

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
VALPARAÍSO - CHILE



ESTUDIO NUMÉRICO DE LOS EFECTOS DE
MASA VIRTUAL Y FUERZA DE BASSET EN EL
ARRASTRE SOBRE PARTÍCULAS EN UN FLUIDO
EN REPOSO

Paloma Cornejo Jeria

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA
CIVIL MECÁNICA

Profesor guía: Carlos Rosales Huerta
Profesor correferente: Harvey Zambrano Rodriguez

Marzo 2023

Resumen:

El presente estudio analiza los efectos de la masa virtual y fuerza de Basset en el arrastre sobre partículas en un fluido en reposo. Para esto se presenta una perspectiva general de los conceptos a analizar, en concreto se estudia el arrastre de Stokes, la masa virtual y la fuerza de Basset. Para cada uno de los conceptos a estudiar se considera una base teórica, restricciones físicas y numéricas, así como estudios y aplicaciones previas.

Se presenta también una recopilación de distintos estudios realizados con relación a los conceptos de masa virtual y fuerza de Basset, se analizan previos métodos numéricos aplicados a la resolución de las ecuaciones pertinentes y previas conclusiones relacionadas con los efectos de las variables en cuestión.

El análisis de los efectos a estudiar se realiza a través de un estudio numérico de la progresión de la velocidad de una partícula en el tiempo para una serie de situaciones concretas con relevancia en la industria. También se realiza un estudio del tiempo de procesamiento que toma el cálculo para cada caso con el objetivo de cuantificar el costo de cómputo de cada variable.

Se realiza un análisis dimensional del arrastre sobre la partícula con el objetivo de generalizar el efecto de los conceptos estudiados, para esto se hace uso de herramientas de análisis dimensional y de números adimensionales de uso común en la mecánica de fluidos.

Finalmente, se concluye que las variables más importantes a considerar para los efectos estudiados son la relación de densidad partícula-fluido y el número de Reynolds en el caso del análisis dimensional. Con la información obtenida se pueden identificar las situaciones en las que se hace necesario el cálculo de las variables analizadas.

Abstract:

This study analyses the effects of added mass and Basset force on drag over particles on a fluid at rest. To do this it presents a general perspective of the analysed concepts, in specific it studies Stokes's drag, added mass and Basset force. For each of the studied concepts it considers a theoretical basis, also physical and numerical constraints as well as previous studies and applications.

It also presents a compilation of different studies carried out on added mass and Basset force, it analyses previous numerical methods applied on solving relevant equations along with previous conclusions about the effects of the variables in question.

The analysis of the studied effects is done through a numerical analysis of the velocity of a particle over time for a series of specific industry relevant situations. A study will also be carried out on the processing time that the calculation takes for each case in order to quantify the computation cost of each variable. A dimensional analysis is done on the drag over the particle to generalize the effects of the studied concepts. To achieve this, dimensional analysis methods were used together with dimensionless numbers often used in fluid mechanics.

At last, it's concluded that the most important variables to consider on the studied effects are the particle-fluid density ratio and the Reynolds number for the dimensional analysis. With the acquired information, it's possible to identify in which situations it's necessary to calculate the analysed variables.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Introducción	5
1.2. Motivación	7
2. Antecedentes teóricos	9
2.1. Movimiento de una partícula en un fluido	9
2.2. Arrastre de Stokes	13
2.3. Masa virtual o Masa añadida	14
2.4. Fuerza de Basset	20
2.5. Estudios anteriores	24
2.5.1. Métodos anteriores	24
2.5.2. Resultados de estudios previos	25
3. Formulación del análisis	29
4. Formulación numérica	32
5. Implementación computacional	35
5.1. Análisis del paso de tiempo a utilizar	35
6. Simulación de casos	37
6.1. Caso 1	38

6.2. Caso 2	41
6.3. Caso 3	44
6.4. Caso 4	47
6.5. Caso 5	49
6.6. Caso 6	51
6.7. Conclusiones simulaciones dimensionales	54
6.8. Resultados en función del número de Reynolds	55
6.8.1. Conclusiones número de Reynolds	57
6.9. Calculo tiempo utilizado	58
7. Análisis dimensional	59
7.1. Teorema de Pi de Vaschy-Buckingham	59
7.2. Phi:0.5	64
7.3. Phi:0.9	65
7.4. Phi: 2.0	66
7.5. Conclusiones análisis adimensional	67
8. Conclusiones y comentarios finales	68
Referencias	69
A. Anexo I: Código velocidad de la partícula considerando la fuerza de Basset	72
B. Anexo II: Código velocidad adimensional de la partícula considerando la fuerza de Basset	75

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

En el presente documento se establecerá una base teórica para el análisis numérico de los efectos de la masa virtual y fuerza de Basset en el arrastre sobre partículas en un fluido en reposo. Para esto se considerarán los principales conceptos a aplicar tales como arrastre de Stokes, Masa virtual y Fuerza de Basset, para cada uno se dará una explicación teórica, las condiciones en las que pueden ser aplicados y las consideraciones que se deberán tener en una aplicación numérica, así como también las dificultades que se puedan presentar al trabajar con estos conceptos. Adicionalmente, se revisarán posibles aplicaciones que se beneficiarían de un análisis numérico de los conceptos revisados.

Un factor importante a considerar será el cómo reaccionan estos conceptos a variaciones en las interacciones a analizar, tales como cambios en la velocidad de la partícula o el fluido, efectos de la aceleración en ambos y de forma particular el

cómo varía el número de Reynolds a lo largo del tiempo analizado.

Adicionalmente, se realizará un análisis dimensional al modelo que describe el movimiento de la partícula considerando la masa virtual y la fuerza de Basset.

Se espera poder describir el movimiento a analizar de forma más generalizada y visualizar con números adimensionales cuáles son los factores que afectan de manera más significativa la progresión de velocidad de la partícula.

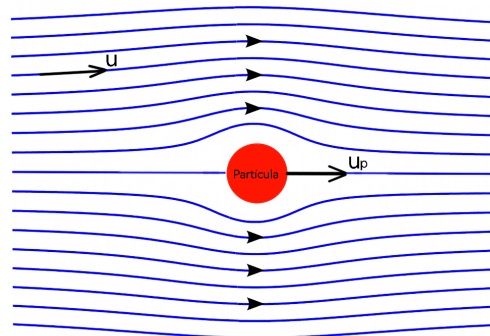
1.2. Motivación

El principal objetivo del presente trabajo de título es cuantificar la importancia de considerar los efectos de la masa virtual y fuerza de Basset en el movimiento de una partícula en un fluido, se intentará demostrar cómo para condiciones puntuales estos efectos no deben ser despreciados e independiente de su costo computacional en tiempo y memoria este cálculo puede ser ampliamente beneficioso para refinar simulaciones de procesos donde movimiento de partículas pequeñas está involucrado.

Se pueden destacar mecanismos utilizados actualmente en la industria que dependen directamente del tiempo con que una partícula alcanza su velocidad final, entre estos se pueden destacar muchos procesos que forman parte de la industria minera tales como los procesos de flotación, floculación, trata de escoria líquida, tratamiento de aguas residuales, tratamiento de efluentes, tanques de espesamiento, entre otras.



(a) Espesamiento: Proceso de concentración de mineral basado en la decantación



(b) Partícula acelerada en fluido

Figura 1.1: Ilustración del problema a analizar

Adicionalmente, se puede ver la importancia de considerar estos efectos en cualquier proceso que involucre tratamiento de aguas, actividad de suma importancia para comunidades residenciales, industrias, sistemas de riego, entre otros. A estos se puede añadir también la purificación de líquidos involucrada en la industria alimentaria, considerando así procesos de filtración en la producción de bebidas carbonatadas, procesos de filtración involucrados en la producción de agua potable, en varios procesos involucrados en la producción de bebidas alcohólicas y en muchas otras aplicaciones en las que se trata con sólidos suspendidos en líquidos. El proceso de desalinización de aguas puede también verse beneficiado al considerar los efectos de la masa añadida y fuerza de Basset, en especial cuando el proceso de desalinización se realiza a través de congelación o formación de hidratos.

En resumen, se espera lograr estudiar y entender más en profundidad el cómo funciona el movimiento de una partícula en un fluido, ya que como se ha revisado, esta interacción tiene gran importancia en incontables actividades presentes en la vida de cada persona. Se espera que al saber más del tema se pueda resaltar su importancia y de esa forma mejorar procesos tan importantes para la vida en la tierra como lo son el tratamiento de aguas y el asegurar la disponibilidad de agua para las comunidades.

Capítulo 2

Antecedentes teóricos

2.1. Movimiento de una partícula en un fluido

Para obtener una imagen completa de la trayectoria de una partícula en un flujo laminar o turbulento se necesita una ecuación que satisfaga la ecuación de Navier-Stokes y que considere también todas las fuerzas relevantes. En sus primeros análisis, Stokes (1850) considero una esfera en movimiento con velocidad uniforme en un fluido viscoso y estacionario lejos de la partícula, luego Bousinesq (1885) y Basset (1888) consideraron un flujo de fuerza de inercia lineal rodeando la esfera o partícula añadiendo un ‘termino histórico’ que considerara las previas interacciones de la partícula con el flujo circundante [1].

Luego de una serie de avances y adaptaciones al estudio del movimiento de la partícula en cuestión, se obtiene una relación que considera fuerzas de arrastre y esfuerzo cortante viscoso. La ecuación desarrollada por Maxey-Riley (1983) describe las fuerzas hidrodinámicas que ejerce un flujo no uniforme y no estacionario

sobre una partícula esférica pequeña, rígida y aislada [2].

Para una partícula en reposo en un flujo estacionario, que es lo suficientemente pequeña para tener un efecto insignificante en el movimiento del fluido lejos de la partícula, la ecuación de Maxey-Riley da cuenta de la trayectoria, dispersión y velocidad de sedimentación de la partícula [1]. Los análisis a realizar en el presente documento estarán confinados a circunstancias en las que las interacciones entre partículas vecinas sean despreciables [15].

Las condiciones de aplicación incluyen que la partícula cumpla $D \ll \eta$ siendo D el diámetro de la partícula y η la escala de Kolmogorov, se debe recordar que la escala de Kolmogorov representa el tamaño de los más pequeños vórtices en el rango disipativo de energía cinética de un flujo turbulento. Por lo tanto, incluso si el flujo es turbulento, la condición $D \ll \eta$ garantiza que la partícula se ve inmersa en un campo de velocidad "suave" y no percibe directamente las fluctuaciones de velocidad. Adicionalmente, se considera que el número de Reynolds para la partícula cumpla $Re \ll 1$ con $Re = D|u - u_p|/\nu \ll 1$, donde u es la velocidad del fluido, u_p es la velocidad de la partícula y ν es la viscosidad cinemática del fluido [2].

La ecuación de Maxey-Riley está dada por:

$$m_p \frac{du_p}{dt} = (m_p - m_f)g + m_f \left(\frac{Du}{Dt} \right) + 6\pi a \mu [u - u_p + \frac{1}{6} a^2 \nabla^2 u] + \frac{1}{2} m_f \left[\frac{Du}{Dt} - \frac{du_p}{dt} + \frac{1}{10} a^2 \frac{d}{dt} \nabla^2 u \right] + 6\rho_f a^2 \sqrt{\pi \nu} \int_{-\infty}^t K_B(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

Donde m_p corresponde a la masa de la partícula, m_f corresponde a la masa del fluido que ocuparía el volumen desplazado por la partícula, a corresponde al radio de la partícula y ρ_f corresponde a la densidad del fluido. El primer término corresponde a la fuerza del cuerpo en respuesta a la gravedad, luego está el término correspondiente a la presión, arrastre, masa virtual y fuerza de Basset respectivamente.

Adicionalmente, se puede ver que en la fuerza de Basset se presenta la variable K_B que corresponde al Kernel de la integral y también la función $g(t)$ donde:

$$K_B(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2.2)$$

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt}, \quad f(t) = u - u_p + \frac{1}{6}a^2\nabla^2 u \quad (2.3)$$

Esta integral representa el efecto acumulado por la historia de la aceleración relativa de la partícula desde que empezó el movimiento (el llamado "Termino histórico"). La Ecuación 2.1 presentada es válida para partículas pequeñas, en específico para partículas con un radio $a \ll \eta$, donde η corresponde a la escala de longitud de Kolmogorov. Con el objetivo de disminuir esta restricción se considera la corrección de Faxen. Esta corrección proporcional a $\nabla^2 u$ se agrega al arrastre de Stokes, a la masa virtual y a la fuerza de Basset y su objetivo es reproducir los efectos dominantes de las fluctuaciones de velocidad y aceleración en partículas flotantes, permitiendo así partículas de hasta cuatro veces la escala de Kolmogorov. En un campo de flujo rectilíneo, la fuerza de Faxen se reduce a cero [2].

Dado que se considerará el movimiento de partículas en un campo de flujo con velocidad uniforme, no se incluirán estos términos de Faxen. Al ser flujo laminar,

la escala de Kolmogorov pierde relevancia.

2.2. Arrastre de Stokes

Concepto desarrollado por el matemático George Gabriel Stokes en 1851 a través de la publicación denominada ‘On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums’. En específico, la ley de Stokes deriva la ecuación que describe la fuerza requerida para mover una esfera a través de un fluido estacionario y viscoso a cierta velocidad específica, también conocida como fuerza de arrastre [3].

$$F_d = 3\pi\mu_f Du \quad (2.4)$$

Donde μ_f representa la viscosidad del fluido, D el diámetro de la partícula y u la velocidad del flujo.

La aplicación de esta ecuación estaría sujeta a ciertas condiciones, de acuerdo a la publicación original se busca que ‘El cuadrado de la velocidad pueda despreciarse’ [4], lo que implicaría un flujo viscoso lento o flujo de Stokes y un número de Reynolds bajo ($Re < 0.5$) [3].

En concreto, el número de Reynolds es uno de los factores significativos para el arrastre de Stokes, en general el coeficiente de arrastre dependerá de la forma de la partícula y su orientación con respecto al flujo, pero adicionalmente se consideran parámetros del flujo tales como el número de Reynolds, número de Mach, turbulencia, entre otros. Para números de Reynolds bajos, el coeficiente de arrastre varía de forma inversa a Reynolds, característica de un flujo de Stokes. Al aumentar el valor de Reynolds, el coeficiente de arrastre se acerca a un valor constante conocido como el rango inercial [7].

