frontera artificial que encierra el área particular de interés, definiendo así un dominio computacional acotado, donde se pueden usar métodos numéricos estándares para resolver el BVP. Esto es posible bajo la restricción de que se establezcan condiciones de borde adecuadas en la frontera artificial, que se supone representan adecuadamente el dominio residual no acotado que fue eliminado.

En general, muchas opciones diferentes de ABC son posibles. Godoy se centró en ABCs basado en el operador de Dirichlet-to-Neumann (DtN) y su uso en combinación con elementos finitos, lo que resulta en el método de elementos finitos Dirichlet-to-Neumann (DtN FEM) [10, 13]. La principal ventaja de este enfoque es que el operador DtN proporciona una ABC exacta, de tal manera que el BVP resultante en el dominio computacional es matemáticamente equivalente al BVP original sin límites. Por lo tanto, el uso de FEM para resolver el primero resulta en esquemas numéricos muy precisos y robustos.

Los últimos estudios fueron realizados sobre un modelo de un pit semiesférico, lo que presentamos en este trabajo serán modelos sin la simplificación que trae consigo el modelo caso semiesférico.

2 Objetivos

2.1. Objetivo Principal

Estudiar estabilidad del macizo según el criterio de Mohr-Coulomb bajo distintas perturbaciones. Para esto se calculará el factor de seguridad γ para varias configuraciones del *pit*.

2.2. Objetivos Específicos

1. Extender estudio anterior realizado con una perturbación semiesférica a una con forma de peldaños.
2. Calcular el factor de seguridad γ para configuraciones básicas. Estas están lejos de ser configuraciones reales de un *pit*, pero son un primer paso.
3. Calcular el factor de seguridad γ para configuraciones obtenidas de una mina real.
4. Calcular el factor de seguridad γ para 140 configuraciones distintas modeladas con distintos valores de los parámetros α y β .
5. Obtener valores máximos y mínimos de γ para distintos valores de S_0 y para 140 configuraciones distintas.

3 Metodología

Usaremos el método de elementos finitos DtN mencionado, para obtener los resultados deseados.

Los pasos a seguir son:

1. Cambiar la perturbación semiesférica por una con forma de peldaños. Es un conjunto de segmentos rectos que van formando los peldaños.
2. Encontrar los valores de γ para los primeros casos que son con 1, 2, 4 y 8 peldaños. Esta parte la nombramos *Caso Base*.
3. Dada una perturbación de una mina real, se repitieron los cálculos para ver como se comporta una mina donde sus peldaños no son homogéneos. Esta parte la nombramos *Caso Real*.
4. Con la intención de obtener resultados representativos para distintas configuraciones de la perturbación se crearon 140 perturbaciones diferentes parametrizadas por los ángulos α y β obteniendo valores extremos para el valor γ . Esta parte la nombramos *Caso General*.
5. El caso anterior fue analizado con un valor de S_0 fijo. Para extender los resultados aún más, se repitieron todos los cálculos anteriores con otros 5 valores de S_0 . Con esto se obtuvieron valores críticos para S_0 . Esta parte la nombramos *Cotas para S_0* .

4 Formulación del Modelo

4.1. Generalidades

El dominio a analizar es el semiespacio inferior con una perturbación geométrica y local en su superficie superior. Además, se supone que la perturbación es rotacionalmente simétrica alrededor de un eje vertical, de tal manera que todo el dominio es en realidad un sólido axisimétrico. Con esto, su geometría queda completamente descrita por su sección transversal, que consiste en un dominio 2D que denotamos por Ω . La frontera del dominio Ω que se aprecia en la **Figura 4-1** consta de tres partes :

1. Γ_s : Frontera vertical de axisimetría que coincide con el eje de rotación.
2. Γ_∞ : Frontera horizontal sin perturbaciones que coincide con la superficie plana infinita del semiespacio.
3. Γ_p : Frontera diferenciable por partes que corresponde a la perturbación geométrica.

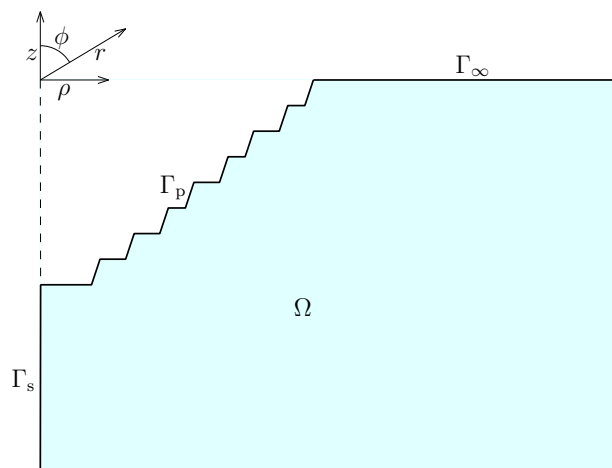


Figura 4-1: Dominio

Según lo que sea más apropiado, el dominio será descrito por coordenadas cilíndricas o esféricas, con el origen situado en el punto de intersección entre el eje de revolución y la recta de Γ_∞ (ver **Figura 4-1**).

Las variables en estos dos sistemas de coordenadas ρ, z, r y ϕ se relacionan mediante:

$$r^2 = \rho^2 + z^2, \quad \phi = \arctan\left(\frac{z}{\rho}\right), \quad \rho = r \sin(\phi), \quad z = r \cos(\phi)$$

Los vectores unitarios asociados a las variables anteriores son:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{r}} \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \phi, \quad \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \cos \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi, \quad (4-1a)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \phi, \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cos \phi - \hat{\mathbf{z}} \sin \phi. \quad (4-1b)$$

Así, un punto cualquiera en Ω lo definiremos usando (ρ, z) o (r, ϕ) según conveniencia. El ángulo azimut, que será usado para el modelo elasto-estático axisimétrico, es denotado por θ .

4.2. Modelo elastoestático axisimétrico

Dentro de las suposiciones del modelo tenemos que el dominio Ω está ocupado por un medio elástico lineal, homogéneo, isotrópico. Para que las deformaciones elásticas resultantes mantengan la naturaleza axisimétrica del problema, se asume también que las fuerzas son axisimétricas. Un campo de desplazamiento genérico en Ω se denota por \mathbf{u} y su tensor de tensiones asociado se denota por $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$. Estos siguen la ley de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (4-2)$$

donde $\lambda, \mu > 0$ son las constantes de Lamé de un sólido elástico.

Dada la simetría del problema, \mathbf{u} solo tiene componentes u_ρ y u_z (resp. u_r y u_ϕ), mientras que $\boldsymbol{\sigma}$ tiene componentes normales σ_ρ y σ_z (resp. σ_r y σ_ϕ), una componente de corte $\sigma_{\rho z}$ (resp. $\sigma_{r\phi}$) y una componente adicional normal σ_θ (ver [25] para más detalles).

Podemos escribir por componentes la ley de Hooke (4-2) en coordenadas cilíndricas:

$$\sigma_\rho(\mathbf{u}) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \lambda \frac{u_\rho}{\rho} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4-3a)$$

$$\sigma_\theta(\mathbf{u}) = \lambda \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_\rho}{\rho} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4-3b)$$

$$\sigma_z(\mathbf{u}) = \lambda \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \lambda \frac{u_\rho}{\rho} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4-3c)$$

$$\sigma_{\rho z}(\mathbf{u}) = \mu \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right) \quad (4-3d)$$

ó en coordenadas esféricas:

$$\sigma_r(\mathbf{u}) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda \frac{u_r}{r} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \cot(\phi) u_\phi \right) \quad (4-4a)$$

$$\sigma_\phi(\mathbf{u}) = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \lambda \cot(\phi) u_\phi \right) \quad (4-4b)$$

$$\sigma_\theta(\mathbf{u}) = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \left(\lambda \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + (\lambda + 2\mu) \cot(\phi) u_\phi \right) \quad (4-4c)$$

$$\sigma_{r\theta}(\mathbf{u}) = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) \quad (4-4d)$$

Nuestro problema de valores en la frontera, BVP por sus siglas en inglés, queda definido en Ω como:

Encontrar $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_\infty, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{f} & \text{en } \Gamma_p, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = 0 & \text{en } \Gamma_s, \\ |\mathbf{u}| = O(r^{-1}) & \text{cuando } r \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4-5a) \\ (4-5b) \\ (4-5c) \\ (4-5d) \\ (4-5e) \end{array}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ representa el vector normal en Γ_p (perturbación geométrica) y $\mathbf{f} : \Gamma_p \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función vectorial continua por tramos. La ecuación de Navier, o elastostática lineal, esta dada de forma genérica por (4-5a). Nuestro caso no es de la forma genérica, sino que es el caso axisimétrico, esta diferencia se explicará más adelante. Las cuatro condiciones de borde se pueden explicar como:

- Ec. (4-5b): Γ_∞ se asume libre de tracción.
- Ec. (4-5c): Γ_p tiene tracción definida por f .
- Ec. (4-5d): Para permitir la axisimetría, se asume que Γ_p está libre de tracción de corte y sin desplazamiento normal.
- Ec. (4-5e): Se asume que hay un decaimiento cuando $r \rightarrow \infty$

4.3. Formulación de MEF en el dominio computacional

El método que se usa es el Método de Elementos Finitos Dirichlet-to-Neumann (MEF DtN), éste ha mostrado ser una herramienta poderosa para tratar problemas de condición de frontera en dominios exteriores.

4.3.1. Problema con valor en la frontera acotado equivalente

Para la resolución de (4-5) con el MEF DtN debemos truncar el dominio Ω . Para esto creamos una frontera artificial, Γ_R , representada por un cuarto de círculo de radio R como se puede ver en la **Figura 4-2**. Denotamos el nuevo dominio delimitado por Γ_R como Ω^i , este es el dominio computacional. Las fronteras rectilíneas no acotadas Γ_∞ y Γ_s que ahora son acotadas, pasan a Γ_∞^i y Γ_s^i . Para resolver el problema en este nuevo dominio, planteamos el siguiente BVP equivalente en Ω^i .

Encontrar $\mathbf{u} : \Omega^i \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega^i, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_\infty^i, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{f} & \text{en } \Gamma_p, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = 0 & \text{en } \Gamma_s^i, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{r}} = -\mathcal{M}\mathbf{u} & \text{en } \Gamma_R, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4-6a) \\ (4-6b) \\ (4-6c) \\ (4-6d) \\ (4-6e) \end{array}$$

donde (4-6e) es la ABC exacta en Γ_R , expresada mediante el operador DtN \mathcal{M} [5], el cual asumiremos por ahora conocido.

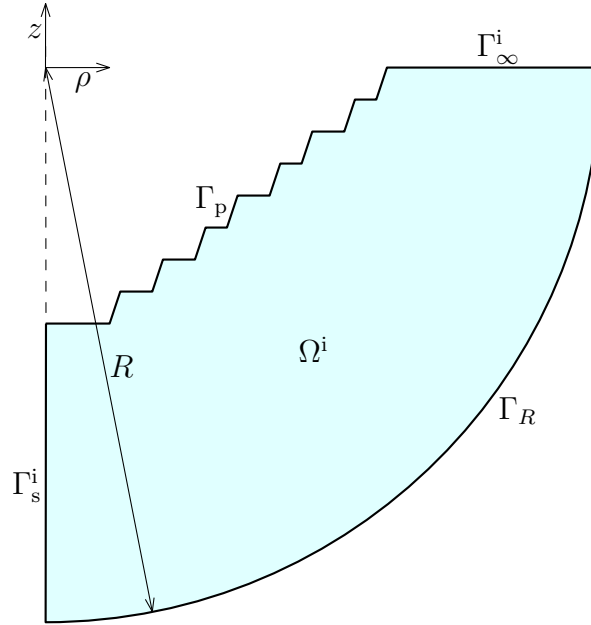


Figura 4-2: Dominio axisimétrico computacional

4.3.2. Formulación débil

Trabajaremos esta parte en coordenadas cilíndricas (ρ, z) . Para establecer una formulación débil del problema (4-6), consideramos un espacio de Hilbert de desplazamientos admisibles en Ω^i , definido como:

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} = (v_\rho, v_z) \in [H^1(\Omega^i)]^2 : v_\rho = 0 \text{ on } \Gamma_s^i \},$$

donde $H^1(\Omega^i)$ es el espacio de Sobolev usual de funciones L^2 con primeras derivadas L^2 . Nótese que la condición de frontera de desplazamiento nulo en Γ_s está contenida en \mathcal{V} . La formulación débil de (4-6) es:

Encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ tal que.

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Gamma_p} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (4-7)$$

donde a corresponde a la forma bilineal asociada a la formulación débil de la ecuación elastostática, expresada en coordenadas cilíndricas axisimétricas [27].

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^i} \left[\sigma_\rho(\mathbf{u}) \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \sigma_\theta(\mathbf{u}) \frac{v_\rho}{\rho} + \sigma_z(\mathbf{u}) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \sigma_{\rho z}(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \right] \rho \, d\rho \, dz, \quad (4-8)$$

mientras que b es una forma bilineal que involucra al operador DtN, definido como:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_R} \mathcal{M} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_R, \quad (4-9)$$

El lado derecho de (4-7) es

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Gamma_p} = \int_{\Gamma_p} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_p.$$

Al sustituir (4-3) en (4-8), podemos expresar a como

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\lambda + 2\mu) \int_{\Omega^i} \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \rho \, d\rho \, dz + \lambda \int_{\Omega^i} \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} \right) \rho \, d\rho \, dz \\ &\quad + \mu \int_{\Omega^i} \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \rho \, d\rho \, dz \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega^i} \left[\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) v_\rho + u_\rho \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] d\rho \, dz + (\lambda + 2\mu) \int_{\Omega^i} \frac{u_\rho v_\rho}{\rho} \, d\rho \, dz. \end{aligned} \quad (4-10)$$

De (4-10), tenemos que las tres primeras integrales son los términos análogos que en el caso 2D, mientras que los dos últimos son términos que aparecen por la axisimetría.

4.3.3. Discretización MEF

La formulación débil (4-7) se discretiza usando elementos $P1$. Por simplicidad se asume que Γ_p es una línea poligonal. Definimos \mathcal{T}_h como una familia de mallas triangulares regulares de Ω^i tal que $\bar{\Omega}^i = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{T}$. El parámetro h se define como $h = \max\{\text{diam } T : T \in \mathcal{T}_h\}$, donde $\text{diam } T = \sup\{\sqrt{(\rho_2 - \rho_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} : (\rho_1, z_1), (\rho_2, z_2) \in T\}$. Para cada malla triangular \mathcal{T}^h , sea \mathcal{V}^h un subespacio vectorial de dimensión finita de V que consta de funciones vectoriales continuas por tramos, definidos como:

$$\mathcal{V}^h = \{ \mathbf{v}^h \in \mathcal{V} : \mathbf{v}^h \in [C^0(\Omega^i)]^2, \mathbf{v}^h|_T \in [\mathcal{P}_1(T)]^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}^h \},$$

donde C^0 es el espacio de funciones continuas en Γ^i y $\mathcal{P}_1(T)$ es el espacio de polinomios de grado a lo más 1 en T . La forma discreta de (4-7) es:

Encontrar $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h$ tal que:

$$a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_{\Gamma_p} \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h. \quad (4-11)$$

Sea \mathcal{I} el conjunto de todos los nodos de la malla triangular \mathcal{T}^h . Para cada $i \in \mathcal{I}$, introducimos una función de forma nodal $\psi_i \in \mathcal{V}^h$ que tiene un valor unitario en el nodo i y valor cero en los otros nodos. Supongamos también que $\mathcal{I}_s \subset \mathcal{I}$ es el conjunto de nodos que se encuentran sobre Γ_s^i . Por lo tanto, se construye una base nodal de \mathcal{V}^h considerando las funciones vectoriales $\psi_i \hat{\boldsymbol{\rho}}$ para nodos $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_s$, para forzar la condición de desplazamiento normal cero dada por (4-6d), y funciones vectoriales $\psi_i \hat{\mathbf{z}}$ para todos los nodos $i \in \mathcal{I}$. En consecuencia, la solución de (4-11) se expresa como una combinación lineal de las funciones de base nodal como

$$\mathbf{u}^h(\rho, z) = \sum_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_s} d_{\rho i} \psi_i(\rho, z) \hat{\boldsymbol{\rho}} + \sum_{i \in \mathcal{I}} d_{z i} \psi_i(\rho, z) \hat{\mathbf{z}}, \quad (4-12)$$

donde $d_{\rho i}$ y $d_{z i}$ son respectivamente los valores nodales incógnitos de las componentes u_ρ^h y u_z^h de la solución \mathbf{u}^h . Reemplazando (4-12) en (4-11) y sustituyendo \mathbf{v}^h por cada una de las funciones de base nodal $\psi_i \hat{\boldsymbol{\rho}}$ y $\psi_i \hat{\mathbf{z}}$, llegamos a la forma matricial de elementos finitos del problema, expresada como $\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{d}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_\rho \\ \mathbf{F}_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\rho\rho}^a & \mathbf{K}_{\rho z}^a \\ \mathbf{K}_{z\rho}^a & \mathbf{K}_{zz}^a \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^a} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\rho\rho}^b & \mathbf{K}_{\rho z}^b \\ \mathbf{K}_{z\rho}^b & \mathbf{K}_{zz}^b \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^b} \right)}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{d}_\rho \\ \mathbf{d}_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \quad (4-13)$$

donde

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\rho\rho}^a]_{ij} &= a(\psi_i \hat{\boldsymbol{\rho}}, \psi_j \hat{\boldsymbol{\rho}}), & [\mathbf{K}_{\rho z}^a]_{ij} &= a(\psi_i \hat{\boldsymbol{\rho}}, \psi_j \hat{\mathbf{z}}), \\ [\mathbf{K}_{z\rho}^a]_{ij} &= a(\psi_i \hat{\mathbf{z}}, \psi_j \hat{\boldsymbol{\rho}}), & [\mathbf{K}_{zz}^a]_{ij} &= a(\psi_i \hat{\mathbf{z}}, \psi_j \hat{\mathbf{z}}), \end{aligned} \quad (4-14)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\rho\rho}^b]_{ij} &= b(\psi_i \hat{\boldsymbol{\rho}}, \psi_j \hat{\boldsymbol{\rho}}), & [\mathbf{K}_{\rho z}^b]_{ij} &= b(\psi_i \hat{\boldsymbol{\rho}}, \psi_j \hat{\mathbf{z}}), \\ [\mathbf{K}_{z\rho}^b]_{ij} &= b(\psi_i \hat{\mathbf{z}}, \psi_j \hat{\boldsymbol{\rho}}), & [\mathbf{K}_{zz}^b]_{ij} &= b(\psi_i \hat{\mathbf{z}}, \psi_j \hat{\mathbf{z}}), \end{aligned} \quad (4-15)$$

$$[\mathbf{d}_\rho]_j = d_{\rho j}, \quad [\mathbf{d}_z]_j = d_{z j}, \quad (4-16)$$

$$[\mathbf{F}_\rho]_i = (\mathbf{f}, \psi_i \hat{\boldsymbol{\rho}})_{\Gamma_p}, \quad [\mathbf{F}_z]_i = (\mathbf{f}, \psi_i \hat{\mathbf{z}})_{\Gamma_p}. \quad (4-17)$$

Las entradas de la matriz \mathbf{K}^a y del vector \mathbf{F} se calculan mediante técnicas de integración numérica estándar. Sin embargo, esto no es posible en el caso de la matriz \mathbf{K}^b . Sustituyendo (4-9) en (4-15), reexpresamos las entradas de \mathbf{K}^b como

$$[\mathbf{K}_{\rho\rho}^b]_{ij} = \int_{\Gamma_R} \psi_i \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathcal{M} \psi_j \hat{\boldsymbol{\rho}} d\Gamma_R, \quad [\mathbf{K}_{\rho z}^b]_{ij} = \int_{\Gamma_R} \psi_i \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathcal{M} \psi_j \hat{\mathbf{z}} d\Gamma_R, \quad (4-18a)$$

$$[\mathbf{K}_{z\rho}^b]_{ij} = \int_{\Gamma_R} \psi_i \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathcal{M} \psi_j \hat{\boldsymbol{\rho}} d\Gamma_R, \quad [\mathbf{K}_{zz}^b]_{ij} = \int_{\Gamma_R} \psi_i \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathcal{M} \psi_j \hat{\mathbf{z}} d\Gamma_R. \quad (4-18b)$$

Calcular estos términos implica aproximar el operador DtN \mathcal{M} , que debe calcularse de forma precisa. Hay que tener en cuenta que estos términos son diferentes de cero solo si $i, j \in \mathcal{I}_R$, donde $\mathcal{I}_R \subset \mathcal{I}$ denota el conjunto de nodos de malla que se encuentran sobre Γ_R . Un cálculo correcto de las entradas distintas de cero de la matriz \mathbf{K}^b es fundamental para obtener una solución precisa de (4-6), ya que \mathbf{K}^b representa la contribución de las ABC en el esquema de elementos finitos estándar utilizado para la discretización numérica.

4.4. Criterio de falla de Mohr-Coulomb

Para definir el criterio de falla de un macizo, hemos utilizado el criterio de Mohr-Coulomb. Es un modelo lineal y simple de aplicar. Se podría haber usado uno no lineal como el criterio de Hoek-Brown [19], pero dado que el anterior es ampliamente usado en la industria, es el que se usará.

Fijado un sistema de referencia ortogonal, el tensor de tensiones viene dado por una matriz simétrica, cuyas componentes son:

$$[T_C]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

Son seis componentes distintas, donde las que están en la diagonal son normales mientras que las otras son tangenciales. Al tensor, le calculamos sus valores propios, los cuales son las magnitudes de las tres tensiones principales que cumplen con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. El criterio solo toma en cuenta a σ_1 y σ_3 [21]. Coulomb en su investigación [18] sobre paredes contenedoras, propuso la relación:

$$|\tau| = S_0 + \sigma \tan(\phi) \quad (4-20)$$

donde S_0 es la fuerza de corte, también conocida como la cohesión C y ϕ es el ángulo de fricción interna, y el coeficiente de fricción interna se define como $\mu = \tan(\phi)$. En la **Figura 4-3** se puede ver la recta descrita por (4-20). El criterio de falla usa esta recta como una frontera para los puntos del macizo.

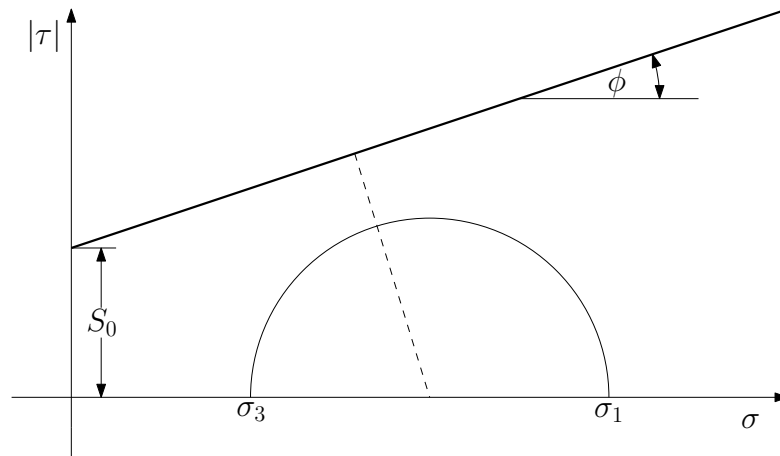


Figura 4-3: Recta de criterio Mohr-Coulomb

Para definir si un punto falla o no, se deben considerar sus valores σ_1 y σ_3 en la recta σ . Si el semicírculo definido por σ_1 y σ_3 como los extremos de su diámetro queda completamente por debajo de la recta, se considera que no hay falla. En la **Figura 4-3** se observa un ejemplo de un caso de no falla.

En la **Figura 4-4** se presentan tres casos para el criterio de Mohr-Coulomb. Cada caso es un punto del macizo y son representados con colores diferentes para simplificar la explicación:

1. En rojo (Marcación tipo cruz): Punto en estado de falla.
2. En verde (Marcación circular): Punto en estado elástico.
3. En negro (Marcación cuadrada): Punto en el límite, se considera que está en estado de falla también.

