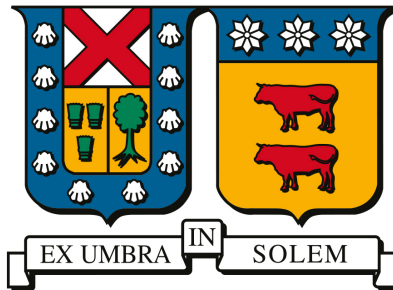


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
VALPARAÍSO - CHILE



DETERMINACIÓN DE
COEFICIENTES DE PÉRDIDA DE
CARGA EN CONTRACCIONES
ABRUPTAS CERCANAS AL
RÉGIMEN TRANSÓNICO

MARTÍN ORLANDO QUEVEDO ULLOA

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO

Profesores patrocinantes: Dr. Ingeniero Carlos Rosales,
Dr. Ingeniero Martín Cisternas

Agosto - 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título Tesis de Postgrado

Título del trabajo: DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DE PÉRDIDA DE CARGA EN CONTRACCIONES
ABRUPTAS CERCANAS AL RÉGIMEN TRANSÓNICO

Nombre del candidato(a): Martín Orlando Quevedo Ulloa

Carrera / Grado: Ingeniería Civil Mecánica

Campus: Casa Central

Departamento: Mecánica

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Carlos Rosales Huerta _____, en mi calidad
de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

6 meses 12 meses 2 años 3 años 5 años 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 15/01/2026

Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 13/01/2026

Firma:



1 Resumen

La pérdida de carga (head loss) para flujo a través de una contracción abrupta es un problema de larga data en mecánica de fluidos. Los estudios experimentales y analíticos que se han realizado son casi exclusivamente para flujo incompresible. Es sabido que coeficientes incompresibles no son aplicables a flujos compresibles con cambios significativos de presión. No obstante, no hay coeficientes de pérdida de carga disponibles en la literatura para flujo en contracciones con números de Mach significativos en la descarga, y el único tratamiento propuesto es la aproximación de Benedict, Carlucci y Swetz, para extender los coeficientes incompresibles al caso de flujo compresible. El objetivo general del trabajo es determinar coeficientes de pérdida de carga para esta geometría en el caso de flujo compresible en régimen cercano al límite sónico, mediante dinámica de fluidos computacional.

2 Abstract

The head loss for flow through a sharp-edged contraction is a long-standing problem in fluid mechanics. Experimental and analytical studies that have been carried out are almost exclusively for incompressible flow. It is well known that those incompressible coefficients are not applicable to compressible flows with significant pressure changes. Nevertheless, there are no head loss coefficients available in the literature for flows through contractions with significant Mach numbers at the outlet, and the only treatment that has been proposed is the approximation of Benedict, Carlucci, and Swetz, which extends the incompressible coefficients to the compressible case.

The general objective of this work is to determine head loss coefficients for this geometry in the case of compressible flow under conditions close to the sonic limit, by means of computational fluid dynamics (CFD).

Índice

1	Resumen	1
2	Abstract	1
3	Introducción y objetivos	5
3.1	Objetivo general	5
3.2	Objetivo específicos	5
3.3	CFD y Elementos finitos	6
3.4	Fluidos	6
3.5	Estado del arte	7
4	Marco Teórico	8
4.1	Leyes de conservación	8
4.2	Teorema de transporte de Reynolds	8
4.3	Conservación de masa	9
4.4	Conservación del Momentum Lineal	9
4.4.1	No Conservativa	10
4.4.2	Conservativa	10
4.5	Conservación de energía	10
4.6	Tensor de esfuerzos	11
4.7	Adimensionalización	11
4.8	Número de Reynolds	12
4.9	Número de Prandtl	12
4.10	Coefficiente de Pérdida	13
4.11	Ecuación de estado de los gases	14
4.12	Conservación en una tubería	14
4.12.1	Conservación de masa	14
4.12.2	Conservación de momentum	14
4.12.3	Conservación de energía	15
4.13	Ecuación general de energía en tuberías	16
4.14	Head Loss	17
4.15	Número de Mach	17
4.16	Modelo del flujo	19
4.17	<i>Total Pressure Ratio</i>	19
5	El proceso de discretización	21
5.1	Modelado físico y geométrico	21
5.2	Discretización del dominio	21
5.3	Discretización de la ecuación	22
5.4	Propiedades de las ecuaciones discretizadas	23
5.4.1	Conservación	23
5.4.2	Exactitud	24

5.4.3	Convergencia	24
5.4.4	Estabilidad	24
5.5	Condiciones de Borde	25
5.5.1	Condición de borde de Dirichlet	25
5.5.2	Condición de borde de Neumann	25
5.6	Tipos de elementos volumétricos	26
5.7	Cell-centered v/s Vertex centered	26
5.8	Esquema Implícito y Explícito	27
5.9	Condición CFL	28
5.10	Solución de ecuaciones discretizadas	28
5.10.1	Método directo	28
5.10.2	Método Iterativo	29
5.11	Ecuación general en el método de volúmenes finitos	29
5.12	Esquemas de interpolación de solución para CFD	30
5.12.1	Método UPWIND	30
5.12.2	Esquema Upwind de Primer Orden para el término convectivo	30
5.12.3	Esquema Upwind de Segundo Orden para el término convectivo	31
5.12.4	Método QUICK	31
5.12.5	Método MUSCL	33
5.13	Modelos de turbulencia	33
5.14	<i>Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)</i>	34
5.14.1	Modelo $k - \epsilon$	34
5.14.2	Modelo $k - \omega$	35
5.14.3	$k - \omega$ BSL y SST	35
5.15	Herramientas de relajación y convergencia	36
5.15.1	Limitador de gradiente	36
5.16	Discretización del gradiente en un volumen de control	37
5.16.1	Green-Gauss	37
5.16.2	Least Squares o mínimos cuadrados	38
6	Modelado y esquema general	39
6.1	Generación de geometría	39
6.2	Meshing o Generación de malla	40
6.2.1	Asignado de caras	40
6.3	Setup	41
6.3.1	Propiedades del <i>solver</i>	41
6.3.2	Materiales	41
6.3.3	Condiciones de borde	41
6.3.4	Propiedades de Solución	41
6.3.5	Criterios de convergencia	42
6.3.6	Métodos de solución	42
6.3.7	Condición de entrada de presión vs velocidad	42
6.4	Estimación del refinado de malla	43

6.5	Comparación de convergencia de método UPWIND y MUSCL	45
7	Resultados	48
7.1	Configuración 50-40 [mm] $\beta = 0.8$	48
7.2	Configuración 50-35 [mm] $\beta = 0.7$	51
7.3	Configuración 50-30 [mm] $\beta = 0.6$	54
7.4	Configuración 50-25 [mm] $\beta = 0.5$	57
7.5	Configuración 50-20 [mm] $\beta = 0.4$	60
7.6	Configuración 50-15 [mm] $\beta = 0.3$	63
8	Análisis y comparación de resultados	66
8.1	K v/s número de Mach	66
8.2	Comparación de K obtenido y K de literatura	70
8.3	Análisis de la aproximación por TPR	71
8.4	Correlación entre Reynolds y K	74
9	Análisis General y Conclusiones	76
	References	79
10	Anexos	80
10.1	Código de graficado de funciones	80
10.2	Código de estimación de presión total aguas abajo	82
10.3	Tablas de resultados promediados en el área transversal	84
10.4	Tabla de presiones obtenidas por TPR	89

3 Introducción y objetivos

En este documento se presenta un marco teórico que permite contextualizar de manera general la problemática simulada en ANSYS Fluent, desde conceptos básicos de mecánica de fluidos en tuberías, precisamente en contracciones abruptas, hasta una descripción general de la metodología utilizada en la mecánica de fluidos computacional. Posteriormente se realizan simulaciones para el caso estudiado en conjunto con un análisis y conclusión de cada caso.

3.1 Objetivo general

- Analizar numéricamente el comportamiento del flujo compresible a través de una contracción abrupta (**sharp-edge contraction**), determinando el coeficiente de pérdida de carga K y evaluando su dependencia con el número de Mach y la relación de diámetros en la tobera.

3.2 Objetivo específicos

- **Implementar simulaciones CFD** : de flujo compresible en una tobera con contracción abrupta, utilizando diferentes condiciones de entrada y relaciones de área.
- **Validar la metodología numérica** : comparando distintos esquemas de discretización (UPWIND y MUSCL), analizando el efecto que tienen en el estabilidad y precisión de las soluciones.
- **Calcular el coeficiente de pérdida de carga K** : a partir de los resultados de presión y velocidad, contrastando los valores obtenidos en CFD con relaciones teóricas de la literatura disponible.
- **Evaluar la influencia de la relación de diámetros $\beta = d_d/d_u$** en el valor de K , verificando si las tendencias numéricas concuerdan con expresiones analíticas como el *jet velocity*
- **Analizar el efecto del régimen de flujo (numero de Mach)** sobre la magnitud de pérdida de carga, identificando condiciones en que los modelos responden de manera más sensible.
- **Comparar los resultados de convergencia y estabilidad** entre distintos esquemas de solución y mallas, determinando su peso en el cálculo de K
- **Generar una tabla de referencia con valores de K** en función de β y del número de Mach, permitiendo caracterizar las caídas de presión en este tipo de fenómeno.

3.3 CFD y Elementos finitos

Las herramientas de simulación numérica son esenciales para todos los procesos de ingeniería a los cuales nos enfrentamos hoy en día. La dinámica de fluidos computacional (CFD, sigla en inglés) es una de estas herramientas, aunque en primera instancia era utilizada exclusivamente en el área de aeronáutica y aeroespacial. Su uso actualmente se expande a casi todas las aristas de la ingeniería aplicada, tales como la automotriz, química, nuclear y marina, así como también en la aplicación de HVAC (heating, ventilating and air conditioning), simulación de incendios y calidad del aire.

El método de volúmenes finitos (FVM en inglés) es una técnica numérica que transforma las ecuaciones diferenciales parciales que representan las leyes de conservación sobre volúmenes (o celdas) finitas. Las leyes son discretizadas y analizadas en cada elemento que conforma el "volumen" en su totalidad. Existe una facilidad para implementar condiciones de borde así como también evaluar la evolución de las variables a lo largo del tiempo, es por esto que este método es el preferido en CFD, convirtiéndolo en la herramienta ideal para el análisis de transferencia de masa, calor y flujo.

3.4 Fluidos

Los fluidos, los cuales están compuestos por gases y líquidos, son sustancias las cuales no cambian permanentemente bajo la influencia de alguna fuerza, mientras un sólido se resiste a un esfuerzo cortante o tangencial por medio de la deformación, un fluido no posee una forma constante. Mientras los gases son fluidos los cuales llenan completamente su dominio. Al analizar los fenómenos físicos que regulan a estos elementos nos concentraremos más en su comportamiento macroscópico en vez de un análisis microscópico. Los fluidos pueden ser clasificados como newtonianos o no-newtonianos. Un fluido Newtoniano: "es aquel cuya viscosidad permanece constante independientemente de la tensión cortante aplicada", en cambio un fluido no-newtoniano "es aquel cuya viscosidad cambia bajo tensión" donde la relación es no lineal. Los fluidos son gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales corresponden a una serie de ecuaciones parciales de segundo orden, divididas en 4 variables independientes entre sí. Los flujos transientes son representados por ecuaciones hiperbólicas, las capas límites por parabólicas y la recirculación de fluidos por elípticas, dada la variabilidad de comportamientos de un fluido es difícil describirlos por solamente un comportamiento determinado, en general una mezcla de estos tipos de ecuaciones pueden describir con buena exactitud el comportamiento del fenómeno. Esta categorización se traduce numéricamente como lo siguiente: Flujos parabólicos determinados por solamente el flujo aguas arriba, flujos elípticos determinados por los flujos de aguas arriba y abajo y finalmente flujos parabólicos, los cuales presentan discontinuidades en sus soluciones (Como las ondas de choque).

3.5 Estado del arte

Las simulaciones nos permiten estimar de manera fidedigna fenómenos a los que la industria se enfrenta día a día. Tanto en la minería como en la industria petro-química, las inyecciones de distintos tipos de fluidos a estanques presurizados son una problemática frecuente. En general tratamos con fluidos "incompresibles" como el agua o el aceite a ciertas temperaturas de operación comunes. Existen también los casos donde es necesario inyectar gases, ya sean de combustión o compuestos por ciertos elementos químicos que deben ser mezclados en variados procesos industriales. Tomando en cuenta que las caídas de presión son ocasionadas por la fricción y que existen casos donde la velocidad del fluido determina la calidad de la mezcla que podemos obtener dentro de un estanque, nos podemos enfrentar a velocidades que se acercan a la del sonido, donde por lo tanto los efectos de compresibilidad de los gases generan pérdidas de "altura de presión", sobre todo si la geometría de las toberas varían a lo largo del trayecto.

La figura 1 muestra una tobera típica de inyección de gases de la industria pirometalúrgica, ejemplos como este pueden ocurrir en sistemas neumáticos, hidráulicos, etc.