2.3. Masa virtual o Masa añadida

Concepto aplicado a una de las fuerzas que actúan en la superficie en contacto con un fluido cuando este es sometido a aceleración. En específico, la masa virtual o 'added mass' determina el trabajo necesario para cambiar la energía cinética asociada al movimiento del fluido, esto dado que cualquier movimiento del fluido, tal como el que ocurre cuando se mueve un cuerpo a través de este, implica cierta cantidad de energía cinética positiva asociada con el movimiento del fluido [5]. Por ejemplo, el conocimiento relativo a la masa virtual o añadida es esencial para predecir el rendimiento de vehículos submarinos, dirigibles y aviones ultraligeros, así como en general es importante para cualquier objeto que debe acelerar a través de un fluido de densidad comparable a la suya.

Con el objetivo de simplificar el análisis se asumirá un fluido incomprensible con densidad ρ_f , se asumirá una partícula esférica de radio a como la observada en la figura 2.1. Adicionalmente, se considerará que el movimiento del cuerpo es rectilíneo y constante a cierta velocidad u_p y en un fluido en reposo con volumen V . Así se puede asumir que la cantidad de energía cinética T permanece constante en el tiempo, adicionalmente se puede concluir que esta energía cinética T será proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo [5].

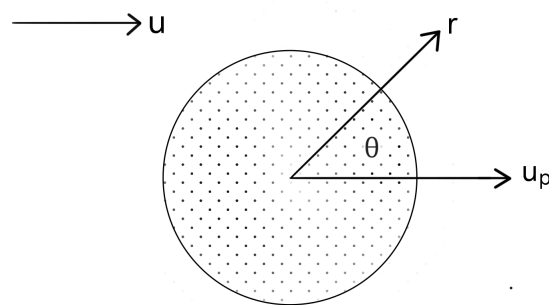


Figura 2.1: Sistema de coordenadas en partícula a analizar

La ecuación representativa de la masa añadida está dada por:

$$F_m = \frac{1}{2}m_f\left[-\frac{du_p}{dt}\right] \quad (2.5)$$

Para casos en los que la partícula comienza a acelerar la energía cinética incrementará, así se deberá realizar un trabajo adicional para aumentar la energía cinética del fluido. Este trabajo realizado por el cuerpo será la tasa de cambio de T en el tiempo dT/dt . Este trabajo por unidad de tiempo es experimentado por el cuerpo como un arrastre adicional que puede ser representado como:

$$F_m = -\frac{1}{u_p} \frac{dT}{dt} \quad (2.6)$$

Que se obtiene a partir de la relación dada por:

$$u_p F_m = \frac{dT}{dt} \quad \text{donde} \quad T = \frac{1}{2}\rho_f \int_V u^2 dV \quad (2.7)$$

Para ciertas condiciones la integral en T se trataría de un valor invariable, tal como flujo potencial y flujo de Stokes con bajo número de Reynolds, esto no se cumpliría para flujos más complejos con número de Reynolds intermedio y desprendimiento de vórtices. La integral se considera en todo el fluido, y tratándose de un fluido ideal, la velocidad se puede expresar como la derivada de una función potencial:

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (2.8)$$

Donde la función potencial correspondiente a una esfera moviéndose con velocidad relativa u_p a través de un fluido es:

$$\phi = -\frac{u_p a^3}{2r^2} \cos \theta \quad (2.9)$$

Donde r y θ están definidos en la figura 2.1. También se puede obtener el componente radial de la velocidad que será:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{u_p a^3}{r^3} \cos \theta \quad (2.10)$$

Se puede observar que la expresión anterior para la superficie de la esfera ($r=a$) se reduce a:

$$u_r = u_p \cos \theta \quad (2.11)$$

Considerando la función potencial descrita en la ecuación 2.8 y usando la ecuación de continuidad, la ecuación 2.7 puede ser reescrita como:

$$T = \frac{1}{2} \rho_f \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dV \quad (2.12)$$

Usando el teorema de la divergencia, el volumen en la integral puede ser expresado como una integral de superficie sobre la esfera, se obtiene una integral sobre la superficie de control de la forma:

$$T = \frac{1}{2} \rho_f \int_{sc} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i dS \quad (2.13)$$

Trabajando ahora en el área de superficie de control, donde n_i representa el vector normal unitario hacia afuera del fluido. Considerando el componente radial de velocidad u_r correspondiente a $\theta = 0$ y estableciendo a $\vec{e}$ como el vector unitario radial externo se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e} (-\vec{e}) = -u_p \cos \theta \quad (2.14)$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación 2.13, considerando la superficie de área en coordenadas polares como $a^2 \sin \theta \, 2\pi \, d\theta$ y la función potencial evaluada en el borde de la esfera, se obtiene la presente relación:

$$T = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^\pi \frac{u_p a}{2} \cos \theta \, u_p \cos \theta \, a^2 \sin \theta \, 2\pi \, d\theta = \frac{\pi \rho_f a^3 u_p^2}{3} \quad (2.15)$$

Así se puede obtener el valor del trabajo realizado por la esfera con la relación presentada en la ecuación 2.7 lo que permitirá también obtener el valor de la fuerza de masa añadida presentado en la misma ecuación.

$$u_p F_m = \frac{2\pi\rho_f a^3 u_p}{3} \frac{du_p}{dt} = u_p \frac{1}{2} m_f \frac{du_p}{dt} \quad (2.16)$$

Es decir, $F_m = \frac{1}{2} m_f \frac{du_p}{dt}$ de modo que la masa añadida de una esfera es un medio de la masa del fluido que se desplaza. El análisis anterior se puede generalizar para un movimiento tridimensional arbitrario. En general, la respuesta de un cuerpo a una fuerza suele estar compuesta por tres aceleraciones de traslación y tres aceleraciones angulares representadas por A_j . Aplicando a esto una matriz de masa virtual M_{ij} se obtiene una relación representativa de las fuerzas impuestas a la partícula en cuestión.

$$F_i = -M_{ij} A_j \quad (2.17)$$

Un caso particular que se puede considerar a pesar de no ser aplicado en este proyecto puntual es el caso de un fluido en movimiento, siendo este constante o acelerado. Así, para el caso de un fluido en movimiento constante en el tiempo, se mantiene la relación previamente establecida en la ecuación 2.5. Se obtiene entonces:

$$F_i = -M_{ij} \frac{d}{dt}(u_{pj} - u_j) = -M_{ij} \frac{du_{pj}}{dt} \quad (2.18)$$

Para un fluido en movimiento con aceleración se deben identificar las fuerzas inerciales del fluido, para este caso se identifica una contribución adicional de la presión, obteniendo así una nueva relación donde δ_{ij} corresponde al delta de Kronecker.

$$F_i = -M_{ij} \frac{du_{pj}}{dt} + (M_{ij} + \rho_f V \delta_{ij}) \frac{du_j}{dt} \quad , j = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

En la actualidad solo se conocen los componentes diagonales de la matriz M_{ij} para algunas partículas de geometrías simples (elipsoides, discos y esferas cerca de una superficie). Uno de los casos que puede ser particularmente útil para este análisis es el caso de un perímetro sólido cercano al cuerpo analizado, frente a esto, estudios concuerdan en que la presencia de un borde sólido puede causar un significativo aumento de 'Masa virtual' debido a un necesario aumento de la aceleración del fluido en la región entre el fluido y el borde [5].

Las geometrías más utilizadas para el análisis de los efectos de 'Masa virtual' son la esfera y el cilindro, así la derivación para cada una corresponde a:

■ Derivación de masa virtual alrededor de una esfera:

Considerando una esfera de radio a y acelerando a una tasa de $\frac{\partial u_p}{\partial t} = \dot{U}_p$, se obtiene la fuerza hidrodinámica en la dirección x al integrar la presión sobre el área proyectada en la dirección x [6].

$$\vec{F}_x = \int p d\vec{A}_x \quad (2.20)$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli y considerando flujo axisimétrico alrededor de una esfera, se obtiene el valor correspondiente a la fuerza adicional que debe ejercer el cuerpo debido a la adición de una 'masa virtual'.

$$\vec{F}_x = -\frac{2}{3} \rho_f \pi a^3 \dot{U}_p \quad (2.21)$$

Lo cual es consistente con el resultado presentado en la ecuación 2.16.

■ Derivación de masa virtual alrededor de un cilindro:

Considerando un cilindro de radio a , largo L y tasa de aceleración $\dot{U}_p$ se obtiene una relación para la fuerza adicional que debe ejercer el cuerpo debido a la adición de una ‘masa virtual’, considerando la ecuación 2.10, la ecuación de Bernoulli y el flujo alrededor de un cilindro, se obtiene [6]:

$$\vec{F}_x = -\rho_f \pi a^2 L \dot{U}_p \quad (2.22)$$

Por lo tanto, en el caso de un cilindro, la masa virtual es igual a la masa de fluido que se desplaza.

2.4. Fuerza de Basset

Concepto trabajado por los matemáticos Joseph Boussinesq en 1885 y Alfred Basset en 1888, describe principalmente los efectos transientes de la viscosidad en el cuerpo en movimiento. En específico, considera cómo la vorticidad adicional creada en la superficie de la partícula debido a la aceleración se difunde en el flujo y crea una perturbación temporal [12].

En otras palabras, describe el desarrollo de la capa límite y su retraso en el tiempo, así como también el cómo cambia la velocidad relativa en el tiempo. Adicionalmente, Oseen extendió el trabajo realizado por Boussinesq y Basset, incluyendo los efectos de números de Reynolds más altos [7].

El valor de la fuerza de Basset depende del historial de aceleración hasta el momento de la evaluación, además depende directamente de la viscosidad del fluido

y de la aceleración de la partícula. La ecuación de la fuerza de Basset contiene una integral con un Kernel que representa la difusión de la vorticidad alrededor de la partícula a través de la historia del movimiento [14].

Cabe destacar que este estudio se desarrollara siempre en función de partículas esféricas. Lawrence and Weinbaum examinaron este término en geometrías distintas a la esfera y concluyeron que, para un flujo uniforme, dependiente del tiempo y con bajo número de Reynolds, se presenta un segundo término histórico en la integral que podría aumentar la complejidad del cálculo [14].

Con respecto a la importancia de este término, estudios realizados por Seyler y Pressé indican que numéricamente los efectos históricos persisten de forma indefinida bajo condiciones de flujo relativamente generales y descuidar esta fuerza podría significar un transporte de partículas cualitativamente incorrecto. Otro estudio realizado por Leichtber concluye que para movimientos gravitacionales multipartícula que cambian lentamente, la fuerza de Basset es el efecto inercial más importante para bajos números de Reynolds [14].

Adicionalmente, estudios demuestran que la fuerza de Basset juega un rol importante en la descripción de la aceleración de sedimentos relativamente pequeños moviéndose cerca de límites sólidos [13]. Esta característica de la fuerza de Basset la convierte en una variable importante a considerar en el tratamiento y transporte de material sedimentado, además de ser importante para la trata de fluidos que pueden contener partículas sólidas pequeñas como sal de mar y líquidos residuales de actividades mineras e industriales.

Para un intervalo de tiempo desde 0 (inicio del movimiento) hasta t y considerando flujo sobre una esfera a un bajo número de Reynolds, la fuerza de Basset se representa por [7]:

$$F_{Basset} = -\frac{3}{2}D^2\sqrt{\pi\nu} \int_0^t \frac{\frac{d}{dt'}(u_i - u_{p_i})}{\sqrt{(t-t')}} dt' \quad (2.23)$$

Para obtener esta relación, Crowe [7] plantea considerar una placa plana infinita y acelerada para visualizar de forma más sencilla el concepto de la fuerza de Basset.

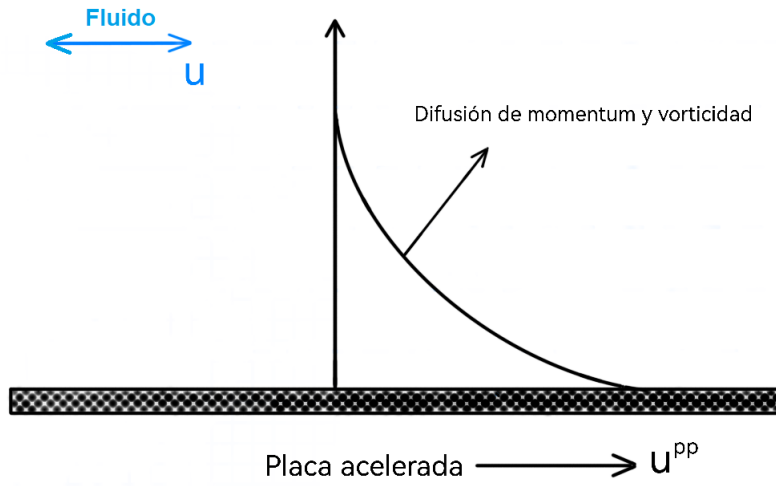


Figura 2.2: Modelo de placa infinita acelerada

La ecuación de movimiento del fluido, inducido por la placa que se mueve con velocidad u^{pp} será:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.24)$$

Donde ν representa la viscosidad cinemática del fluido y u representa la velocidad del fluido. Se considera la condición inicial $u^{pp}(0, y) = 0$ y se plantea que la placa

se pone en marcha con un cambio de velocidad de 0 a u_0^{pp} . En concreto, para este análisis se trabajará con el esfuerzo cortante local que en este caso para un cambio de velocidad se representará como:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\sqrt{\rho\mu} \cdot u^{pp}_0}{\sqrt{\pi t_0}} \quad (2.25)$$

En donde la última expresión viene de la solución para una placa cuyo movimiento parte en forma impulsiva (es decir, el clásico "primer problema de Stokes"). Para observar el efecto de la fuerza de Basset se considerará que la variación temporal de la velocidad de la placa se separa en una serie de pasos, así para t_0 el cambio de velocidad será Δu^{pp}_0 , para el tiempo t_1 el cambio de velocidad será Δu^{pp}_1 y así sucesivamente lo que entrega la relación:

$$\tau = \frac{\sqrt{\rho\mu}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\Delta u^{pp}_0}{\sqrt{t_0}} + \frac{\Delta u^{pp}_1}{\sqrt{t_0 - t_1}} + \frac{\Delta u^{pp}_2}{\sqrt{t_0 - t_2}} \dots \right] \quad (2.26)$$

Aplicando este acercamiento, análogo al Teorema de Duhamel, a una esfera en un flujo con número de Reynolds bajo se puede obtener la relación presentada en la ecuación 2.23.