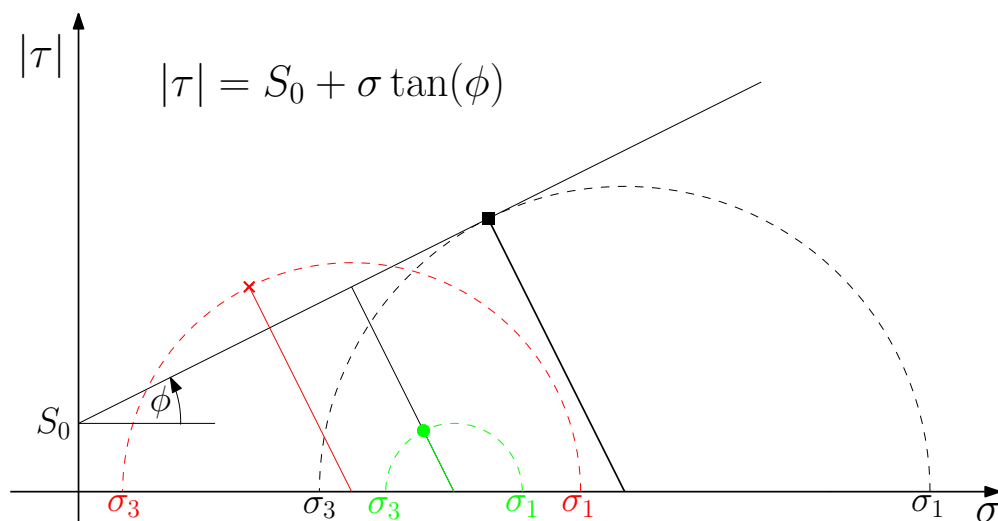


Figura 4-4: 3 Casos para el criterio de Mohr-Coulomb

Para verificar si un punto del macizo está en estado elástico o en falla, se calcula la distancia desde el centro del semicírculo a la recta, y si es mayor al radio r , es un punto en estado elástico. Dados los puntos $(\sigma_3, 0)$ y $(\sigma_1, 0)$, el radio queda definido por:

$$r = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4-21)$$

Para calcular la distancia entre un punto $p = (x_0, y_0)$ y una recta l de la forma $l : y = ax + b$, la formula es la siguiente:

$$d(p, l) = \frac{ax_0 - y_0 + b}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

El centro del semicírculo tiene la forma $P = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$ y la recta es $l : \tau = S_0 + \sigma \tan(\phi)$, por lo que la distancia queda definida como:

$$d(p(\sigma_1, \sigma_3), l(S_0, \phi)) = \frac{\tan(\phi) \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + c}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + 1}} = \frac{\tan(\phi) (\sigma_1 + \sigma_3) + 2c}{\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_3)^2 + 4}} \quad (4-22)$$

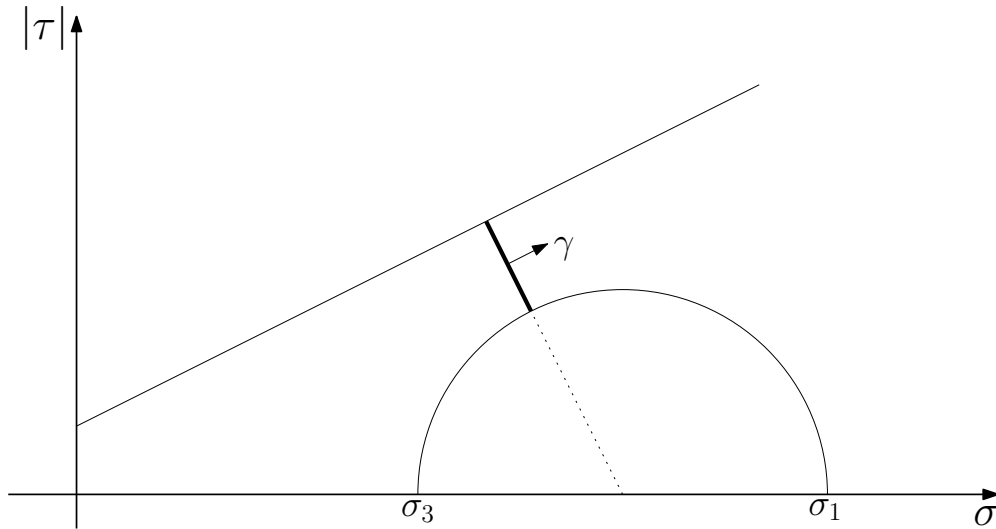


Figura 4-5: Definición gráfica del factor de seguridad γ

De las ecuaciones (4-21) y (4-22), podemos definir el Factor de Seguridad γ de un punto como la distancia entre el círculo de Mohr-Coulomb y la frontera de fluencia, es decir:

$$\gamma = d(P, l) - r = \frac{\tan(\phi) (\sigma_1 + \sigma_3) + 2c}{\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_3)^2 + 4}} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4-23)$$

con esto definimos de forma directa si un punto del macizo esta en situación de falla o no:

$$\begin{cases} \text{Elástico} & ; \text{ Si } \gamma > 0 \\ \text{Falla} & ; \text{ Si } \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (4-24)$$

5 Resultados

Dado los resultados obtenidos por Godoy [5, 14] donde la perturbación es semiesférica, hemos expandido los resultados a perturbaciones que representan de mejor forma la realidad. Para esto, el trabajo se ha dividido en cuatro partes.

Caso Base: Es un primer paso para acercarse a los casos reales. La perturbación consta de n peldaños idénticos entre si. Los valores que usamos para n son $n = \{1, 2, 4, 8\}$.

Caso Real: Se contó con una proyección 3D de una mina real, la cual no cuenta con ninguna axisimetría, por lo que dado el punto mas profundo, se eligieron 4 direcciones, lo más uniformemente distribuidas con objeto construir un modelo axisimétrico para cada una de estas.

Caso General: Se analizó el comportamiento para distintos valores de α y β buscando en cada caso los valores de los puntos mas inestables.

Caso General, variando S_0 : Se analizó como afecta la estabilidad para distintos valores de S_0 .

Se mostrarán algunos resultados para cada caso, y en el apéndice 8.2 estarán los otros. Usaremos el ángulo cara de banco α y el ángulo global β para caracterizar una mina. El ángulo cara de banco α corresponde al ángulo del primer peldaño, mientras que el ángulo global β corresponde al ángulo desde la base hasta el último peldaño. Esto se observa en la figura **5-1**.

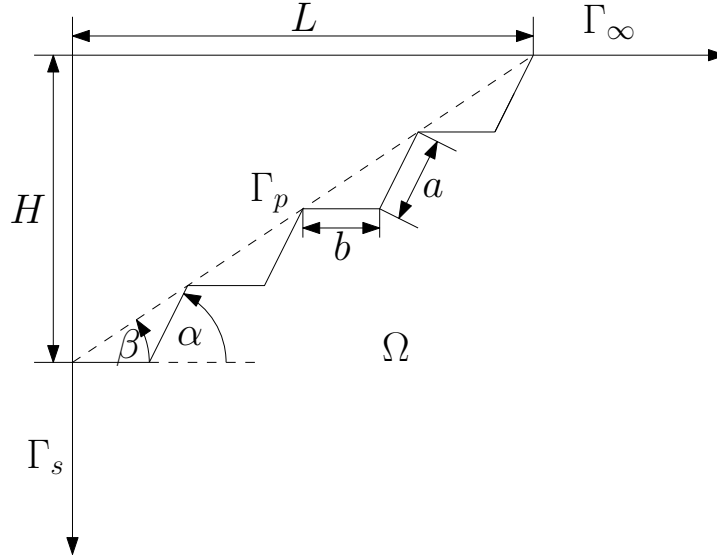


Figura 5-1: Ilustración de los parámetros α y β

Esta configuración para los dos parámetros, implica que $\alpha \geq \beta$. El caso extremo donde $\alpha = \beta$ implica que el ancho de berma b es cero y tenemos una recta desde el fondo a la frontera Γ_∞ . De la misma forma, mientras más parecidos α y β , b disminuye de largo. Hemos asumido N peldaños homogéneos y una profundidad fija H , con esto podemos fijar los otros parámetros de la **Figura 5-1**.

$$L = \frac{H}{\tan(\beta)}$$

$$a = \frac{H}{n \sin(\alpha)}$$

$$b = \frac{L - na \cos(\alpha)}{n}$$

$$= \frac{H \tan(\alpha) - \tan(\beta)}{n \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

Queda a la vista que cuando α y β son parecidos, b es pequeño. Esto se vuelve un problema al momento de usar FEM, por la definición de la malla. Como deseamos obtener resultados buenos, hemos fijado que el tamaño de la malla h sea a lo más $\frac{\min\{a,b\}}{2}$. Por restricciones computacionales, hemos restringido que $\beta \leq \alpha - 10$.

5.1. Caso Base

El caso a analizar fue el más básico, donde desde la perturbación semiesférica, se pasó a una definida por dos rectas, lo cual corresponde a un peldaño, ver **Figura 5-2**. Los valores de los parámetros son:

- $H = 1200$ m.
- $\alpha = 74$
- $\beta = 74$

Para el caso base, hemos usado los siguientes valores $n = \{1, 2, 4, 8\}$.
Para todos los resultados a continuación, se mostrarán 3 figuras:

1. Malla utilizada.
2. Desplazamiento y esfuerzos:
 - Los dos superiores son desplazamiento, primero en dirección radial, luego en dirección z .
 - Los cuatro restantes son los esfuerzos $\sigma_\rho, \sigma_z, \sigma_\theta$ y $\sigma_{\rho z}$
3. Factor de seguridad γ , recordar que si el valor es positivo, no hay falla de material.

La **Figura 5-2** muestra la malla usada para $n = 1$ peldaño.

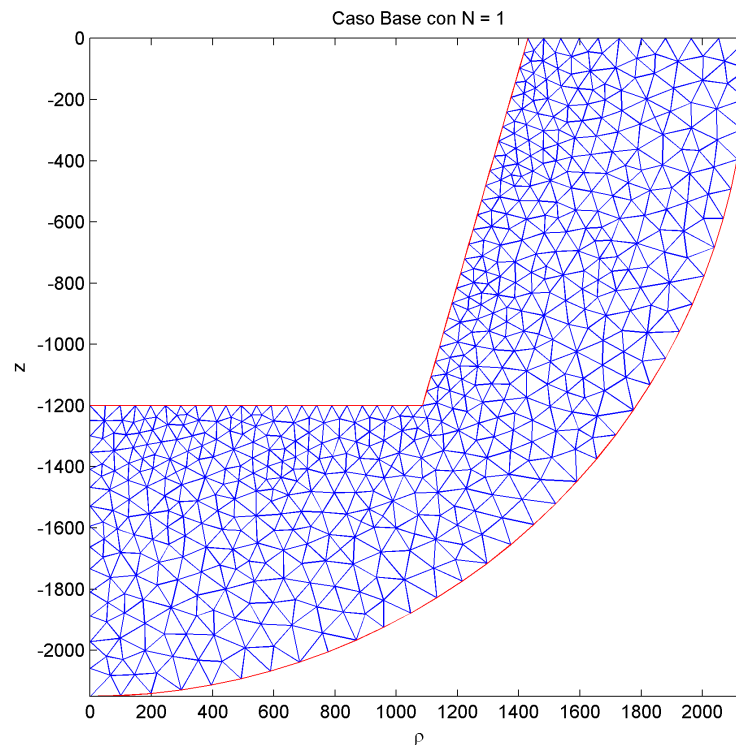


Figura 5-2: Caso base, $n = 1$ peldaño

En el apéndice 8.2 se muestran las mallas para $n = 2, 4, 8$.
En la **Figura 5-3** se muestran 6 gráficos.

u_ρ - **Desplazamiento radial** : Se observa que, como era de esperarse, en el eje se simetría, no hay desplazamiento radial (u horizontal).

u_z - **Desplazamiento vertical** : A mayor profundidad, el desplazamiento vertical hacia abajo se hace más grande.

σ - **Esfuerzos** : En los 4 gráficos de esfuerzo, vemos que los mayores valores se dan en la base del peldaño, que es donde suele fallar una mina.

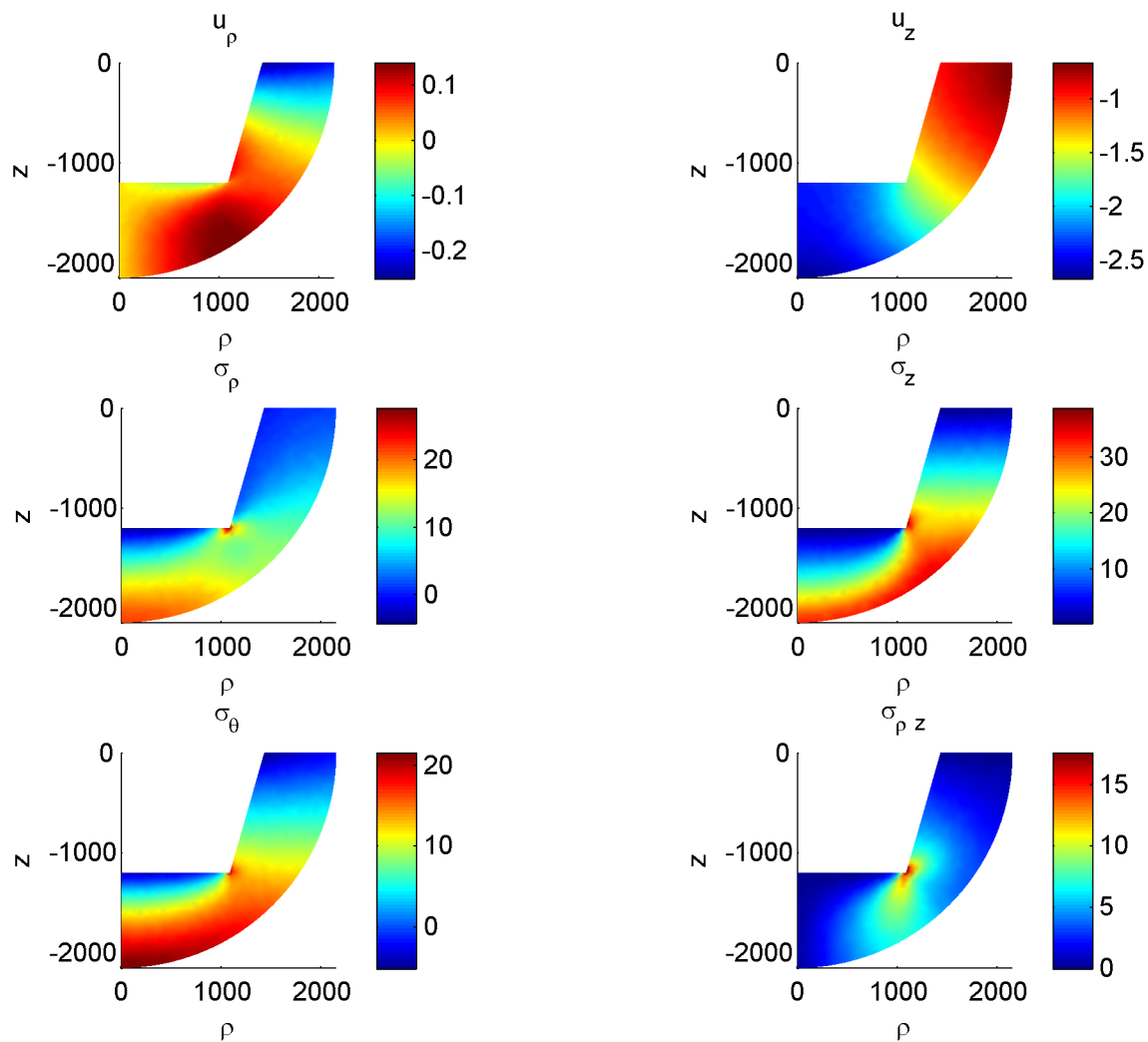


Figura 5-3: Caso base, $n = 1$ peldaño

En la **Figura 5-4** se muestra el factor de seguridad definido anteriormente γ para cada punto del macizo. De los gráficos anteriores podíamos sospechar que los puntos más críticos iban a

estar en la base del peldaño, tal como se puede concluir del gráfico. Sigue siendo un macizo en estado elástico, fuera del rango de falla.

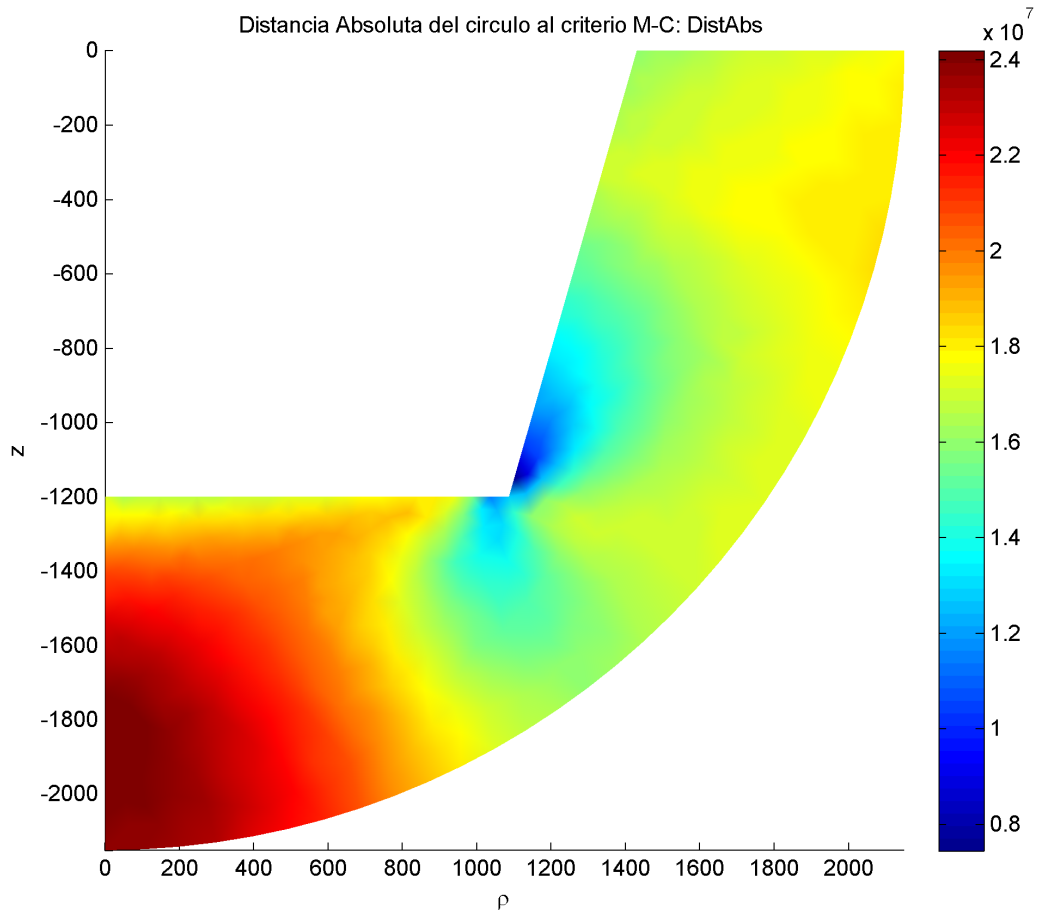


Figura 5-4: Caso base, $n = 1$ peldaño

5.2. Caso Real

Se analizaron cuatro cortes transversales de una mina real. La figura original representa el modelo en tres dimensiones. Luego desde un punto central del fondo de la mina, asumiendo que por ahí pasaría el eje de simetría, se definieron 4 cortes transversales a esta. Se puede ver el modelo 3D en la **Figura 5-5**. Esta mina se modeló con una profundidad igual a 1200m.

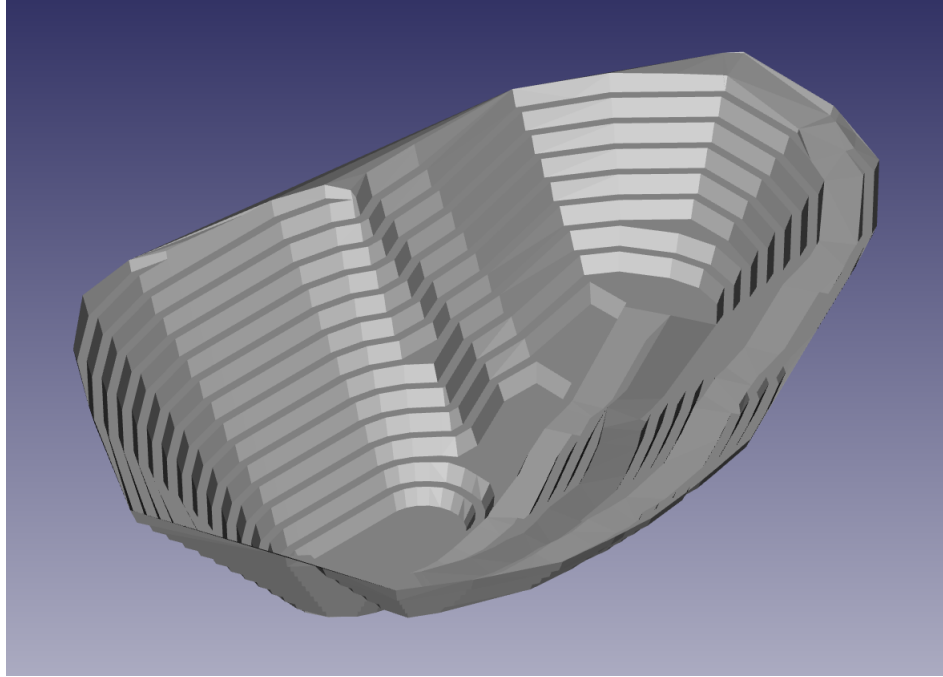


Figura 5-5: Vista 3D de mina real

Los cuatro cortes tienen en común su origen, que se sitúa en el centro de la base (plano más profundo) de la mina. Luego, si se mirase desde arriba, y fijáramos los ejes x e y tal que el eje x cruzara el diámetro de la apertura, tendríamos que los cuatro cortes seguirían la dirección de \hat{x} , \hat{y} , $-\hat{x}$, y $-\hat{y}$.

En la **Figura 5-6** se puede ver que a diferencia del caso base con $n = 1$, este tiene una malla mucho más fina en comparación al tamaño total.

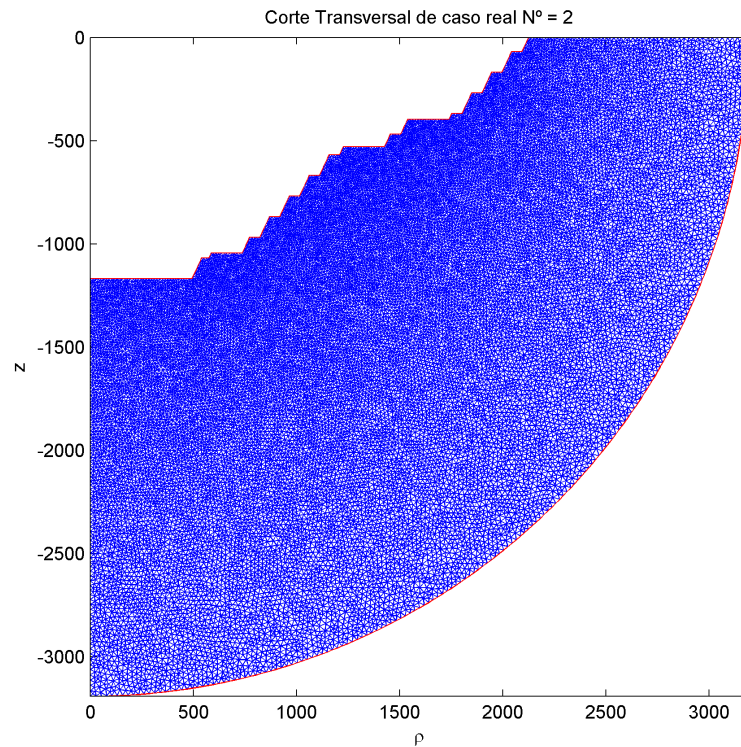


Figura 5-6: Corte transversal de caso real

El análisis de los seis siguientes gráficos, **Figura 5-7** entrega las mismas conclusiones que el caso base.

u_ρ - **Desplazamiento radial** : Se observa que, como era de esperarse, en el eje de simetría, no hay desplazamiento radial (u horizontal).

u_z - **Desplazamiento vertical** : A mayor profundidad el desplazamiento vertical hacia abajo, se hace más grande.