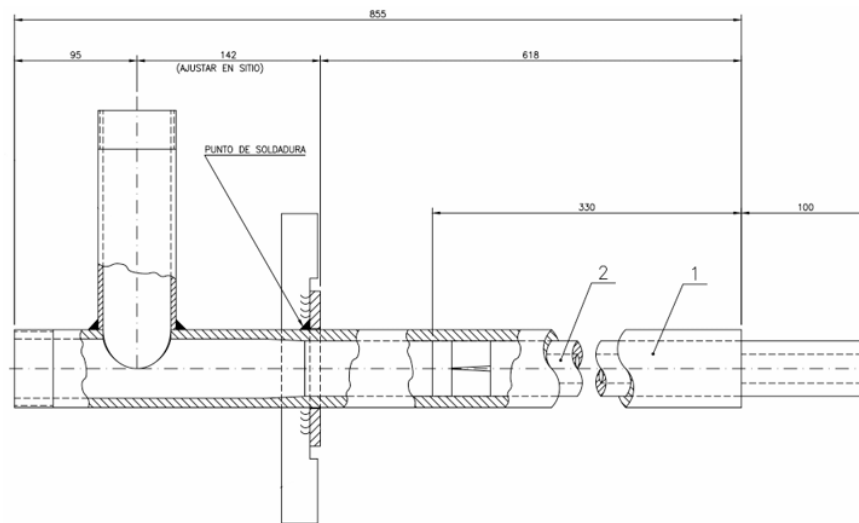


Figura 1: Diagrama de conjunto del sistema. (1):tubo (2):tobera

Es en estos casos donde la literatura existente no entrega las herramientas necesarias para determinar la correspondiente caída de presión. Por lo tanto realizar una simulación del fenómeno es conveniente para determinar las variables en juego que gobiernan el problema físico. Actualmente, para casos donde nos encontramos con una contracción abrupta (**sharp-edge contraction**), las constantes entregadas por la literatura académica (Benedict and Webb, 1966) están acotadas para casos incompresibles. En el siguiente informe se muestran resultados obtenidos a partir de casos extensibles a la práctica, permitiendo así la aplicación en la industria de manera simple, donde se requiere determinar la pérdida de carga en una contracción abrupta con números de Mach cercanos al régimen transónico. La contracción ocurre en el paso del flujo desde el tubo exterior (1) a la tobera (2).

4 Marco Teórico

4.1 Leyes de conservación

El principio de conservación estipula que para un sistema aislado, ciertas variables físicas se conservan sobre una región local. Las leyes de conservación pueden ser formuladas mediante una definición Lagrangiana, donde el fluido es dividido en pequeños elementos de control los cuales se mueven a través del espacio-tiempo (generalmente haciendo un seguimiento de su centro de masa) o en su defecto, una aproximación Euleriana, enfocada en un volumen de control fijo en el espacio mientras el tiempo evoluciona. En resumen la principal diferencia recaen en el foco del elemento de control, ya sea un área fija o móvil en el tiempo.

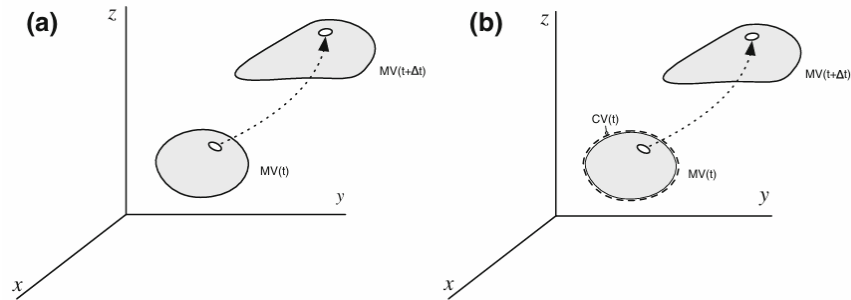


Figura 2: a.-Lagrangiano y b.-Euleriano (Rennels and Hudson, 2022)

4.2 Teorema de transporte de Reynolds

Para poder expresar las leyes de conservación bajo una perspectiva Euleriana, es necesario conocer el equivalente de una integración sobre un fluido en movimiento. Esto es proporcionado por el teorema de transporte de Reynolds. Para la derivación de la formula tomemos como B a cualquier propiedad extensiva del fluido (masa, momentum, energía) y sea $b = \frac{dB}{dm}$ la propiedad intensiva (cantidad de B por unidad de masa), en cualquier elemento del fluido. Para un volumen de control tomaremos el cambio total instantáneo en B como el cambio instantáneo de B en el volumen de control más el flujo neto de B en la superficie de control.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} b dV = \int_{V(t)} \frac{\partial b}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (4.1)$$

donde $V(t)$ es el volumen de control en el instante t , $S(t)$ es la superficie del volumen de control, \vec{v} es la velocidad del fluido relativa a $S(t)$, \vec{n} es el vector unitario normal a $S(t)$ que apunta hacia el exterior y ρ es la densidad del fluido.

4.3 Conservación de masa

El principio de conservación de masa indica que en la ausencia de fuentes o sumideros, un sistema conservará su masa a nivel local.

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

donde la masa es tomada como propiedad intensiva, así la expresión equivalente en un sistema de conservación coordinado Euleriano corresponde a:

$$\int_V \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v \right] dV = 0 \quad (4.3)$$

donde $D\rho/Dt$ denota la derivada material:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \quad (4.4)$$

Para que esta integral sea cierta para cualquier volumen de control V , el integrando deberá ser igual a cero, dando así la forma diferencial de la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad (4.5)$$

En la ausencia de cambios significativos de presión absoluta o de temperatura, es aceptable asumir que el flujo es incompresible. Esto funciona "bien" para la mayoría de los casos donde el fluido es un líquido o en gases a bajas velocidad. La incompresibilidad es denotada como $D\rho/Dt = 0$, en pocas palabras significa que el "flujo entrante" es igual al "flujo saliente" donde la densidad del fluido es invariable a lo largo del "Streamline". (Moukalled et al., 2016)

4.4 Conservación del Momentum Lineal

El principio de conservación del momentum lineal indica que en la ausencia de alguna fuerza externa sobre un cuerpo, el momentum total del mismo es conservado, i.e, el producto entre la masa y el vector de velocidad. Como el momentum es una variable vectorial, sus componentes también serán conservados. La segunda ley de Newton aplicada a un cuerpo de masa m y velocidad v sometido a una fuerza f por unidad de volumen es igual a:

$$\frac{D(m\mathbf{v})}{Dt} = \int_V \mathbf{f} dV \quad (4.6)$$

Las expresiones equivalentes en coordenadas Eulerianas pueden ser escritas de dos formas diferentes, conservativa y no conservativa.

4.4.1 No Conservativa

Notemos que ahora $b = \mathbf{v}$, la forma no conservativa es obtenida al utilizar la ecuación Eq.(4.1)

$$\rho \frac{Dv}{Dt} + \mathbf{v} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) = \mathbf{f} \quad (4.7)$$

4.4.2 Conservativa

La forma conservativa es obtenida al aplicar el teorema de transporte de Reynolds a la ecuación Eq.(4.1), definiendo el integrando igual a cero para cualquier volumen V , la forma conservativa de la ecuación de momentum se obtiene como:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \mathbf{v}] + \nabla \cdot \{ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \} = \mathbf{f} \quad (4.8)$$

donde $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ corresponde al tensor diádico, siendo este un caso especial de el producto de un tensor donde la divergencia es un vector. La fuerza \mathbf{f} se subdivide en la suma de las fuerzas ejercidas en la superficie y las restantes, las cuales corresponden a las fuerzas de cuerpo, de rotación. Podemos notar que la influencia externa de las fuerzas genera un cambio en el momentum, ya sea por un cambio en las fuerzas internas del fluido de control o por una fuerza externa.

4.5 Conservación de energía

La conservación de energía es gobernada por la primera ley de la termodinámica. Ella establece que la energía no puede ser creada ni destruida, solo puede cambiar su forma (mecánica, cinética, química, etc.) a otra. Es por esto que la suma de todas las formas de energía en un sistema cerrado permanece constante. Por lo tanto podemos definir la energía total E como la suma de su energía interna y su energía cinética, con velocidad \mathbf{v}

$$E = m(\hat{u} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (4.9)$$

Donde \hat{u} es la energía interna específica del fluido (energía interna por unidad de masa), esto puede escribirse, dada la primera ley de la termodinámica, como la cantidad de calor entrante menos el trabajo realizado.

$$\frac{dE}{dt} = (\dot{Q} - \dot{W}) \quad (4.10)$$

Podemos definir la ecuación de energía en términos del teorema de transporte de Reynolds como el calor transferido a través de la superficie del volumen de control, la energía generada por reacciones químicas y a su vez el trabajo generado sobre la superficie como también el trabajo generado por las fuerzas del cuerpo.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e_t) + \nabla \cdot (\rho e_t \vec{v}) = -\nabla \cdot \vec{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot (p\vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (4.11)$$

Donde:

- ρ : densidad del fluido
- $e_t = e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2$: energía total por unidad de masa (interna + cinética)
- \vec{v} : velocidad del fluido
- $\vec{q} = -k\nabla T$: flujo de calor (ley de Fourier)
- $\boldsymbol{\tau}$: tensor de esfuerzos viscosos
- p : presión
- \vec{f} : fuerzas volumétricas (como la gravedad)

4.6 Tensor de esfuerzos

Para un elemento volumétrico cualquiera, las fuerzas que actúan en su superficie corresponden a la presión y a los esfuerzos viscosos, los cuales son representados como un tensor \sum , como se muestra en la ecuación (4.12). En general existen 9 componentes de esfuerzo en cualquier punto; uno normal a la superficie y dos de corte tangenciales a la superficie.

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Este tensor es simétrico, de modo que hay seis componentes de esfuerzo independientes. Podemos definir la superficie donde actúa la presión como un elemento de área dS con orientación \mathbf{n} , aplicando el teorema de la divergencia, la fuerza total actuando sobre el volumen de control viene dado por:

$$\int_V \mathbf{f}_s dV = \int_s \sum \cdot \mathbf{n} dS = -\nabla p + [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] \quad (4.13)$$

4.7 Adimensionalización

Es común escribir las ecuaciones que gobiernan los fenómenos físicos utilizando variables adimensionales, las cuales son obtenidas a través de una apropiada caracterización. El uso de estas herramientas posee varias ventajas, una de ellas es reducir el número total de parámetros que afectan el comportamiento de las ecuaciones, esto permite discernir entre las que poseen un mayor peso a la hora del control práctico del fenómeno. Una variable dimensional es adimensionalizada por medio de la división de la variable sobre una cantidad finita, la cual debe tener la misma dimensión de la variable original, por ejemplo, una coordenada

espacial puede ser dividida en una distancia característica, como así también ocurre con la velocidad, presión, entre otras.

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L} \quad (4.14)$$

4.8 Número de Reynolds

El número de Reynolds, como se describe en White (2006), donde U es la velocidad del flujo en un largo L :

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \quad (4.15)$$

Este número puede ser interpretado como la relación entre los términos inerciales y difusivos. Relaciona la densidad, viscosidad, velocidad y dimensión típica de un flujo en una expresión adimensional, denotando si el flujo se encuentra en un régimen laminar, de transición o turbulento. En la siguiente imagen se muestran distintos valores de Re y su implicancia.

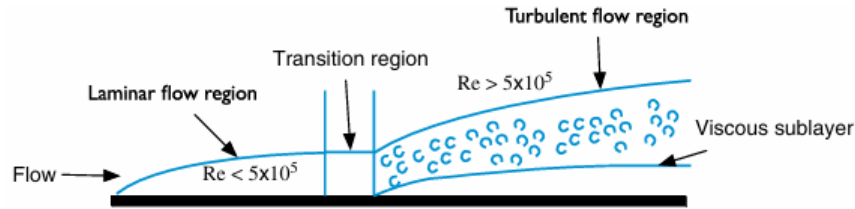


Figura 3: Esquema de flujo sobre una placa mostrando los distintos tipos de regímenes (Rennels and Hudson, 2022)

Podemos notar que la velocidad de flujo U sobre un largo L crecen a medida que el número Re aumenta.

4.9 Número de Prandtl

Como se define en White (2006), el número de Prandtl es:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{k} \quad (4.16)$$

Donde:

- $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática [m^2/s],
- $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ es la difusividad térmica [m^2/s],
- μ es la viscosidad dinámica,

- k es la conductividad térmica,
- c_p es la capacidad calorífica a presión constante.

Físicamente, el número de Prandtl indica cuál de los dos mecanismos (el transporte de cantidad de movimiento o el transporte de calor) domina en el flujo:

- Si $Pr \ll 1$: el calor se difunde mucho más rápido que la cantidad de movimiento. Ejemplo: metales líquidos como el mercurio.
- Si $Pr \gg 1$: la cantidad de movimiento se difunde más rápido que el calor. Ejemplo: aceites y fluidos viscosos.
- Si $Pr \approx 1$: el transporte de calor y momento ocurren a escalas similares. Ejemplo: aire, agua a temperatura ambiente.

La siguiente tabla muestra valores típicos del número de Prandtl para algunos fluidos:

Fluido	Número de Prandtl, Pr
Aire (20 °C)	0.71
Agua (20 °C)	7.0
Mercurio (20 °C)	0.02
Aceite vegetal	100 – 400
Gas de hidrógeno	0.7
Glicerina	1000+

Tabla 1: Valores aproximados del número de Prandtl para algunos fluidos comunes.

4.10 Coeficiente de Pérdida

El coeficiente de pérdida o *Loss Coefficient* (Rennels and Hudson, 2022) utilizado ampliamente en ingeniería de *Piping*, representa la medida de la caída de presión de varios componentes en un sistema fluido. Para una tubería, de área constante, recta y que posee pérdidas por fricción, el coeficiente de pérdida se define como:

$$K = f \frac{L}{D} \quad (4.17)$$

- K = Coeficiente de pérdida
- f = Factor de fricción de Darcy.
- L = Largo de la tubería.
- D = Diámetro de la tubería.