El valor de la fuerza de Basset suele ser el término más comúnmente ignorado debido a su complejidad numérica, aun así muchos estudios han demostrado la importancia de este factor para transporte de partículas en flujos turbulentos, aun en comparación con los otros factores considerados en la ecuación de Maxey-Riley. Adicionalmente, se ha observado que este factor puede tener un efecto importante

en el movimiento de partículas de sedimento, transporte de sedimento en canales abiertos, partículas de arena y velocidad de partículas en un campo de flujo oscilante [2].

Las dificultades de cálculo de la fuerza de Basset se deben principalmente a que este puede ser particularmente costoso en términos de memoria y tiempo, ya que para cada salto temporal para el cual se evalúa la integral, se debe considerar el historial de movimiento de la partícula.

2.5. Estudios anteriores

2.5.1. Métodos anteriores

Los principales métodos previamente utilizados para abordar el problema de la fuerza de Basset son; Michaelides [11] usa transformada de Laplace, este procedimiento puede ser utilizado en problemas lineales, pero no para problemas con campos de velocidad dependientes del espacio para los cuales el sistema presentado por la ecuación de Maxey-Riley es no-lineal. Otra solución fue dada por Dorgan, Loth y Bombardelli [12] [13] donde se evalúa la integral en una ventana finita desde $t - \text{twin}$ hasta t , esto puede ser representado por un cambio en el Kernel de la fuerza de Basset.

Un acercamiento estándar utilizado para lidiar con la singularidad del Kernel de Basset usa reglas específicas de cuadratura como la fórmula de segunda orden Euler-Mclaurin. Otro método utilizado para trabajar el Kernel es presentado por Tatom que usa un método fraccional derivativo, este método presenta mejor precisión temporal que el previamente mencionado Euler-Mclaurin.

2.5.2. Resultados de estudios previos

En esta sección se mostrarán resultados obtenidos por previos estudios de los efectos de la masa virtual y fuerza de Basset en la velocidad de una partícula esférica en un fluido, además se revisarán los resultados obtenidos sobre acumulación de partículas con el objetivo de asociar estas conclusiones con los datos obtenidos.

Previa experimentación muestra que cuando la relación de densidad partícula-fluido es grande, la importancia de las fuerzas transientes que corresponderían a la acción del gradiente de presión, masa añadida y fuerza de Basset, depende menos de la relación de densidad partícula- fluido y más de la relación entre la escala de longitud del fluido y el tamaño de la partícula tal como establecen las restricciones relacionadas con la escala de Kolmogorov.

Adicionalmente, diversos estudios muestran que para una partícula mucho más pesada que el fluido, las fuerzas transientes son considerablemente pequeñas, por lo que se pueden ignorar. Aplicando este criterio a casos concretos se suele considerar masa añadida y otras fuerzas transientes en la simulación de flujos burbujeantes y flujos líquido-sólidos, pero suelen ser ignorados en flujos de gas-partícula. Considerar que esto deja de ser válido si el fluido es el que está siendo acelerado [8].

Con respecto a la densidad a utilizar, previos estudios demuestran que el término de Basset será mucho menos importante para partículas sólidas en un gas donde $m_p/\rho_f V_p \gg 1$ de lo que lo será para burbujas en un líquido donde $m_p/\rho_f V_p \ll 1$. Además, se puede notar que el efecto de la fuerza de Basset logra reducir la aceleración del movimiento relativo, aumentando el tiempo requerido para alcanzar la velocidad final [12].

En cuanto a los otros términos a evaluar, la importancia de la acción del gradiente de presión depende de la relación de densidad fluido-partícula, pero este no aplica a flujos no acelerados. La importancia relativa del término correspondiente a la

masa virtual es más considerable frente a vórtices en escala de Kolmogorov y la importancia del término de fuerza transiente por viscosidad o Basset depende bastante de la importancia de la masa virtual, es decir, si esta es considerable la acción de la fuerza de Basset también lo será [8].

Considerando el impacto que pueda tener la relación de masa entre el fluido y la partícula conocida como $R = m_p/m_f$ donde m_f corresponde a la masa equivalente a una partícula con un volumen igual al de la partícula a analizar, pero con la densidad correspondiente al fluido. Se puede ver que tanto el gradiente de presión como el término que representa la fuerza de Basset son dependientes de esta relación, para partículas que son mucho más pesadas que el fluido que las rodea se puede esperar que solo la acción del arrastre de Stokes y la fuerza de gravedad sean considerables [9]. Adicionalmente, con base en previos estudios, se sabe que si el valor de esta relación es del orden de $R = 10$, el gradiente de presión y la fuerza de Basset se vuelven comparables al arrastre de Stokes. Cuando R alcanza la unidad, la fuerza de Stokes y la fuerza de Basset se vuelven despreciables y solo la fuerza correspondiente al gradiente de presión se mantiene como fuerza dominante. A medida que disminuye el valor de R el gradiente de presión continúa siendo el factor dominante, pero el arrastre de Stokes y la fuerza de Basset comienzan a tener mayor influencia, si se obtiene un R cercano a cero se deben considerar todos los términos de la ecuación de Maxey-Riley, ya que todos tienen un efecto considerable [9].

Considerando casos más concretos se estima que para $R=3$ (partículas de arena en ambiente marino) y $R=0$ (partícula lo más liviana posible). La influencia de la fuerza de Basset es significativa frente a la concentración preferencial de partículas. Además, se observa que la fuerza de Basset debilita el nivel de concentración preferencial, especialmente para $R = 1.5-10$ en partículas pesadas y $R \leq 0.7$ en partículas livianas. La fuerza de Basset es prácticamente inactiva para $R \geq 100$

[9].

Como complemento, se pueden asociar otros fenómenos a los efectos de la fuerza de Basset. Si se consideran partículas pequeñas, con la acción de Basset se reduce el agrupamiento a pequeña escala de partículas inerciales, también significa una contribución de aproximadamente 10 % de la aceleración total de la partícula, especialmente para eventos fuertes y puntuales.

Otros efectos a considerar son, por ejemplo, que el gradiente de presión gobierna la dinámica de partículas para relaciones de densidad de orden 1, mientras el arrastre de Stokes domina para relaciones de alta densidad del orden de 100. En turbulencia estratificada, la dispersión vertical de partículas con una relación de densidad igual a 1 se ve atenuada por cerca de los 15-20 % cuando el término de Basset es considerado en la dinámica [10].

Con respecto a la acumulación de partículas, cuando se considera la fuerza de Basset la segregación de partículas parece ser menos intensa, el término de Basset disemina las acumulaciones.

Otro de los factores relevantes para este análisis es el número de Stokes, número adimensional que entrega información sobre el comportamiento de partículas suspendidas en un flujo [15].

$$St = \frac{\tau u}{d_t} \quad (2.27)$$

Donde τ corresponde al tiempo de respuesta característico de la partícula, u corresponde a la velocidad del fluido y d_t corresponde a la dimensión característica del obstáculo (en general el diámetro) [7]. Los más altos niveles de acumulación a pequeña escala se dan cuando Stokes es igual a 1, y es más débil para otros valores de Stokes. Partículas con relación de densidad $R=1$ o con valores de Stokes muy pequeños no muestran acumulación, esto no cambia al incluir el término de Basset [10].

Frente a relaciones de densidad del orden de 10, la fuerza de Basset no puede ser ignorada para capturar la correcta dinámica entre partículas. Además, para relaciones de densidad $R = 1$, si bien no se da acumulación de partículas, si se puede observar que el término principal en el balance es el arrastre de Stokes cuando Basset no es considerado, para el caso donde Basset si es considerado el gradiente de presión pasa a ser el término principal en el modelo. También se puede ver como Basset se considera relevante en la dinámica de partículas con una relación de densidad moderada ($R = 1-10$) como arena o polvo de metal en agua. Más inesperado es el impacto de la fuerza de Basset en la dinámica de partículas con alta relación de densidad $R = 1000$ como gotas de agua en nubes, aquí la intensidad de acumulación decrece para valores de Stokes en el rango $St = 0.1-1$, el efecto de Basset puede ayudar a llevar claridad a las discrepancias entre resultados numéricos y experimentales para dinámica de partículas que aún no se entienden por completo [10].

Capítulo 3

Formulación del análisis

El modelo de la ecuación de Maxey-Riley se trabajará de forma simplificada, a través de discretizaciones usando Euler explícito forward. La principal simplificación estará dada por la elección del tipo de fluido, ya que solo se considerará el análisis para un fluido en reposo o con velocidad constante (considerando las respectivas equivalencias). Con esta simplificación se eliminan los factores en la ecuación que dependen del movimiento del fluido, tales como la presión. Adicionalmente, se elimina el uso de la corrección de Faxen, esta corrección es proporcional al fluido por lo que se elimina otro término en el arrastre de Stokes, masa virtual y fuerza de Basset donde esta corrección suele ir considerada.

También se considerarán únicamente simulaciones donde las interacciones entre partículas vecinas sean despreciables, adicionalmente se considerará únicamente movimiento rectilíneo en una dirección elegida x .

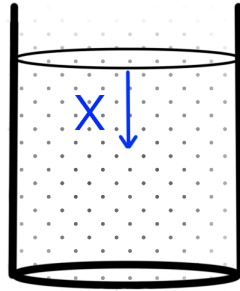


Figura 3.1: Dirección del movimiento x

Con respecto a la integral de Basset se considerarán dos simplificaciones principales, se trabajarán los límites de la integral según un caso aplicado, es decir, considerando desde un paso de tiempo $t=0$ equivalente a $n=1$ y hasta un último paso de tiempo límite $t = t_f$, esto significa que no se considerarán los límites al infinito de la ecuación quitándole así complejidad al cálculo y entregando a la simulación las características de una solución concreta y real. Adicionalmente, con respecto a la resolución de la integral, esta se trabajará como una sumatoria, se considera este acercamiento, ya que es compatible con el método de discretizaciones y permite simplificar aún más el cálculo al elegir este método por sobre otros previamente utilizados, tales como trabajar los límites del núcleo de la integral o transformadas de Laplace. También se hará una revisión del salto de tiempo apropiado para obtener la mayor precisión posible en los resultados independiente de las simplificaciones elegidas.

Una de las principales consideraciones a tener presente frente a la resolución de la ecuación de Maxey-Riley es que el Reynolds de la partícula debe ser pequeño ($\ll 1$) como también el gradiente de velocidad alrededor de la partícula, además la velocidad inicial del fluido y la partícula deben ser iguales, de no ser este el caso aparece un segundo término en la ecuación de la fuerza de Basset [2].

Se presentan restricciones frente al tamaño de la partícula, ya que esta debe tener

un radio $a \ll \eta$, donde η corresponde a la escala de longitud de Kolmogorov, esto en conformidad con las restricciones de la ecuación.

Capítulo 4

Formulación numérica

Para proceder con la parte numérica del análisis se utilizará la versión simplificada de la ecuación 2.1 de Maxey-Riley y se procederá a aplicar la discretización y simplificaciones descritas en la sección anterior, a través de estos pasos se obtendrá una ecuación que permitirá desarrollar el código para la implementación numérica del análisis utilizando el lenguaje de programación Fortran.

Como primer paso se obtiene el resultado de discretizar la ecuación 2.1, usando un esquema Euler explícito para la integración en el tiempo.

$$m_p \frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{\Delta t} = (m_p - m_f)g - 6\pi a \mu u_p^n - \frac{1}{2} m_f \left[\frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{\Delta t} \right] + 6\rho_f a^2 \sqrt{\pi \nu} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{((n+1) - j)\Delta t}} \cdot -(u_p^{j+1} - u_p^j) \quad (4.1)$$

La integral de la fuerza de Basset ha sido aproximada por una regla trapezoidal con un paso de integración Δt .

Con el objetivo de aislar el término futuro correspondiente a la velocidad en el salto de tiempo $n+1$ se separa la sumatoria aislando el último término correspondiente a $j = n$ con lo que se obtiene:

$$m_p \frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{\Delta t} = (m_p - m_f)g - 6\pi a \mu u_p^n - \frac{1}{2}m_f \left[\frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{\Delta t} \right] + 6\rho_f a^2 \sqrt{\pi \nu} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{((n+1)-j)\Delta t}} \cdot -(u_p^{j+1} - u_p^j) - \frac{1}{\sqrt{((n+1)-j)\Delta t}} \cdot (u_p^{n+1} - u_p^n) \right] \quad (4.2)$$

Luego de reordenar términos en la ecuación discretizada se obtendrán las siguientes ecuaciones. La primera considera solo los efectos de la gravedad, arrastre de Stokes y efectos de la masa virtual, no considera la fuerza de Basset, ya que para el primer salto de tiempo no habrá un histórico por considerar. En la segunda ecuación se podrá ver el modelo que representa la velocidad de la partícula en un tiempo $n+1$ considerando el modelo completo, es decir, considerando efectos de la gravedad, arrastre de Stokes, masa virtual y fuerza de Basset.

Para $n = 1$ (Condición inicial):

$$u_p^{n+1} = u_p^n - \frac{12\pi a \mu u_p^n \Delta t}{2m_p + m_f} - \frac{(m_p + m_f)g 2\Delta t}{2m_p + m_f} \quad (4.3)$$

Para $n > 1$:

$$\begin{aligned}
u_p^{n+1} = & u_p^n - \frac{12\pi a \mu u_p^n \Delta t \sqrt{\Delta t}}{2\sqrt{\Delta t} m_p + m_f \sqrt{\Delta t} + 12a^2 \rho \Delta t \sqrt{\pi \nu}} \\
& + \frac{(m_p - m_f) g 2 \Delta t \sqrt{\Delta t}}{2\sqrt{\Delta t} m_p + m_f \sqrt{\Delta t} + 12a^2 \rho \Delta t \sqrt{\pi \nu}} \\
& + \frac{12a^2 \rho \Delta t \sqrt{\pi \nu} \delta t}{2\sqrt{\Delta t} m_p + m_f \sqrt{\Delta t} + 12a^2 \rho \Delta t \sqrt{\pi \nu}} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{((n+1) - j) \Delta t}} [- (u_p^{j+1} - u_p^j)]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Capítulo 5

Implementación computacional

Con el objetivo de desarrollar un cálculo simplificado que considere todas las variables revisadas se utilizará el lenguaje computacional Fortran, utilizando las ecuaciones simplificadas obtenidas en la sección anterior se desarrollara un código que permita calcular la velocidad de la partícula en cada iteración de tiempo dado. Adicionalmente, se utilizará la herramienta GNU Plot para graficar y visualizar los efectos a analizar y la herramienta “Tiempo CPU” para analizar el tiempo invertido en cada cálculo.