σ - **Esfuerzos** : En los 4 gráficos de esfuerzo, vemos que los mayores valores se dan en la base de los peldaños.

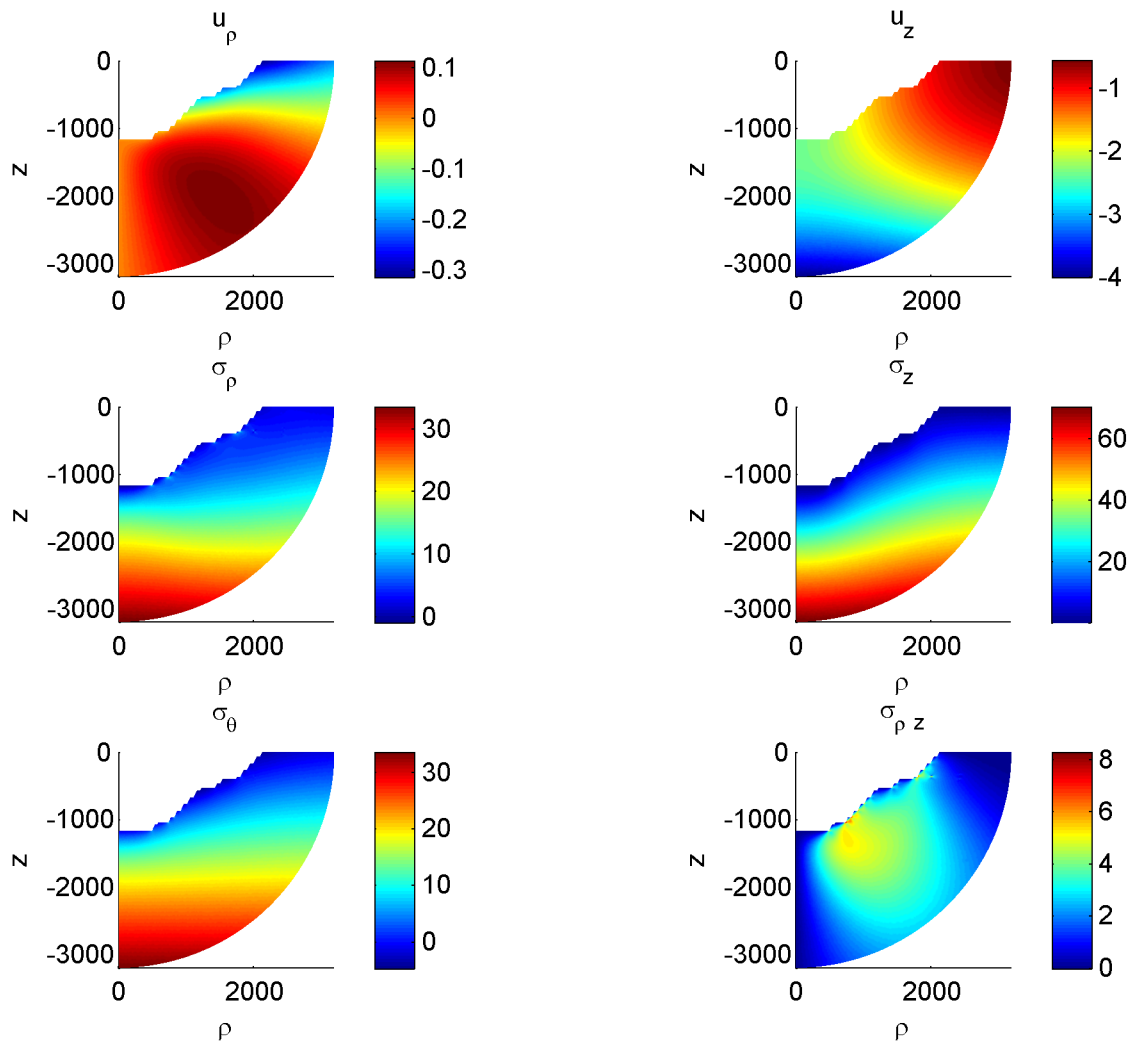


Figura 5-7: Corte transversal de caso real

En la **Figura 5-8** tenemos los valores de γ para el corte en cuestión. Nuevamente los menores valores de γ se encuentran en la base de cada peldaño. Sigue siendo una configuración elástica, fuera del rango de falla.

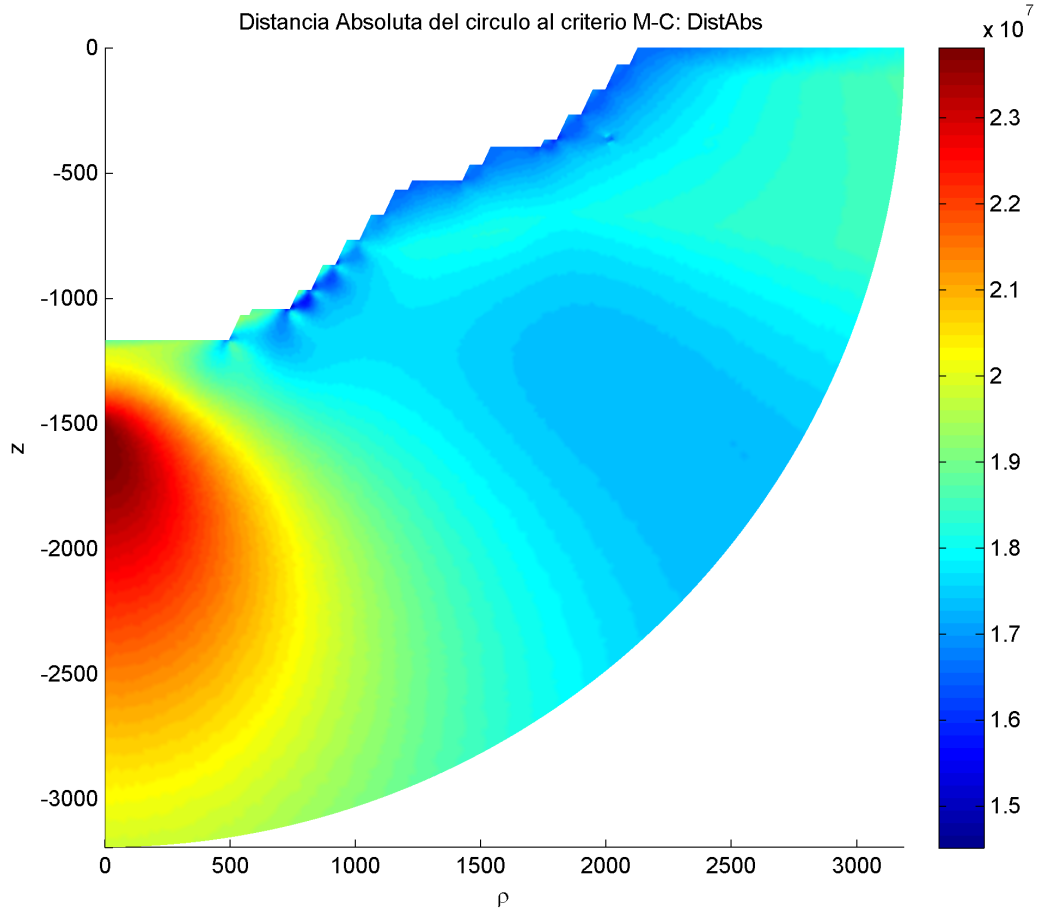


Figura 5-8: Corte transversal de caso real

Viendo esto, también podemos notar que se los valores de γ cumplen con

$$1,4 \times 10^7 \leq \gamma \leq 2,4 \times 10^7 \quad (5-1)$$

Vale preguntarse entonces, como se comporta el rango de valores para γ para distintas configuraciones.

5.3. Caso General α y β

En esta sección hemos querido responder parte de la interrogante anterior. Nos interesa encontrar los valores mínimos de γ para distintas configuraciones. Para esto hemos hecho 140 modelos idealizados de una mina.

Usando la **Figura 5-1** de referencia, todos los modelos tienen $H = 1200$ m, $n = 12$ peldaños, y lo que cambia son los valores de α y β . Sus rangos son:

- $60 \leq \alpha \leq 90$, avanzando de tres en tres, 11 valores distintos.

- $30 \leq \beta \leq \min(75, \alpha - 10)$, avanzando de tres en tres, 16 valores distintos.

Los resultados obtenidos acá fueron obtenidos usando el valor $S_0 = 2,5 \times 10^7$ que es un valor normal. En el apéndice 8.2 se muestran los resultados para los valores $5 \times 10^6 \leq S_0 \leq 3,5 \times 10^7$, avanzando de cinco en cinco.

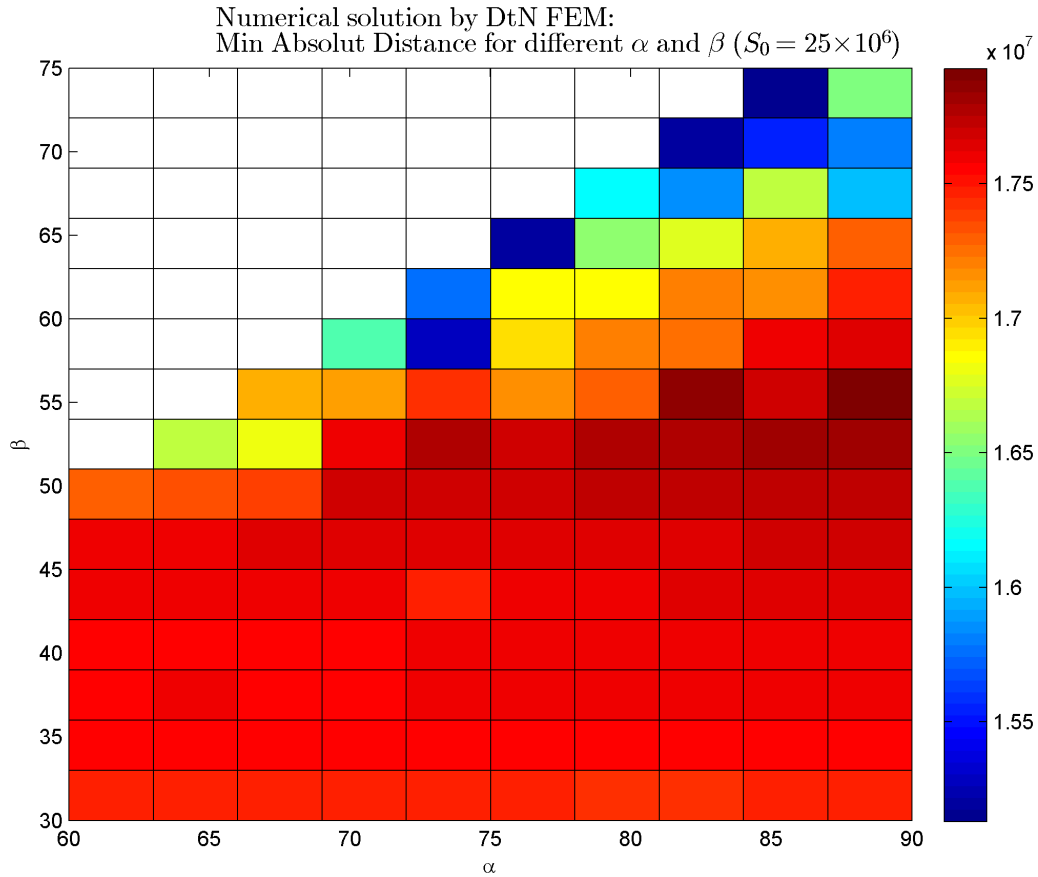


Figura 5-9: Caso base, $n = 1$ peldaño

De la **Figura 5-9** se puede apreciar que a medida que aumenta el valor de β , ángulo global, el factor de seguridad γ se hace menor. Si bien β es el parámetro que da la mayor tendencia para los valores de γ , también se puede ver que dado cierto valor mínimo de β , el parámetro α empieza a afectar también los valores de γ . Para este caso, $S_0 = 2,5 \times 10^6$, tenemos que se cumple $1,5 \times 10^7 \leq \gamma \leq 1,8 \times 10^7$ y como este intervalo solo consta de valores positivos, será una mina estable, fuera del rango de falla. Para entender mejor el intervalo, es bueno tener claro que la cota inferior, $1,5 \times 10^7$ significa que existe una combinación de α y β donde el menor valor de γ es efectivamente $1,5 \times 10^7$. Lo mismo para la cota superior del intervalo.

Tabla 5-1: Valores extremos para el criterio de Mohr-Coulomb γ .

S_0 MPa	mín(γ) MPa	máx(γ) MPa
5	-1,25	1,54
10	2,84	5,64
15	6,94	9,74
20	11,03	13,83
25	15,13	17,93
30	19,00	22,02
35	23,32	26,12

5.4. Cotas para S_0

Tratando de resumir la información obtenida en la sección anterior, en esta, mostraremos los intervalos obtenidos para distintos valores de S_0 . En la **Figura 5-10** se muestran los extremos del intervalo de γ para cada valor de S_0 analizado. Los círculos azules, son los valores máximos de los intervalos, mientras que los cuadrados rojos, son los valores mínimos. Se ha agregado la recta que pasa por los valores mínimos.

En la **Figura 5-10**, se ve que recién cuando $S_0 = 6,52 \times 10^6$, existe alguna configuración de α y β donde el valor de γ se hace cero, implicando que el macizo entra en estado de falla.

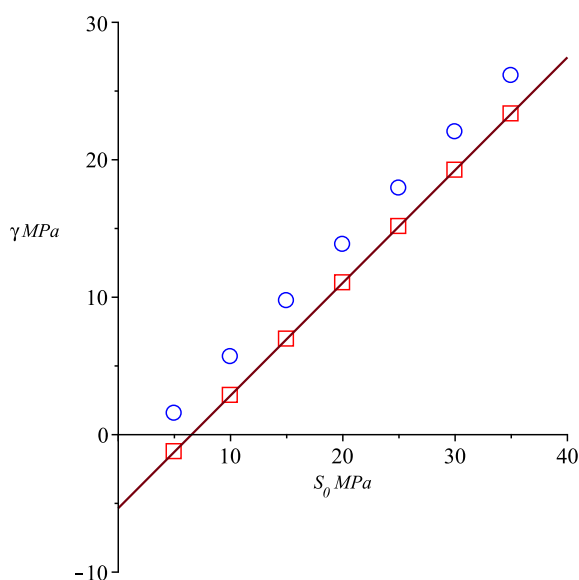


Figura 5-10: Valores extremos para el criterio de Mohr-Coulomb γ . Los círculos azules, son los valores máximos de los intervalos, mientras que los cuadrados rojos, son los valores mínimos. Se ha agregado la recta que pasa por los valores mínimos.

6 Discusión

Si bien los temas a abarcar en un comienzo de este trabajo fueron ampliados, siguen habiendo temas que quedan abiertos para un futuro trabajo:

Estandarizar valores de Mohr-Coulomb

- Como afecta el valor de ϕ en el cálculo de estabilidad. Se analizó el comportamiento de las 140 configuraciones bajo distintos valores de S_0 , pero se asumió en todos los casos que el valor de ϕ era constante. Y de la misma forma que se encontró un valor máximo de S_0 para la falla, se podría hacer esto para distintos valores de ϕ obteniendo una frontera $S_0 - \phi$ de estabilidad.
- Agregar fuerzas externas en el modelo que puedan representar tronaduras por ejemplo. En este trabajo no se hizo, por el modelo de simetría axial usado. Esto implica que si se le aplica alguna fuerza externa en alguna zona, esto representaría esa misma fuerza aplicada de forma cilíndrica al modelo 3D.
- Extender el análisis al caso 3D. Esta parte es bastante directa dado que este modelo es una simplificación del caso 3D gracias a la hipótesis de la simetría axial.

7 Conclusiones

Son muchas las conclusiones que se pueden extraer del trabajo realizado. Nos enfocaremos en aquellas relacionadas con nuestros objetivos de estudio.

- Primero, al pasar del modelo semiesférico a uno de peldaños podemos hacer un estudio de casos más reales. Los resultados obtenidos son coherentes con lo esperado. No se producen irregularidades no deseadas en las esquinas del nuevo modelo. Con esto se nos abren posibilidades de analizar cualquier diseño del pit, siendo la única restricción el poder de cómputo.
- Al analizar, los cuatro cortes transversales la mina real, los resultados indican que sin fuerzas externas como tronaduras, es una mina estable sin riesgos de falla. Se esperaba que los resultados indicaran esto, dado que no ha fallado la estabilidad de la mina en cuestión.
- Al analizar las 140 combinaciones de los valores de α y β , no aparecen casos de inestabilidad estructural. Si bien no se analizaron casos donde $\alpha \geq \beta > \alpha - 10$ por restricciones computacionales, sí se analizaron los valores típicos de la minería chilena y los resultados muestran que no hay posibles riesgos en las minas sin fuerzas externas en Chile.
- Como última conclusión, si bien existen valores de S_0 con alguna configuración de α y β que hacen que la mina esté en falla bajo el criterio de Mohr-Coulomb, estos valores son poco probables. El mayor valor de S_0 al cual se le puede asociar una combinación de α y β tal que el macizo sea inestable corresponde a un valor del 25 % del valor típico de las minas en Chile.

En términos generales se observa que, dado el valor de S_0 , las configuraciones, tanto del caso real como las paramétricas, son estables, lo cual era esperable.

Lo que faltaría por analizar es la estabilidad bajo fuerzas externas, pero este modelo permite solo una ubicación para las fuerzas externas dada la simetría axial. Esto queda para otro estudio.

8 Apéndice

8.1. Trabajo previo

8.1.1. Aproximación de las condiciones de contorno artificiales exactas

Definición del operador DtN

A continuación, proporcionamos la definición matemática del operador DtN \mathcal{M} introducido en la sección anterior. Consideremos el dominio semi-infinito residual que se encuentra fuera del límite artificial Γ_R , denotado por Ω^e . Las partes ilimitadas resultantes de las fronteras Γ_∞ y Γ_s se indican respectivamente por Γ_∞^e y Γ_s^e (ver **Figura 8-1**). Sea $H^s(\Gamma_R)$ el espacio de Sobolev estándar en Γ_R con s real. Dado cualquier $\mathbf{v} \in [H^{1/2}(\Gamma_R)]^2$, obtenemos $\mathcal{M}\mathbf{v} \in [H^{-1/2}(\Gamma_R)]^2$ como:

$$\mathcal{M}\mathbf{v} = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{r}}|_{\Gamma_R}, \quad (8-1)$$

donde \mathbf{u} es la solución del siguiente BVP en Ω^e .

Encontrar $\mathbf{u} : \Omega^e \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega^e, \quad (8-2a) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_\infty^e, \quad (8-2b) \\ \mathbf{u} = \mathbf{v} & \text{en } \Gamma_R, \quad (8-2c) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = 0 & \text{en } \Gamma_s^e, \quad (8-2d) \\ |\mathbf{u}| = O(r^{-1}) & \text{cuando } r \rightarrow \infty. \quad (8-2e) \end{array} \right.$$

Como ya se mencionó, a diferencia de la mayoría de los BVP externos, en este caso el método de separación de variables falla al obtener una expresión completa analítica de forma cerrada para la solución \mathbf{u} de (8-2) en función de un dato genérico \mathbf{v} de Dirichlet en Γ_R . Este inconveniente se supera resolviendo (8-2) de forma aproximada, solo para aquellos \mathbf{v} necesarios para calcular las entradas distintas de cero de la matriz \mathbf{K}^b .

Solución analítica general

A continuación, se aplica el método de separación de variables para calcular una solución analítica general en forma de series que satisfaga (8-2a), (8-2b), (8-2d) y (8-2e). Para esto, procedemos análogamente como en [5], donde la solución propuesta originalmente por

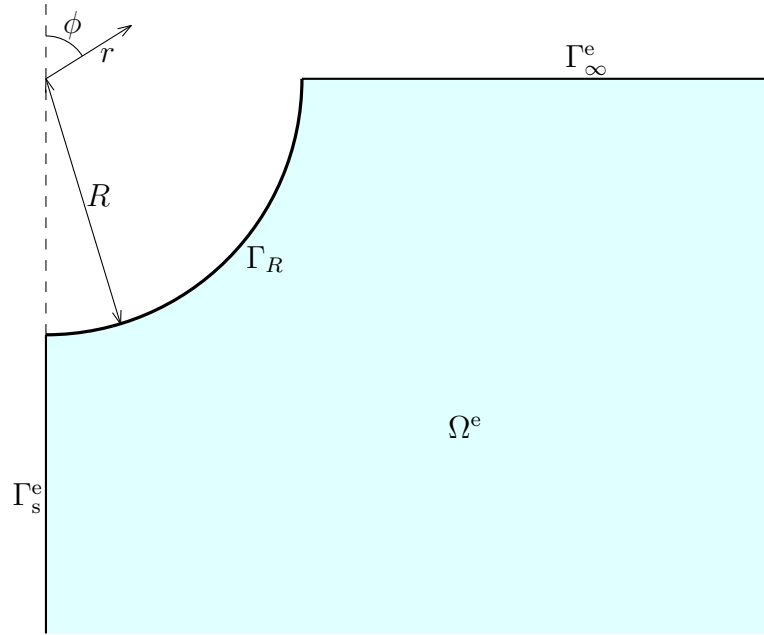


Figura 8-1: Dominio residual semiinfinito axisimétrico.