Para otros tipos de elementos como los codos, válvulas o salidas, el coeficiente de pérdida está dado por un número que caracteriza la resistencia al flujo. Muy pocos de estos coeficientes pueden ser derivados analíticamente. La mayoría son obtenidos por medio de la experimentación. En el caso de pérdidas relacionadas a contracciones y/o expansiones el valor de K se calcula como:

$$K = \frac{\Delta p}{1/2\rho V^2} \quad (4.18)$$

4.11 Ecuación de estado de los gases

Como los gases pueden cambiar mucho su volumen, presión y temperatura es necesaria una expresión que relacione estas tres variables. La *Ecuación de estado de los gases* derivada en la ecuación de los gases ideales nos permite determinar estos elementos.

$$pv = RT \quad (4.19)$$

Donde v es el volumen específico, R es la constante del gas en particular.

4.12 Conservación en una tubería

4.12.1 Conservación de masa

La ecuación de continuidad nos dice que la cantidad de flujo entrante es igual a la saliente, esto quiere decir que la materia se conserva, por lo que si la masa no se acumula o libera del volumen de control, nos encontramos con:

$$\dot{m} = AV\rho \quad (4.20)$$

$$A_1V_1(\rho_1) = A_2V_2(\rho_2) \quad (4.21)$$

Estas ecuaciones tienen por supuesto que el perfil de velocidad es plano, esto quiere decir que la velocidad del flujo es la misma a lo largo de toda la sección transversal, por lo que hablamos de *velocidad promedio*. De igual manera si ambas densidades fuesen iguales nos encontraríamos en el caso donde el fluido es incompresible.

4.12.2 Conservación de momentum

A partir de las ecuaciones de continuidad podemos hacer un balance en una tubería cualquiera, donde aplicamos la ley de conservación de masa y momentum.

Considerando la segunda ley de Newton, donde P_1A_1 es la fuerza axial entrante, F_x la fuerza residual entre la presión de entrada y la entrante por la salida P_2A_2 . Los términos $\dot{w}V_1/g$ y $\dot{w}V_2/g$ son el momentum entrante y saliente respectivamente, podemos despejar la fuerza axial como:

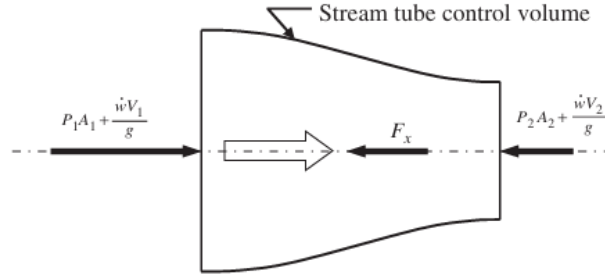


Figura 4: Esquema de flujo sobre una tubería, (Rennels and Hudson, 2022)

$$F_x = \dot{m}V_1 - \dot{m}V_2 \quad (4.22)$$

En la figura 4 podemos notar que se utiliza la notación de flujo de "peso" por unidad de tiempo, este no es conveniente al utilizar el sistema métrico, por lo que la conservación de momentum queda definida como es mostrado en la ecuación 4.22.

4.12.3 Conservación de energía

La conservación de la energía nos permitirá establecer el valor de las pérdidas de esta misma en una tubería, como su nombre lo dice, la conservación de la energía recae en la ecuación de conservación, esto quiere decir que la energía que entra a un sistema es igual a la que sale del mismo. Para entender los tipos de energía que entran en juego en una tubería, debemos ponerlos en medidas estándares de elevación equivalente en $[m]$ (ya que la verdadera energía es medida en $[J]$), estas cantidades de energía equivalen a energía por unidad de peso del fluido.

Energía Potencial (por unidad de peso)

Llamada también *elevación o pressure head* en inglés, corresponde a la cantidad de energía que toma levantar un líquido a cierta altura, por esto es medida en $[J/N]$ o simplemente m equivaliendo a la altura Z a la que es elevada.

Energía De Presión (por unidad de peso)

La presión es comúnmente expresada como $[N/m^2]$. Si la presión ejercida por el fluido es dividida por su densidad, su potencial para realizar trabajo es también expresado en unidades energéticas.

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{(N/m^2)}{(kg/m^3)(m/s^2)} = [m] \quad (4.23)$$

Un fluido sometido a una presión p puede ser elevado a una altura manométrica de $P/\rho g$ llamada también *pressure head*.

Energía Cinética (por unidad de peso)

Para cualquier cuerpo en caída libre establecemos que la velocidad que este obtiene al caer viene dada por $V = \sqrt{2g\Delta Z}$.

Asumiendo que la velocidad promedio en una sección transversal de la tubería es constante, podemos decir que su energía de movimiento corresponde a $V^2/2g$ medida en J/N , también llamado *velocity head*. Como en realidad el perfil de velocidad de los fluidos cambia a medida que nos acercamos al centro de la tubería, conviene agregar un factor de corrección ψ .

$$H_{KE} = \psi V^2/2g \quad (4.24)$$

Energía de Calor (por unidad de peso)

El calor Q por unidad de peso se expresa como:

$$\frac{Q}{\dot{m}} = \frac{W}{[kg/s][m/s^2]} = [m] \quad (4.25)$$

Para la energía interna, la cual corresponde a la energía térmica poseída por el fluido al entrar al sistema de control o al salir, podemos simplificarla en unidades de potencial como:

$$\frac{u}{g} = \frac{J/kg}{m/s^2} = [m] \quad (4.26)$$

Energía de Trabajo mecánico (por unidad de peso)

El trabajo mecánico realizado por en un fluido por una bomba o turbina, debe ser expresado en unidades de potencia, o trabajo sobre tiempo, para mantener una consistencia en la dimensionalidad de la ecuación de energía estas deben ser convertidas a unidades de potencial como:

$$\frac{E_p}{\dot{m}g} = \frac{W}{[kg/][sm/s^2]} = [m] \quad (4.27)$$

Para la energía suministrada por una bomba y $E_t/\dot{m}g$ para una turbina.

4.13 Ecuación general de energía en tuberías

Dados los tipos de energía que entran en juego en el balance energético de un volumen de control definido tenemos:

$$\frac{p_1}{(\rho_1)g} + \frac{\varphi_1 V_1^2}{2g} + Z_1 + \frac{u_1}{g} + \frac{Q_1}{\dot{m}g} + \frac{E_P}{\dot{m}g} = \frac{p_2}{(\rho_2)g} + \frac{\varphi_2 V_2^2}{2g} + Z_2 + \frac{u_2}{g} + \frac{Q_2}{\dot{m}g} + \frac{E_T}{\dot{m}g}. \quad (4.28)$$

Cabe recalcar que al multiplicar por g nos encontramos con unidades de fuerza y no de altura (m).

4.14 Head Loss

Considerando una tubería horizontal, de sección transversal constante, donde no existe influencia de bombas ni turbinas y sin transferencia de calor externo, así mismo sin cambios de densidad o viscosidad significativos a lo largo de la tubería, donde por lo tanto, al no cambiar la velocidad promedio del flujo ni su elevación. Podemos definir la diferencia de altura como la presión dividida en la densidad correspondiente como:

$$\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} = \Delta u \quad (4.29)$$

Esto muestra que la pérdida de carga o también llamada *Head Loss* en inglés es igual al cambio de energía interna del fluido, reescribimos la ecuación de energía como:

$$\frac{P_1}{(\rho_1)g} + \frac{\varphi_1 V_1^2}{2g} + Z_1 + \frac{E_P}{\dot{m}g} = \frac{P_2}{(\rho_2)g} + \frac{\varphi_2 V_2^2}{2g} + Z_2 + \frac{E_T}{\dot{m}g} + H_L \quad (4.30)$$

el *head loss* no es una pérdida neta de energía, sino que una **pérdida de energía mecánica útil convertida en calor**.

4.15 Número de Mach

El número de Mach (M o Ma en la literatura) define la relación entre la velocidad de un objeto moviéndose a través de un fluido y la velocidad del sonido en esas condiciones.

$$M = \frac{|\mathbf{v}|}{a} \quad (4.31)$$

Donde $|\mathbf{v}|$ es la magnitud de la velocidad local relativa al medio y a corresponde a la velocidad del sonido, donde esta última se puede calcular como:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (4.32)$$

Donde γ representa la división entre el calor específico a presión constante y el calor específico a volumen constante ($\frac{c_p}{c_v}$). Los flujos donde M es menor a 0.2 pueden ser tratados como incompresibles, para $M < 1$ el flujo es llamado subsónico. $M = 1$ sónico, $1 < M < 5$ supersónico e hipersónico para valores mayores. Un flujo que acelera de subsónico a supersónico es llamado transónico.

La siguiente figura muestra distintos contornos de Mach de un flujo sobre un bache. Podemos notar un bache circular en donde se observan cambios en el flujo, que toman distintas formas a medida que la velocidad del flujo aumenta, desde perfiles elípticos o hiperbólicos hasta discontinuidades en la forma de ondas de choque para un $M > 1$.

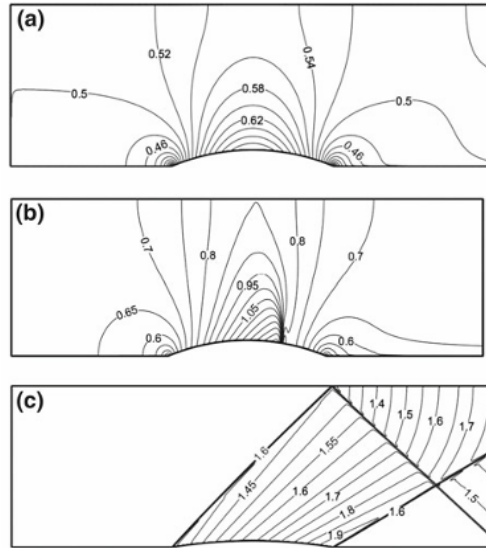


Figura 5: Contornos de Mach de un flujo sobre un bache a)subsónico b)transónico c)supersónico (Rennels and Hudson, 2022)

Contracciones en tuberías

Como se muestra en la Figura 6, el flujo acelera a medida que se estrecha el tubo. Esto provoca una aceleración axial y radial, las cuales crecen a una tasa parecida, lo que provoca una separación del flujo de las paredes del tubo. El punto de mínima sección transversal es llamado *vena contracta*, desacelerando posteriormente hasta llenar el tubo.

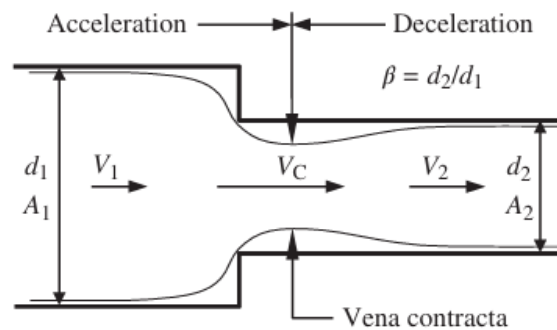


Figura 6: Contracción súbita o *Sudden contraction*, (Rennels and Hudson, 2022)

4.16 Modelo del flujo

Tomamos a H_2 como la suma total de las pérdidas en las zonas de aceleración y desaceleración en el tubo, podemos entonces expresar el *head loss* como:

$$H_2 = K_2 \frac{V^2}{2g} = K_{Acc} V_c^2 / 2g + (V_C - V_2)^2 / 2g \quad (4.33)$$

Donde V_c es la velocidad local en la vena contracta y V_2 la velocidad aguas abajo. El primer término representa la aceleración del fluido en la vena contracta y K_{Acc} es el coeficiente de pérdida de la porción de aceleración. El segundo término representa la expansión súbita del fluido aguas abajo. la relación V_c/V_2 es también llamada *jet velocity ratio*, denotada por λ .

$$K_2 = K_{Acc} \lambda^2 + (\lambda - 1)^2 \quad (4.34)$$

como se muestra en Benedict and Webb, 1966 para flujo incompresible se ha obtenido experimentalmente :

$$\lambda = 1 + 0.622(1 - 0.0215\beta^2 - 0.785\beta^5) \quad (4.35)$$

Conviene definir también la relación β , que para una tubería circular representa la división de los diámetros de la contracción.

$$\beta = \frac{d_2}{d_1} \quad (4.36)$$

Finalmente K queda expresado como:

$$K = 0.0696(1 - \beta^5)\lambda^2 + (\lambda - 1)^2 \quad (4.37)$$

4.17 Total Pressure Ratio

El *Total pressure ratio* descrito en Benedict and Webb, 1966, corresponde a la relación de la presión total aguas abajo y la presión total aguas arriba de la contracción. En el caso incompresible tomamos el *TPR* como:

$$\frac{1}{TPR_{inc}} = \frac{p_{tout}}{p_{tin}} = \frac{1}{1 + (1 - R_{out})(K)} \quad (4.38)$$

Donde R_{out} corresponde a la relación de presión de salida ($p_{estatica}/p_{total}$), siendo p_{total} la suma de la presión estática con la dinámica asociada a la velocidad.

Para calcular la presión total en el caso incompresible tenemos:

$$p_{total} = p_{estatica} + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (4.39)$$

Para el caso compresible e isentrópico tenemos que:

$$p_{total} = p_{estatica} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (4.40)$$

Donde γ corresponde a la razón de calores específicos (1.4 para el aire como gas ideal), y M el número de mach en ese punto.