El programa funcionará en función de las variables del programa, es decir, el usuario debe ingresar como datos la densidad de la partícula y del fluido, la viscosidad cinemática del fluido, el diámetro de la partícula, la cantidad de iteraciones a realizar y la velocidad inicial de la partícula en la simulación a analizar.

5.1. Análisis del paso de tiempo a utilizar

Con el objetivo de elegir el salto de tiempo a utilizar entre iteraciones se probarán distintos saltos de tiempo entre $1.0e-3$ [s] y $1.0e-7$ [s], de esta forma al observar gráficamente la desviación del movimiento a estudiar se podrá determinar desde

que salto de tiempo los resultados obtienen una precisión adecuada. Para esto se utilizará el programa desarrollado para calcular la velocidad de la partícula en un periodo de tiempo de 0.1[s] y considerando 5 saltos de tiempo distintos.

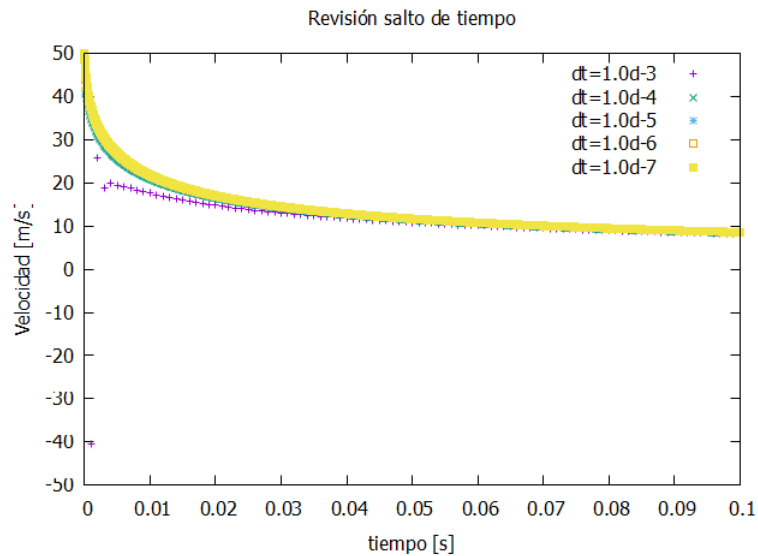


Figura 5.1: Revisión salto de tiempo

Observando los resultados de la variación del salto de tiempo se puede observar una clara desviación para saltos de tiempo menores a $1.0e-5$ [s], para el salto de tiempo correspondiente a $1.0d-5$ [s] se observa una ligera desviación, pero aún se podría observar un margen de error considerable, luego se puede ver que para un salto de tiempo desde los $1.0d-6$ [s] los valores obtenidos convergen a la misma solución y no existe desviación en los resultados. Así, se puede concluir que un salto de tiempo menor o igual a $1.0d-6$ [s] es apropiado para obtener una adecuada precisión en los resultados a analizar.

Analizando el modelo presentado se desarrollará el código anexado (Anexo 1), se obtendrán los siguientes resultados.

Capítulo 6

Simulación de casos

Se presentarán los resultados considerando solo la acción de la aceleración gravitacional y del arrastre del Stokes, luego considerando también el efecto de la masa virtual y finalmente considerando el modelo completo con la acción de la fuerza de Basset.

Se realizan $1,0 \cdot 10^6$ iteraciones en cada caso, además se presentan los gráficos en escala lineal y logarítmica para así facilitar la entrega de información.

Se considerarán los siguientes datos iniciales:

Diámetro partícula	0.0001 [m]
Salto de tiempo	1.0e-6 [s]
Densidad agua 20°C	997 [kg/m ³]
Densidad aire 20°C	1.29 [kg/m ³]
Densidad aceite	920 [kg/m ³]
Densidad escoria líquida	3800 [kg/m ³]
Viscosidad dinámica Agua	0.001002 [Pa · s]
Viscosidad cinemática Agua	1.004e-6 [m ² /s]
Viscosidad dinámica Aire	1.72e-5 [Pa · s]
Viscosidad cinemática Aire	1.33e-5 [m ² /s]
Viscosidad dinámica Aceite	0.0808 [Pa · s]
Viscosidad cinemática Aceite	0.89 [m ² /s]
Viscosidad dinámica escoria líquida fayalítica 1200°C	0.35 [Pa · s]
Viscosidad cinemática escoria líquida fayalítica 1200°C	0.000092[m ² /s]

Cuadro 6.1: Datos iniciales para el cálculo

6.1. Caso 1

Velocidad inicial 0 [m/s], partícula con densidad muy baja (Burbuja), Fluido: Agua a 20°C

Resultado:

Este caso representa una burbuja de gas que se desprende desde el reposo en agua líquida, también en reposo. Se puede observar que para el análisis del movimiento de una burbuja en agua a 20°C con velocidad inicial cero, existe un claro efecto causado por la masa añadida, se puede notar que aumenta el tiempo en el que se llega a la velocidad final obtenida de aproximadamente -0.0216 [m/s], ya que la coordenada x se definió como positiva en el sentido de la gravedad la velocidad negativa representa el movimiento ascendente de la burbuja. Se puede observar en los gráficos del modelo que solo considera efectos gravitacionales y arrastre de Stokes se requieren mínimas iteraciones para llegar a este límite, mientras para el modelo que si considera la masa virtual se obtiene esta velocidad luego de una considerable cantidad de tiempo e iteraciones, es decir para este caso el efecto de la masa virtual aumenta el tiempo para alcanzar la velocidad terminal. Adicionalmente, con la aplicación de la fuerza de Basset se observa que se ralentiza considerablemente la obtención de la velocidad final, además la curva de velocidad se muestra mucho más suave con respecto a los otros casos donde esta caída es abrupta.

- Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes:

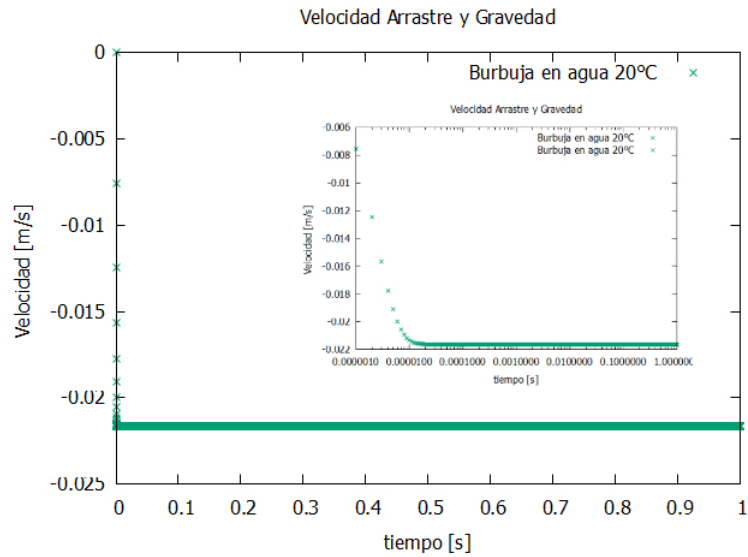


Figura 6.1: Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes Caso 1

- Efecto Masa Virtual:

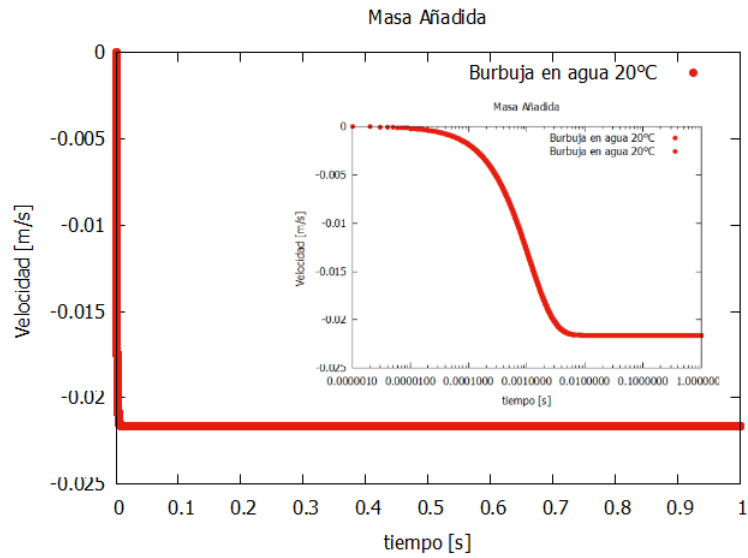


Figura 6.2: Figura 6.1 con efecto masa virtual

- Efecto fuerza de Basset:

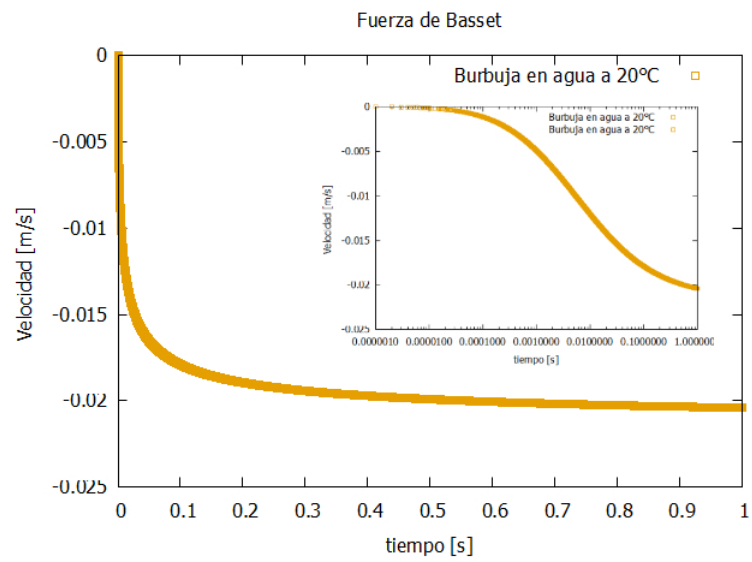


Figura 6.3: Figura 6.2 con efecto Fuerza de Basset

6.2. Caso 2

Velocidad inicial 0 [m/s], partícula con densidad: 1496[kg/m³] (grano de arena),
Fluido: Agua a 20°C

Resultados:

Para el caso de un grano de arena en movimiento en agua a 20°C, considerando una velocidad inicial de 0 [m/s] se observa que el efecto de la masa añadida es sutil. Observando los resultados al llegar a los 0.001 [s] considerando solo la gravedad y arrastre, la velocidad final de la partícula es de 0.0028 [m/s]. Por otro lado, cuando se considera el efecto de la masa añadida en el mismo momento, la velocidad de la partícula es de 0.0021 [m/s] por lo que se puede concluir que la masa virtual retrasa el tiempo en el que la partícula alcanza su velocidad final. En los tres casos se obtiene una velocidad final de 0.0108 [m/s]. Se observa que el efecto de la fuerza de Basset retrasa de forma considerable la aceleración de la partícula, por lo que tarda más tiempo en llegar a su velocidad final y el aumento de velocidad es menos abrupto.

- Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes:

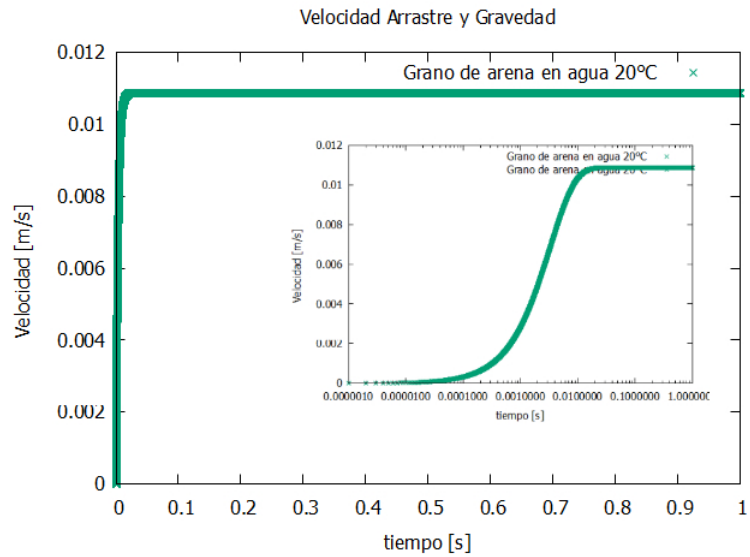


Figura 6.4: Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes Caso 2

- Efecto Masa Virtual:

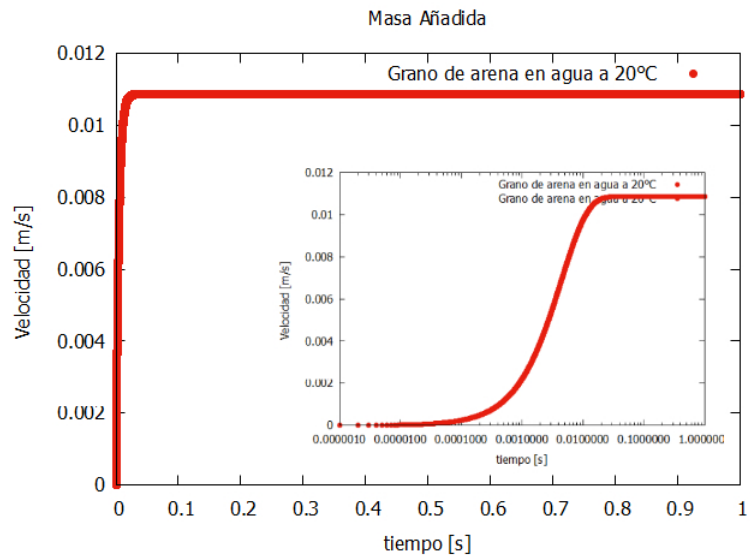


Figura 6.5: Figura 6.4 con efecto masa virtual

- Efecto fuerza de Basset:

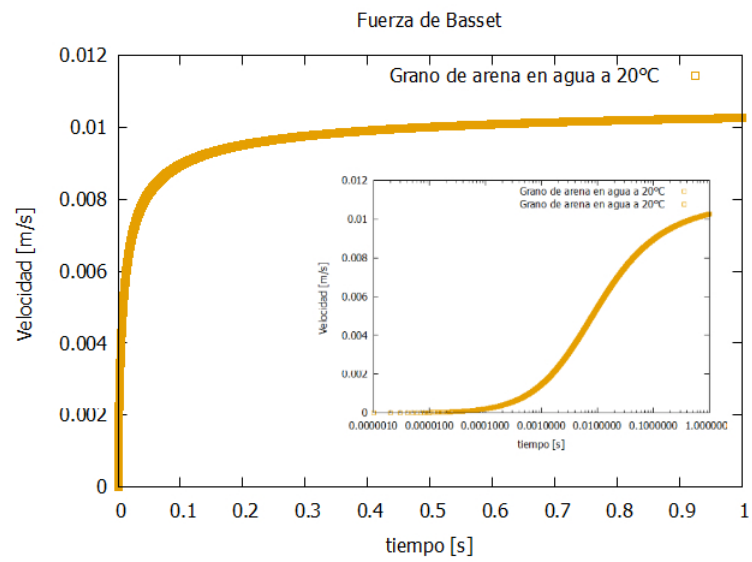


Figura 6.6: Figura 6.5 con efecto Fuerza de Basset

6.3. Caso 3

Velocidad inicial 0 [m/s], partícula con densidad: 8966 [kg/m³] (cobre), Fluido: Agua a 20°C

Resultados:

Para el caso de una partícula esférica de cobre en agua a 20°C con una velocidad inicial de 0 [m/s] se observa que al igual que en el caso anterior el efecto de la masa virtual es relativamente pequeño, sin considerar este efecto se obtiene una pendiente similar de la progresión de velocidad. Al igual que el caso 2 al observar los resultados obtenidos en el momento 0.001 [s] considerando solo la gravedad y arrastre la velocidad de la partícula es de 0.0084 [m/s], por otro lado, cuando se considera el efecto de la masa virtual en el mismo momento la velocidad de la partícula es de 0.0080 [m/s] por lo que se puede concluir que la masa virtual retrasa el tiempo en el que la partícula alcanza su velocidad final. También se puede observar que la caída de velocidad es más lenta en comparación al caso 2, se obtiene una velocidad final de 0.1732 [m/s]. El efecto de la fuerza de Basset tiene similar comportamiento con relación al caso anterior, mostrando también una menor aceleración de la partícula y un cambio de velocidad menos abrupto.

- Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes:

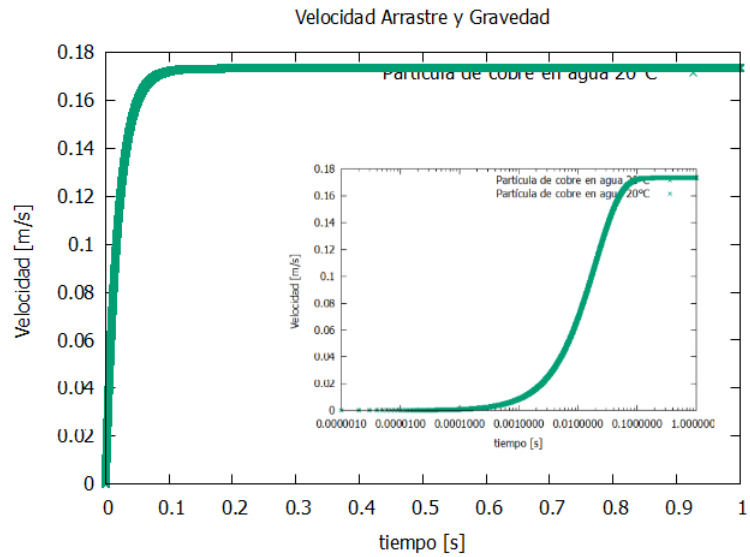


Figura 6.7: Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes Caso 3

- Efecto Masa Virtual:

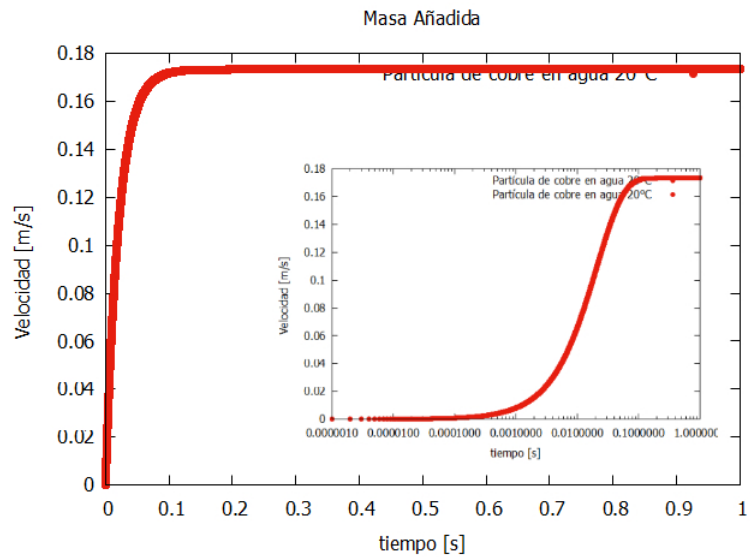


Figura 6.8: Figura 6.7 con efecto masa virtual

- Efecto fuerza de Basset:

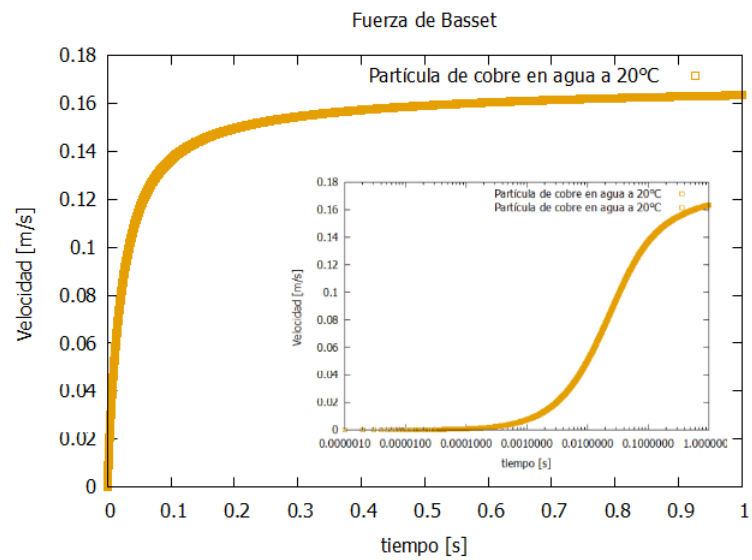


Figura 6.9: Figura 6.8 con efecto Fuerza de Basset

6.4. Caso 4

Velocidad inicial 0 [m/s], partícula con densidad: 997 [kg/m³] (Gota de agua),
Fluido: Aire a 20°C

Resultados:

Para una gota de agua en aire a 20°C con una velocidad inicial cero, se puede observar que para los tres modelos se obtiene una variación de velocidad muy similar con una tendencia a una velocidad de aproximadamente 1.2589 [m/s] con una misma pendiente en el 1[s] analizado, se puede concluir que los efectos de la masa añadida y de la fuerza de Basset son despreciables.

- Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes:

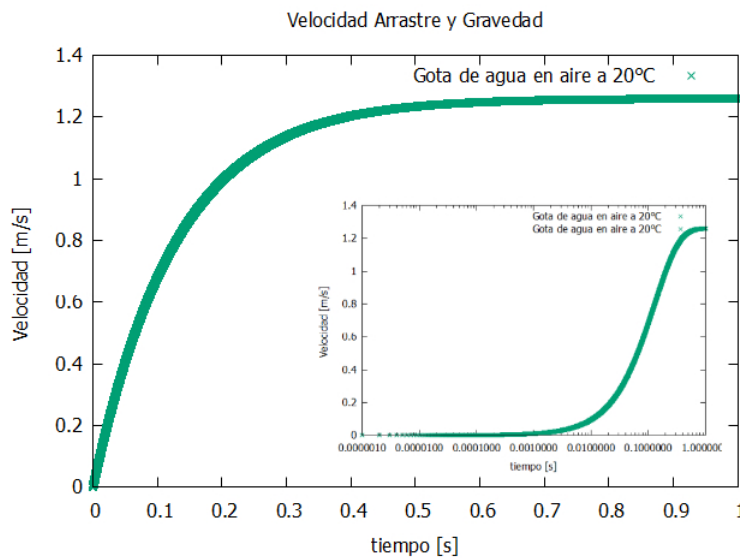


Figura 6.10: Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes Caso 4

- Efecto Masa Virtual:

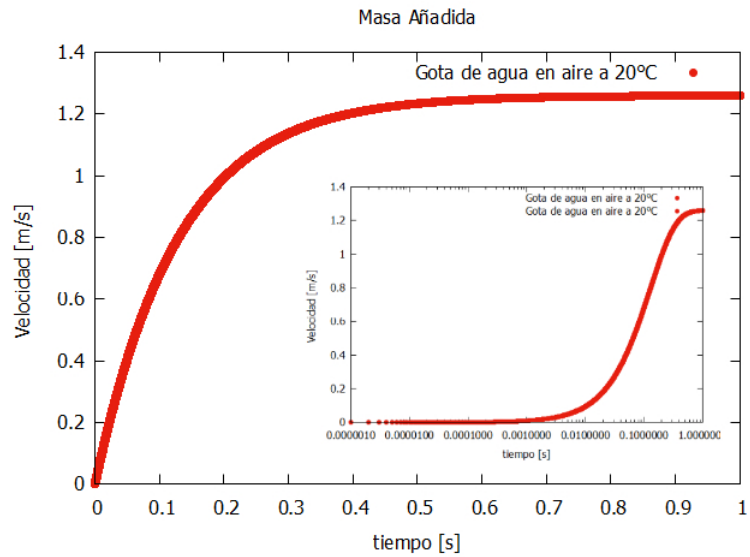


Figura 6.11: Figura 6.10 con efecto masa virtual

- Efecto fuerza de Basset:

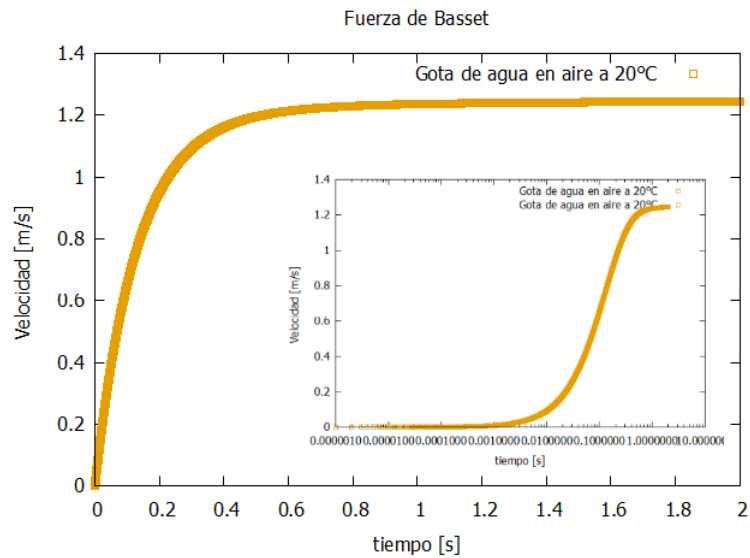


Figura 6.12: Figura 6.11 con efecto Fuerza de Basset

6.5. Caso 5

Velocidad inicial 0 [m/s], partícula con densidad: 8966 [kg/m³] (cobre), Fluido: Aceite

Resultado:

Para el caso de una partícula de cobre en aceite con una velocidad inicial de 0 [m/s] se observa que de manera similar al caso 3 el efecto de la masa añadida es pequeño y el efecto de la fuerza de Basset retrasa ligeramente la caída de velocidad, se obtiene una velocidad final de 0.0021 [m/s]. Se observa como el efecto de la fuerza de Basset retrasa a la partícula y presenta una curva de velocidad menos abrupta.

- Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes:

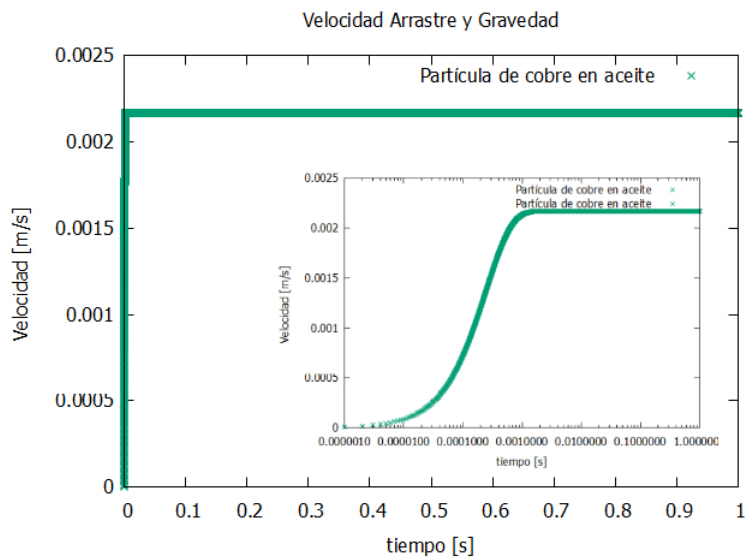


Figura 6.13: Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes Caso 5

- Efecto Masa Virtual:

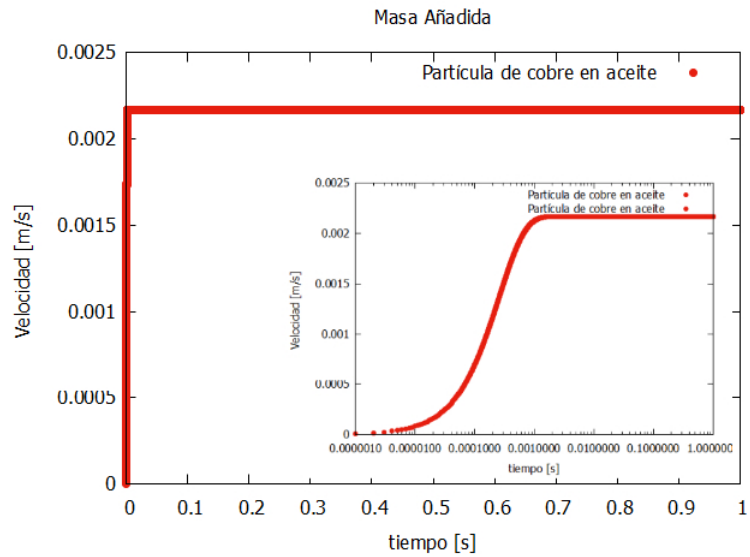


Figura 6.14: Figura 6.13 con efecto masa virtual

- Efecto fuerza de Basset:

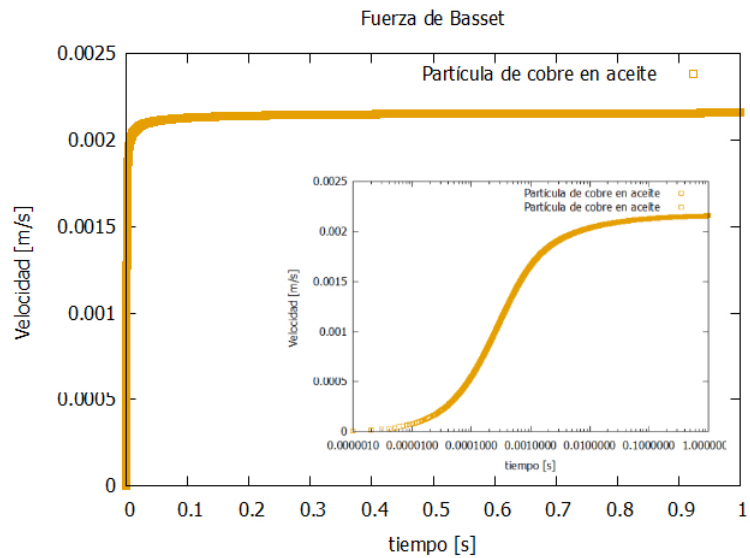


Figura 6.15: Figura 6.14 con efecto Fuerza de Basset

6.6. Caso 6

Velocidad inicial 0 [m/s], partícula con densidad: 8966 [kg/m³] (cobre), Fluido: Escoria líquida

Resultados:

Finalmente, este caso corresponde a una partícula de cobre metálico cayendo a través de un baño de escoria líquida, tal como ocurre en hornos de decantación de escoria en la industria pirometalúrgica. Para una partícula de cobre en escoria líquida con una velocidad inicial de 0[m/s], se puede observar que el efecto de la masa virtual es sutil, ya que tanto el primero como el segundo modelo presentan curvas de velocidad similares, además se observa que la caída de velocidad antes de considerar la fuerza de Basset es bastante abrupta, se obtiene una velocidad final de 0.0003 [m/s]. Observando los resultados al llegar a los 0.001 [s] considerando solo la gravedad y arrastre la velocidad de la partícula es 3.2143999e-4 [m/s], por otro lado, cuando se considera el efecto de la masa añadida en el mismo momento la velocidad de la partícula es de 3.2143985e-4 [m/s] por lo que se puede concluir que la masa añadida retrasa el tiempo en el que la partícula alcanza su velocidad final, pero el efecto para este caso es bastante menos significativo que para los otros casos analizados. Luego, para el modelo donde se considera la fuerza de Basset se observa una significativa ralentización de la velocidad.

- Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes:

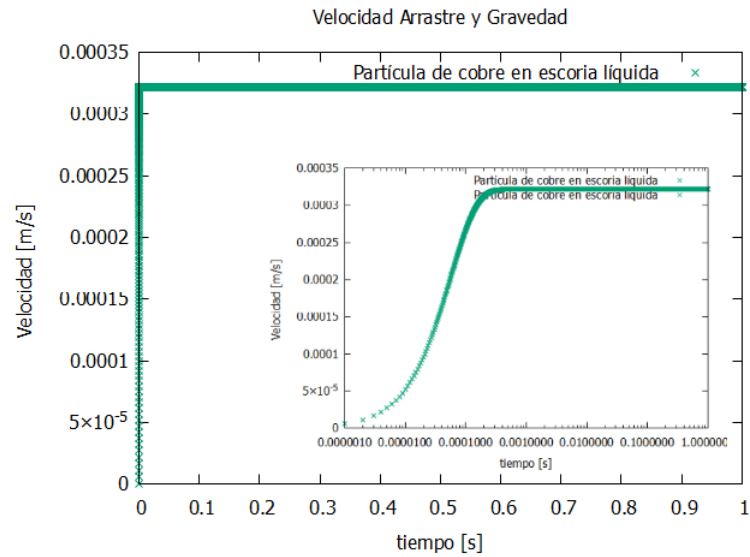


Figura 6.16: Efectos gravitacionales y Arrastre de Stokes Caso 6

- Efecto Masa Virtual:

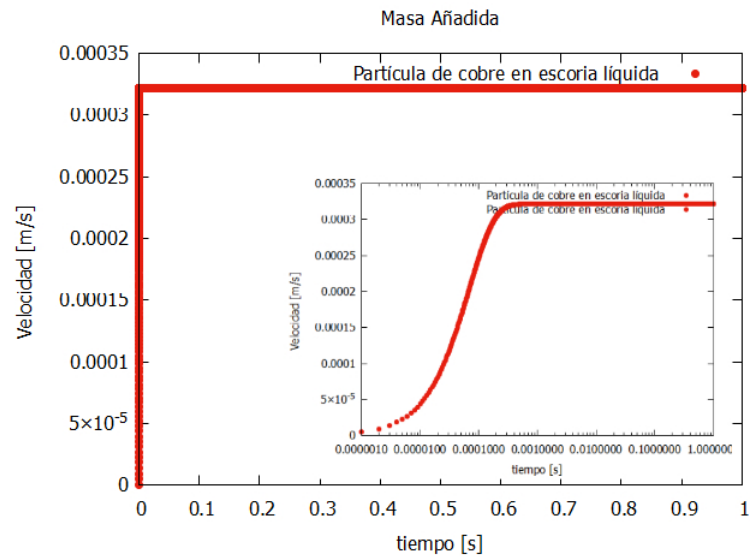


Figura 6.17: Figura 6.16 con efecto masa virtual

- Efecto fuerza de Basset:

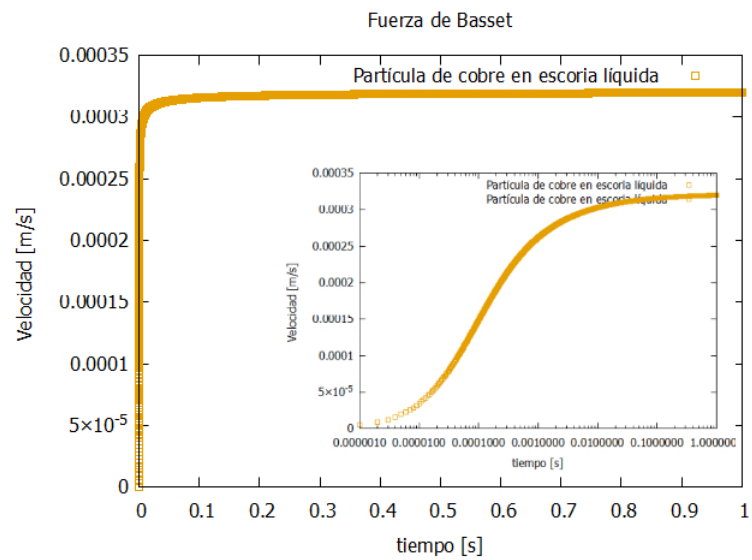


Figura 6.18: Figura 6.17 con efecto Fuerza de Basset

6.7. Conclusiones simulaciones dimensionales

Se puede concluir que, en consecuencia con los estudios revisados previamente, se observa claramente el efecto de la fuerza de Basset representado en una reducción en la aceleración del movimiento, aumentando para cada caso el tiempo que le toma a una partícula en alcanzar su velocidad final.

Al aumentar la densidad de la partícula se observa una disminución del efecto de la fuerza de Basset, como se puede ver en la diferencia entre el caso 2 y caso 3, y de forma más notoria en la diferencia con el caso 4 (gota de agua en aire), donde el efecto de la fuerza de Basset es despreciable. Esta conclusión numérica se muestra en concordancia con los conceptos revisados en la sección 2.5.2 por lo que se sabe que para una partícula mucho más pesada que el fluido, las fuerzas transientes como la masa virtual y la fuerza de Basset son considerablemente pequeñas y, por lo tanto, despreciables.

Se puede también notar la diferencia entre el caso 5 y el caso 3 donde se varía el fluido para una misma partícula, se observa que al disminuir ligeramente la densidad del fluido (agua a aceite) la velocidad de la partícula aumenta considerablemente más rápido.

Con respecto al caso 6 se puede observar un aumento abrupto de velocidad, aún más que para el caso 5 a pesar de que se aumenta la densidad del fluido. Esto se puede atribuir a los conceptos revisados en la sección 2.5.2 donde se explica que para relaciones de densidad $R = \rho_p / \rho_f$ que tienden a la unidad como es el caso 6 el arrastre de Stokes se vuelve despreciable, por lo que la caída de velocidad para el caso 6 es en su mayoría efecto de la gravedad.

Finalmente, se puede notar que el consumo de tiempo del cómputo de la velocidad considerando la fuerza de Basset es considerablemente alto, esto suma importancia a identificar de forma clara en qué casos este término es significativo para la progresión de velocidad.

6.8. Resultados en función del número de Reynolds

Con el objetivo de visualizar los resultados obtenidos de forma adimensional se graficará el número de Reynolds correspondiente a cada velocidad obtenida en función del tiempo adimensional obtenido como:

$$t^* = t \sqrt{\frac{g}{D}} \quad (6.1)$$

Se revisará esta relación para los casos 2, 3, y 6, se obtiene:

- Caso 2: Grano de arena en agua a 20°C

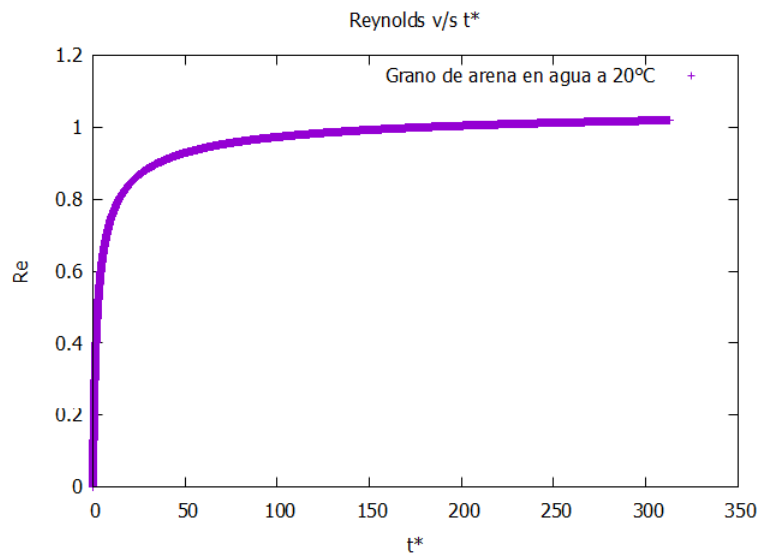


Figura 6.19: Número de Reynolds vs. tiempo adimensional Caso 2

■ Caso 3: Partícula de cobre en agua a 20°C

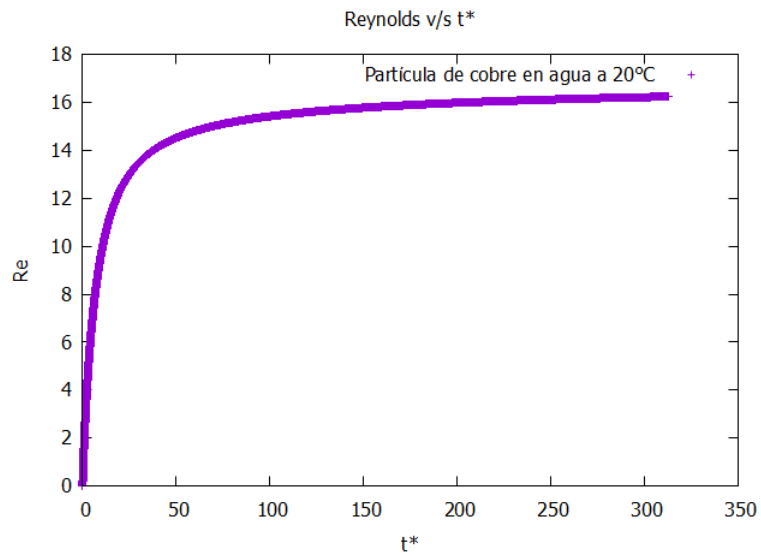


Figura 6.20: Número de Reynolds vs. tiempo adimensional Caso 3

■ Caso 6: Partícula de cobre en escoria líquida

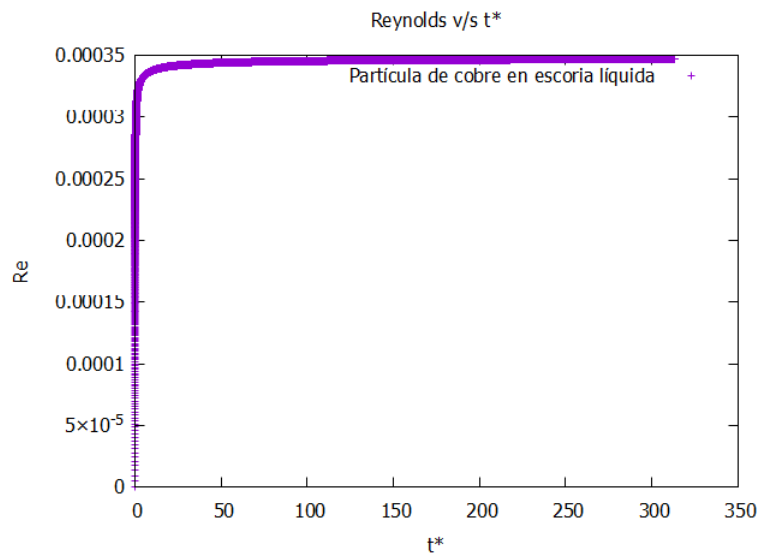


Figura 6.21: Número de Reynolds vs. tiempo adimensional Caso 6

6.8.1. Conclusiones número de Reynolds

Se puede observar que para los tres casos analizados, la progresión del número de Reynolds presenta curvas bastante similares a las curvas de velocidad obtenidas previamente, por lo que este sería un buen indicador del comportamiento de la partícula. Se puede ver que para el caso 3 los valores de Reynolds obtenidos son mayores a 1 en su mayoría. Se puede asumir que en este caso la caída de velocidad es principalmente influencia del arrastre de Stokes y de la gravedad debido a que aumenta el peso de la partícula considerablemente.