Eubanks [8] se completó y mejoró. A lo largo de esta sección, trabajamos en coordenadas esféricas axisimétricas (r, ϕ) . El dominio residual de la **Figura 8-1** se define como:

$$\Omega^e = \{(r, \phi) : R < r < \infty, \pi/2 < \phi < \pi\}.$$

Primero, se busca una solución de (8-2a) bajo la forma:

$$2\mu \mathbf{u} = \nabla(\Phi + z\Psi) - 4(1 - \nu)\Psi \hat{\mathbf{z}}, \quad (8-3)$$

donde $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ denota la relación de Poisson del sólido elástico y Φ, Ψ son los llamados potenciales de Boussinesq, que son funciones armónicas escalares. La descomposición de (8-3) por componentes en (r, ϕ) queda como:

$$2\mu u_r(r, \phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \phi) + r \cos \phi \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r, \phi) - (3 - 4\nu) \cos \phi \Psi(r, \phi), \quad (8-4a)$$

$$2\mu u_\phi(r, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(r, \phi) + \cos \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}(r, \phi) + (3 - 4\nu) \sin \phi \Psi(r, \phi). \quad (8-4b)$$

Los potenciales de Boussinesq Φ, Ψ se buscan como soluciones generales a la ecuación de Laplace en Ω^e con tasas de decaimiento hacia el infinito tales que la solución \mathbf{u} definida en (8-3) o (8-4) cumple con (8-2e). Para esto, basta con buscar Ψ que satisfaga:

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{in } \Omega^e, \quad (8-5a)$$

$$\Psi = O(r^{-1}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty, \quad (8-5b)$$

y Φ tal que:

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{in } \Omega^e, \quad (8-6a)$$

$$|\nabla\Phi| = O(r^{-1}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty, \quad (8-6b)$$

donde Δ denota el laplaciano. Aplicando la separación estándar de variables en (r, ϕ) a (8-5a) y (8-6a), y descartando soluciones no acotadas en el infinito, llegamos a los conjuntos de potenciales:

$$\Psi_n(r, \phi) = r^{-(n+1)} P_n(\cos \phi), \quad \Phi_n(r, \phi) = r^{-(n+1)} P_n(\cos \phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $P_n(\cdot)$ denota el polinomio Legendre de orden n . Observe que cuando r tiende al infinito, el término asintóticamente dominante corresponde al caso $n = 0$. Con esto:

$$\Psi_0(r, \phi) = O(r^{-1}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty,$$

el conjunto de potenciales Ψ_n satisface (8-5b). Sin embargo, tenemos que:

$$|\nabla\Phi_0(r, \phi)| = O(r^{-2}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty,$$

lo que significa que el conjunto de potenciales Φ_n satisface una condición más restrictiva que (8-6b), por lo que no es un conjunto suficientemente general de soluciones de (8-6). Remediamos esto incorporando al conjunto un potencial logarítmico, definido como:

$$\Phi_{-1}(r, \phi) = \ln(r - r \cos \phi), \quad (8-7)$$

que es continuo en Ω^e , ya que los puntos donde el logaritmo no está bien definido no están incluidos en Ω^e , y satisface (8-6a). Además, se tiene que:

$$|\nabla\Phi_{-1}(r, \phi)| = O(r^{-1}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty,$$

entonces el conjunto de potenciales Φ_n con el caso $n = -1$ incluido cumple exactamente con (8-6b). Los potenciales logarítmicos (8-7) surgen cuando se resuelve el problema de una fuerza concentrada que actúa de manera normal a la superficie libre de un semiespacio elástico [25]. También se conoce como la solución elemental de Boussinesq del segundo tipo [3]. Para obtener una solución de (8-2a), construimos dos conjuntos de desplazamientos mediante

combinaciones particulares de potenciales Φ_n y Ψ_n en (8-3) o (8-4). El primer conjunto se obtiene al fijar $\Phi = \Phi_n$ y $\Psi = 0$ para $n = -1, 0, 1, 2, \dots$, es decir:

$$2\mu\mathbf{u}_n^{(1)} = \nabla\Phi_n, \quad (8-8)$$

mientras que el segundo conjunto se obtiene fijando $\Phi = -(n-4+4\nu)\Phi_{n-1}$ y $\Psi = (2n+1)\Psi_n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, es decir:

$$2\mu\mathbf{u}_n^{(2)} = -(n-4+4\nu)\nabla\Phi_{n-1} + (2n+1)[\nabla(z\Psi_n) - 4(1-\nu)\Psi_n\hat{\mathbf{z}}]. \quad (8-9)$$

De hecho, como se indica en [8], esta combinación particular de potenciales Φ_n y Ψ_n simplifica los próximos cálculos. Al expandir expresiones en (8-8) y (8-9), y al reorganizar los términos, ambos conjuntos de desplazamientos se vuelven a expresar convenientemente como:

$$\mathbf{u}_n^{(1)}(r, \phi) = r^{-(n+2)}\mathbf{w}_n^{(1)}(\phi), \quad n = -1, 0, 1, \dots \quad (8-10a)$$

$$\mathbf{u}_n^{(2)}(r, \phi) = r^{-(n+1)}\mathbf{w}_n^{(2)}(\phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8-10b)$$

para ciertas funciones vectoriales $\mathbf{w}_n^{(1)}$ y $\mathbf{w}_n^{(2)}$ que dependen solo de ϕ . Sustituyendo las componentes de (8-10a) y (8-10b) en (4-4) se obtienen sus tensores de tensión asociados, que se expresan de forma similar:

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{(1)}(r, \phi) = r^{-(n+3)}\boldsymbol{\tau}_n^{(1)}(\phi), \quad n = -1, 0, 1, \dots \quad (8-11a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{(2)}(r, \phi) = r^{-(n+2)}\boldsymbol{\tau}_n^{(2)}(\phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8-11b)$$

para ciertas funciones de tensor $\boldsymbol{\tau}_n^{(1)}$ y $\boldsymbol{\tau}_n^{(2)}$ que dependen solo de ϕ . Las expresiones completas de las funciones $\mathbf{w}_n^{(1)}$, $\mathbf{w}_n^{(2)}$, $\boldsymbol{\tau}_n^{(1)}$ y $\boldsymbol{\tau}_n^{(2)}$ se pueden encontrar en [5]. La solución general de (8-2a) corresponde entonces a una combinación lineal de desplazamientos definidos en (8-10a) y (8-10b), que expresamos convenientemente como:

$$\mathbf{u}(r, \phi) = \sum_{n=-1}^{\infty} r^{-(n+2)}(a_n^{(1)}\mathbf{w}_n^{(1)}(\phi) + a_{n+1}^{(2)}\mathbf{w}_{n+1}^{(2)}(\phi)), \quad (8-12)$$

para coeficientes reales arbitrarios $a_n^{(1)}$ y $a_n^{(2)}$. Esta solución también satisface la condición de decaimiento al infinito (8-2e). El tensor de tensión asociado se expresa como:

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \phi) = \sum_{n=-1}^{\infty} r^{-(n+3)}(a_n^{(1)}\boldsymbol{\tau}_n^{(1)}(\phi) + a_{n+1}^{(2)}\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{(2)}(\phi)). \quad (8-13)$$

Además, la solución \mathbf{u} tiene que satisfacer a (8-2b). En Γ_∞^e ($\phi = \pi/2$) se tiene que $\hat{\mathbf{z}} = -\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Por consiguiente:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{z}} = -\sigma_{r\phi}(\mathbf{u})\hat{\mathbf{r}} - \sigma_\phi(\mathbf{u})\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_\phi(\mathbf{u}) = \sigma_{r\phi}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_\infty^e.$$

Imponiendo esta condición en (8-13) se obtiene:

$$a_n^{(1)}[\tau_n^{(1)}]_\phi(\pi/2) + a_{n+1}^{(2)}[\tau_{n+1}^{(2)}]_\phi(\pi/2) = 0 \quad (8-14a)$$

$$a_n^{(1)}[\tau_n^{(1)}]_{r\phi}(\pi/2) + a_{n+1}^{(2)}[\tau_{n+1}^{(2)}]_{r\phi}(\pi/2) = 0 \quad (8-14b)$$

Para evaluar las funciones $\tau_n^{(1)}$, $\tau_n^{(2)}$ en $\phi = \pi/2$, es necesario distinguir entre los casos n par y n impar. Al hacerlo en (8-14) y expandiendo, obtenemos las siguientes relaciones entre los coeficientes $a_n^{(1)}$ y $a_n^{(2)}$:

$$a_{-1}^{(1)} = (3 - 2\nu)a_0^{(2)} \quad (8-15a)$$

$$(2n + 1)a_{2n}^{(1)} = \alpha_{2n} a_{2n+1}^{(2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8-15b)$$

$$(2n + 2)a_{2n+1}^{(1)} = \alpha_{2n+2} a_{2n+2}^{(2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8-15c)$$

donde:

$$\alpha_{2n} = (2n + 1)^2 - 2(1 - \nu).$$

Incorporando relaciones (8-15) en (8-12)-(8-13) y usando el hecho de que los coeficientes $a_n^{(1)}$ y $a_n^{(2)}$ son arbitrarios, nos permite expresar \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$ como:

$$\mathbf{u}(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+2} \mathbf{w}_n^{(A)}(\phi) + \sum_{n=-1}^{\infty} B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+3} \mathbf{w}_n^{(B)}(\phi), \quad (8-16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \phi) = \frac{1}{R} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+3} \boldsymbol{\tau}_n^{(A)}(\phi) + \sum_{n=-1}^{\infty} B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+4} \boldsymbol{\tau}_n^{(B)}(\phi) \right], \quad (8-17)$$

donde A_n y B_n son coeficientes reales arbitrarios. Las funciones vectoriales $\mathbf{w}_n^{(A)}$, $\mathbf{w}_n^{(B)}$ y funciones de tensor $\boldsymbol{\tau}_n^{(A)}$, $\boldsymbol{\tau}_n^{(B)}$ se definen como:

$$\mathbf{w}_n^{(A)}(\phi) = \alpha_{2n} \mathbf{w}_{2n}^{(1)}(\phi) + (2n + 1) \mathbf{w}_{2n+1}^{(2)}(\phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8-18a)$$

$$\mathbf{w}_{-1}^{(B)}(\phi) = (3 - 2\nu) \mathbf{w}_{-1}^{(1)}(\phi) + \mathbf{w}_0^{(2)}(\phi), \quad (8-18b)$$

$$\mathbf{w}_n^{(B)}(\phi) = \alpha_{2n+2} \mathbf{w}_{2n+1}^{(1)}(\phi) + (2n + 2) \mathbf{w}_{2n+2}^{(2)}(\phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8-18c)$$

$$\boldsymbol{\tau}_n^{(A)}(\phi) = \alpha_{2n} \boldsymbol{\tau}_{2n}^{(1)}(\phi) + (2n + 1) \boldsymbol{\tau}_{2n+1}^{(2)}(\phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8-18d)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{-1}^{(B)}(\phi) = (3 - 2\nu) \boldsymbol{\tau}_{-1}^{(1)}(\phi) + \boldsymbol{\tau}_0^{(2)}(\phi), \quad (8-18e)$$

$$\boldsymbol{\tau}_n^{(B)}(\phi) = \alpha_{2n+2} \boldsymbol{\tau}_{2n+1}^{(1)}(\phi) + (2n + 2) \boldsymbol{\tau}_{2n+2}^{(2)}(\phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8-18f)$$

Las expresiones explícitas para todas estas funciones se proporcionan a continuación:

$$2\mu[w_n^{(A)}]_r(\phi) = -(2n+1)(\alpha_{2n}P_{2n}(\cos\phi) + \gamma_{2n}P_{2n+2}(\cos\phi)), \quad (8-19a)$$

$$2\mu[w_n^{(A)}]_\phi(\phi) = -\sin\phi(\alpha_{2n}P'_{2n}(\cos\phi) + \epsilon_{2n}P'_{2n+2}(\cos\phi)), \quad (8-19b)$$

$$2\mu[w_{-1}^{(B)}]_r(\phi) = -(1-2\nu+4(1-\nu)\cos\phi), \quad (8-20a)$$

$$2\mu[w_{-1}^{(B)}]_\phi(\phi) = \sin\phi(3-4\nu-(1-2\nu)q(\phi)), \quad (8-20b)$$

$$2\mu[w_n^{(B)}]_r(\phi) = -(2n+2)(\alpha_{2n+2}P_{2n+1}(\cos\phi) + \gamma_{2n+1}P_{2n+3}(\cos\phi)), \quad (8-20c)$$

$$2\mu[w_n^{(B)}]_\phi(\phi) = -\sin\phi(\alpha_{2n+2}P'_{2n+1}(\cos\phi) + \epsilon_{2n+1}P'_{2n+3}(\cos\phi)), \quad (8-20d)$$

$$[\tau_n^{(A)}]_r(\phi) = (2n+1)(2n+2)(\alpha_{2n}P_{2n}(\cos\phi) + \beta_{2n}P_{2n+2}(\cos\phi)), \quad (8-21a)$$

$$[\tau_n^{(A)}]_\phi(\phi) = (\alpha_{2n} + \epsilon_{2n})P'_{2n+1}(\cos\phi) - (2n+1)(2n+2) \\ \times (\alpha_{2n}P_{2n}(\cos\phi) + (\alpha_{2n} - 2n + 2 - 4\nu)P_{2n+2}(\cos\phi)), \quad (8-21b)$$

$$[\tau_n^{(A)}]_\theta(\phi) = -(4n+3)((2n+1)(2n+2)(1-2\nu)P_{2n+2}(\cos\phi) \\ + (2n-1+2\nu)P'_{2n+1}(\cos\phi)), \quad (8-21c)$$

$$[\tau_n^{(A)}]_{r\phi}(\phi) = \sin\phi((2n+2)\alpha_{2n}P'_{2n}(\cos\phi) + (2n+1)\alpha_{2n+1}P'_{2n+2}(\cos\phi)), \quad (8-21d)$$

$$[\tau_{-1}^{(B)}]_r(\phi) = 1-2\nu+2(2-\nu)\cos\phi, \quad (8-22a)$$

$$[\tau_{-1}^{(B)}]_\phi(\phi) = -(1-2\nu)(1+\cos\phi-q(\phi)), \quad (8-22b)$$

$$[\tau_{-1}^{(B)}]_\theta(\phi) = -(1-2\nu)(\cos\phi+q(\phi)), \quad (8-22c)$$

$$[\tau_{-1}^{(B)}]_{r\phi}(\phi) = -(1-2\nu)\sin\phi(1-q(\phi)), \quad (8-22d)$$

$$[\tau_n^{(B)}]_r(\phi) = (2n+2)(2n+3)(\alpha_{2n+2}P_{2n+1}(\cos\phi) + \beta_{2n+1}P_{2n+3}(\cos\phi)), \quad (8-22e)$$

$$[\tau_n^{(B)}]_\phi(\phi) = (\alpha_{2n+2} + \epsilon_{2n+1})P'_{2n+2}(\cos\phi) - (2n+2)(2n+3) \\ \times (\alpha_{2n+2}P_{2n+1}(\cos\phi) + (\alpha_{2n+1} - 2n + 1 - 4\nu)P_{2n+3}(\cos\phi)), \quad (8-22f)$$

$$[\tau_n^{(B)}]_\theta(\phi) = -(4n+5)((2n+2)(2n+3)(1-2\nu)P_{2n+3}(\cos\phi) \\ + (2n+1+2\nu)P'_{2n+2}(\cos\phi)), \quad (8-22g)$$

$$[\tau_n^{(B)}]_{r\phi}(\phi) = \sin\phi\alpha_{2n+2}((2n+3)P'_{2n+1}(\cos\phi) + (2n+2)P'_{2n+3}(\cos\phi)), \quad (8-22h)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$, $q(\phi) = \frac{1}{1-\cos\phi}$ y:

$$\beta_{2n} = (2n+2)(2n+5) - 2\nu,$$

$$\gamma_{2n} = (2n+2)(2n+5 - 4\nu),$$

$$\epsilon_{2n} = (2n+1)(2n-2+4\nu).$$

Se puede verificar que en virtud de (8-19b), (8-20b), (8-20d), (8-21d), (8-22d) y (8-22h), \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$ satisfacen la condición

$$u_\phi(r, \pi) = \sigma_{r\phi}(r, \pi) = 0 \quad r > R,$$

que es equivalente a satisfacer (8-2d). En consecuencia, la solución general en forma de series dada en (8-16) y (8-17) satisface (8-2a), (8-2b), (8-2d) y (8-2e). Hasta ahora se tiene una solución totalmente analítica, ya que no se ha introducido una aproximación numérica. Los detalles completos sobre el procedimiento para obtener esta solución se encuentran en [5].

Aplicación numérica de condiciones de frontera exactas en el límite artificial

En lo que sigue, la solución analítica de la subsección anterior se forzará numéricamente a satisfacer (8-2c). Teóricamente, existen valores de los coeficientes A_n y B_n tales que se cumple (8-2c), que por supuesto dependen del dato particular de Dirichlet \mathbf{v} . Sin embargo, estos valores están determinados por un sistema infinito de ecuaciones lineales simultáneas, por lo que en general no hay forma de calcularlos analíticamente. Para superar este inconveniente, calculamos numéricamente un número finito de coeficientes, que cuando se sustituyen en (8-16) y (8-17), dan lugar a una solución *semi-analítica* de (8-2). El procedimiento numérico para calcular los coeficientes A_n y B_n se describe a continuación para un lado derecho genérico \mathbf{v} en (8-2c). Este procedimiento se aplicará a los lados derechos particulares $\mathbf{v} = \psi_j \hat{\boldsymbol{\rho}}$ y $\mathbf{v} = \psi_j \hat{\boldsymbol{z}}$. Primero, truncamos la serie en (8-16) y (8-17) en un orden finito N y llamamos \mathbf{u}_N y $\boldsymbol{\sigma}_N$ el vector de desplazamiento y tensor de tensiones resultantes, es decir:

$$\mathbf{u}_N(r, \phi) = \sum_{n=0}^N A_n \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+2} \mathbf{w}_n^{(A)}(\phi) + \sum_{n=-1}^N B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+3} \mathbf{w}_n^{(B)}(\phi), \quad (8-23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_N(r, \phi) = \frac{1}{R} \left[\sum_{n=0}^N A_n \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+3} \boldsymbol{\tau}_n^{(A)}(\phi) + \sum_{n=-1}^N B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+4} \boldsymbol{\tau}_n^{(B)}(\phi) \right], \quad (8-24)$$

y consideramos el funcional cuadrático de la energía \mathcal{J} definido como

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}_N) = \frac{1}{2R} \int_{\Gamma_R} \boldsymbol{\sigma}_N \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_N \, d\Gamma_R - \frac{1}{R} \int_{\Gamma_R} \boldsymbol{\sigma}_N \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_R, \quad (8-25)$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{r}}$ es el vector normal unitario sobre Γ_R , apuntando hacia afuera de Ω^e . El primer término en (8-25) es cuadrático en \mathbf{u}_N y representa la energía potencial elástica superficial en Γ_R , mientras que el segundo término es lineal en \mathbf{u}_N y está relacionado con la condición de frontera tipo Dirichlet asumida en Γ_R . El funcional \mathcal{J} se ha definido de tal manera que su minimización proporciona valores numéricos para los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \dots, A_N$ y $B_{-1}, B_0, B_1, \dots, B_N$ de forma tal que (8-2c) se cumpla aproximadamente. Al expandir los términos en (8-25), reemplazando $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{r}}$ y haciendo explícitas las integrales (observar que $d\Gamma_R = R^2(\sin)\phi \, d\phi$), llegamos a:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{u}_N) = & -\frac{R}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} ([\sigma_N]_r(R, \phi) [u_N]_r(R, \phi) + [\sigma_N]_{r\phi}(R, \phi) [u_N]_{\phi}(R, \phi)) \sin \phi \, d\phi \\ & + R \int_{\pi/2}^{\pi} ([\sigma_N]_r(R, \phi) v_r(R, \phi) + [\sigma_N]_{r\phi}(R, \phi) v_{\phi}(R, \phi)) \sin \phi \, d\phi. \end{aligned} \quad (8-26)$$

Vamos a definir los vectores columna $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N+1}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N+2}$ como aquellos cuyas entradas son los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \dots, A_N$ y $B_{-1}, B_0, B_1, \dots, B_N$, respectivamente. Evaluando las componentes correspondientes de \mathbf{u}_N y $\boldsymbol{\sigma}_N$ en $r = R$ en (8-23) y (8-24), sustituyéndolos en (8-26) y expandiendo los términos apropiadamente, \mathcal{J} se reexpresa como una función explícita de \mathbf{A} y \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N Q_{nk}^{(AA)} A_n A_k + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-1}^N Q_{nk}^{(AB)} A_n B_k + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^N \sum_{k=0}^N Q_{nk}^{(BA)} B_n A_k \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^N \sum_{k=-1}^N Q_{nk}^{(BB)} B_n B_k - \sum_{n=0}^N y_n^{(A)} A_n - \sum_{n=-1}^N y_n^{(B)} B_n, \end{aligned} \quad (8-27)$$

donde:

$$Q_{nk}^{(\alpha\beta)} = - \int_{\pi/2}^{\pi} \left([w_n^{(\alpha)}]_r(\phi) [\tau_k^{(\beta)}]_r(\phi) + [w_n^{(\alpha)}]_{\phi}(\phi) [\tau_k^{(\beta)}]_{r\phi}(\phi) \right) \sin \phi \, d\phi \quad \alpha, \beta = A, B, \quad (8-28)$$

y

$$y_n^{(\alpha)} = - \int_{\pi/2}^{\pi} \left([\tau_n^{(\alpha)}]_r(\phi) v_r(R, \phi) + [\tau_n^{(\alpha)}]_{r\phi}(\phi) v_{\phi}(R, \phi) \right) \sin \phi \, d\phi \quad \alpha = A, B. \quad (8-29)$$

Sustituyendo (8-19a), (8-19b), (8-20a), (8-20b), (8-20c), (8-20d), (8-21a), (8-21d), (8-22a), (8-22d), (8-22e) y (8-22h) en (8-28), se obtienen expresiones para los coeficientes $Q_{nk}^{(\alpha\beta)}$ en términos de integrales explícitas. Estas expresiones son demasiado engorrosas para ser presentadas aquí, sin embargo, todas las integrales involucradas se calculan exactamente con la ayuda de las fórmulas proporcionadas en el Apéndice A de [5].

Las fórmulas explícitas para los coeficientes $Q_{nk}^{(\alpha\beta)}$ se proporcionan en el Apéndice A de [5]. En particular, sostienen que $Q_{nk}^{(AA)} = Q_{kn}^{(AA)}$, $Q_{kn}^{(BA)} = Q_{nk}^{(AB)}$ y $Q_{nk}^{(BB)} = Q_{kn}^{(BB)}$. Con respecto a los coeficientes $y_n^{(\alpha)}$, estos dependen del lado derecho \mathbf{v} asumido en (8-2c), por lo que su cálculo se analiza en la siguiente subsección. Usando los coeficientes $Q_{nk}^{(AA)}$, $Q_{nk}^{(AB)}$, $Q_{nk}^{(BB)}$, $y_n^{(A)}$ y $y_n^{(B)}$ como entradas, armamos las matrices $\mathbf{Q}^{(AA)}$, $\mathbf{Q}^{(AB)}$, $\mathbf{Q}^{(BB)}$ y los vectores $\mathbf{y}^{(A)}$, $\mathbf{y}^{(B)}$, respectivamente. $\mathbf{Q}^{(AA)}$ es una matriz simétrica tridiagonal de tamaño $N + 1$, $\mathbf{Q}^{(AB)}$ es una matriz llena no cuadrada de tamaño $(N + 1) \times (N + 2)$, y $\mathbf{Q}^{(BB)}$ es una matriz simétrica de tamaño $N + 2$, que es casi tridiagonal, excepto por su primera fila y columna que son llenas. La figura 8-2 muestra esquemáticamente la estructura de estas matrices. Los vectores $y_n^{(A)}$ y $y_n^{(B)}$ son de longitud $N + 1$ y $N + 2$, respectivamente. Además, ensamblamos la matriz cuadrada \mathbf{Q} de tamaño $2N + 3$ y los vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} de longitud $2N + 3$ como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{(AA)} & \mathbf{Q}^{(AB)} \\ [\mathbf{Q}^{(AB)}]^T & \mathbf{Q}^{(BB)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(A)} \\ \mathbf{y}^{(B)} \end{bmatrix},$$

con esto expresamos \mathcal{J} en (8-27) como una forma cuadrática en \mathbf{x} :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{y}. \quad (8-30)$$

Es sencillo verificar que \mathbf{Q} es una matriz simétrica. Además, es una matriz definida positiva, debido a la naturaleza elíptica de la ecuación elastostática. Por lo tanto, la forma cuadrática \mathcal{J} tiene un mínimo global único que se alcanza cuando $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, o equivalentemente:

$$\mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (8-31)$$

que es un sistema lineal de ecuaciones para los coeficientes A_n y B_n (almacenados dentro del vector \mathbf{x}). Para resolver (8-31), aprovechamos la simetría y la condición de definida positiva de la matriz \mathbf{Q} .