Podemos por lo tanto utilizar las relaciones de presiones obtenidas por el método *TPR* de Benedict and Webb, 1966 para calcular el *head loss* en una contracción con flujo compresible al suponer que conocemos todas las condiciones aguas arriba, esto nos permite calcular la densidad y por ende la presión estática aguas abajo, estimando si estos valores difieren de los entregados por una simulación numérica.

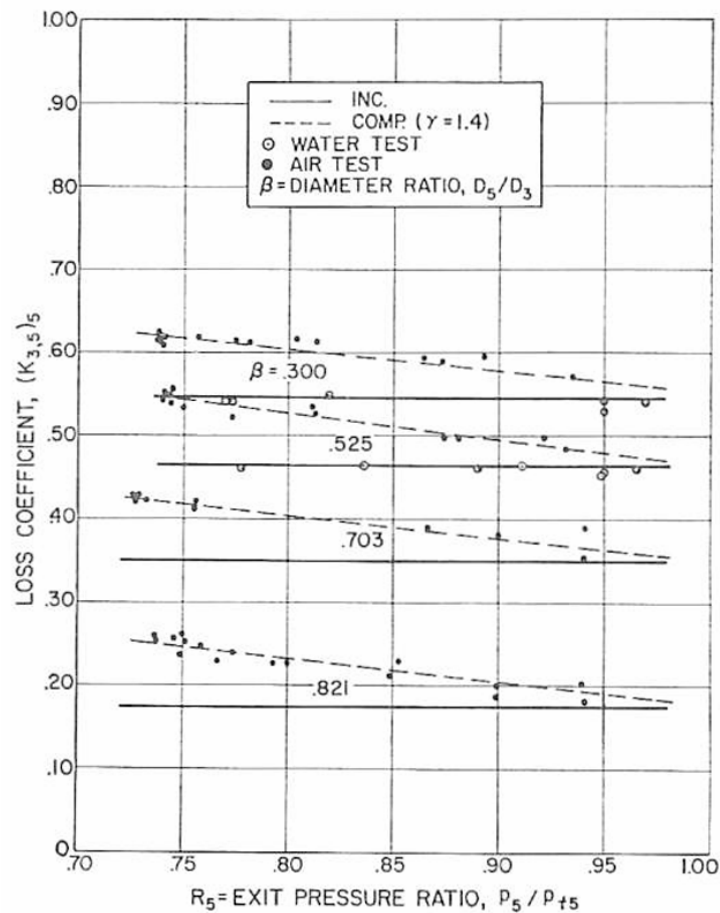


Figura 7: Comparación del coeficiente de pérdida K en una contracción abrupta para el caso incompresible Benedict and Webb, 1966.

La figura 7 muestra los distintos valores de K para casos incompresibles. Si bien se presenta un ajuste lineal, podemos ver que los datos se separan de esta misma a medida que aumenta la relación de presiones de salida.

5 El proceso de discretización

Como se describe en Moukalled et al. (2016), la solución numérica de una ecuación diferencial parcial consiste en encontrar valores de la variable dependiente ϕ en puntos específicos en donde la distribución de su dominio de interés puede ser construida. Estos puntos son llamados "puntos de malla" o "Nodos de malla", los cuales conforman la malla ("Mesh" en inglés), un conjunto de volúmenes de control que conforman en su totalidad el elemento a analizar. La discretización de los valores de la función ϕ son obtenidos mediante la solución de un grupo de ecuaciones algebraicas a partir de los nodos contiguos, las cuales a su vez son formuladas a través de las ecuaciones de conservación que gobiernan a la misma. Existen varias etapas que permiten obtener una solución del modelo físico, las cuales serán señaladas a continuación:

5.1 Modelado físico y geométrico

El modelado de un fenómeno físico es un problema importantísimo a la hora de simular cualquier problema real. En general, el modelado ocurre en dos aristas, la primera corresponde a la discretización del dominio físico del problema y la segunda con relación a las ecuaciones físicas que gobiernan al mismo. Un ejemplo de esto es simplificar un proceso tridimensional en uno bidimensional, tomar en cuenta la simetría de una estructura o comportamiento o la remoción de elementos que no aportan en las variables que deseamos calcular.

5.2 Discretización del dominio

Para obtener una solución de las ecuaciones de conservación, debe existir una discretización geométrica del espacio a modelar. Este problema requiere la realización de una subdivisión de celdas discretas o elementos que rellenen el dominio generado. Cada celda está compuesta de vértices y caras, las cuales se relacionan con los elementos vecinos, compartiendo información temporal y de solución.

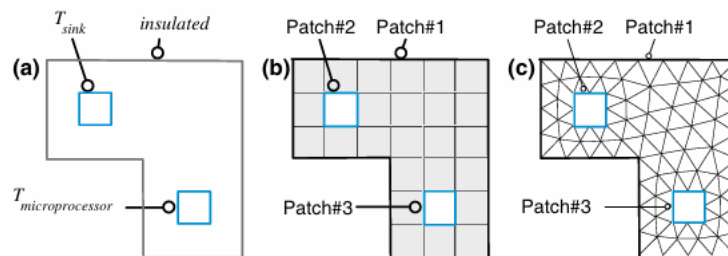


Figura 8: a) Dominio computacional b) "Mesh" cuadrilateral c) "Mesh" triangular (Moukalled et al. (2016))

Como se muestra en la Figura 8 en Moukalled et al. (2016), podemos observar un problema físico relativamente simple, donde el dominio consiste en un segmento bidimensional demar-

cado por elementos que enfrían o calientan el microprocesador. El "Mesh" corresponde a un arreglo de caras (triangulares o cuadradas dependiendo del caso) y vértices unidos entre si, donde las caras internas de la malla componen los elementos discretizados en los cuales aplicaremos las ecuaciones diferenciales.

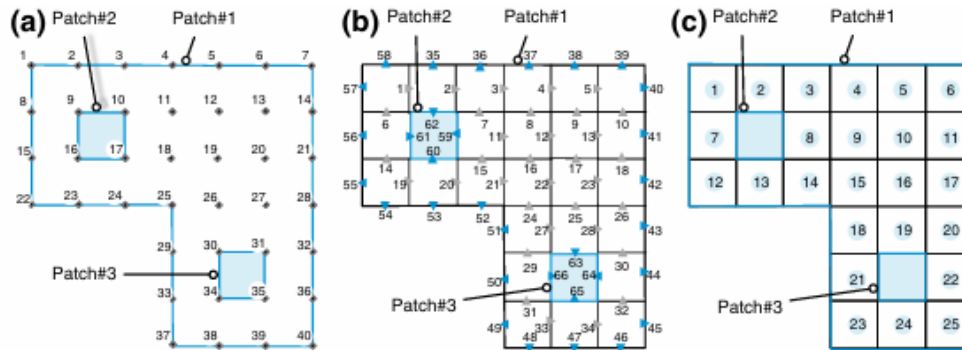


Figura 9: a) Vértices b) Caras c) Celdas(Moukalled et al. (2016))

Al resolver ecuaciones diferenciales parciales mediante métodos numéricos, el dominio físico se discretiza en una malla compuesta por elementos sobre los cuales se formulan ecuaciones locales que relacionan el valor de la variable de interés con los de sus elementos vecinos. Estas ecuaciones, obtenidas al integrar o proyectar la EDP en cada elemento, se ensamblan en un sistema global que puede expresarse en forma matricial como $A[T] = b$, donde la matriz A contiene los coeficientes que representan la interacción entre nodos, T es el vector de incógnitas con los valores discretizados de la variable, y b incorpora las condiciones de borde y fuentes. El sistema resultante, usualmente de gran tamaño y con estructura dispersa, se resuelve mediante algoritmos directos o iterativos, obteniéndose así una aproximación numérica a la solución de la ecuación diferencial original.

Como se muestra en la Figura 10 en Moukalled et al. (2016), podemos notar que para un elemento central, existe una influencia de segmentos vecinos, los cuales juegan un papel importante en los vectores a modelar ya que dependiendo de la discretización espacial, cada nodo (i, i) posee coeficientes correspondientes, esos coeficientes cuantifican cuánto y cómo el valor de un nodo afecta a cada vecino, creando la interdependencia entre nodos que caracteriza a los sistemas discretizados de EDP.

5.3 Discretización de la ecuación

Como ya habíamos mencionado anteriormente, el siguiente paso es la discretización de la ecuación parcial en un sistema algebraico lineal que pueda ser solucionado por software de computadora, esto quiere decir, adaptar la ecuación general que representa el fenómeno físico en un sistema discretizado tanto en el tiempo como en el espacio (la malla). Este posee siempre la forma de:

$$A[T] = b \quad (5.1)$$

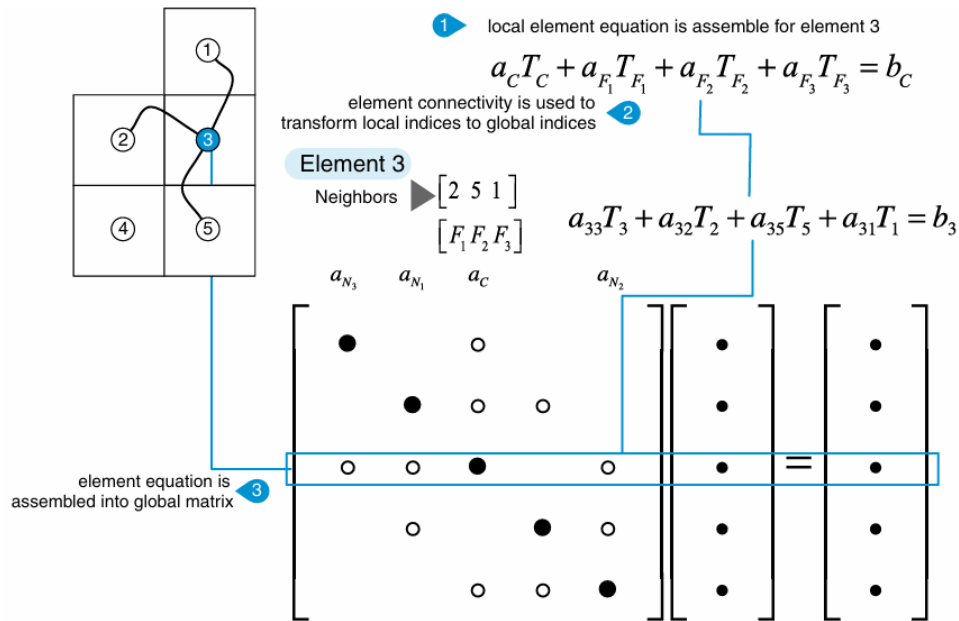


Figura 10: Esquema de arreglo de ecuaciones, (Moukalled et al. (2016))

Donde la variable desconocida es T , definida al interior de cada elemento y donde los elementos del borde del dominio computacional son generalmente obtenidos por condiciones de borde impuestas por el mismo fenómeno físico.

Para un elemento dado de la malla nos encontraremos con variadas influencias de la vecindad de esta misma, como por ejemplo flujos entrantes o salientes de todas las direcciones circundantes de la celda, como se ilustra en la siguiente imagen.

5.4 Propiedades de las ecuaciones discretizadas

A medida que el tamaño de un elemento se acerca a cero, se espera que la solución numérica se acerque lo más posible a la solución general de la ecuación de conservación, independientemente del perfil de interpolación utilizado. Sin embargo, al utilizar una cantidad de elementos finitos es crucial que las ecuaciones discretizadas posean algunas de las propiedades que nombraremos, para su correcta interpretación y comparación con el fenómeno físico real.

5.4.1 Conservación

Desde un punto de vista físico, la conservación de las cantidades escalares son muy importantes para las variables de transporte (masa, energía, etc). Esta propiedad es inherente a los métodos de volumen finito ya que se toman en cuenta los aportes de las caras vecinas para el cálculo de un nodo, así mismo, la "cantidad" entrante de flujo es conservada ya que es la misma que sale del nodo, correspondiendo a flujos iguales pero con signos distintos si los comparamos entre casos adyacentes.

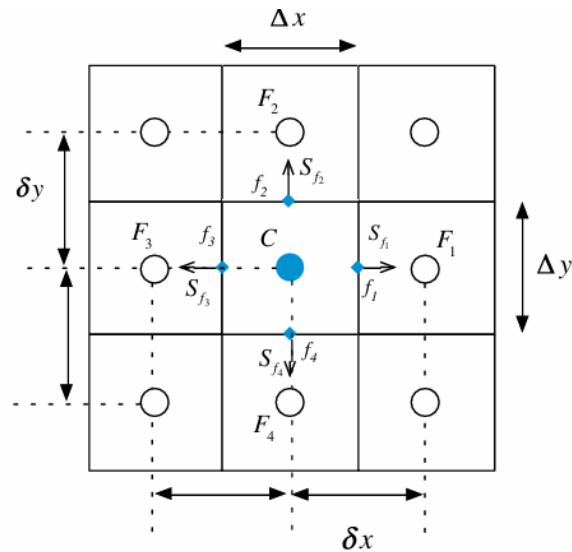


Figura 11: Nodo de un elemento finito (Moukalled et al. (2016))

5.4.2 Exactitud

La exactitud de los resultados depende de que tan cerca la solución numérica se compara con la solución exacta. En la mayoría de los casos la solución exacta del problema es una variable desconocida, por lo que tomar una comparación directa no es posible. Existe la alternativa de considerar el error de truncación como medida de exactitud, para elementos finitos, la mayoría de los algoritmos de solución presentan un error de la forma $O|(x - x_f)|^2$, lo que representa un error de segundo orden. Esto significa que si duplicamos la cantidad de nodos en la malla, el error de discretización se reduce en un factor de 4. El error por truncamiento corresponde al error existente más grande dentro de una ecuación discretizada. En resumen el error de malla es una herramienta útil para saber el comportamiento del refinamiento de la malla.