En los casos 2 y 6 se puede observar que el número de Reynolds se mantiene dentro de los límites establecidos para la validez de la ecuación trabajada, en estos dos casos se puede concluir que tienen más influencia los efectos viscosos.

6.9. Cálculo tiempo utilizado

Para el código que solo computa los efectos gravitacionales y de Stokes, considerando $1,0 * 10^6$ iteraciones, el tiempo de CPU invertido es:

CPU Time = 51.718750 [s]

Para el código que también computa los efectos de la masa añadida, considerando $1,0 * 10^6$ iteraciones, el tiempo de CPU invertido es:

CPU Time = 51.2343750 [s]

Para el código que también computa los efectos de la fuerza de Basset, considerando $1,0 * 10^6$ iteraciones, el tiempo de CPU invertido es:

CPU Time = 4228.4218750 [s] = 70.4736 [min]

Se observa que en conformidad con lo estudiado, el cálculo de la fuerza de Basset tiene un costo de tiempo considerablemente alto

Capítulo 7

Análisis dimensional

7.1. Teorema de Pi de Vaschy-Buckingham

Se implementará el teorema pi de Vaschy-Buckingham para evaluar los factores de la ecuación que permitirían manejar el desarrollo de la velocidad de la partícula de forma adimensional con el objetivo de observar el efecto de la masa virtual y fuerza de Basset de forma más generalizada, de esta manera se podrá simplificar el análisis en cuestión al reducir el número de simulaciones requeridas para atisbar un indicio del comportamiento de las variables en estudio.

El teorema pi de Vaschy-Buckingham establece que si $p_1, p_2, \dots, p_n$ son n variables involucradas en un problema, y si existe entre ellas una función que las relacione de la forma:

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (7.1)$$

Entonces se puede obtener el valor $(n-j)$ que representara el número de variables adimensionales independientes y donde j es el rango de la matriz dimensional. Para generar la matriz dimensional se debe establecer una relación funcional entre

las magnitudes fundamentales presentes en el problema y las variables dimensionales utilizadas.

Como primer paso se identificarán las magnitudes fundamentales pertenecientes al sistema internacional que forman parte del problema.

Magnitud Fundamental	Dimensión física	Unidad SI
Longitud	L	<i>m</i>
Masa	M	<i>kg</i>
Tiempo	T	<i>s</i>

Cuadro 7.1: Magnitudes fundamentales

Asimismo, se identificarán las variables dimensionales presentes en el problema:

Variables dimensionales	Unidades SI	Magnitudes fundamentales
Densidad del fluido (ρ_f)	<i>kg/m₃</i>	$M^1 L^{-3}$
Densidad de la partícula (ρ_p)	<i>kg/m³</i>	$M^1 L^{-3}$
Diámetro de la partícula (D)	<i>m</i>	L^1
Velocidad de la partícula (U_P)	<i>m/s</i>	$L^1 T^{-1}$
Tiempo (t)	<i>s</i>	T^1
Aceleración gravitacional (g)	<i>m/s²</i>	$L^1 T^{-2}$
Viscosidad dinámica (μ)	<i>kg/(m · s)</i>	$M^1 L^{-1} T^{-1}$

Cuadro 7.2: Variables presentes en el análisis

Con las variables identificadas se puede construir la matriz dimensional considerando la composición de las variables en función de las magnitudes fundamentales y su exponente correspondiente.

	ρ_p	ρ_f	D	U_P	t	g	μ
M	1	1	0	0	0	0	1
L	-3	-3	1	1	0	1	-1
T	0	0	0	-1	1	-2	-1

Cuadro 7.3: Matriz dimensional

Para obtener el rango j de la matriz se obtendrá el tamaño de la mayor submatriz cuadrada en la que su determinante no sea cero, descartando submatrices en las que alguna de sus filas tenga todos sus coeficientes ceros, tenga dos filas o columnas iguales o tenga dos filas proporcionales entre sí, se elige la presente submatriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad (7.2)$$

Dado que el determinante de la matriz es distinto de cero, el rango de la matriz es 3, con esto se puede obtener el valor $(n-j)$ donde $n = 7$ y $j = 3$, finalmente se puede concluir que existen $7-3 = 4$ variables adimensionales independientes con las que se puede trabajar para adimensionalizar el problema a analizar.

Las variables adimensionales independientes elegidas son una adimensionalización de los valores de velocidad de la partícula u_p que será denominada u_p^* , del tiempo t que será denominada t^* y una relación entre las densidades del fluido y de la partícula denominada ϕ .

Adicionalmente, se utilizarán números adimensionales para visualizar de forma sencilla la ecuación luego de reemplazar los valores anteriores. Se utilizarán números adimensionales que suelen utilizarse en la mecánica de fluidos, en específico el número de Reynolds utilizado para caracterizar el movimiento de un fluido y el número de Froude que es utilizado para caracterizar la relación de fuerzas de inercia y fuerzas de gravedad.

Considerando que u_p^* es equivalente al número de Froude se tienen los cuatro valores adimensionales con los que se procede a realizar el análisis.

$$t^* = t\sqrt{\frac{g}{D}} \quad (7.3)$$

$$\varphi = \frac{\rho_f}{\rho_p} \quad (7.4)$$

$$u_p^* = \frac{|u_p|}{\sqrt{gD}} = |Fr| \quad (7.5)$$

$$|Re| = \frac{\rho_f |u_p| D}{\mu} \quad (7.6)$$

Cabe destacar que se considerara el valor absoluto de la velocidad de la partícula, dado que para el caso de $\varphi > 1$ la velocidad es negativa según el sistema de coordenadas elegido. Según esto, para valores $\varphi < 1$ se considerará $Fr = \frac{u_p}{\sqrt{gD}}$ y para valores $\varphi > 1$ se considerará $Fr = \frac{-u_p}{\sqrt{gD}}$. Luego de reemplazar los cuatro valores adimensionales y realizar la misma discretización utilizada anteriormente, se obtiene la siguiente ecuación, válida para $\varphi < 1$:

$$\frac{dFr}{dt^*} = \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p}\right) - \frac{18\mu Fr \sqrt{gD}}{\rho_p D^2 g} - \frac{1}{2} \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{dFr}{dt^*} + \frac{9\rho_f}{D\rho_p} \sqrt{\frac{\mu D \sqrt{g}}{\rho_f g \pi \sqrt{D}}} \int_0^{t^*} \frac{1}{\sqrt{t^* - \tau^*}} \frac{-dFr}{d\tau^*} d\tau^* \quad (7.7)$$

$$\frac{dFr}{dt^*} = (1 - \varphi) - \frac{18Fr^2\varphi}{Re} - \frac{1}{2}\varphi \frac{dFr}{dt^*} + 9\varphi \sqrt{\frac{Fr}{\pi Re}} \int_0^{t^*} \frac{1}{\sqrt{t^* - \tau^*}} \frac{-dFr}{d\tau^*} d\tau^* \quad (7.8)$$

Dado que la ecuación de Maxey-Riley presenta restricciones para el número de Reynolds, este solo se considera para valores iguales o menores a la unidad. Se desarrolla un código con el lenguaje de programación FORTRAN (Anexo 2) y

utilizando la herramienta GNUPlot se representa gráficamente la variación de velocidad de la partícula variando para cada caso los números de Reynolds y φ . Se presentarán tres casos para tres valores de φ y para cada uno se presentarán cinco variaciones de Reynolds.

7.2. Phi:0.5

Resultados:

Se presenta el caso de $\varphi = 0.5$, es decir, cuando la densidad de la partícula es el doble de la densidad del fluido. Con respecto al número de Reynolds se nota una clara variación, se observa que para mayor número de Reynolds se obtienen valores de Froude considerablemente más altos, mientras que para números de Reynolds pequeños se obtienen menores valores máximos. Se observa también que las pendientes para menores números de Reynolds muestran una clara tendencia a cero.

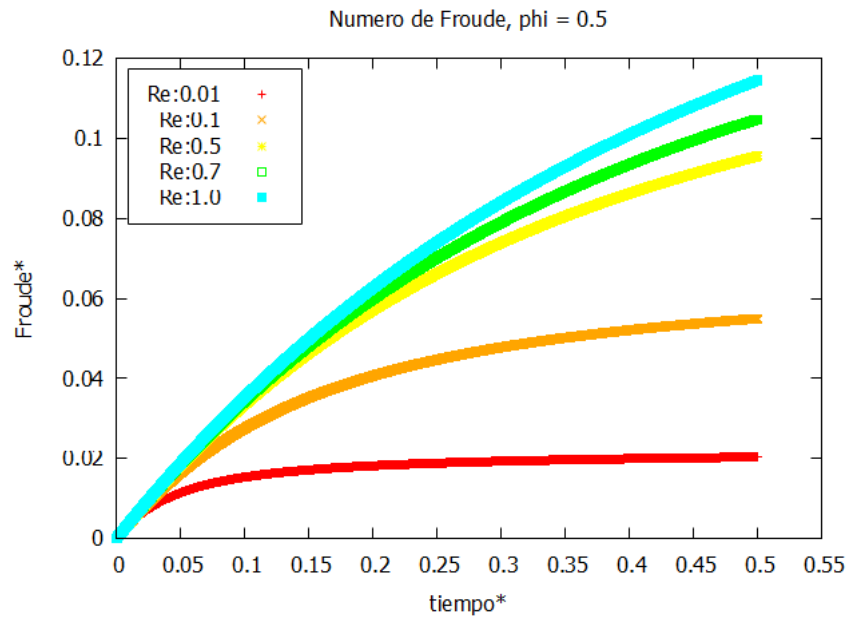


Figura 7.1: Número de Froude de la partícula para Phi: 0.5 y Re: 0.01-1.0

7.3. Phi:0.9

Resultados:

Se presenta el caso de $\varphi = 0.9$, es decir, cuando la densidad de la partícula es similar a la densidad del fluido, pero aún mayor. Con respecto al número de Reynolds, se observa que al igual que en el caso anterior, a menor número de Reynolds, más tiende la pendiente a cero. Se observa que con respecto al caso anterior para este caso se alcanzan menores valores de Froude.

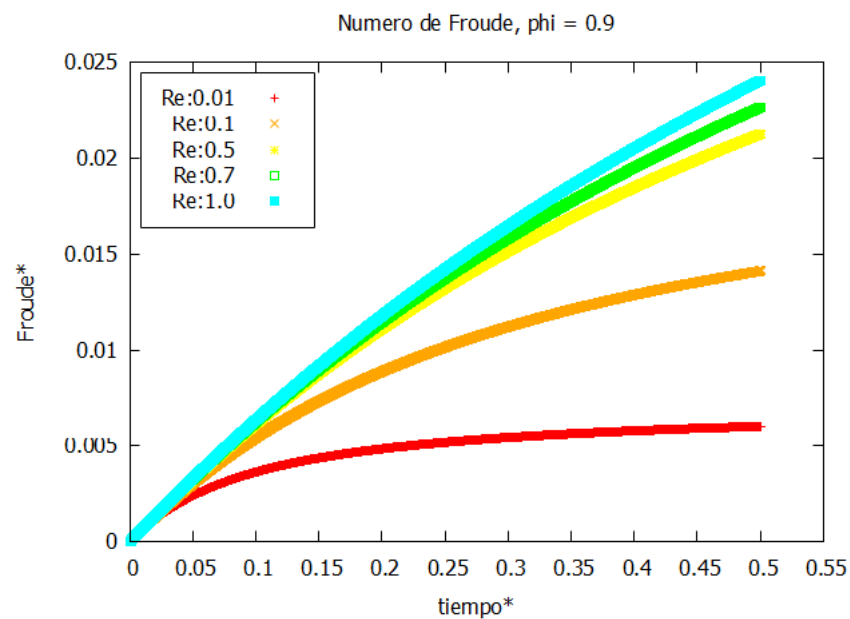


Figura 7.2: Número de Froude de la partícula para Phi: 0.9 y Re: 0.01-1.0

7.4. Phi: 2.0

Resultados:

Se presenta el caso de $\varphi = 2.0$ es decir cuando la densidad del fluido es el doble de la densidad de la partícula, cabe recordar que para valores de φ mayores a la unidad se obtienen velocidades negativas según el sistema de referencia establecido originalmente, dado que se está considerando el valor absoluto del número de Froude las curvas presentadas en este análisis muestran un comportamiento similar al de los casos anteriores con $\varphi < 1$. Con respecto al número de Reynolds se observa que al igual que en los otros casos a menor número de Reynolds más tiende a cero la pendiente. Se puede observar que para $\varphi = 2$ hasta el mayor número de Reynolds el comportamiento del número de Froude tiende ligeramente a una velocidad constante, este comportamiento se presenta menos en los otros casos.