Expresando una vez más \mathbf{Q} , \mathbf{x} y \mathbf{y} en términos de sus componentes de bloque, (8-31) se reescribe como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{(AA)} & \mathbf{Q}^{(AB)} \\ [\mathbf{Q}^{(AB)}]^T & \mathbf{Q}^{(BB)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(A)} \\ \mathbf{y}^{(B)} \end{bmatrix}, \quad (8-32)$$

y la solución de (8-32) se expresa explícitamente con la ayuda de la fórmula de inversión de bloques Schur-Banachiewicz ([4]):

$$\mathbf{A} = ([\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} + [\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} \mathbf{Q}^{(AB)} [\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}]^{-1} [\mathbf{Q}^{(AB)}]^T [\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1}) \mathbf{y}^{(A)} - [\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} \mathbf{Q}^{(AB)} [\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}]^{-1} \mathbf{y}^{(B)}, \quad (8-33a)$$

$$\mathbf{B} = -[\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}]^{-1} [\mathbf{Q}^{(AB)}]^T [\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} \mathbf{y}^{(A)} + [\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}]^{-1} \mathbf{y}^{(B)}, \quad (8-33b)$$

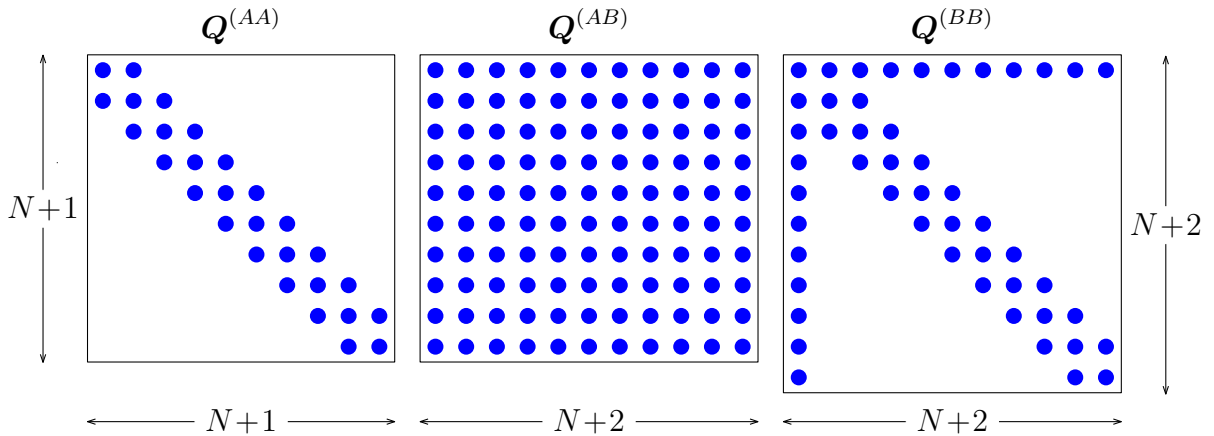


Figura 8-2: Structure of matrices $\mathbf{Q}^{(AA)}$, $\mathbf{Q}^{(AB)}$ and $\mathbf{Q}^{(BB)}$.

donde $\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}$ denota el complemento de Schur de $\mathbf{Q}^{(BB)}$ en \mathbf{Q} , definido como:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)} = \mathbf{Q}^{(BB)} - [\mathbf{Q}^{(AB)}]^T [\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} \mathbf{Q}^{(AB)}. \quad (8-34)$$

Por lo tanto, observamos en (8-33) que, para obtener \mathbf{A} y \mathbf{B} , basta con invertir las matrices $\mathbf{Q}^{(AA)}$ y $\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}$, ambas definidas positivas gracias a que \mathbf{Q} también lo es. Como $\mathbf{Q}^{(AA)}$ es una matriz tridiagonal, se invierte utilizando el algoritmo de Thomas [22] para sistemas tridiagonales (véase [15], Algoritmo 4.3.6), mientras que para invertir $\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}$, usamos su factorización de Cholesky, que se calcula utilizando un algoritmo estándar para ese fin ([15], Algoritmo 4.2.1). Por lo tanto, ambas inversiones son muy rápidas y eficientes, ya que en la práctica se realizan aplicando sucesivas sustituciones hacia adelante y hacia atrás. El algoritmo resultante para calcular \mathbf{A} y \mathbf{B} para un dato de Dirichlet dado \mathbf{v} consta de los siguientes pasos:

1. Calcular los coeficientes para la inversión tridiagonal de $\mathbf{Q}^{(AA)}$.
2. Usarlos para evaluar $[\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} \mathbf{y}^{(A)}$ y $[\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} \mathbf{Q}^{(AB)}$.
3. Calcular el complemento Schur $\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}$ usando (8-34).
4. Calcular la factorización de Cholesky de $\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}$.
5. Usarlo para evaluar $[\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}]^{-1} \mathbf{y}^{(B)}$ y $[\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}]^{-1} [\mathbf{Q}^{(AB)}]^T$.
6. Evaluar \mathbf{A} y \mathbf{B} como se indica en (8-33a) y (8-33b).

Este algoritmo debe aplicarse repetidamente para cada par de vectores $\mathbf{y}^{(A)}$ y $\mathbf{y}^{(B)}$ necesarios en los cálculos. Sin embargo, como las matrices $\mathbf{Q}^{(\alpha\beta)}$ permanecen sin cambios, cada una de ellas, junto con los coeficientes para la inversión de $\mathbf{Q}^{(AA)}$ y $\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}$, se calculan y almacenan solo una vez.

Aproximación numérica de los términos integrales que implican el operador DtN en la formulación MEF

En lo que sigue, el procedimiento numérico descrito anteriormente se aplica para aproximar los términos en (4-18). Primero, se calcularán los coeficientes $y_n^{(\alpha)}$ en (8-29) para $\mathbf{v} = \psi_j \hat{\boldsymbol{\rho}}$ y $\mathbf{v} = \psi_j \hat{\boldsymbol{z}}$ por cada $j \in \mathcal{I}_R$. Combinando con (4-1a), obtenemos que estos dos casos son respectivamente equivalentes a considerar

$$\mathbf{y}^{(A)} = \mathbf{C}_\rho^j, \quad \mathbf{y}^{(B)} = \mathbf{D}_\rho^j,$$

y

$$\mathbf{y}^{(A)} = \mathbf{C}_z^j, \quad \mathbf{y}^{(B)} = \mathbf{D}_z^j,$$

donde $\mathbf{C}_\rho^j, \mathbf{C}_z^j \in \mathbb{R}^{N+1}$ y $\mathbf{D}_\rho^j, \mathbf{D}_z^j \in \mathbb{R}^{N+2}$ son los vectores de componentes:

$$C_{\rho,n}^j = - \int_{\pi/2}^{\pi} ([\tau_n^{(A)}]_r(\phi) \sin \phi + [\tau_n^{(A)}]_{r\phi}(\phi) \cos \phi) \psi_j(R, \phi) \sin \phi \, d\phi, \quad n = 0, \dots, N, \quad (8-35a)$$

$$C_{z,n}^j = - \int_{\pi/2}^{\pi} ([\tau_n^{(A)}]_r(\phi) \cos \phi - [\tau_n^{(A)}]_{r\phi}(\phi) \sin \phi) \psi_j(R, \phi) \sin \phi \, d\phi, \quad n = 0, \dots, N, \quad (8-35b)$$

$$D_{\rho,n}^j = - \int_{\pi/2}^{\pi} ([\tau_n^{(B)}]_r(\phi) \sin \phi + [\tau_n^{(B)}]_{r\phi}(\phi) \cos \phi) \psi_j(R, \phi) \sin \phi \, d\phi, \quad n = -1, \dots, N, \quad (8-35c)$$

$$D_{z,n}^j = - \int_{\pi/2}^{\pi} ([\tau_n^{(B)}]_r(\phi) \cos \phi - [\tau_n^{(B)}]_{r\phi}(\phi) \sin \phi) \psi_j(R, \phi) \sin \phi \, d\phi, \quad n = -1, \dots, N, \quad (8-35d)$$

respectivamente. Sustituyendo (8-21a), (8-21d), (8-22a), (8-22d), (8-22e) y (8-22h) en (8-35) y expandiendo, las componentes de los vectores $\mathbf{C}_\rho^j, \mathbf{C}_z^j, \mathbf{D}_\rho^j, \mathbf{D}_z^j$ se vuelven a escribir como:

$$C_{s,n}^j = -(2n+1)(2n+2)(\alpha_{2n} l_{s,2n}^j + \beta_{2n} l_{s,2n+2}^j) - (2n+2)\alpha_{2n} m_{s,2n}^j - (2n+1)\alpha_{2n+1} m_{s,2n+2}^j, \quad n = 0, \dots, N, \quad (8-36a)$$

$$D_{s,-1}^j = -3l_{s,1}^j - (1-2\nu)q_s^j, \quad (8-36b)$$

$$D_{s,n}^j = -(2n+2)(2n+3)(\alpha_{2n+2} l_{s,2n+1}^j + \beta_{2n+1} l_{s,2n+3}^j) - \alpha_{2n+2}((2n+3)m_{s,2n+1}^j + (2n+2)m_{s,2n+3}^j), \quad n = 0, \dots, N, \quad (8-36c)$$

donde $s = \rho, z$ y

$$l_{\rho,n}^j = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \phi P_n(\cos \phi) \psi_j(R, \phi) \, d\phi, \quad l_{z,n}^j = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \phi \cos \phi P_n(\cos \phi) \psi_j(R, \phi) \, d\phi, \quad (8-37a)$$

$$m_{\rho,n}^j = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \phi \cos \phi P'_n(\cos \phi) \psi_j(R, \phi) \, d\phi, \quad m_{z,n}^j = - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 \phi P'_n(\cos \phi) \psi_j(R, \phi) \, d\phi, \quad (8-37b)$$

$$q_\rho^j = \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \phi) \psi_j(R, \phi) \, d\phi, \quad q_z^j = 0. \quad (8-37c)$$

Para calcular estas integrales, observamos que la malla \mathcal{T}_h restringida a Γ_R da lugar a una partición del cuarto de círculo en segmentos (generalmente equiespaciados). Sea J el número de estos segmentos. Entonces el conjunto \mathcal{I}_R necesariamente consta de $J+1$ nodos, los que asumimos por simplicidad que están numerados correlativamente, es decir, $\mathcal{I}_R = \{1, 2, \dots, J, J+1\}$. Asociamos a cada nodo $j \in \mathcal{I}_R$ un ángulo ϕ_j , de tal manera que $\pi/2 = \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_J < \phi_{J+1} = \pi$. Las funciones de forma ψ_j , restringidas a Γ_R , no dependen del radio R , y tienen las siguientes expresiones explícitas:

$$\psi_1(\phi) = \mathbb{1}_{[\phi_1, \phi_2]}(\phi) \left(\frac{\phi_2 - \phi}{\phi_2 - \phi_1} \right), \quad (8-38a)$$

$$\psi_j(\phi) = \mathbb{1}_{[\phi_{j-1}, \phi_j]}(\phi) \left(\frac{\phi - \phi_{j-1}}{\phi_j - \phi_{j-1}} \right) + \mathbb{1}_{[\phi_j, \phi_{j+1}]}(\phi) \left(\frac{\phi_{j+1} - \phi}{\phi_{j+1} - \phi_j} \right) \quad j = 2, \dots, J, \quad (8-38b)$$

$$\psi_{J+1}(\phi) = \mathbb{1}_{[\phi_J, \phi_{J+1}]}(\phi) \left(\frac{\phi - \phi_J}{\phi_{J+1} - \phi_J} \right), \quad (8-38c)$$

donde $\mathbb{1}_{[a,b]}(\cdot)$ representa la función indicatriz del intervalo $[a, b]$. Sustituyendo (8-38) en (8-37), los coeficientes $l_{s,n}^s$, $m_{s,n}^s$ y $q_{\rho,n}^s$ se descomponen como:

$$\begin{aligned} l_{s,n}^1 &= l_{s,n}^{1,+}, & m_{s,n}^1 &= m_{s,n}^{1,+}, & q_{\rho,n}^1 &= q_{\rho,n}^{1,+}, \\ l_{s,n}^j &= l_{s,n}^{j,-} + l_{s,n}^{j,+}, & m_{s,n}^j &= m_{s,n}^{j,-} + m_{s,n}^{j,+}, & q_{\rho,n}^j &= q_{\rho,n}^{j,-} + q_{\rho,n}^{j,+}, & j &= 2, \dots, J, \\ l_{s,n}^{J+1} &= l_{s,n}^{J+1,-}, & m_{s,n}^{J+1} &= m_{s,n}^{J+1,-}, & q_{\rho,n}^{J+1} &= q_{\rho,n}^{J+1,-}, \end{aligned}$$

donde para $j = 2, \dots, J + 1$,

$$l_{\rho,n}^{j,-} = \int_{\phi_{j-1}}^{\phi_j} \sin^2 \phi P_n(\cos \phi) \left(\frac{\phi - \phi_{j-1}}{\phi_j - \phi_{j-1}} \right) d\phi, \quad (8-39a)$$

$$m_{\rho,n}^{j,-} = \int_{\phi_{j-1}}^{\phi_j} \sin^2 \phi \cos \phi P_n'(\cos \phi) \left(\frac{\phi - \phi_{j-1}}{\phi_j - \phi_{j-1}} \right) d\phi, \quad (8-39b)$$

$$q_{\rho,n}^{j,-} = \int_{\phi_{j-1}}^{\phi_j} (1 + \cos \phi) \left(\frac{\phi - \phi_{j-1}}{\phi_j - \phi_{j-1}} \right) d\phi, \quad (8-39c)$$

$$l_{z,n}^{j,-} = \int_{\phi_{j-1}}^{\phi_j} \sin \phi \cos \phi P_n(\cos \phi) \left(\frac{\phi - \phi_{j-1}}{\phi_j - \phi_{j-1}} \right) d\phi, \quad (8-39d)$$

$$m_{z,n}^{j,-} = - \int_{\phi_{j-1}}^{\phi_j} \sin^3 \phi P_n'(\cos \phi) \left(\frac{\phi - \phi_{j-1}}{\phi_j - \phi_{j-1}} \right) d\phi, \quad (8-39e)$$

y por $j = 1, \dots, J$,

$$l_{\rho,n}^{j,+} = \int_{\phi_j}^{\phi_{j+1}} \sin^2 \phi P_n(\cos \phi) \left(\frac{\phi_{j+1} - \phi}{\phi_{j+1} - \phi_j} \right) d\phi, \quad (8-40a)$$

$$m_{\rho,n}^{j,+} = \int_{\phi_j}^{\phi_{j+1}} \sin^2 \phi \cos \phi P_n'(\cos \phi) \left(\frac{\phi_{j+1} - \phi}{\phi_{j+1} - \phi_j} \right) d\phi, \quad (8-40b)$$

$$q_{\rho,n}^{j,+} = \int_{\phi_j}^{\phi_{j+1}} (1 + \cos \phi) \left(\frac{\phi_{j+1} - \phi}{\phi_{j+1} - \phi_j} \right) d\phi, \quad (8-40c)$$

$$l_{z,n}^{j,+} = \int_{\phi_j}^{\phi_{j+1}} \sin \phi \cos \phi P_n(\cos \phi) \left(\frac{\phi_{j+1} - \phi}{\phi_{j+1} - \phi_j} \right) d\phi, \quad (8-40d)$$

$$m_{z,n}^{j,+} = - \int_{\phi_j}^{\phi_{j+1}} \sin^3 \phi P'_n(\cos \phi) \left(\frac{\phi_{j+1} - \phi}{\phi_{j+1} - \phi_j} \right) d\phi. \quad (8-40e)$$

Las integrales en (8-39) y (8-40) se calculan analíticamente con la ayuda de técnicas de cálculo simbólico. Denotamos por $A_{s,n}^j$ y $B_{s,n}^j$ los coeficientes A_n y B_n obtenidos aplicando el algoritmo de la subsección anterior con $\mathbf{y}^{(A)} = \mathbf{C}_s^j$ y $\mathbf{y}^{(B)} = \mathbf{D}_s^j$, respectivamente. Observar que como para cada $j = 1, 2, \dots, J, J+1$ se deben considerar dos casos ($s = \rho$ y $s = z$), el algoritmo se aplicará $2(J+1)$ veces en total. Además, definamos los vectores $\mathbf{A}_s^j \in \mathbb{R}^{N+1}$ y $\mathbf{B}_s^j \in \mathbb{R}^{N+2}$ como aquellos cuyos componentes son los coeficientes $A_{s,n}^j$ y $B_{s,n}^j$, respectivamente, que en virtud de (8-33) están dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s^j &= ([\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} + [\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} \mathbf{Q}^{(AB)} [\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}]^{-1} [\mathbf{Q}^{(AB)}]^T [\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1}) \mathbf{C}_s^j \\ &\quad - [\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} \mathbf{Q}^{(AB)} [\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}]^{-1} \mathbf{D}_s^j, \end{aligned} \quad (8-41a)$$

$$\mathbf{B}_s^j = -[\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}]^{-1} [\mathbf{Q}^{(AB)}]^T [\mathbf{Q}^{(AA)}]^{-1} \mathbf{C}_s^j + [\tilde{\mathbf{Q}}^{(BB)}]^{-1} \mathbf{D}_s^j. \quad (8-41b)$$

Por lo tanto, usando la definición del operador DtN (8-1) y combinando con (8-24) se llega a las aproximaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\psi_j \hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi) &\approx -\frac{1}{R} \left[\sum_{n=0}^N A_{\rho,n}^j \left([\tau_n^{(A)}]_r(\phi) \hat{\boldsymbol{r}} + [\tau_n^{(A)}]_{r\phi}(\phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) + \sum_{n=-1}^N B_{\rho,n}^j \left([\tau_n^{(B)}]_r(\phi) \hat{\boldsymbol{r}} + [\tau_n^{(B)}]_{r\phi}(\phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \right], \\ \mathcal{M}\psi_j \hat{\boldsymbol{z}}(\phi) &\approx -\frac{1}{R} \left[\sum_{n=0}^N A_{z,n}^j \left([\tau_n^{(A)}]_r(\phi) \hat{\boldsymbol{r}} + [\tau_n^{(A)}]_{r\phi}(\phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) + \sum_{n=-1}^N B_{z,n}^j \left([\tau_n^{(B)}]_r(\phi) \hat{\boldsymbol{r}} + [\tau_n^{(B)}]_{r\phi}(\phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Al reemplazar estas expresiones en (4-18), combinando con (4-1a) y expandiendo, llegamos a:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\rho\rho}^b]_{ij} &\approx -R \sum_{n=0}^N A_{\rho,n}^j \int_{\pi/2}^{\pi} \left([\tau_n^{(A)}]_r(\phi) \sin \phi + [\tau_n^{(A)}]_{r\phi}(\phi) \cos \phi \right) \psi_i(R, \phi) \sin \phi d\phi \\ &\quad - R \sum_{n=-1}^N B_{\rho,n}^j \int_{\pi/2}^{\pi} \left([\tau_n^{(B)}]_r(\phi) \sin \phi + [\tau_n^{(B)}]_{r\phi}(\phi) \cos \phi \right) \psi_i(R, \phi) \sin \phi d\phi, \\ [\mathbf{K}_{\rho z}^b]_{ij} &\approx -R \sum_{n=0}^N A_{z,n}^j \int_{\pi/2}^{\pi} \left([\tau_n^{(A)}]_r(\phi) \sin \phi + [\tau_n^{(A)}]_{r\phi}(\phi) \cos \phi \right) \psi_i(R, \phi) \sin \phi d\phi \\ &\quad - R \sum_{n=-1}^N B_{z,n}^j \int_{\pi/2}^{\pi} \left([\tau_n^{(B)}]_r(\phi) \sin \phi + [\tau_n^{(B)}]_{r\phi}(\phi) \cos \phi \right) \psi_i(R, \phi) \sin \phi d\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{z\rho}^b]_{ij} &\approx -R \sum_{n=0}^N A_{\rho,n}^j \int_{\pi/2}^{\pi} \left([\tau_n^{(A)}]_r(\phi) \cos \phi - [\tau_n^{(A)}]_{r\phi}(\phi) \sin \phi \right) \psi_i(R, \phi) \sin \phi \, d\phi \\
&\quad - R \sum_{n=-1}^N B_{\rho,n}^j \int_{\pi/2}^{\pi} \left([\tau_n^{(B)}]_r(\phi) \cos \phi - [\tau_n^{(B)}]_{r\phi}(\phi) \sin \phi \right) \psi_i(R, \phi) \sin \phi \, d\phi, \\
[\mathbf{K}_{zz}^b]_{ij} &\approx -R \sum_{n=0}^N A_{z,n}^j \int_{\pi/2}^{\pi} \left([\tau_n^{(A)}]_r(\phi) \cos \phi - [\tau_n^{(A)}]_{r\phi}(\phi) \sin \phi \right) \psi_i(R, \phi) \sin \phi \, d\phi \\
&\quad - R \sum_{n=-1}^N B_{z,n}^j \int_{\pi/2}^{\pi} \left([\tau_n^{(B)}]_r(\phi) \cos \phi - [\tau_n^{(B)}]_{r\phi}(\phi) \sin \phi \right) \psi_i(R, \phi) \sin \phi \, d\phi,
\end{aligned}$$

y combinando con (8-35), estos términos se vuelven a expresar convenientemente como:

$$[\mathbf{K}_{\rho\rho}^b]_{ij} \approx R \left[\sum_{n=0}^N C_{\rho,n}^i A_{\rho,n}^j + \sum_{n=-1}^N D_{\rho,n}^i B_{\rho,n}^j \right] = R(\mathbf{C}_{\rho}^i \cdot \mathbf{A}_{\rho}^j + \mathbf{D}_{\rho}^i \cdot \mathbf{B}_{\rho}^j), \quad (8-42a)$$

$$[\mathbf{K}_{\rho z}^b]_{ij} \approx R \left[\sum_{n=0}^N C_{\rho,n}^i A_{z,n}^j + \sum_{n=-1}^N D_{\rho,n}^i B_{z,n}^j \right] = R(\mathbf{C}_{\rho}^i \cdot \mathbf{A}_z^j + \mathbf{D}_{\rho}^i \cdot \mathbf{B}_z^j), \quad (8-42b)$$

$$[\mathbf{K}_{z\rho}^b]_{ij} \approx R \left[\sum_{n=0}^N C_{z,n}^i A_{\rho,n}^j + \sum_{n=-1}^N D_{z,n}^i B_{\rho,n}^j \right] = R(\mathbf{C}_z^i \cdot \mathbf{A}_{\rho}^j + \mathbf{D}_z^i \cdot \mathbf{B}_{\rho}^j), \quad (8-42c)$$

$$[\mathbf{K}_{zz}^b]_{ij} \approx R \left[\sum_{n=0}^N C_{z,n}^i A_{z,n}^j + \sum_{n=-1}^N D_{z,n}^i B_{z,n}^j \right] = R(\mathbf{C}_z^i \cdot \mathbf{A}_z^j + \mathbf{D}_z^i \cdot \mathbf{B}_z^j). \quad (8-42d)$$

Es importante notar que los vectores $\mathbf{C}_{\rho}^i, \mathbf{C}_z^i, \mathbf{D}_{\rho}^i, \mathbf{D}_z^i$ en realidad no dependen del radio R , y tampoco los vectores $\mathbf{A}_{\rho}^i, \mathbf{A}_z^i, \mathbf{B}_{\rho}^i, \mathbf{B}_z^i$. Por lo tanto, en virtud de (8-42), las entradas de la matriz \mathbf{K}^b son lineales en R .