5.4.3 Convergencia

Las ecuaciones de conservación poseen un comportamiento no lineal, esto quiere decir que es necesaria una aproximación iterativa para la resolución del problema. Estas soluciones son obtenidas mediante la repetida realización del algoritmo de solución, idealmente hablamos de convergencia cuando no existen cambios a medida que iteramos o a medida que refinamos la malla.

5.4.4 Estabilidad

La estabilidad se refiere a la capacidad de un método numérico para producir soluciones que no se vuelvan físicamente absurdas o que no diverjan al avanzar en el tiempo o en las iteraciones. Es un concepto clave porque incluso con mallas finas y esquemas precisos, un

método inestable puede generar oscilaciones crecientes o valores divergentes. Esta indica si es que el resultado de las ecuaciones algebraicas pueden ser resueltas dependiendo de las condiciones iniciales. En este sentido la estabilidad no es una propiedad del proceso de discretización sino del sistema de ecuaciones resultante.

Para los problemas transientes, un esquema numérico estable mantiene el error contenido mientras avanza el tiempo. El uso de esquemas implícitos o explícitos tiene un impacto directo en la estabilidad de los métodos, los cuales pueden ser mejorados mediante la utilización de término de relajación u otras herramientas que permiten la convergencia del sistema.

5.5 Condiciones de Borde

Existen variadas condiciones de borde, las cuales corresponden a la sustitución de un nodo por una suposición que nos permite eliminar una variable a resolver en los sistemas de ecuaciones. Dos de los casos más generales corresponden a de Dirichlet y el de Neumann.

5.5.1 Condición de borde de Dirichlet

Esta condición corresponde al caso de un valor escalar especificado, consideremos un ejemplo donde un escalar ϕ entra como flujo convectivo en una entrada. Evaluamos directamente el valor conocido de ϕ en el borde correspondiente al elemento finito.

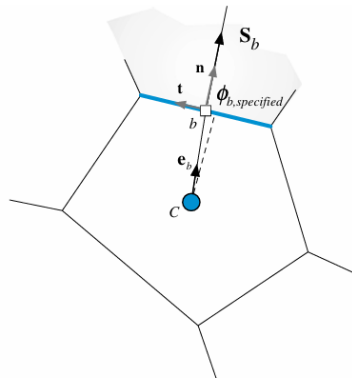


Figura 12: Condición de borde de Dirichlet (Moukalled et al. (2016))

5.5.2 Condición de borde de Neumann

La condición de borde de Neumann especifica el valor de la derivada de la variable normal a la frontera (o gradiente), en lugar del valor de la variable misma (que sería una condición de Dirichlet). Por ejemplo en la salida de un ducto podemos definir el gradiente de presión como $\delta p / \delta n = 0$, esto significa que la presión no cambia en dirección normal a la salida, permitiendo que el flujo salga libremente sin reflejar ondas.

5.6 Tipos de elementos volumétricos

Un elemento tridimensional de una malla finita es la forma más pequeña de sub-división que encontraremos en los programas y métodos de resolución de CDF. Las formas más comunes y utilizadas corresponden a tetraedros, hexaedros, prismas o poliedros, donde cada uno de estos tiene sus propias ventajas a la hora del cálculo.

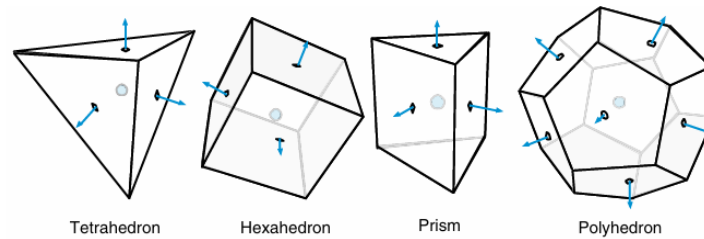


Figura 13: Tipos de elementos (Moukalled et al. (2016))

5.7 Cell-centered v/s Vertex centered

En los esquemas centrados en los vértices (Vertex-centered), las variables del flujo son guardadas en los vértices, estas celdas pueden ser creadas al conectar centroides de las caras comunes que existen en un esquema de dos dimensiones, así mismo en tres dimensiones, donde los vértices son creados mediante la unión de las caras colindantes del elemento de celda.

El uso de este método nos permite implementar un esquema explícito sobre los vértices de la malla, esto significa calcular la variación de las variables a calcular sobre los puntos del elemento, utilizando interpolaciones o funciones de forma, esto permite obtener soluciones precisas para cada cara de la malla, a costa de un costo computacional mayor.

El esquema centrado en la celda (cell-centered) las variables y sus elementos relativos son almacenados en los centroides de los volúmenes o de la misma celda de la malla por lo que los elementos son iguales al tipo de elemento volumétrico que utilizamos. El error presente en este caso corresponde a uno de segundo grado $O(\Delta x^2)$, las variaciones de los resultados entre celdas pueden ser reconstruidos usando expansiones de serie de Taylor, otra ventaja de este método permite una mayor precisión en situaciones donde la malla presenta distintos tipos de elementos o formas.

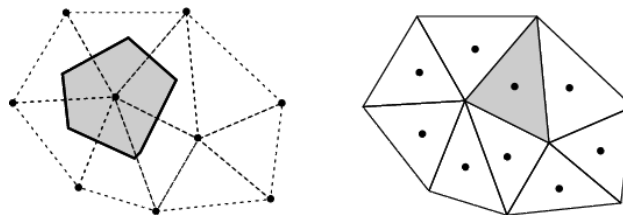


Figura 14: Cell v/s Vertex centered (Moukalled et al. (2016))

5.8 Esquema Implícito y Explícito

Un esquema de linealización se refiere a la aproximación de ecuaciones no lineales por un sistema lineal, de manera que pueda resolverse más fácilmente con métodos algebraicos. Luego de definir el número de puntos estructurales de la malla obtenemos un arreglo de ecuaciones lineales discretizadas que deberán ser resueltas por un algoritmo que permita despejar las variables desconocidas. Un esquema explícito es aquel donde las variables dependientes son obtenidas directamente por el despeje de variables ya conocidas. Por otra parte un método numérico implícito obtiene las variables dependientes ya sea por algoritmos iterativos o resolución de sistemas lineales.

Discretización temporal:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$$

Esquema Explícito:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f(u^n)$$

Esquema Implícito:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f(u^{n+1})$$

Las siguientes tablas muestran un resumen de las principales diferencias existentes entre los esquemas explícitos e implícitos.

Esquema	Explícito	Implícito
Estabilidad	Condiciona (depende de Δt)	Incondiciona (estable para Δt grandes)
Condición típica	Número de Courant (CFL)	Más flexible con Δt

Tabla 2: Estabilidad en métodos explícitos e implícitos

Esquema	Explícito	Implícito
Computación por paso	Rápido	Lento (requiere resolver sistema)
Complejidad de implementación	Baja	Alta

Tabla 3: Comparación del costo computacional

5.9 Condición CFL

El número de Courant-Friedrichs-Lewy (*CFL*) corresponde al cociente entre el intervalo de tiempo y el "tiempo de residencia" en un volumen finito. Corresponde a una condición de convergencia ampliamente utilizada en CFD, si una onda está cruzando un elemento de malla discreta, el intervalo de tiempo debe ser inferior al tiempo necesario para que la onda atraviese los puntos de malla adyacentes.

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \quad (5.2)$$

Donde Δx es el intervalo de espacio en $[m]$, Δt el intervalo de tiempo en $[s]$ y u la velocidad en $[m/s]$. Por lo tanto, existe un valor máximo para C de modo que se garantice estabilidad numérica. C_{max} depende del método de acoplamiento de las ecuaciones diferenciales parciales.

5.10 Solución de ecuaciones discretizadas

La discretización de las ecuaciones diferenciales da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas que debe resolverse para obtener un vector de incógnitas, T . Los coeficientes de este sistema pueden ser independientes de T , dando lugar a un sistema lineal, o dependientes de T , resultando en un sistema no lineal. Las técnicas de resolución de estos sistemas son generalmente independientes del método de discretización y se clasifican en dos grandes grupos: métodos directos, que obtienen la solución en un número finito de operaciones, y métodos iterativos, que aproximan la solución mediante sucesivas iteraciones hasta alcanzar un criterio de convergencia.

5.10.1 Método directo

En un método directo la solución del sistema de ecuación $A[T] = b$ es obtenida al resolver algebraicamente los sistemas de soluciones que componen la matriz. Esta es una técnica para resolver sistemas de ecuaciones lineales que busca obtener la solución exacta (en aritmética infinita) en un número finito de pasos, sin depender de aproximaciones sucesivas como en los métodos iterativos. Una posible solución es la inversión directa de la matriz (por lo tanto esta debe ser invertible).

$$[T] = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (5.3)$$

Al invertir una matriz de $N \times N$ nos encontramos con un costo computacional de $O(N^3)$, el cual es altísimo para matrices que se acercan al modelado de una situación real. Por lo tanto la inversión directa casi nunca es empleada en estos casos. Existen otros métodos como la descomposición *LU*, descomposición de *Gauss*, entre otros.

5.10.2 Método Iterativo

Los métodos iterativos siguen una estructura de predicción-corrección las cuales refinan la solución estimada resolviendo repetidamente el sistema discreto de ecuaciones. La forma general de un método iterativo es la siguiente:

$$x^{(k+1)} = \mathcal{F}(x^{(k)})$$

donde $x^{(k)}$ es la solución aproximada en la iteración k , y el proceso continúa hasta que:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$$

siendo ε la tolerancia deseada. Algunos de los más conocidos son:

- **Jacobi:**

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (5.4)$$

- **Gauss-Seidel:**

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (5.5)$$

5.11 Ecuación general en el método de volúmenes finitos

La ecuación general de transporte para una variable escalar ϕ en un medio fluido, en forma conservativa e integral sobre un volumen de control V , se expresa como:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho \phi \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_S \Gamma \nabla \phi \cdot \vec{n} dS + \int_V S_\phi dV \quad (5.6)$$

Al discretizarla sobre una malla de volúmenes finitos, se convierte en:

$$\frac{d}{dt} (\rho \phi)_P V_P + \sum_f (\rho \phi)_f \vec{u}_f \cdot \vec{A}_f = \sum_f \Gamma_f \nabla \phi_f \cdot \vec{A}_f + S_{\phi,P} V_P \quad (5.7)$$

Esta forma es la base para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, energía o especies, dependiendo de la variable ϕ . La siguiente tabla describe las variables mencionadas anteriormente.

Tabla 4: Descripción de variables en la ecuación de transporte discretizada por volúmenes finitos

Símbolo	Descripción	Unidades
ρ	Densidad del fluido	kg/m ³
\vec{u}	Velocidad del fluido	m/s
V_P	Volumen de la celda P	m ³
\vec{A}_f	Vector de área de la cara f	m ²
p	Presión estática	Pa
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de esfuerzos viscosos	Pa
Γ	Coefficiente difusivo (ej: μ/ρ)	depende
\vec{S}	Término fuente para la variable ϕ	depende
$\nabla\phi$	Gradiente de variable escalar	depende
t	Tiempo	s

5.12 Esquemas de interpolación de solución para CFD

En CFD nos encontramos con distintos casos de ecuaciones diferenciales a resolver, por lo que existen distintos algoritmos que se adaptan a los diferentes fenómenos que nos podemos encontrar, como se demuestran en Moukalled et al. (2016) algunos de los esquemas de interpolación más utilizados dado el contexto presentado en este informe:

5.12.1 Método UPWIND

Este método es usado ampliamente en los softwares de CFD, nos permite resolver ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, como la ecuación de onda, la de advección o las de Euler. Los esquemas *UPWIND* intentan discretizar estas ecuaciones por medio de la diferenciación de las ecuaciones parciales, siguiendo la dirección característica de la velocidad del flujo.

5.12.2 Esquema Upwind de Primer Orden para el término convectivo

En la discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes por el método de volúmenes finitos, el término convectivo se aproxima como:

$$\sum_f (\rho\phi)_f \cdot \vec{u}_f \cdot \vec{A}_f \quad (5.8)$$

Usando el esquema **upwind de primer orden**, el valor de la variable ϕ en la cara f se toma desde la celda aguas arriba del flujo:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & \text{si } \vec{u}_f \cdot \vec{A}_f > 0 \\ \phi_N & \text{si } \vec{u}_f \cdot \vec{A}_f < 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

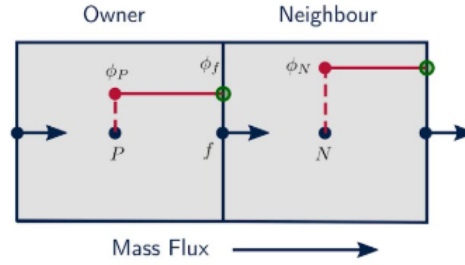


Figura 15: Nodos N y P en el esquema UPWIND (Moukalled et al., 2016)

Este esquema es robusto y estable, pero presenta alta difusión numérica.