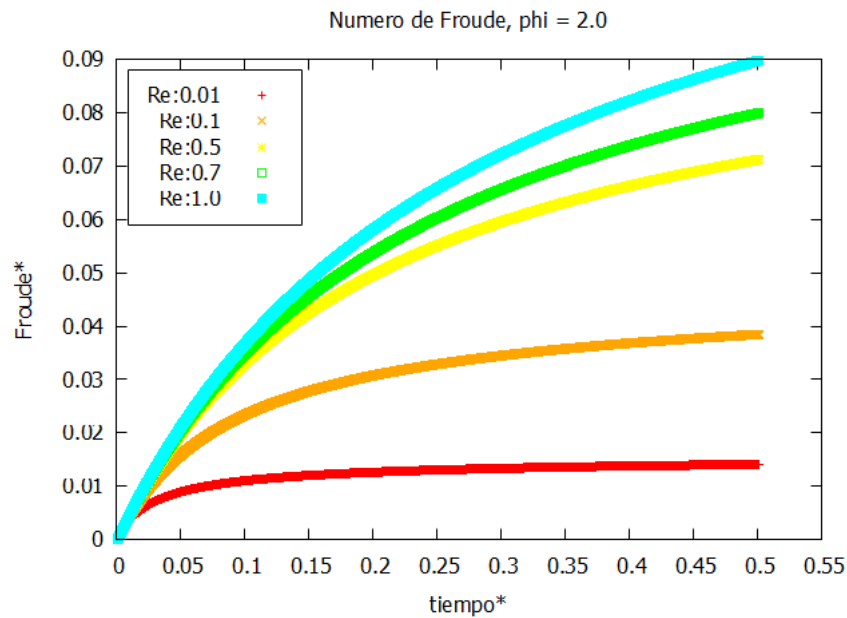


Figura 7.3: Número de Froude de la partícula para Phi: 2.0 y Re: 0.01-1.0

7.5. Conclusiones análisis adimensional

Luego de observar la representación gráfica del número de Froude en función del tiempo adimensional, se puede extraer información de cómo el número de Froude, que es proporcional a la velocidad de la partícula, se comporta frente a los efectos de la masa virtual y la fuerza de Basset. Además de su comportamiento frente a la variación de los valores de φ y Reynolds.

En primer lugar, se puede observar que para los tres casos la disminución del número de Reynolds resulta en menores valores máximos de Froude, también se observa que independiente del valor de φ a menor número de Reynolds es más clara la tendencia a un valor final que tiende a constante, lo que se representa en una pendiente que tiende a cero. Además, se puede ver que a medida que aumenta el número de Reynolds, la curva de Froude tiene a converger a una sola curva. Se puede concluir entonces que para todos los valores de φ estudiados los valores de Reynolds más pequeños son más significativos para los valores obtenidos.

Con respecto a la variación de φ se pueden ver diferencias considerables en los valores de Froude obtenidos, viendo que para valores más cercanos a la unidad se obtienen menores velocidades, lo que se puede atribuir a una menor acción de la gravedad.

Capítulo 8

Conclusiones y comentarios finales

Finalmente, con respecto a los cálculos y simulaciones realizadas con relación al movimiento de una partícula en un fluido, considerando los efectos de la masa virtual y la Fuerza de Basset se obtienen las siguientes conclusiones. Frente a las simulaciones realizadas considerando situaciones concretas, se corrobora que para una relación líquido-gas como lo es una gota de agua en movimiento en el aire, los efectos de la masa virtual y fuerza de Basset son mínimos y pueden ser ignorados. Se observa también que para pequeños cambios en la densidad del fluido se pueden ver grandes cambios en la progresión de velocidad de la partícula, por otro lado, también se observa que para ciertas relaciones de densidad se puede despreciar el efecto de ciertas variables, como lo es en concreto el arrastre de Stokes para relaciones de densidad con tendencia a la unidad.

Con respecto al análisis dimensional de la partícula se obtiene que el parámetro más importante a considerar en la simulación de velocidad de la partícula tiende a ser el número de Reynolds, ya que determina de forma significativa la curva de velocidad para cada caso, frente a esto se puede concluir que los efectos transientes tienen más preponderancia para valores pequeños de Reynolds como se presentó anteriormente y se observa también que para Reynolds igual a la unidad

se presentan curvas casi lineales en todos los casos comprobando que los efectos gravitacionales y arrastre de Stokes son los que determinan la curva.

Gracias al análisis dimensional se puede ver también como la variación de la relación de densidad φ puede afectar el número de Froude, principalmente este cambio se manifiesta como un cambio en los máximos valores de Froude obtenidos, para valores de φ más cercanos a la unidad se presentan menores valores máximos. También se puede observar como para valores de φ más cercanos a la unidad aumenta la importancia del efecto de la gravedad, tal como se presentó en la sección 2.5.2. Este factor hace que el efecto del número de Reynolds en el valor de Froude sea aún más notorio.

Finalmente, se puede concluir que se logra el objetivo principal de conocer más sobre el cómo las fuerzas transientes afectan el movimiento de una partícula en un fluido. Se logra conocer cómo números adimensionales conocidos en la mecánica de fluidos afectan el movimiento de la partícula y se logra generar conclusiones en función de casos concretos analizados de manera numérica.

Posibles trabajos futuros como continuación a este podrían desarrollar un análisis de la velocidad de la partícula considerando un fluido en movimiento, un análisis de la velocidad de una partícula bajo los efectos de las mismas fuerzas transientes, pero considerando más dimensiones del movimiento e incluso el mismo análisis, pero para partículas con distintas geometrías.

Referencias

- [1] TALAEI.A, GARRET.T. On the Maxey–Riley equation of motion and its extension to high Reynolds numbers. ResearchGate,:1-3, 2022, Agosto, 2022.
- [2] M.A.T, J.H.M H.J.H. An efficient, second order method for the approximation of the Basset history force. Journal of Computacional Physics,:1-2,Diciembre, 2010.
- [3] CARTWRIGHT.J. Stokes’s law, viscometry, and the Stokes falling sphere clock. Philosophical transactions ,:1-3,Junio, 2020.
- [4] STOKES.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. Trans. Cambridge Philos. Soc.(9),:8-106,1851.
- [5] BRENNEN.C. A Review of Added Mass and Fluid Inertial Forces. Naval civil engineering laboratory,:2-3.Enero, 1982.
- [6] TECHET.A. Hydrodynamics. Massachusetts Institute of Technology ,:1-2, 2005.
- [7] CROWE.C, SCHWARZKOPFS.J, SOMMERFELD.M TSUJI.Y. Particle-Fluid Interaction. En su: Multiphase flows with droplets and particles(94-95),Boca Raton, USA, CRC Press,2012,57-110.

- [8] LING.S, PARMAR.M, BALACHANDAR, S. A scaling analysis of added-mass and history forces and their coupling and dispersed multiphase flows.International Journal of multiphase flows.:103-111,2013
- [9] YOKOJIMA.S, SHIMADA.Y, MUKAIYAMA.K.A.A further study of Basset history force effect on particle clustering in turbulence.Department of Mathematical and Systems Engineering, Shizuoka University, :1-20,2022.
- [10] OLIVIERI.S, PICANO.F, SARDINA.G.The effect of the Basset history force on particle clustering in homogeneous and isotropic turbulence.[En linea].Physics of Fluids,23.04.2014, <<https://doi.org/10.1063/1.4871480>>, [Septiembre, 2022].
- [11] MICHAELIDES.E.E. A novel way of computing the Basset term in unsteady multiphase flow computations, Physics of Fluids, :1579-1582,1992.
- [12] BRENNEN.C.Single particle motion.En su: Fundamentals of Multiphase Flows. Cambridge, Cambridge University Press 2005.62-80.
- [13] Bombardelli.F, Gonzalez.A, Niño.Y.Computation of the Particle Basset Force with a fractional-derivative Approach.ASCE Library.2008.
- [14] VILLEGAS.M.On the long persistence of hydrodynamic memory. The European Physical Journal.:(1-12),2021.
- [15] ISRAEL. R ROSNER.D.E.Use of a Generalized Stokes Number to Determine the Aerodynamic Capture Efficiency of Non-Stokesian Particles from a Compressible Gas Flow,Aerosol Science and Technology,:45-51, 1982

Apéndice A

Anexo I: Código velocidad de la partícula considerando la fuerza de Basset

```

program draggravedadmassbasset

implicit none
integer::w, z, y
integer, parameter ::n=1000000 !cantidad de iteraciones
real(kind=8)::up(n), a, miu, upi, dt, mp, mf, g, volp, rop, rof, pi, t(n), t0, ny, f, tiempo

open(unit=30,file='draggravmbass.txt',action= 'write')

pi = 3.141592
rop = 9000 ![kg/m³] densidad arena
rof = 997 ![kg/m³] densidad agua 20°C
miu = 0.001002 ![Pa.s] viscosidad dinamica agua
ny = miu/rof ![m²/s] viscosidad cinematica agua
g = 9.8 ![m/s²] aceleración gravitacional
a = 0.0001 ![m] radio de la particula
volp = (4./3.)*pi*(a)**3) ![m³] volumen de la particula
mf = rof*volp !masa de fluido equivalente al volumen de la particula
mp = rop*volp !masa de particula
upi = 0![m/s] velocidad inicial de la particula
up(1)= upi
w = 1
t0 = 0
dt = 1.0d-6 !salto de tiempo
t(1)=t0
write(30,*)t(1),up(1)
f = (2*sqrt(dt)*mp) + (mf*sqrt(dt)) + (12*(a**2)*rof*dt*sqrt(pi*ny))
do while (w.lt.n)
  t(w+1) = t(w) + dt
  if (w==1) then
    !relacion que no considera la accion de la fuerza de basset
    up(w+1)= (up(w) - ((12*pi*a*miu*up(w)*dt)/((2*mp)+mf)) + ((mp-mf)*g*2*dt)/(2*mp+mf))
    write(30,*)t(w+1),up(w+1)
  else
    up(w+1) = (up(w) - ((6*pi*a*miu*up(w)*2*dt*sqrt(dt))/f)+((mp-mf)*g*2*dt*sqrt(dt))/f) &
    +((12*(a**2)*rof*dt*sqrt(pi*ny*dt))/f)*H(w,dt,up))
    write(30,*)t(w+1),up(w+1)
    write(*,*)up(w+1),((6*pi*a*miu*up(w)*2*dt*sqrt(dt))/f),((mp-mf)*g*2*dt*sqrt(dt))/f)
    write(*,*)((12*(a**2)*rof*dt*sqrt(pi*ny*dt))/f)*H(w,dt,up)
  end if
  w = w+1
end do

```

```

end do

close(30)

call cpu_time(tiempo)
write(*,*) 'Tiempo:', tiempo, '[s]'

open(60, file='dragygmb.gnu', action= 'write')

    write(60,*) 'set terminal pngcairo'
    write(60,*) "set output 'Basset.jpg'"
    write(60,*) "set xlabel 'tiempo [s]'"
    write(60,*) "set ylabel 'Velocidad [m/s] '"
    write(60,*) "set title 'Fuerza de Basset'"
    write(60,*) "plot'draggravmbass.txt' lt 4 t 'Particula de cobre en agua a 20°C'"
    write(60,*) "set logscale x"
    write(60,*) "set output 'Bassetlog.jpg'"
    write(60,*) "replot'draggravmbass.txt' lt 4 t 'Particula de cobre en agua a 20°C'"
close(60)
contains

function H(z,dt,up)
    implicit none
    real(kind=8) :: H, up(z), dt
    integer:: z, y
    H = 0
    y = 1
    do while (y.lt.z)
        H = H - ((up(y+1)-up(y))/sqrt(((z+1)-y)*dt))
        y = y + 1
    end do
end function

end program

```

Apéndice B

Anexo II: Código velocidad adimensional de la partícula considerando la fuerza de Basset

Program Adimensional

```

implicit none
integer::w, z, Y, p, i
integer, parameter ::n=100000!iteraciones de tiempo
integer, parameter ::it=5 !para cada numero de Reynolds
real(kind=8)::Fr(n),Fr1, D, dt, g, pi, t(n), t0,f, phi, Ret(it), fl, Re

open(unit=30,file='Adimensional.txt',action= 'write')

g = 9.8d0 ![m/s]
D = 0.00001 ![m]
pi = 3.141d0
phi = 0.5d0 !valor adimensional equivalente a rho f / rho p
Ret(:) = [0.01d0,0.1d0,0.5d0,0.7d0,1.0d0] !Numero de Reynolds variable
Fr1 = 0.0d0 !Numero de Froude inicial
Fr(1)= Fr1
w = 1
dt = 1.0d-6 !salto de tiempo
t(1)= dt*(sqrt(g/D))
p = 1

do while (p.le.it)

    Re = Ret(p)
    write(30,*)t(1),Fr(1)
    write(*,*)Fr(1), Re

    do while (w.lt.n)
        if (w==1) then
            fl = (1.0d0/dt)+(phi/(2.0d0*dt))
            Fr(w+1) = (Fr(w) + ((1-phi)/fl) - ((18.0d0*phi*((Fr(w))**2)/(Re*fl)))
            t(w+1) = t(w) + dt
            write(30,*)t(w+1),Fr(w+1)
            write(*,*)Fr(w+1), Re

```

```

else
    f = (1.0d0/dt)+(phi/(2.0d0*dt))+((9.0d0*phi*sqrt(Fr(w)))/(sqrt(pi*Re*dt)))
    Fr(w+1) = Fr(w)+((1.0d0-phi)/f)- ((18.0d0*phi*((Fr(w))**2))/(Re*f)) + ((H(w,dt,Fr)*
((9.0d0*phi*sqrt(Fr(w)))/(sqrt(pi*Re)*f)))
    t(w+1) = t(w) + dt
    write(30,*) t(w+1), Fr(w+1)
    write(*,*) Fr(w+1), Re

end if
w = w+1
end do

p = p+1
w = 1
write(30,*)
write(30,*)
end do

open(60, file='adimensional.gnu', action= 'write')

write(60,*) 'set terminal pngcairo'
write(60,*) "set output 'phi09fr.1.jpg'"
write(60,*) "set xlabel 'tiempo'"
write(60,*) "set ylabel 'Froude'"
write(60,*) "set title 'Numero de Froude, phi = 0.9'"
write(60,*) "set key box width 1 height 1"
write(60,*) "set key top left box"
write(60,*) "plot 'adimensional.txt' index 0 lc rgb 'red' t 'Re:0.01','adimensional.txt' index 1
lc rgb 'orange' t &
'Re:0.1','adimensional.txt' index 2 lc rgb 'yellow' t 'Re:0.5','adimensional.txt' index 3 lc rgb
'green' t &
'Re:0.7','adimensional.txt' index 4 lc rgb 'cyan' t 'Re:1.0'"

contains

function H(z,dt,Fr)
implicit none
real(kind=8) :: H, Fr(z), dt
integer:: z, y
H = 0
y = 1
do while (y.lt.z)
H = H - ((Fr(y+1)-Fr(y))/(sqrt(((z+1)-y)*dt)))
y = y + 1
end do
end function

end program

```