8.2. Figuras y resultados

8.2.1. Caso Base

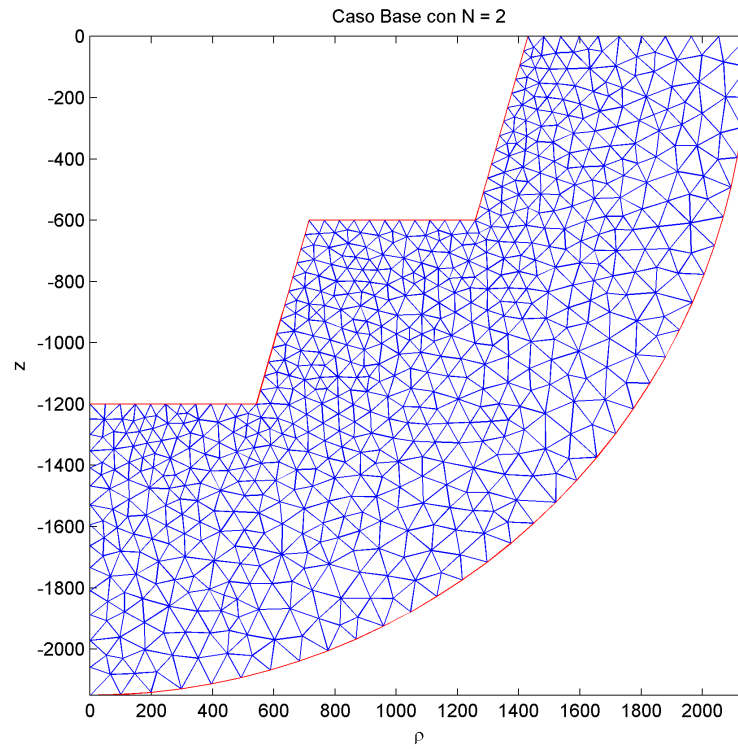


Figura 8-3: Caso base, $n = 2$ peldaño

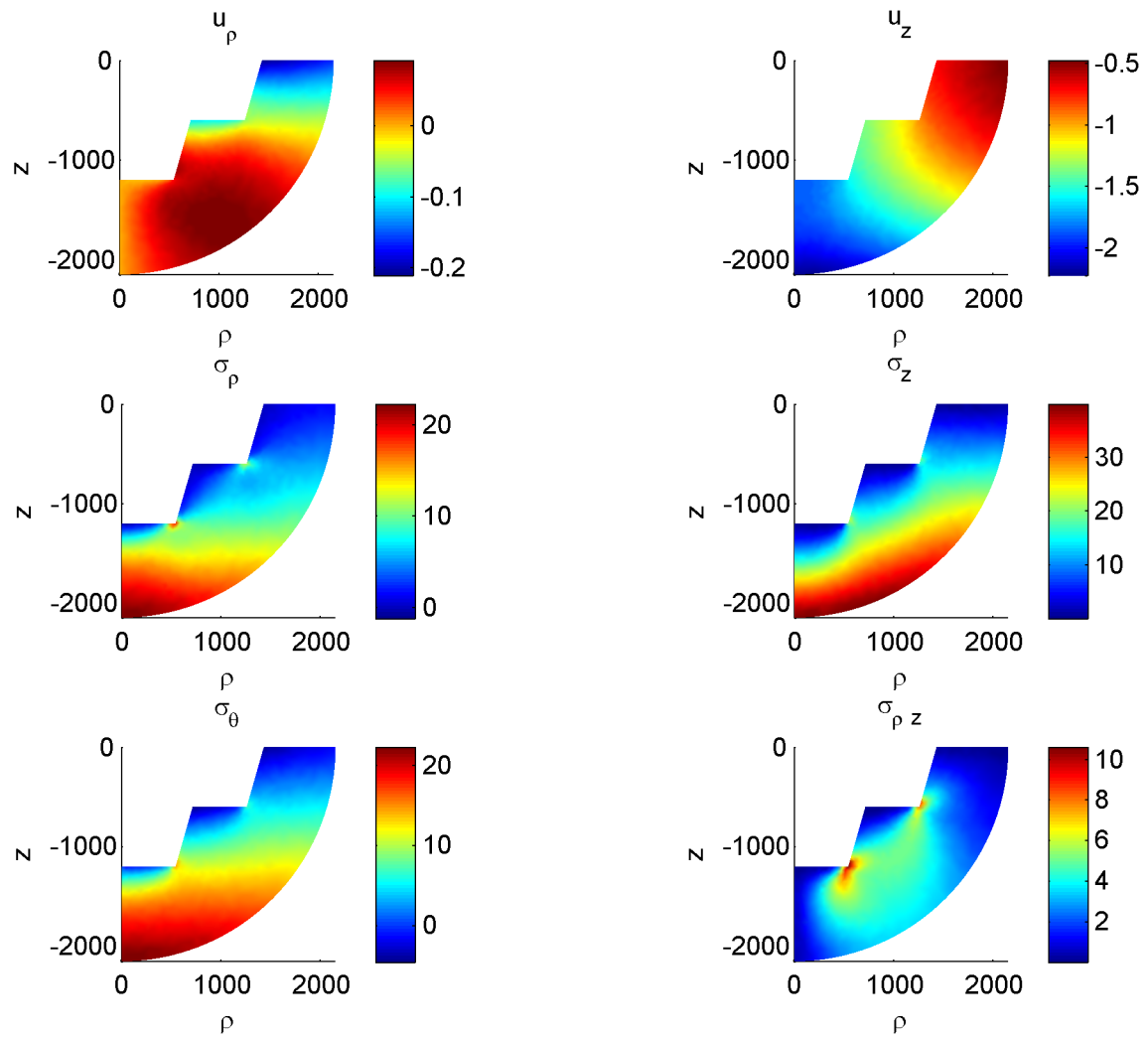


Figura 8-4: Caso base, $n = 2$ peldaño

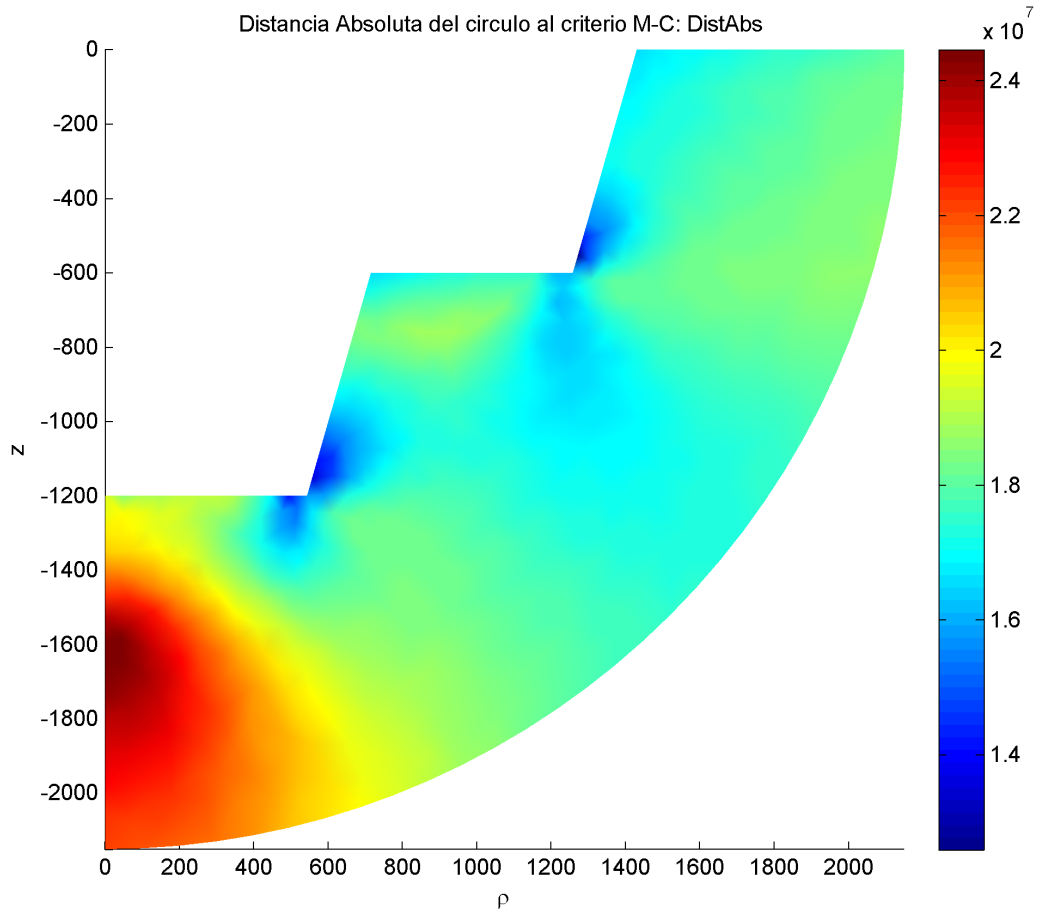


Figura 8-5: Caso base, $n = 2$ peldaño

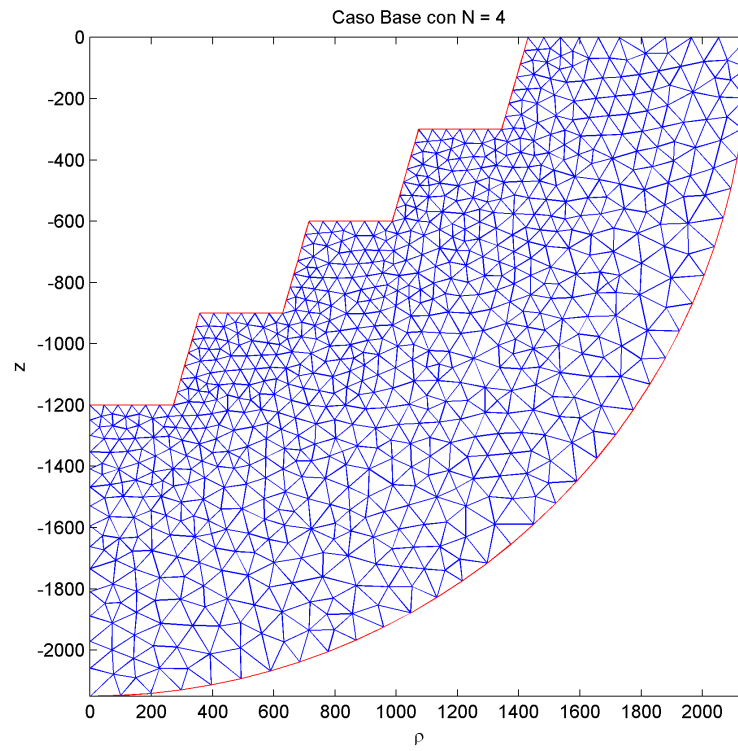


Figura 8-6: Caso base, $n = 4$ peldaño

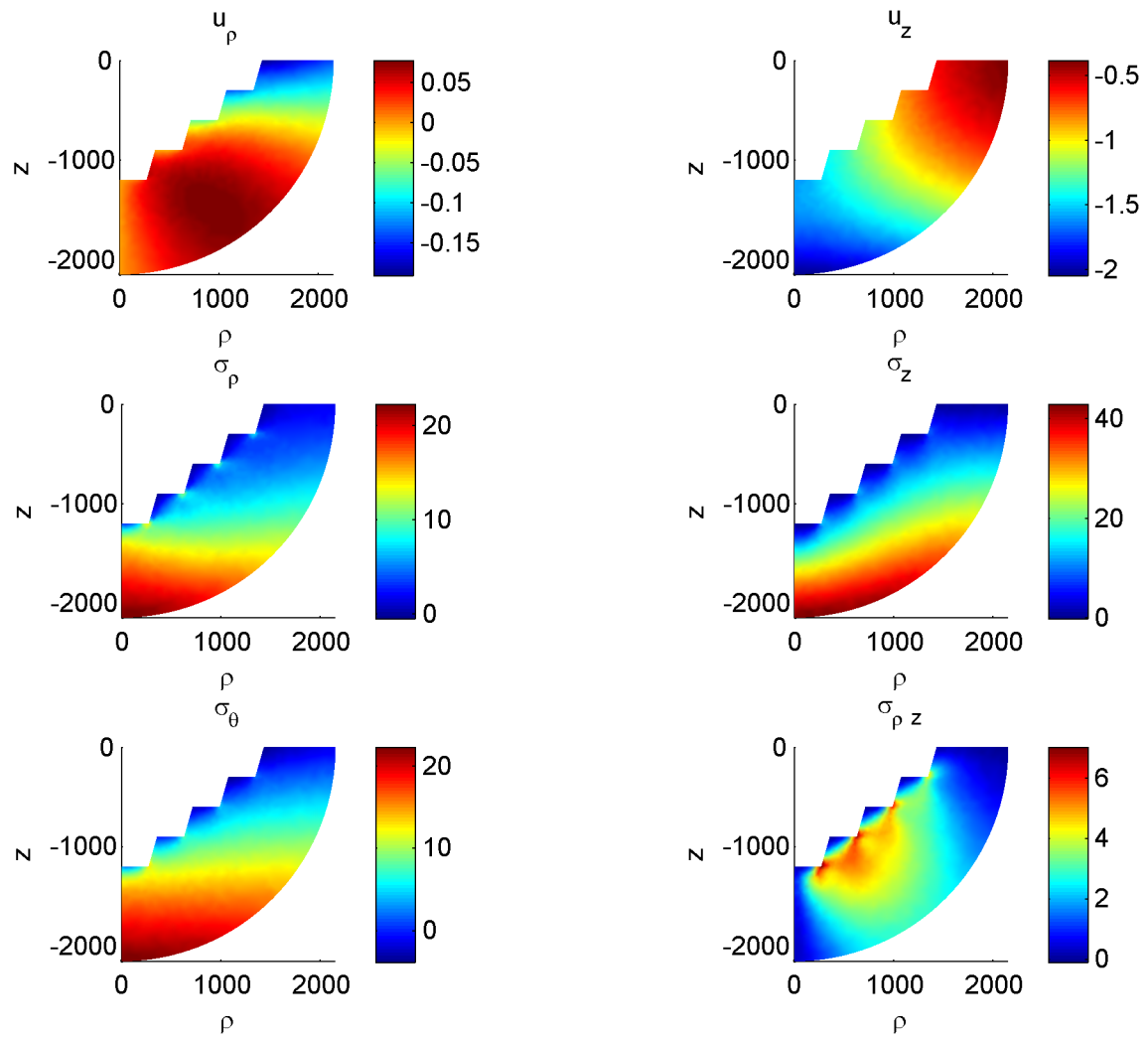


Figura 8-7: Caso base, $n = 4$ peldaño

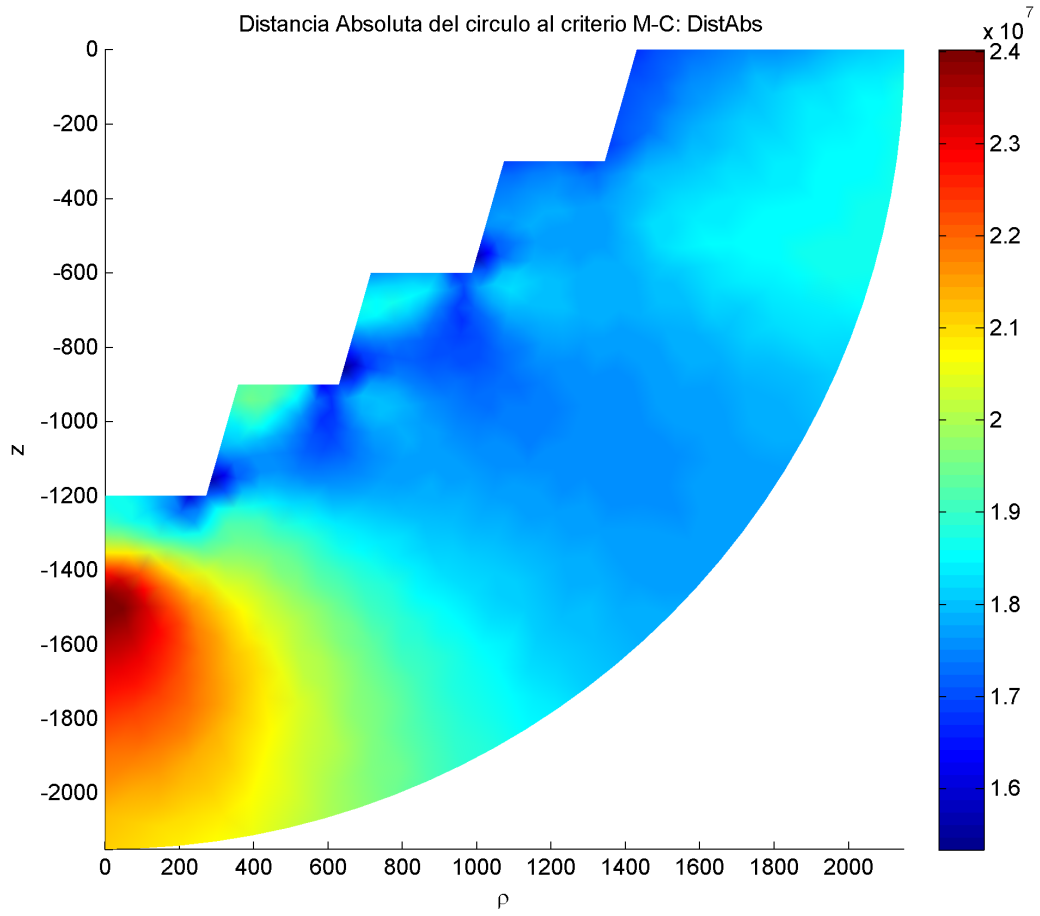


Figura 8-8: Caso base, $n = 4$ peldaño

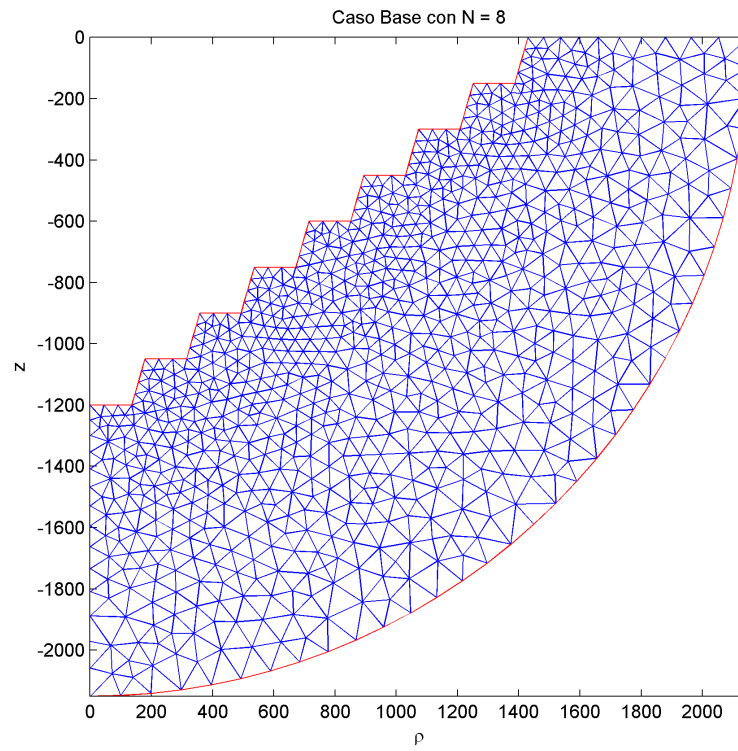
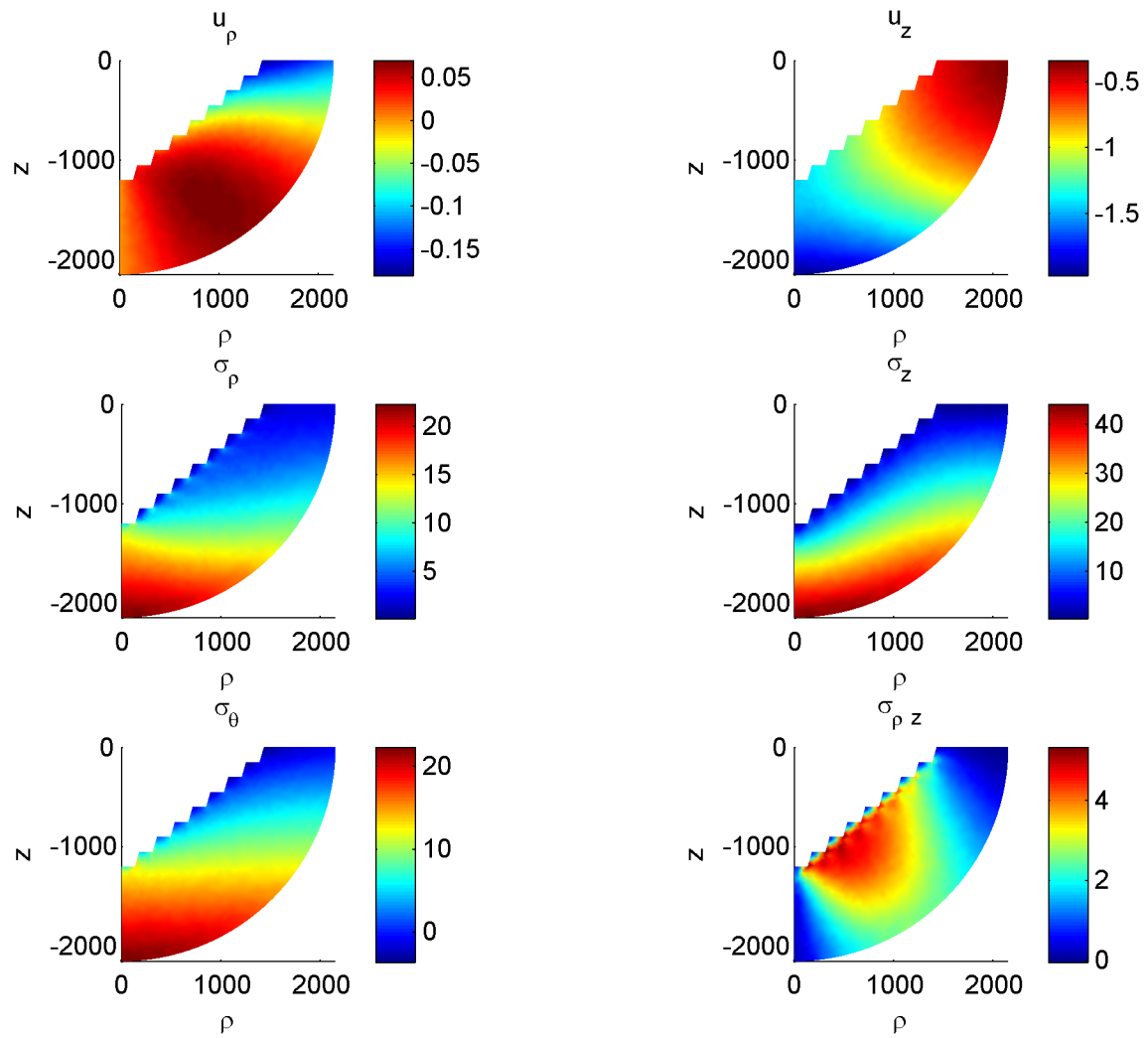