5.12.3 Esquema Upwind de Segundo Orden para el término convectivo

El esquema upwind de segundo orden mejora la precisión de la estimación del término convectivo en las ecuaciones de Navier-Stokes, utilizando información del gradiente de la variable transportada en la celda upwind:

$$\phi_f = \phi_U + \nabla \phi_U \cdot \vec{r}_{Uf} \quad (5.10)$$

donde ϕ_U es el valor en la celda aguas arriba, $\nabla \phi_U$ es el gradiente de la variable en dicha celda, y \vec{r}_{Uf} es el vector desde el centro de la celda upwind hasta la cara. En este caso, el término convectivo se aproxima de igual modo como:

$$\sum_f (\rho \phi_f) (\vec{u}_f \cdot \vec{A}_f) \quad (5.11)$$

Este esquema reduce la difusión numérica presente en el esquema upwind de primer orden, aunque a costa de mayor complejidad computacional.

5.12.4 Método QUICK

En inglés "Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics" (QUICK), es un esquema basado en la interpolación de la variable dependiente en cada cara del elemento finito, utilizando una ecuación cuadrática centrada en la dirección del flujo aguas arriba. El valor interpolado es usado para calcular el término convectivo de la ecuación gobernante. Para una malla uniforme unidimensional, con $u > 0$, el valor de la variable escalar ϕ en la cara f entre los nodos P y E se calcula como:

$$\phi_f = \frac{3}{8}\phi_E + \frac{6}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W \quad (5.12)$$

El esquema QUICK presenta menor difusión numérica que el esquema UPWIND de primer orden y mayor precisión en flujos dominados por advección. Sin embargo, puede introducir oscilaciones no físicas cerca de discontinuidades o saltos abruptos, por lo que se requiere implementar otras herramientas (limitadores) para garantizar la estabilidad del sistema. En

el contexto de volúmenes finitos, el término convectivo en la ecuación general de transporte se discretiza como:

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{u}\phi) dV \approx \sum_f \phi_f (\vec{u}_f \cdot \vec{A}_f) \quad (5.13)$$

donde ϕ_f se calcula mediante la interpolación QUICK, dependiendo del sentido del flujo en cada cara f .

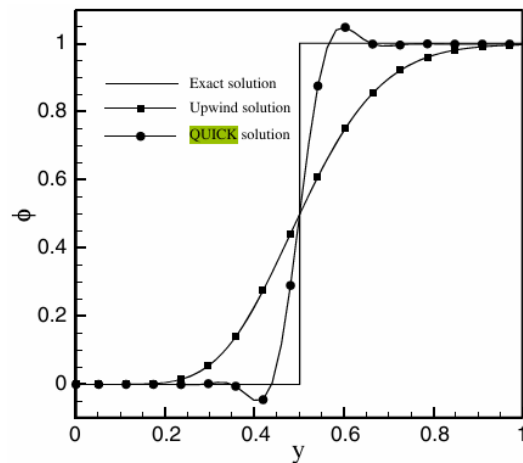


Figura 16: QUICK vs UPWIND , difusividad para un perfil de advección (Moukalled et al. (2016))

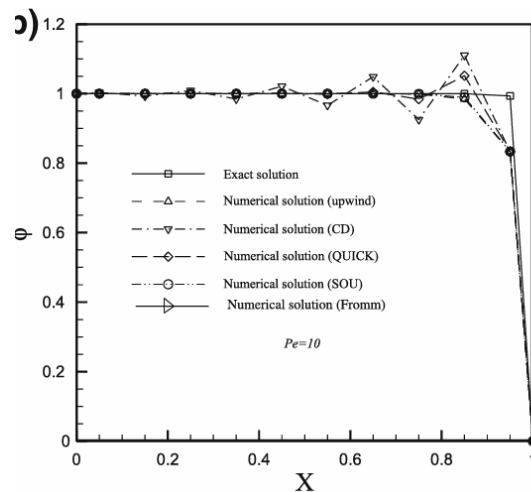


Figura 17: Estabilidad numérica utilizando distintos esquemas convectivos (Moukalled et al. (2016))

5.12.5 Método MUSCL

Como se muestra en (Moukalled et al., 2016) el esquema MUSCL (*Monotonic Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws*) fue concebido para la resolución de ecuaciones hiperbólicas como una mejora del esquema UPWIND, permitiendo principalmente la simulación sin oscilaciones no físicas. A diferencia de otros métodos este realiza técnicas de interpolación en cada volumen de control, lo que evita la generación de nuevos máximos y mínimos. El esquema MUSCL por lo tanto permite simular contracciones o expansiones, choques o discontinuidades.

Para una variable escalar ϕ , se calculan los valores izquierdo y derecho en la cara entre celdas i e $i + 1$ como:

$$\begin{aligned}\phi_{L,i+1/2} &= \phi_i + \frac{1}{2}\Delta\phi_i \\ \phi_{R,i+1/2} &= \phi_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta\phi_{i+1}\end{aligned}\tag{5.14}$$

donde $\Delta\phi_i$ representa un gradiente limitado para garantizar la monotonía. La siguiente tabla muestra una comparación entre los esquemas numéricos mencionados.

Tabla 5: Comparación entre esquemas numéricos de transporte convectivo

Método	Orden	Precisión	Oscilaciones	Limitador	Estabilidad	Comentario
Upwind 2º orden	2	Media	Posibles	No	Alta	Simple, algo difusivo
QUICK	3	Alta	Posibles	A veces	Media	Preciso, no siempre conservativo
MUSCL	2	Alta	Controladas	Sí	Alta	Evita oscilaciones con precisión

5.13 Modelos de turbulencia

Los flujos turbulentos presentan un comportamiento caótico, difusivo y de cambios acelerados. Estos provienen típicamente de la inestabilidad de flujos laminares a partir de cierto número de Reynolds crítico. Estas inestabilidades son causadas por la amplificación de las perturbaciones de términos altamente no-inerciales.

La teoría más aceptada es la de "escala de Kolmogorov", según esta, la turbulencia se compone de remolinos de distintos tamaños, donde cada uno posee una cierta cantidad de energía que depende de su dimensión. Los remolinos más grandes se dividen formando remolinos más pequeños en reacción en cadena, así transfieren su energía hasta que se forman remolinos lo más pequeños posibles.

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}\tag{5.15}$$

$$t_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}\tag{5.16}$$

Donde η corresponde a la distancia característica y t_η al tiempo característico, ν es la viscosidad cinemática molecular y ϵ la tasa de disipación de energía cinemática turbulenta.

Basados en la casacada de energía, una solución directa de la ecuación de Navier-Stokes para flujos turbulentos requiere el uso de un paso de tiempo demasiado pequeño, limitado por el número de Courant, a la vez que una malla que logre resolver la escala de Kolmogorov η , quiere demasiados nodos (Re^3). Para disminuir los costos asociados a la resolución directa, existen métodos como el "*Large eddy simulation (LES)*" en donde las grandes escalas de flujos turbulentos son simuladas mientras que las pequeñas son filtradas utilizando criterios estadísticos espaciales.

5.14 *Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)*

El enfoque más popular actualmente utilizado en la industria para la simulación de flujos turbulentos es el *RANS*, donde la aproximación estadística es ahora promediada no en el espacio sino en el tiempo.

La velocidad (o cualquier otra variable) se descompone como $u = \bar{u} + u'$, donde \bar{u} es el promedio de Reynolds definido por:

$$u = \bar{u} + u'$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi(t) dt$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden promediar como sigue:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{5.17}$$

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \tag{5.18}$$

El término $-\rho \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$ representa las fuerzas adicionales debidas a la turbulencia, para cerrar este sistema de ecuaciones se deben modelar estas tensiones de Reynolds.

5.14.1 Modelo $k - \epsilon$

En la derivación del modelo, se asume que el flujo es completamente turbulento y los efectos de la viscosidad molecular son despreciables, por lo tanto este modelo es válido para casos donde el Reynolds es alto y libre de flujos cortantes. Basado en dos ecuaciones escalares para la energía cinética turbulenta k y la tasa de disipación de energía turbulenta ϵ .

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (5.20)$$

$$P_k = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad \mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

Donde P_k es la producción de energía turbulenta, μ_t es la viscosidad turbulenta y σ_k , σ_ϵ , $C_{1\epsilon}$, $C_{2\epsilon}$ y C_μ son constantes del modelo.

5.14.2 Modelo $k - \omega$

Otra clase de modelos donde la ecuación para ϵ es reemplazada por ω , la cual representa la tasa a la cual la energía cinética turbulenta es convertida en energía térmica interna por unidad de volumen y tiempo, prediciendo de mejor manera la separación de flujo.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P_k - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \sigma_k \frac{\rho k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \sigma_\omega \frac{\rho k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (5.22)$$

$$P_k = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \mu_t = \frac{\rho k}{\omega}$$

donde ρ es la densidad, μ la viscosidad molecular, y las constantes del modelo son α , β , β^* , σ_k y σ_ω .

5.14.3 $k - \omega$ BSL y SST

El modelo BSL o *Baseline* combina los modelos $k - \omega$ en la capa limite a la pared y $k - \epsilon$ en la región de flujo libre, tomando las ventajas de cada uno por medio de una función de mezcla F_1 la cual permite combinar ambos modelos según la distancia a la pared y otras variables del flujo, logrando estabilidad y precisión en las zonas del dominio. Las ecuaciones son similares a las del modelo $k - \omega$ clásico, pero con términos adicionales para la transición y mezcla.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j k)}{\partial x_j} = P_k - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \omega)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (5.24)$$

La función de mezcla viene dada por la siguiente ecuación, donde y es la distancia normal a la pared y ν es la viscosidad cinemática.

$$F_1 = \tanh \left\{ \left[\min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right) \right]^4 \right\} \quad (5.25)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \quad (5.26)$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (5.27)$$

El modelo SST combina $k - \omega$ cercano a la pared y $k - \epsilon$ lejos de la pared, utilizando la función F_1 de manera similar a BSL, pero incorporando un termino que limita la viscosidad turbulenta y mejora la predicción de la tensión cortante o *Shear Stress*, esto permite simular de mejor manera la separación de flujo con gradientes adversos de presión.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j k)}{\partial x_j} = P_k - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \omega)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (5.29)$$

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, S F_2)}$$

Aquí μ_t es limitada para evitar sobre-dimensionamiento de la tensión cortante turbulenta, de igual manera se presenta una nueva ecuación F_2 donde ω es la frecuencia especifica de disipación y β^* una constante del modelo

$$F_2 = \tanh \left\{ \left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right\} \quad (5.30)$$

5.15 Herramientas de relajación y convergencia

5.15.1 Limitador de gradiente

Estos corresponden a un limitador de flujo, se utilizan en esquemas de alta resolución como el esquema *MUSCL*, para evitar oscilaciones espurias en los residuales debido a choques,

discontinuidades o cambios bruscos en el dominio dados por fenómenos como los fluidos transónicos.

Entre los más famosos nos encontramos el limitador **MinMod**, el cual suaviza cambios bruscos al comparar las pendientes de los valores estimados (en el caso unidimensional), si existe un cambio de signo asigna el valor neutro, reconstruyendo la celda de manera constante.

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \text{sign}(a) \cdot \min(|a|, |b|), & \text{si } \text{sign}(a) = \text{sign}(b) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.31)$$

Un limitador útil en casos donde se presentan residuales estancados es el **diferenciable**, mencionado en Wang, 2000, es básicamente una versión suavizada del limitador MinMod pero viene a arreglar el problema de diferenciación en puntos donde hay cambios de signo, elimina las esquinas y permite una transición gradual de los valores entre celdas. Donde r es el cociente entre gradientes numéricos adyacentes.

$$\phi(r) = \frac{r^2 + 2r}{r^2 + r + 2} \quad (5.32)$$

5.16 Discretización del gradiente en un volumen de control

En los métodos numéricos, para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, es clave discretizar el término gradiente, por ejemplo ∇p o $\nabla \cdot \vec{u}$. Existen variadas estrategias, entre las más comunes nos encontramos con Green-Gauss y Least Squares o mínimos cuadrados.

Para aproximar un gradiente de una variable escalar ϕ en el centro del volumen de control, debemos calcular el gradiente a partir de los valores conocidos de ϕ en los centros de las celdas vecinas o en las caras.

El gradiente se define como:

$$\nabla \phi = \left(\frac{\delta \phi}{\delta x}, \frac{\delta \phi}{\delta y}, \frac{\delta \phi}{\delta z} \right) \quad (5.33)$$

5.16.1 Green-Gauss

Se basa en la transformación de una integral de volumen a una de superficie:

$$\nabla \phi = \frac{1}{V} \int_V \nabla \phi dV = \frac{1}{V} \int_S \phi \vec{n} dS \quad (5.34)$$

Donde V corresponde al volumen de la celda, S a la superficie de la celda y \vec{n} al vector normal exterior a la cara.

Su forma discreta se define como :

$$\nabla\phi \approx \frac{1}{V} \sum_{f \in \text{caras}} \phi_f \vec{n}_f A_f \quad (5.35)$$

Donde ϕ_f corresponde al valor interpolado en la cara, \vec{n}_f a la normal unitaria de la cara y A_f al área de la cara.