Figura 8-9: Caso base, $n = 8$ peldaño

Figura 8-10: Caso base, $n = 8$ peldaño

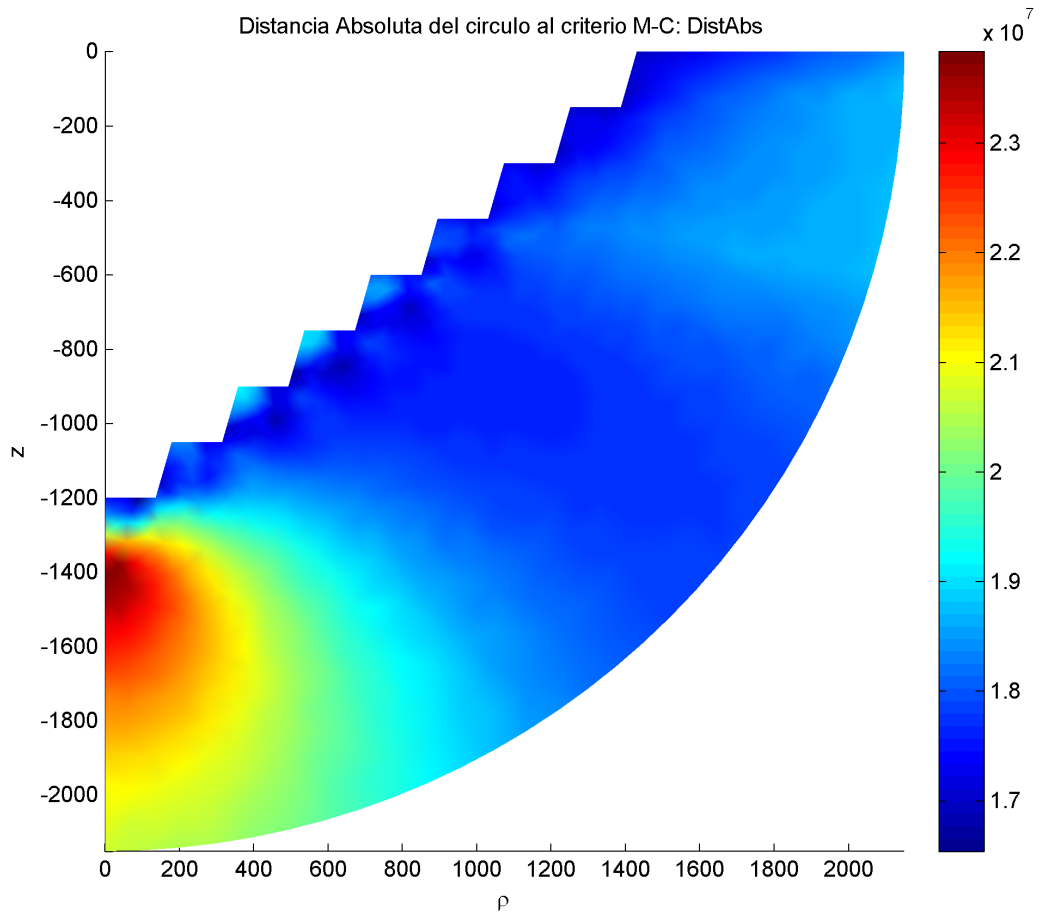


Figura 8-11: Caso base, $n = 8$ peldaño

8.2.2. Caso Real

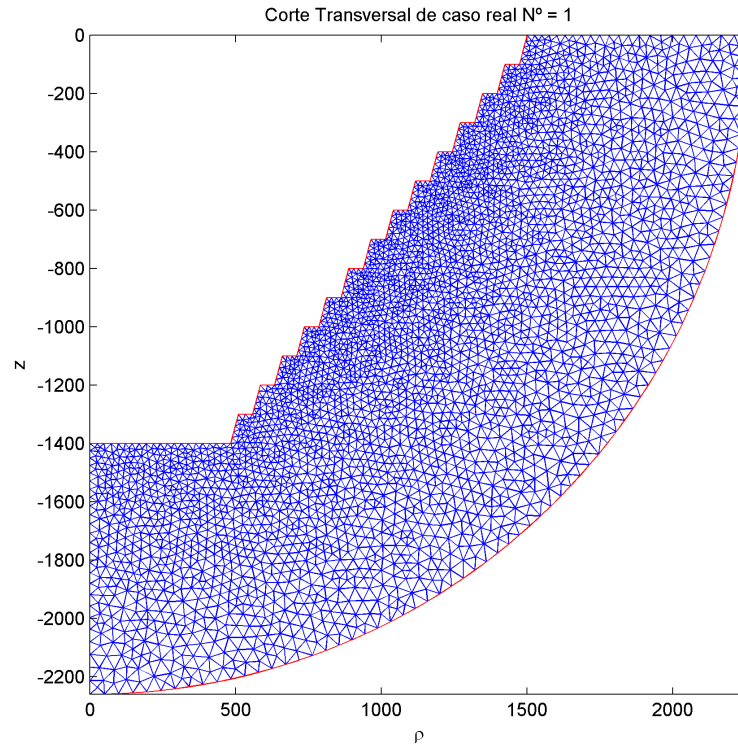


Figura 8-12: Corte transversal de caso real

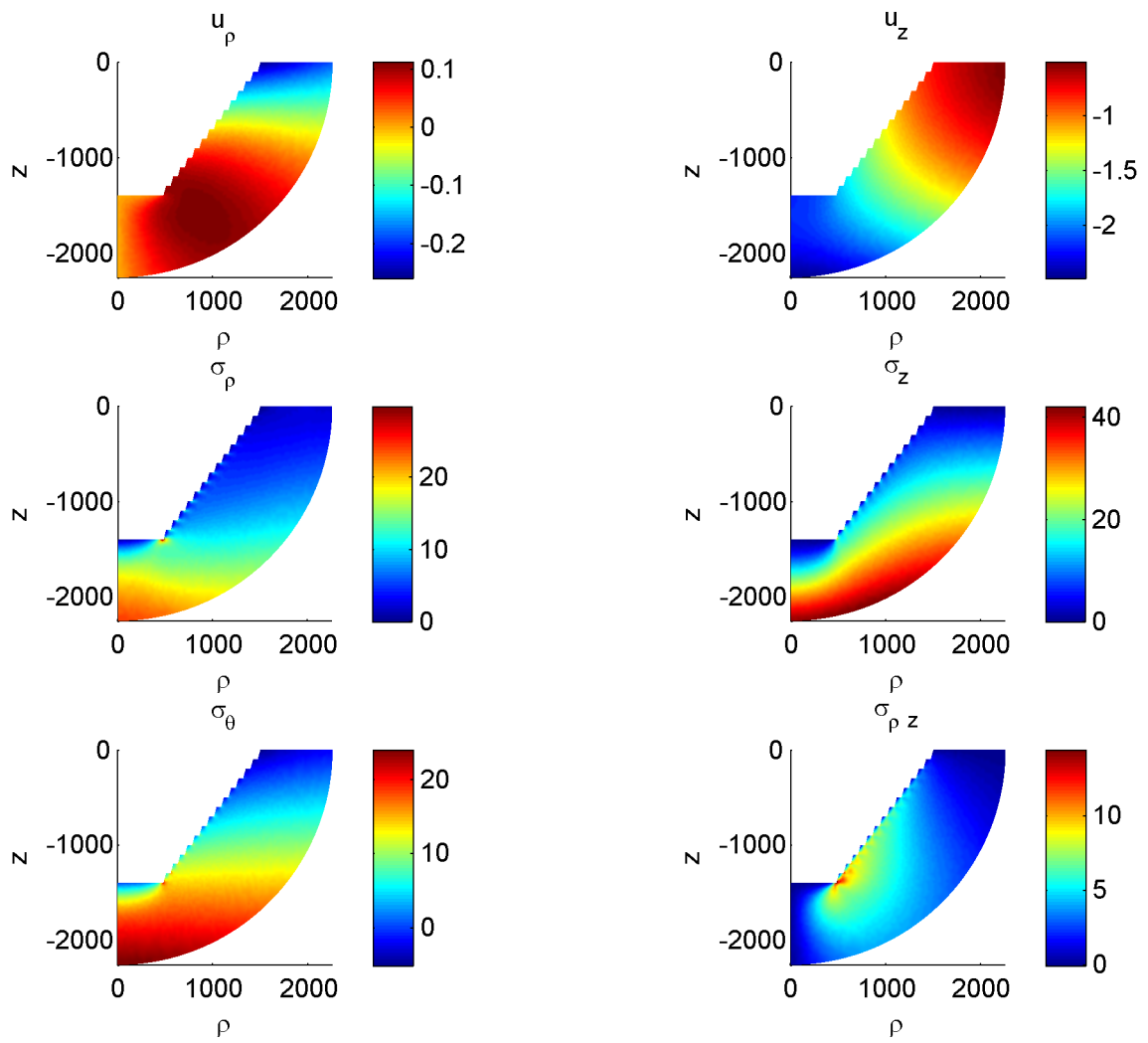


Figura 8-13: Corte transversal de caso real

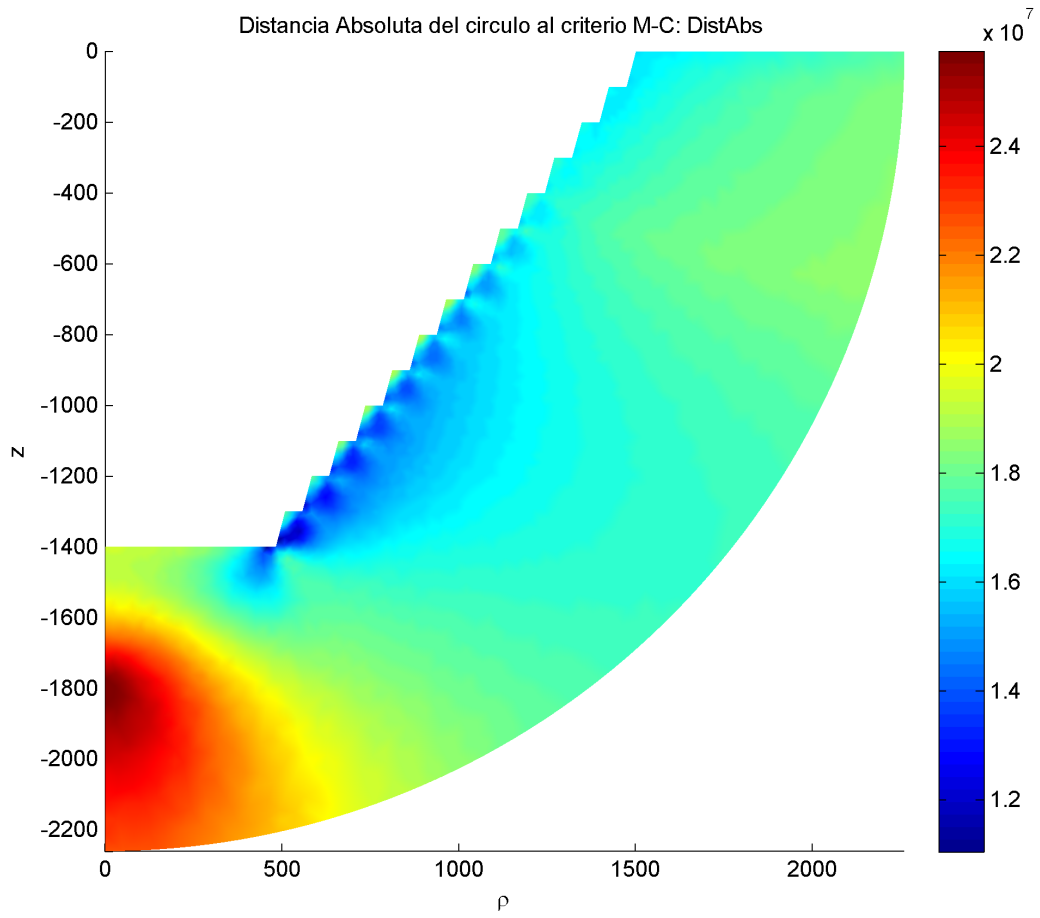


Figura 8-14: Corte transversal de caso real

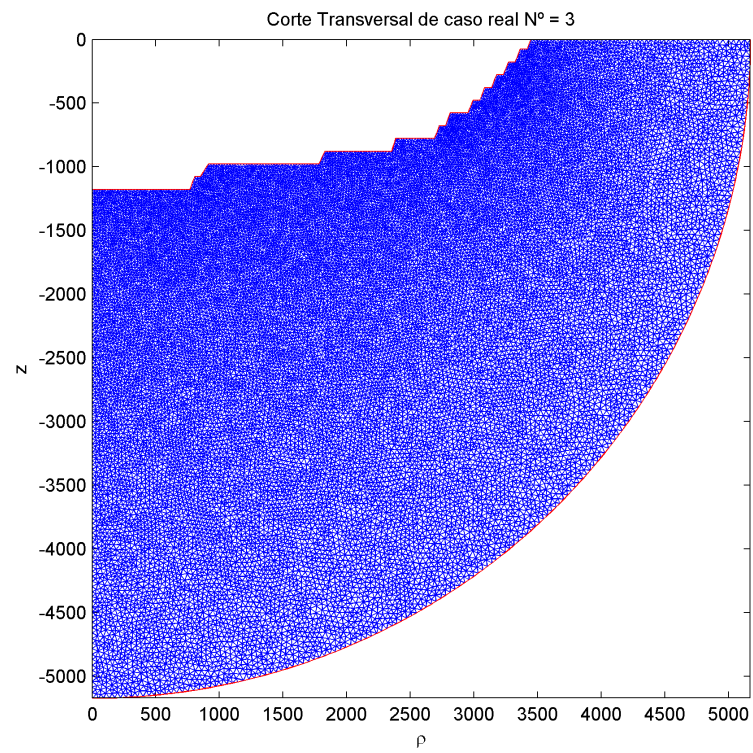


Figura 8-15: Corte transversal de caso real

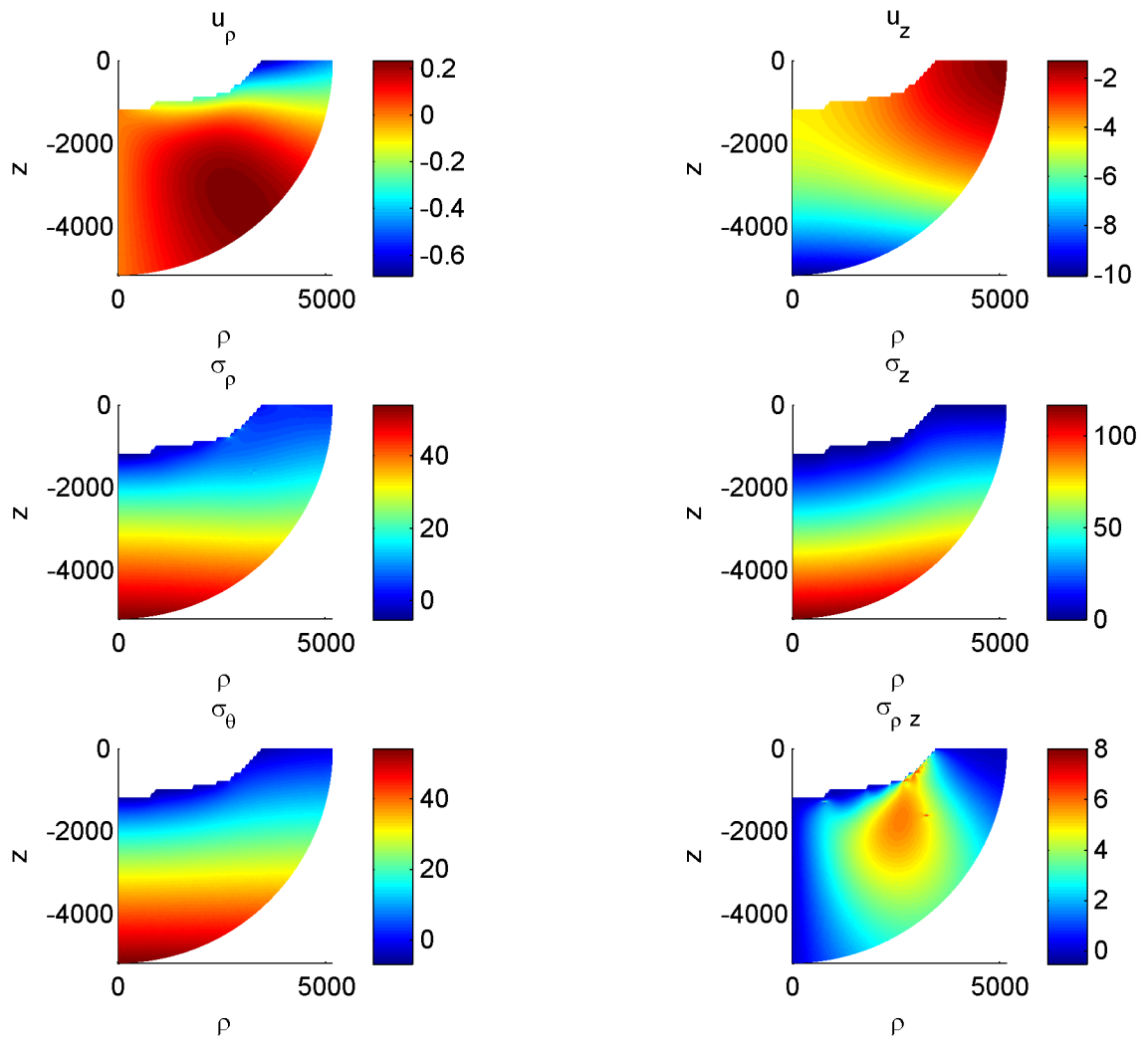


Figura 8-16: Corte transversal de caso real

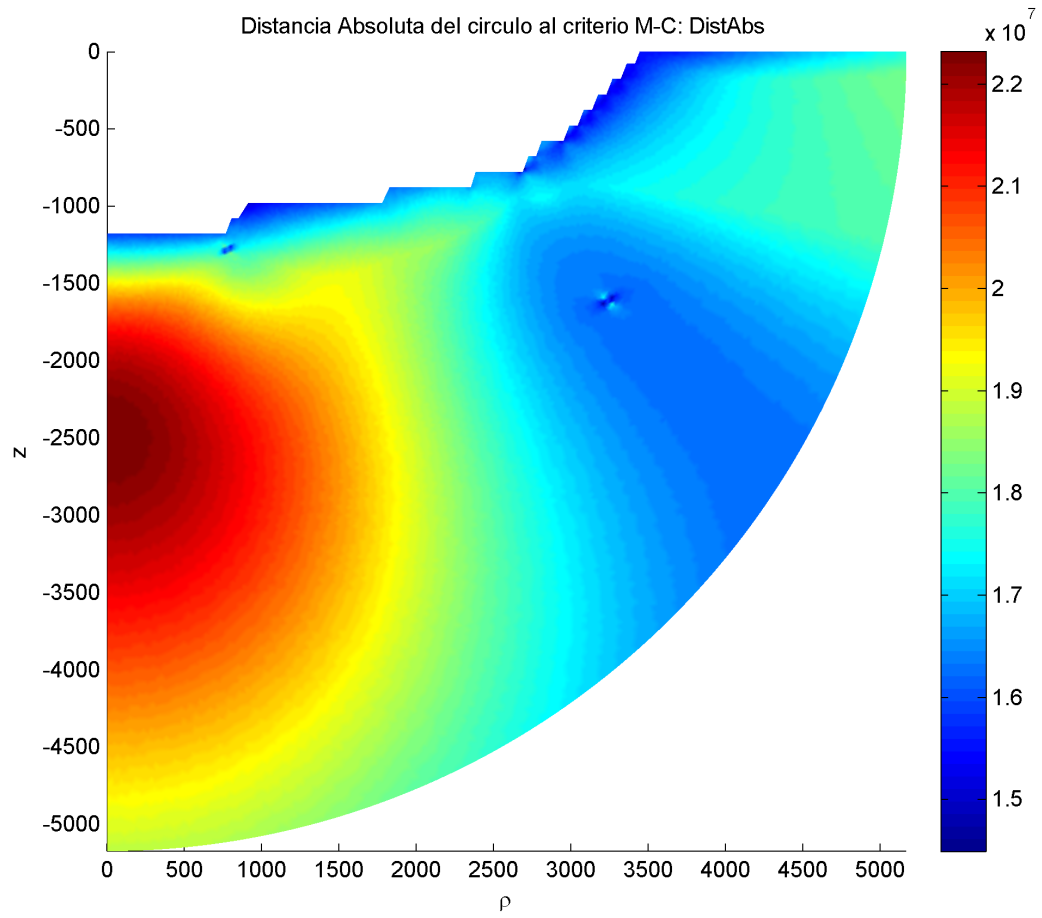


Figura 8-17: Corte transversal de caso real

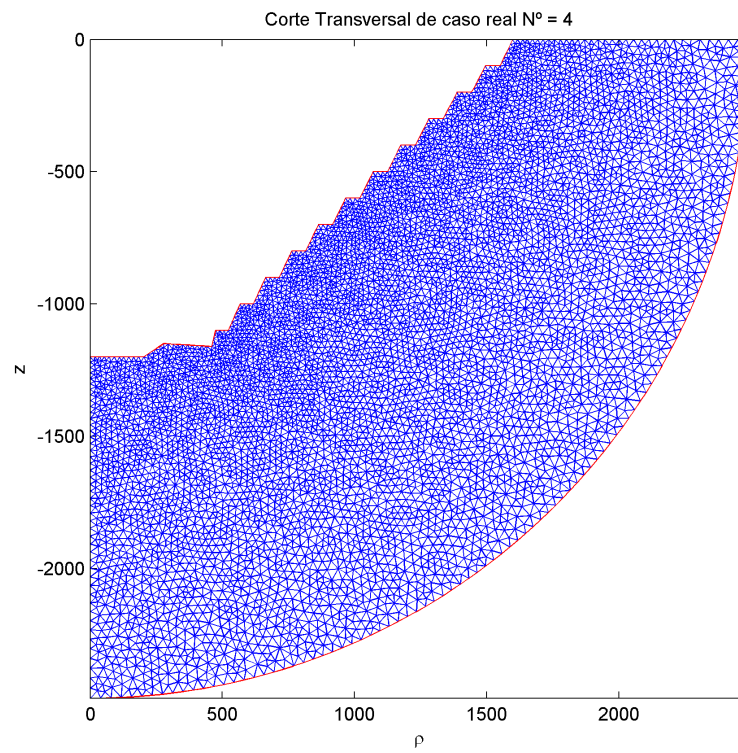


Figura 8-18: Corte transversal de caso real

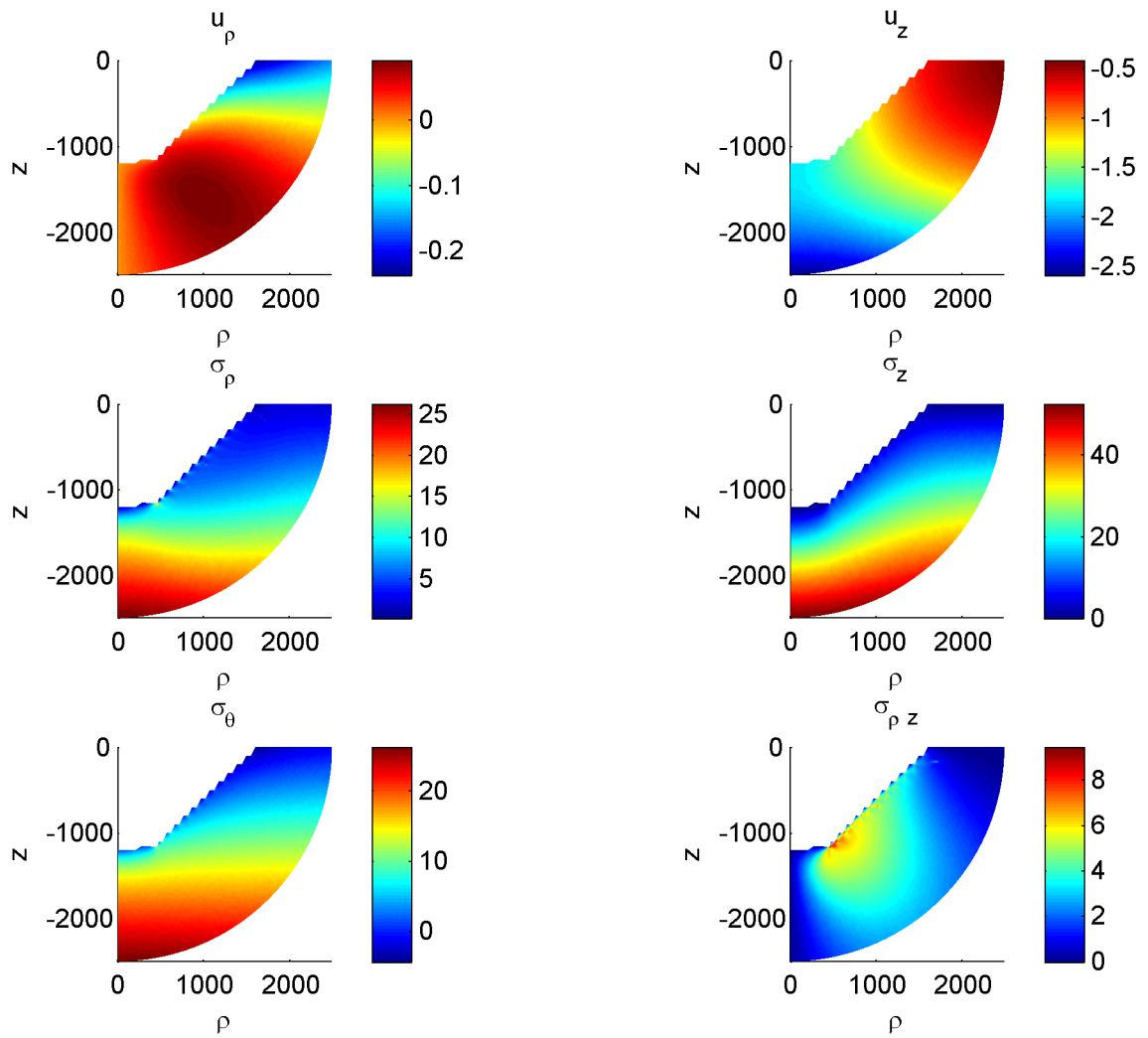


Figura 8-19: Corte transversal de caso real

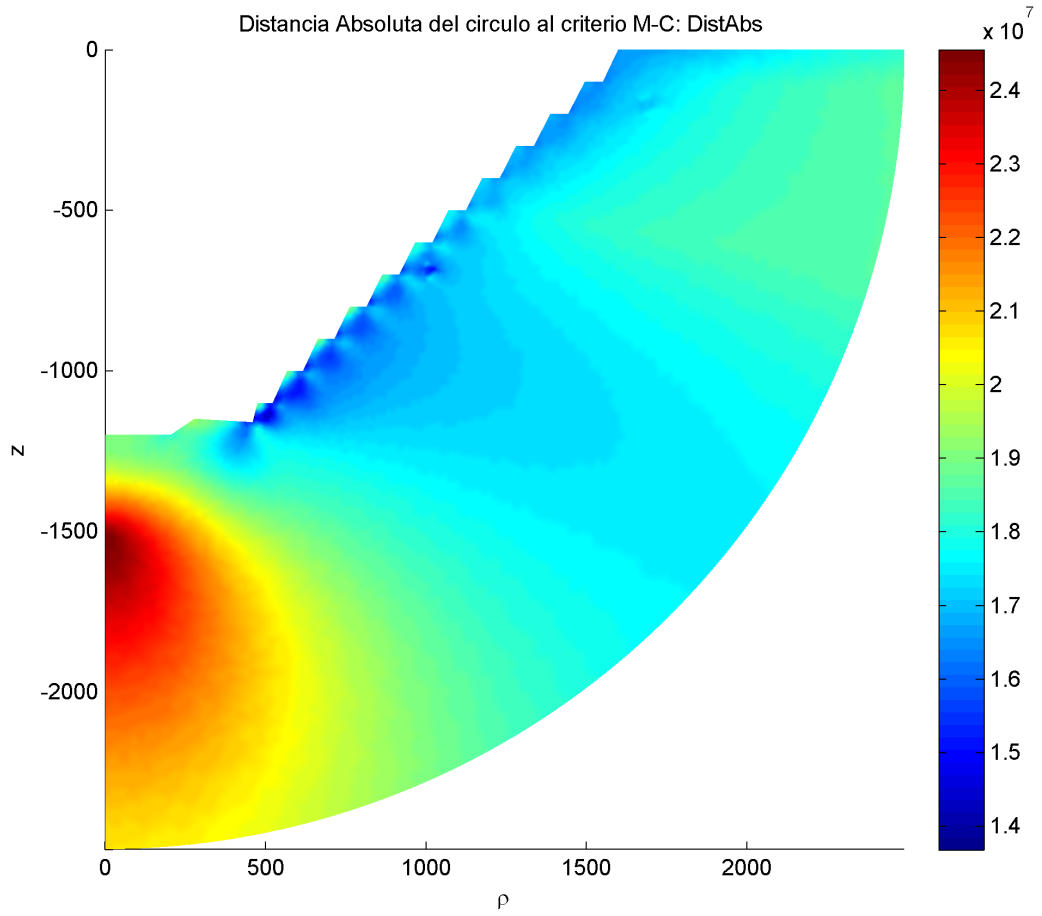


Figura 8-20: Corte transversal de caso real

8.2.3. Caso General α y β

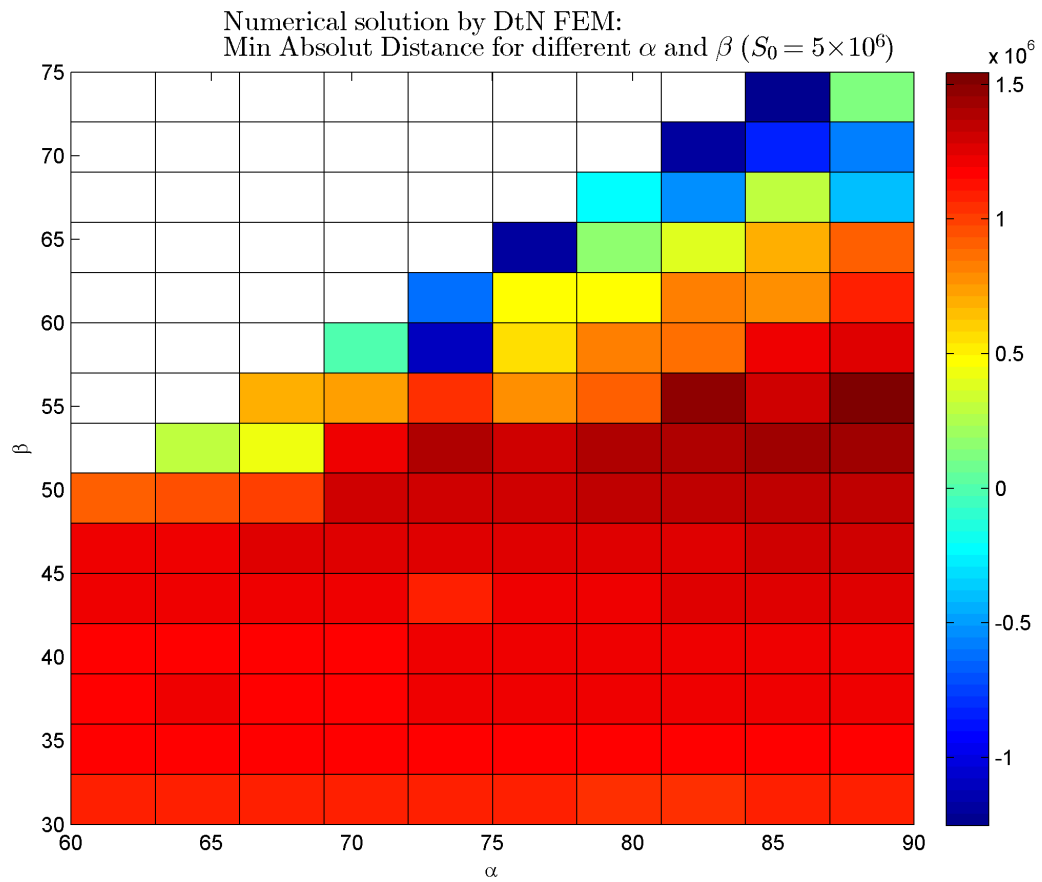


Figura 8-21: Análisis paramétrico con $S_0 = 5 \times 10^6$

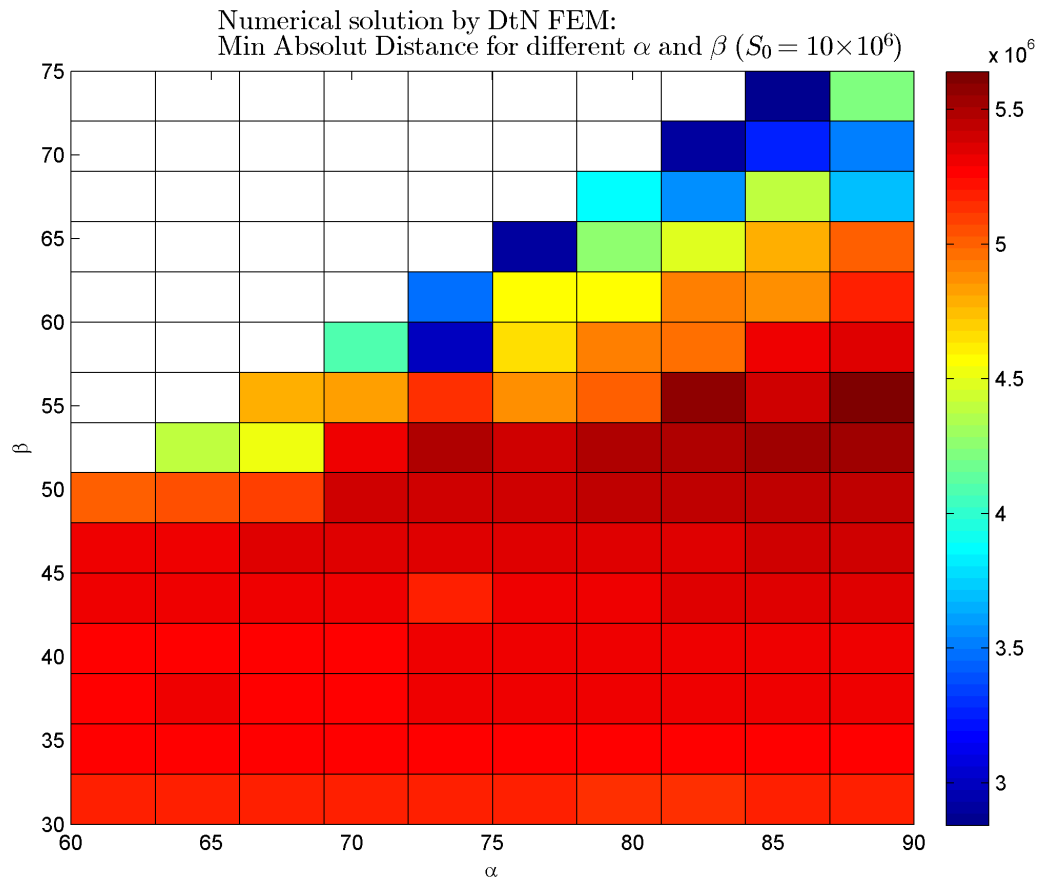


Figura 8-22: Análisis paramétrico con $S_0 = 1 \times 10^7$

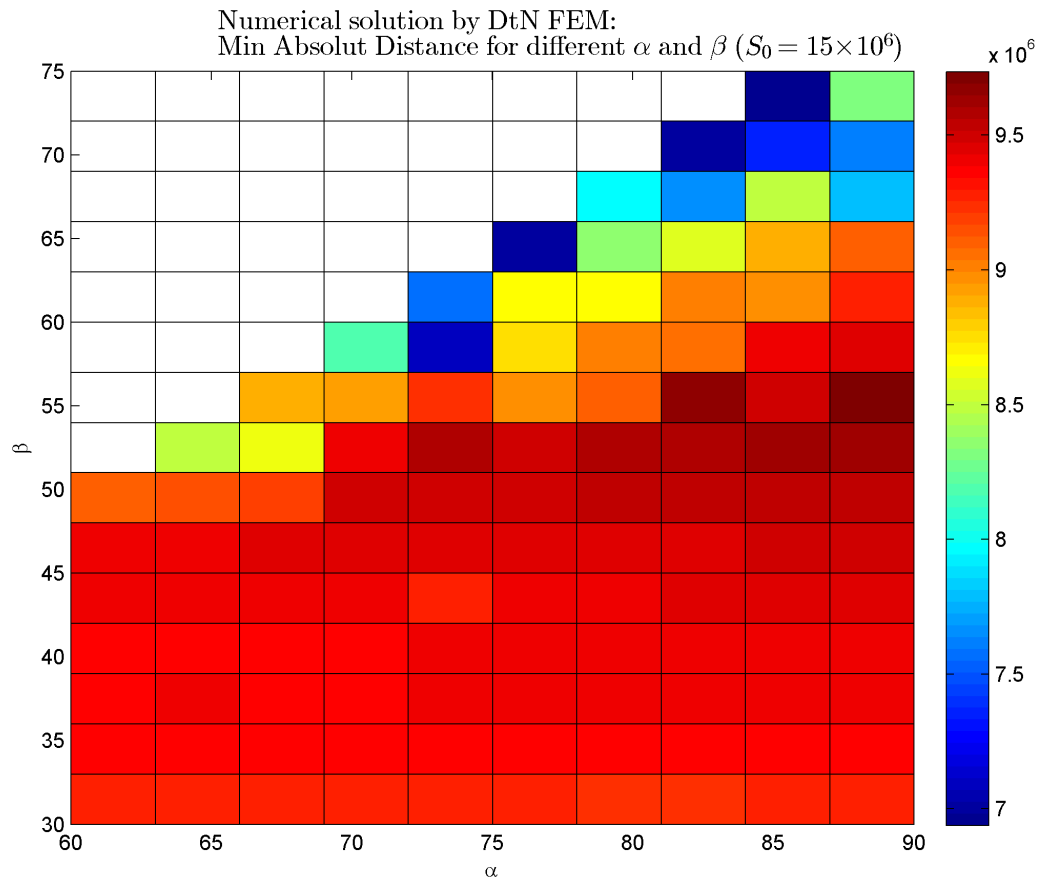


Figura 8-23: Análisis paramétrico con $S_0 = 1,5 \times 10^7$

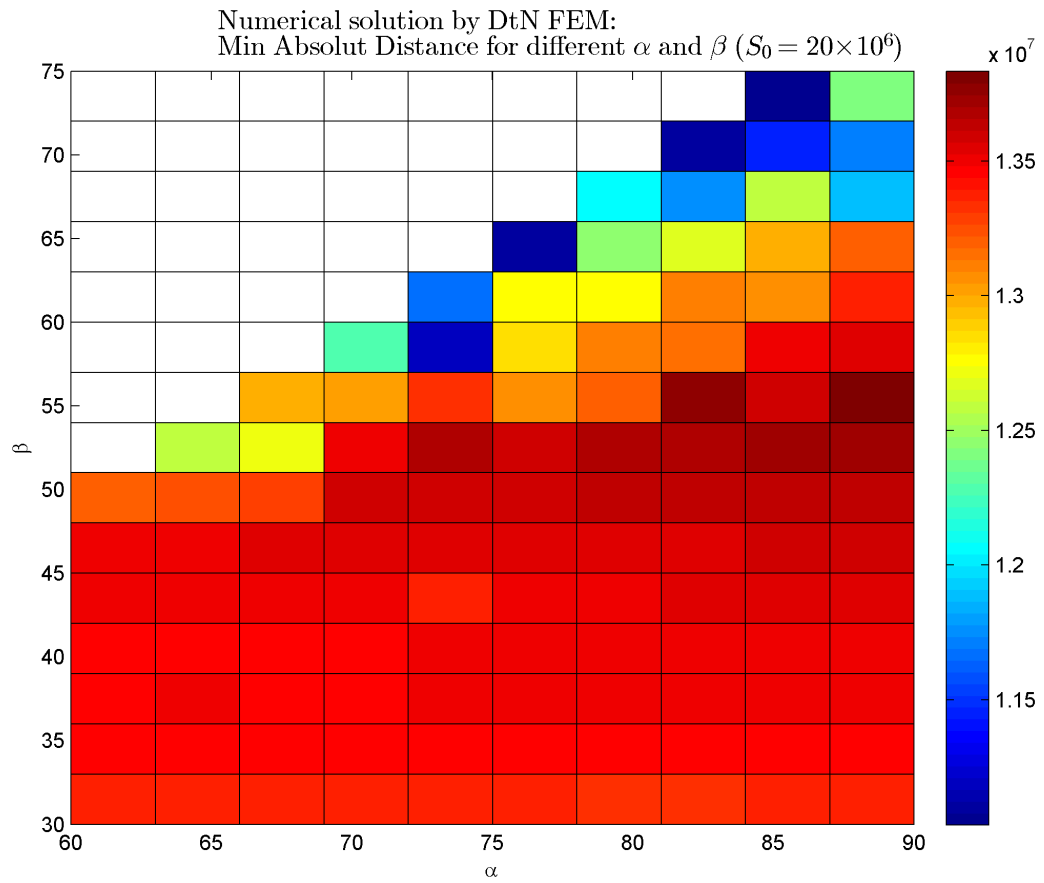


Figura 8-24: Análisis paramétrico con $S_0 = 2 \times 10^7$

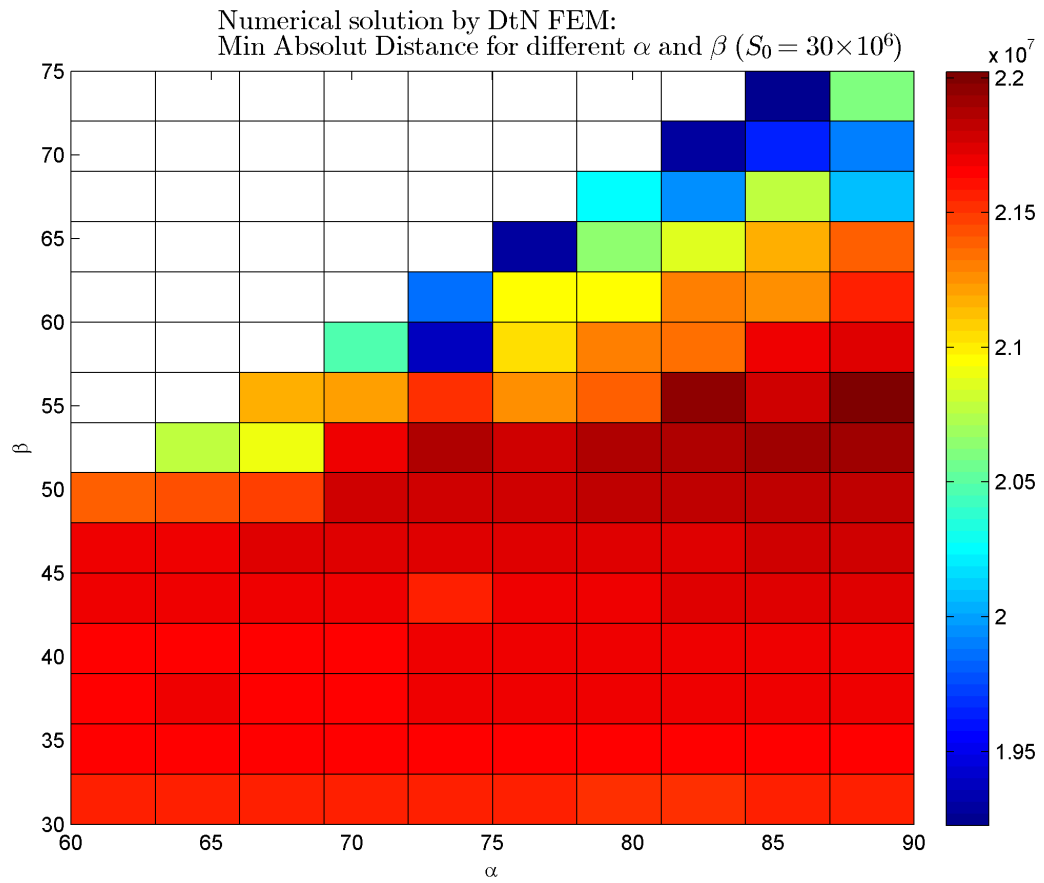


Figura 8-25: Análisis paramétrico con $S_0 = 2,5 \times 10^7$

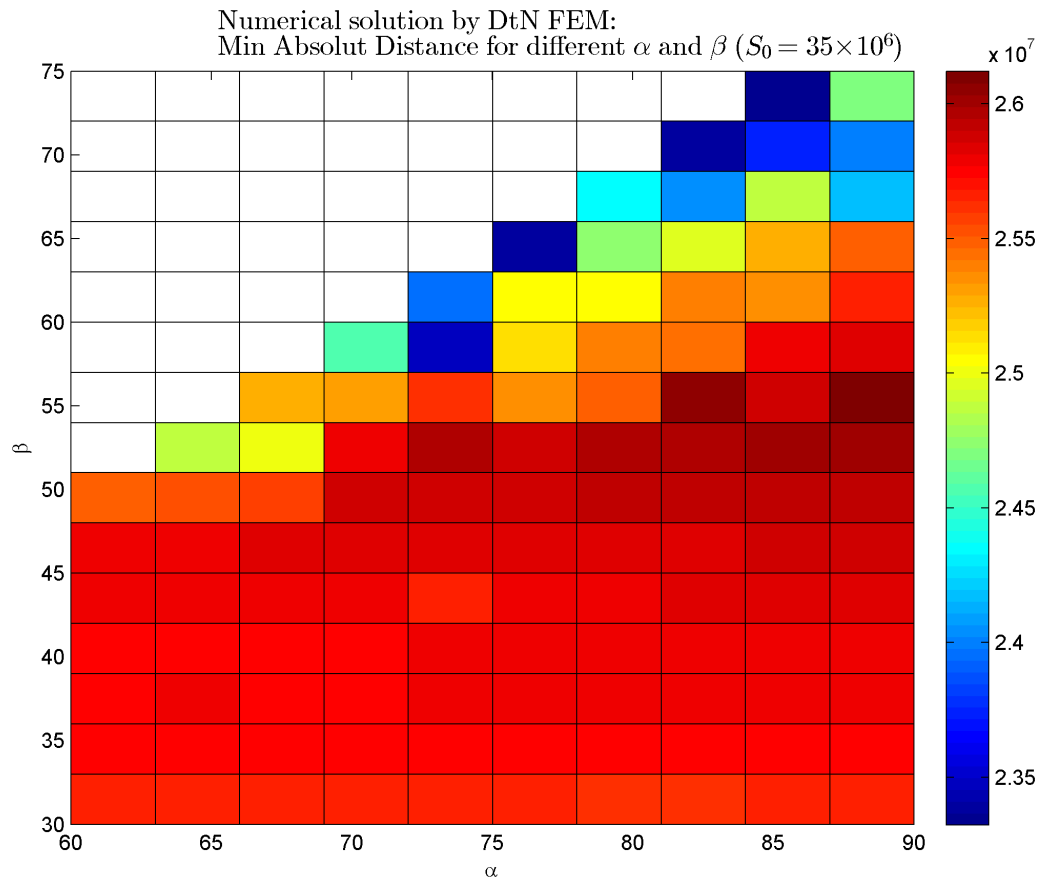


Figura 8-26: Análisis paramétrico con $S_0 = 3 \times 10^7$

Bibliografía

- [1] ALFORD, RM ; KELLY, KR ; BOORE, D M.: Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. En: *Geophysics* 39 (1974), Nr. 6, p. 834–842
- [2] ALTERMAN, Z ; KARAL, FC: Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods. En: *Bulletin of the Seismological Society of America* 58 (1968), Nr. 1, p. 367–398
- [3] AMENZADE, Yu. A.: *Theory of Elasticity*. Moscow : Mir Publishers, 1979
- [4] BJÖRCK, Å.: *Numerical Methods for Least Square Problems*. Philadelphia : SIAM, 1996
- [5] BOCCARDO, V. ; GODOY, E. ; DURÁN, M.: An efficient semi-analytical method to compute displacements and stresses in an elastic half-space with a hemispherical pit. En: *Adv. Appl. Math. Mech.* 7 (2015), Nr. 3, p. 295–322
- [6] BOORE, David M.: *Finite difference solutions to the equations of elastic wave-propagation, with application to Love waves over dipping interfaces.*, Massachusetts Institute of Technology, Tesis de Grado, 1970
- [7] ENGQUIST, Björn ; MAJDA, Andrew: Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 74 (1977), Nr. 5, p. 1765–1766
- [8] EUBANKS, R. A.: Stress concentration due to a hemispherical pit at a free surface. En: *J. Appl. Mech.* 21 (1954), p. 57–62