5.16.2 Least Squares o mínimos cuadrados

La idea es aproximar el gradiente en el centro de la celda, ajustando un plano a los valores de ϕ en las celdas vecinas a la variable. La idea es expandir ϕ en el punto vecino N a partir del centro P , donde \vec{r}_n y \vec{r}_p son las posiciones de los centros:

$$\phi_N \approx \phi_P + \nabla\phi_P \cdot (\vec{r}_N - \vec{r}_P) + O(h^2) \quad (5.36)$$

Se genera un sistema sobredeterminado donde existen muchas ecuaciones y pocas incógnitas para los componentes del gradiente, esto se resuelve aplicando el método de mínimos cuadrados o en otras palabras, encontrando coeficientes de una función que se adapte mejor a los datos, buscando el gradiente que minimiza la suma de los errores al cuadrado (Moukalled et al., 2016).

$$J(\nabla\phi) = \sum_N w_N [\phi_N - \phi_P - \nabla\phi \cdot (\vec{r}_N - \vec{r}_P)]^2 \quad (5.37)$$

Donde $J(\nabla\phi)$ corresponde a la función que entrega los coeficientes para la discretización del gradiente.

6 Modelado y esquema general

Ansys Fluent es una herramienta ampliamente utilizada en la industria e investigación. Este software comercial de CFD nos permite modelar de manera sencilla el problema real, en uno físico, con variables acotadas e ideales, entregándonos así una aproximación bastante parecida a la real. La siguiente imagen muestra de manera esquemática en dos dimensiones el problema a estudiar.

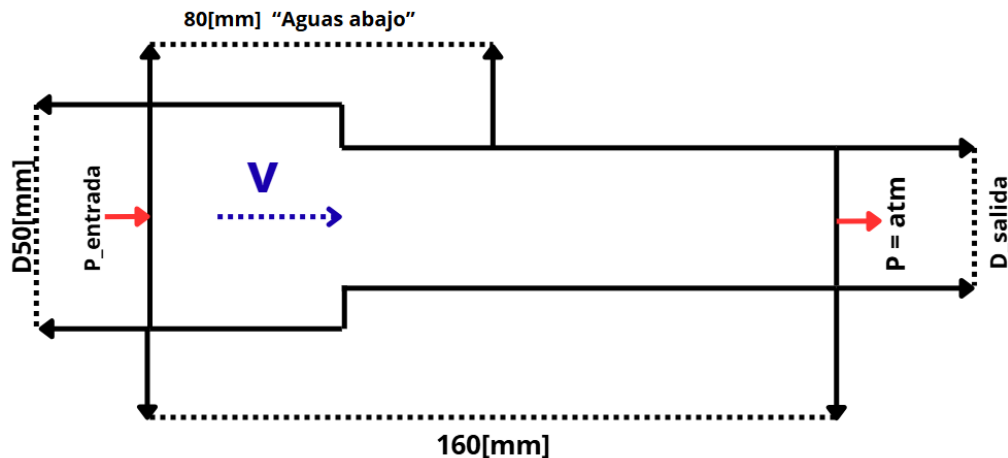


Figura 18: Esquema del modelado general

6.1 Generación de geometría

El modelado consta de varias etapas, se realizan dos cilindros concéntricos, donde el diámetro del mayor es constante ($50[mm]$) y el diámetro del menor varía desde los $40[mm]$ hasta los $15[mm]$ con pasos de $5[mm]$ para los distintos valores de $\beta = D_2/D_1$ correspondientes a los casos a simular.

El largo total del cilindro es de $160[mm]$ ya que por estandarización (Rennels and Hudson, 2022), se utilizan 4 diámetros hidráulicos mínimos (obtenidos en base a promedio de los dos diámetros) como medida de promediación de variables, por lo que en términos de simplificación computacional, este largo nos permite observar y analizar los resultados obtenidos. La siguiente imagen muestra un esquema general del problema, donde se establece un punto arbitrario, adoptado por observación de los resultados, como "aguas abajo". Es en este punto donde se obtienen los valores promedios de las distintas variables a analizar.

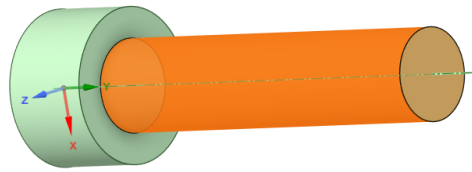


Figura 19: Cilindro 3D, 50-30 [mm]

6.2 Meshing o Generación de malla

Es complicado escoger el tamaño de malla adecuado al primer intento, la comparativa de la convergencia y por lo tanto, las bases de la decisión son discutidas en el análisis. Se realizaron 6 modelos distintos de cilindros con sus diámetros correspondientes, donde en todos los casos el tamaño de los volúmenes finitos es el mismo, así como también las funciones aplicadas.

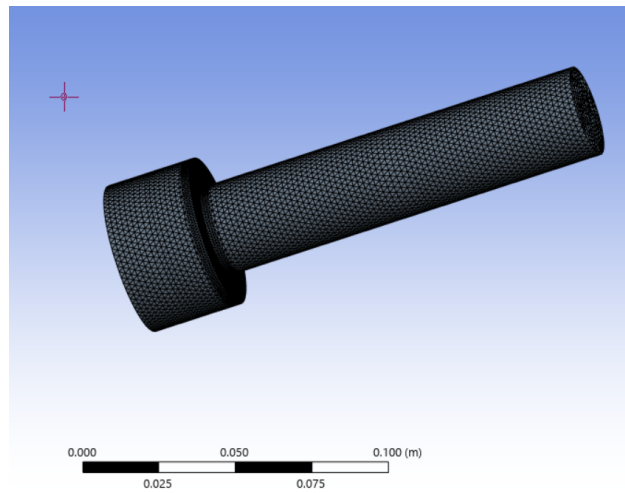


Figura 20: Malla 3D, 50-30 [mm]

Se realiza un refinamiento en la cara posterior del cilindro grande. En esta zona se produce el mayor cambio de velocidad del flujo, así como también un posible shock sónico en los casos cercanos a $Ma = 1$. Esta herramienta permite disminuir el tamaño de las celdas, entregando una mayor convergencia y exactitud en los resultados.

6.2.1 Asignado de caras

Se establece un *INLET* (o entrada), *OUTLET* (o salida) y *PIPEWALL* (paredes externas) como caras del tubo. Estas caras nos permiten establecer directamente condiciones de borde en el *solver* de Fluent, como también ser puntos de referencia clave a la hora de tomar resultados.

Para el caso estudiado en particular, la geometría correspondiente a cada celda es **tetraédrica** con un *element size*(tamaño) de $0.002[m]$. Donde la cantidad de celdas totales es de 90039 elementos y 18718 nodos, los cuales varían dependiendo del diámetro del cilindro pequeño.

6.3 Setup

6.3.1 Propiedades del *solver*

El *solver* utilizado es *Density-based*, ya que según Moukalled et al., 2016, para fluidos donde el número de Mach es alto y a la vez tratamos con compresibilidad, es recomendado el *solver* basado en densidad. Aun así la literatura indica que tanto el basado en presión como el densidad, poseen algoritmos que pueden tratar un amplio rango de velocidades en flujos.

La simulación corresponde a una transiente, ya que modelaremos el fenómeno durante el tiempo. También desactivamos los efectos gravitatorios ya que estos no juegan un rol importante (Debido a que la aceleración axial es mucho mayor a la tangencial).

Se utiliza **Ecuación de energía** que resuelve como su nombre lo dice, la ecuación de conservación para la energía donde tratamos con un fluido compresible. Las simulaciones son realizadas bajo el modelo de turbulencia $k - \omega(SST)$, sin alterar las constantes predeterminadas, este modelo representa bien las turbulencias presentes en contracciones abruptas.

6.3.2 Materiales

Como fluido escogemos aire, importante notar que trabajamos bajo la suposición de **gas ideal**, ya se requiere una ecuación de estado para observar los efectos de compresibilidad. No se consideran efectos ligados a la transferencia térmica, por lo que nos concentramos solamente en el volumen de control.

6.3.3 Condiciones de borde

Para el **INLET**(entrada) se utilizan con distintas presiones de entrada en presión manométrica, las cuales van desde $10.000[Pa]$ hasta los $90.000[Pa]$ con aumentos de diez mil.

En el **OUTLET**(o salida) establecemos una presión de salida igual a $0[Pa]$ manométrica, esto significa a presión atmosférica. De igual manera activamos la opción *Prevent reverse back flow* ya que no queremos que se produzcan ondas revertidas a la salida. Vale destacar que en la pared no hay deslizamiento por lo que trabajamos bajo suposición de **No slip**(No deslizamiento), esto quiere decir que hay velocidad igual a 0 en la misma.

La **temperatura** inicial de entrada del flujo es de $300 [K]$, se calculan las propiedades iniciales asumiendo esa temperatura.

6.3.4 Propiedades de Solución

Las simulaciones parten con una **Iniciación Híbrida** de 50 iteraciones sin avance temporal, esto nos permite "Llenar" la tubería del fluido para que el algoritmo que avanza en el tiempo

realice posteriormente los cálculos deseados.

En el apartado de cálculo se realizan 200 *time steps* con un *Time step size* de 0.01[s] con 20 iteraciones por ciclo. El razonamiento del *Time step size* es discutido luego, como también la cantidad de tiempo a simular, de igual manera se busca la convergencia de los residuales y la variación de variables como la presión y velocidad.

6.3.5 Criterios de convergencia

Específicamente buscamos que los valores residuales de las ecuaciones de *Momentum y Energía* estén por debajo de los valores predeterminados del programa (alrededor de 10^{-3} y 10^{-6} para la energía), además buscamos que la presión aguas abajo (el promedio de un corte transversal a una distancia arbitraria) no varíe en 10 ciclos y tenga un error menor a 0.001. Lo mismo se aplica a la presión en la salida.

Report Definition	Stop Criterion	Ignore Time Steps Before	Use Time Steps
presion aguas abajo	0.001	10	15
velocidad salida	0.001	10	15

Tabla 6: Condiciones de convergencia utilizadas en la simulación.

6.3.6 Métodos de solución

La formulación seleccionada es **implícita**, esta entrega mayor estabilidad y convergencia numérica. Como tratamos con un fenómeno transónico, nos encontramos con la opción de utilizar *Second-order UPWIND* o *MUSCL*, cada uno tiene sus ventajas, las cuales son discutidas posteriormente. Aunque existen otros tipos, estos son los más recomendados según la literatura (Moukalled et al., 2016). Escogemos también una metodología implícita con la opción de *High Order Term Relaxation*, la cual ayuda a disminuir cambios abruptos en los residuales y nos entregan una mayor convergencia. Utilizamos también un **limitador diferenciable** ya que ayuda a bajar el error residual en casos transónicos.

Para la discretización del gradiente se opta por **Least Squares** (mínimos cuadrados), que posee una buena precisión en mallas ortogonales y regulares (Moukalled et al., 2016).

6.3.7 Condición de entrada de presión vs velocidad

Para el caso de contracciones abruptas en un régimen transónico, nos encontramos con la posibilidad de imponer un perfil de velocidad de entrada, esto fuerza la cantidad de flujo entrante. En este régimen las relaciones de velocidad, densidad y presión están acopladas por la ecuación de estado y continuidad. Al fijar la velocidad no se garantiza que el campo de presión resultante sea físicamente consistente.

Es por esto que en flujos compresibles, imponer una presión total de entrada y una temperatura total, permite mantener constantes estas variables a lo largo de las líneas de corriente

en el flujo. A partir de estas condiciones, el *solver* determina la velocidad de entrada consistente con la solución global, permitiendo que el caudal másico se ajuste automáticamente en función de la geometría y del número de Mach alcanzado en la tubería.

6.4 Estimación del refinado de malla

Dadas las condiciones de trabajo en la simulación, el tiempo total de simulación se respalda en el hecho de que la velocidad promedio del flujo puede recorrer en su totalidad la longitud del tubo y estabilizarse. Nos enfrentamos por consiguiente a una correcta selección del tamaño de las celdas que componen la malla. Para esto nos centramos principalmente en dos cosas, la convergencia del resultado a medida que el tamaño de la malla disminuye y el tiempo total necesario que emplea el programa para realizar la simulación. A continuación se muestran tres configuraciones posibles del mallado:

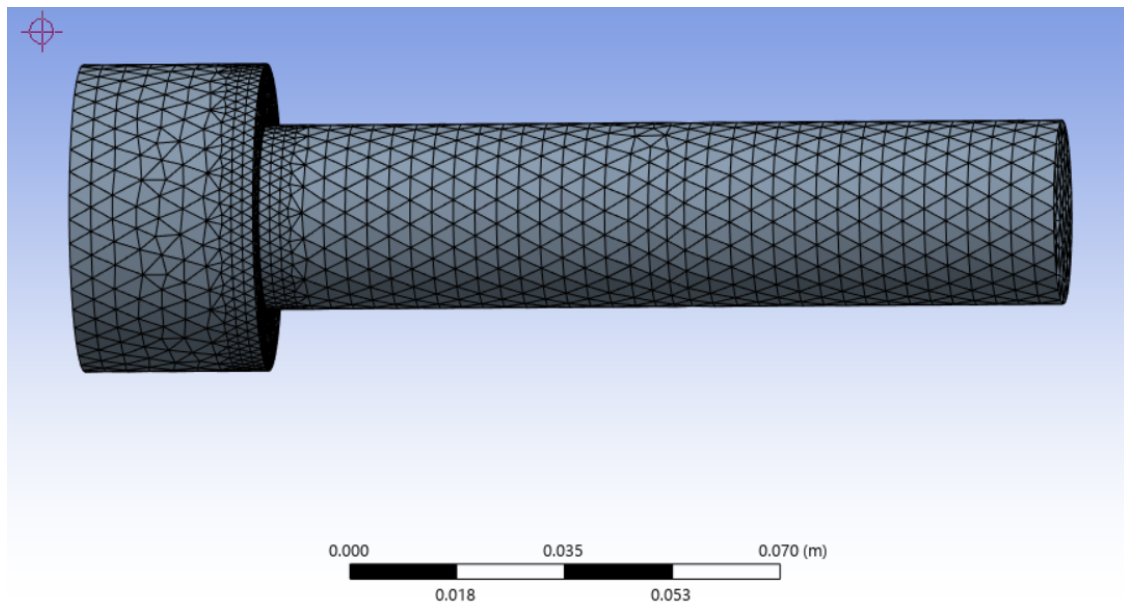


Figura 21: Tamaño de elemento: 0.004 [mm]