- [9] GIVOLI, D.: *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*. Amsterdam : Elsevier, 1992
- [10] GIVOLI, D.: Recent advances in the DtN FE method. En: *Arch. Comput. Method E.* 6 (1999), Nr. 2, p. 71–116
- [11] GIVOLI, D. ; KELLER, J. B.: A finite element method for large domains. En: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 76 (1989), p. 41—66
- [12] GIVOLI, D. ; VIGDERGAUZ, S.: Artificial boundary conditions for 2D problems in geophysics. En: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 110 (1993), p. 87—101
- [13] GIVOLI, Dan: Exact Representations on Artificial Interfaces and Applications in Mechanics. En: *Applied Mechanics Reviews* 52 (1999), Nr. c, p. 333. – ISSN 00036900

-
- [14] GODOY, Eduardo ; BOCCARDO, Valeria ; DURÁN, Mario: A Dirichlet-to-Neumann finite element method for axisymmetric elastostatics in a semi-infinite domain. En: *Journal of Computational Physics* Vol. 328, 2017, p. 1 – 26
- [15] GOLUB, G. H. ; LOAN, C. F. V.: *Matrix Computations*. Baltimore : Johns Hopkins University Press, 1996
- [16] HAN, H. ; WU, X. N.: *Artificial Boundary Method*. Beijing-Berlin-Heidelberg : Tsinghua University Press and Springer-Verlag, 2013
- [17] HAN, H. ; WU, X. N.: A survey on artificial boundary method. En: *Sci. China Math.* 56 (2013), p. 2439–2488
- [18] HEYMAN, Jacques: *Coulomb's memoir on statics: an essay in the history of civil engineering*. CUP Archive, 1972
- [19] HOEK, Evert ; CARRANZA-TORRES, Carlos ; CORKUM, Brent: Hoek-Brown failure criterion-2002 edition. En: *Proceedings of NARMS-Tac* 1 (2002), p. 267–273
- [20] KELLY, KR ; WARD, RW ; TREITEL, Sven ; ALFORD, RM: Synthetic seismograms: A finite-difference approach. En: *Geophysics* 41 (1976), Nr. 1, p. 2–27
- [21] LABUZ, Joseph F. ; ZANG, Arno: Mohr–Coulomb failure criterion. En: *The ISRM Suggested Methods for Rock Characterization, Testing and Monitoring: 2007-2014*. Springer, 2012, p. 227–231
- [22] LEE, WT: Tridiagonal matrices: Thomas algorithm. En: *MS6021, Scientific Computation, University of Limerick* (2011)
- [23] OTTAVIANI, Mario: Elastic-wave propagation in two evenly-welded quarter-spaces. En: *Bulletin of the seismological society of America* 61 (1971), Nr. 5, p. 1119–1152
- [24] REYNOLDS, Albert C.: Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems. En: *Geophysics* 43 (1978), Nr. 6, p. 1099–1110
- [25] SADD, M. H.: *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Boston : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005
- [26] SHUBIN, Mikhail A.: *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Springer, 1987
- [27] SZABO, Barna A. ; BABUĀŠKA, Ivo: *Finite element analysis*. John Wiley & Sons, 1991
- [28] ZÚÑIGA, Cristobal: *Productividad en la minería chilena y análisis de sus principales factores explicativos a nivel de firma*, Universidad de Chile, Tesis de Grado, 2016