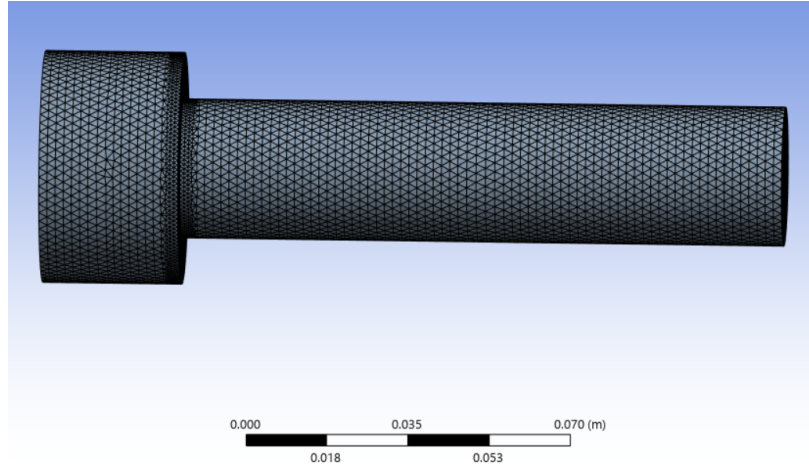


Figura 22: Tamaño de elemento: 0.002 [mm]

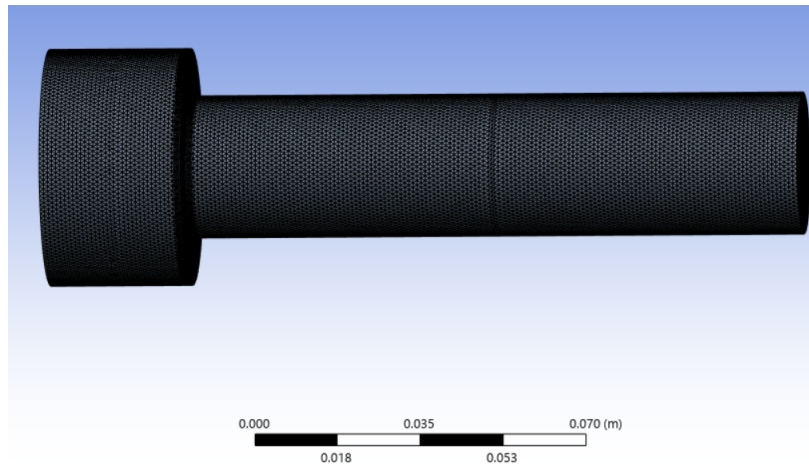


Figura 23: Tamaño de elemento: 0.001 [mm]

Se puede apreciar gráficamente que la cantidad de elementos se duplica y cuadriplica con respecto al primer caso, donde la opción de 0.004 [mm] llega a valores que difieren bastante de los otros dos casos pero presenta buenos tiempos de simulación. La segunda opción de 0.002[mm] presenta tiempos de simulación moderados, con resultados que varían muy poco (cercano al 1-2%) con respecto al caso de malla más fina. La última opción genera un resultado preciso de igual manera pero con tiempos de simulación mucho mayores a los anteriores, esto se debe a que la cantidad de elementos y por lo tanto de ecuaciones a resolver se duplican al refinar la malla en esa magnitud. Dadas las limitaciones de la licencia estudiantil de ANSYS Fluent para realizar procesos en paralelo, llevar a cabo las simulaciones necesarias se hace inviable e ineficiente, puesto que los resultados son prácticamente invariantes. Es por esta razón que todas las simulaciones se realizan con un mallado de 0.002[mm], obteniendo resultados aceptables en tiempos razonables.

6.5 Comparación de convergencia de método UPWIND y MUSCL

Contamos con 6 geometrías distintas sometidas a distintas condiciones iniciales. El método UPWIND de segundo orden, al utilizar los valores de la celda aguas arriba (**upstream**), calcula los flujos numéricos en las caras de las celdas de la malla. Este es muy estable, preciso y posee una baja difusión numérica, es también el esquema más utilizado en turbulencia RANS y simulaciones industriales ofreciendo también alta robustez. Igualmente presenta un poco de difusión numérica en regiones de gradientes fuertes, por lo tanto la utilización del método MUSCL cae en conveniencia ya que este al ser de segundo o tercer orden y a pesar de en algunos casos presentar una mayor dificultad para converger, permite capturar los choques de manera más nítida o las discontinuidades abruptas, que dado el contexto de las simulaciones es mucho más pertinente emplear.

A continuación se presenta una comparación de la convergencia de los residuales para la simulación del caso 50-30[mm](5030) con una presión total de entrada de 80.000 [Pa], donde las presiones aguas abajo son medidas a 80[mm] del origen.

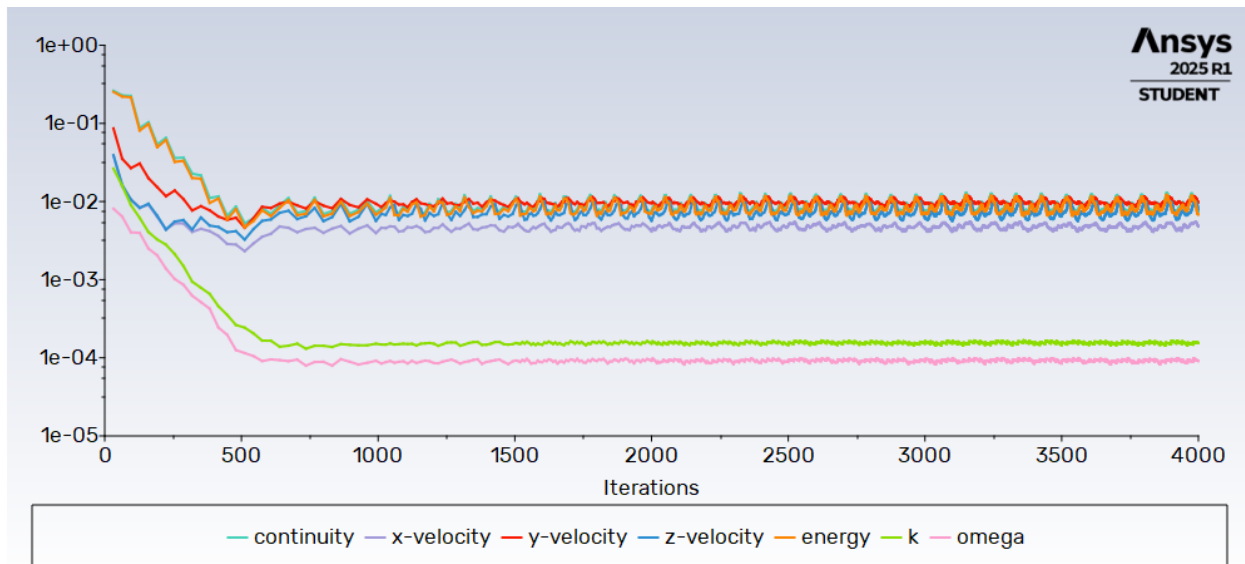


Figura 24: Residuales del método MUSCL

Tabla 7: Criterios de convergencia - Esquema MUSCL

Variable	Valor	Criterio absoluto	Estado
continuity	7.40×10^{-3}	0.001	Not Converged
x-velocity	4.78×10^{-3}	0.001	Not Converged
y-velocity	9.71×10^{-3}	0.001	Not Converged
z-velocity	7.83×10^{-3}	0.001	Not Converged
energy	6.84×10^{-3}	1×10^{-6}	Not Converged
k	1.55×10^{-4}	0.001	Converged
omega	9.12×10^{-5}	0.001	Converged

Tabla 8: Valores reportados - MUSCL

Variable	Valor
P_{abajo}	12492.73 Pa
V_{outlet}	251.9597 m/s
Δt	0.001 s
Iteraciones / timestep	20
Tiempo total	0.2 s

Podemos notar que se produce un estancamiento de los valores residuales alrededor del orden de $1 \cdot 10^{-2}$, según los criterios establecidos la ecuación de energía debe converger a niveles mucho menores, lo cual no se logra en este caso en específico. Cabe destacar que los valores propuestos para la convergencia no varían tampoco significativamente, no obstante estas invariaciones residuales pueden significar diferencias de valores a tomar en cuenta en un caso práctico.

Tabla 9: Criterios de convergencia - Esquema UPWIND

Variable	Valor	Criterio absoluto	Estado
continuity	3.82×10^{-5}	0.001	Converged
x-velocity	2.78×10^{-5}	0.001	Converged
y-velocity	2.72×10^{-5}	0.001	Converged
z-velocity	2.56×10^{-5}	0.001	Converged
energy	3.65×10^{-5}	1×10^{-6}	Not Converged
k	1.35×10^{-6}	0.001	Converged
omega	7.62×10^{-7}	0.001	Converged

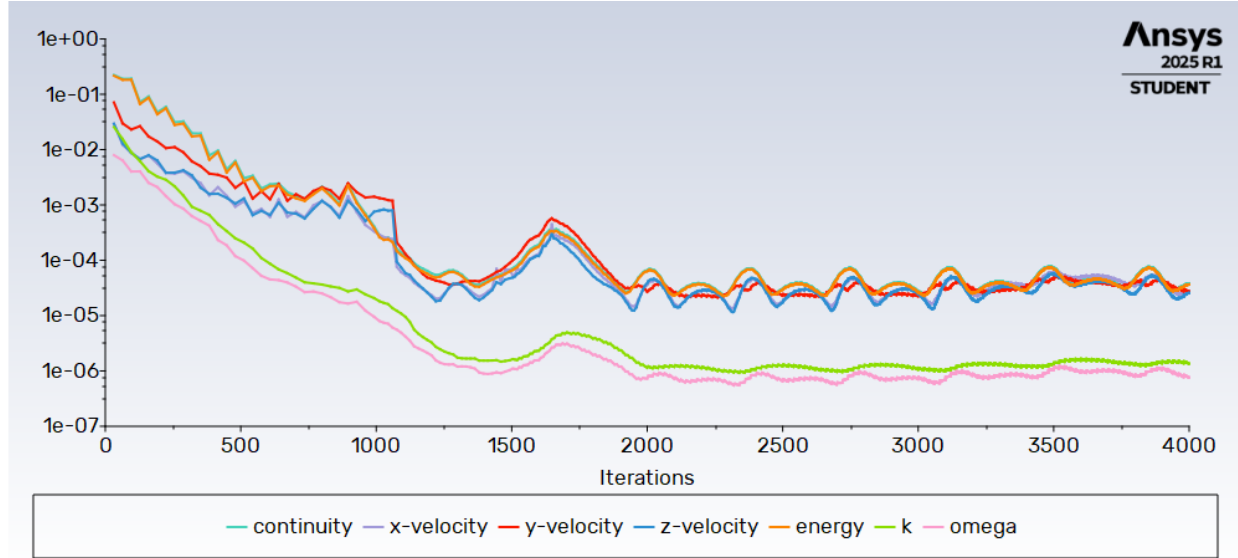


Figura 25: Residuales del método UPWIND (segundo orden)

Tabla 10: Valores reportados - UPWIND

Variable	Valor
P_{abajo}	12160.67 Pa
V_{outlet}	251.9007 m/s
Δt	0.001 s
Iteraciones / timestep	20
Tiempo total	0.2 s

El comportamiento de los residuales para el método UPWIND de segundo orden converge de manera más eficiente las variables solicitadas, si bien en este caso en específico no se pasa la barrera del $1 \cdot 10^{-6}$ en el ítem de energía, aun así la variable se acerca bastante, por lo que el resultado obtenido es tomado como aceptable.

Tabla 11: Diferencias entre UPWIND y MUSCL

Variable	Diferencia absoluta	Diferencia relativa
P_{abajo}	332.06 Pa	2.73 %
V_{outlet}	0.059 m/s	0.023 %

Podemos ver que la diferencia en la presión aguas abajo es de $332.06 [Pa]$ y la velocidad es de $0.059 [m/s]$, si bien estos valores generalmente representan variaciones porcentuales menores al 5% del resultado general, nos quedamos con el método UPWIND, el cual converge en tiempos de simulación aceptables (generalmente a los 0.13 segundos). De igual manera el método MUSCL presenta mejor convergencia a medida que la velocidad del flujo en la salida alcanza la del sonido, sin embargo los resultados demuestran que en la práctica una mezcla de ambos métodos se adecúa de mejor manera a casos como el estudiado.

7 Resultados

Los siguientes resultados muestran 6 tipos distintos de tubos, donde varía el diámetro del tubo menor, con pasos de 5 mm y pasos de $10,000 [Pa]$ de presión gauge. Los gráficos representan los valores en la línea central del tubo, estos muestran la velocidad, número de Mach, presión, temperatura y densidad a lo largo del tubo. Para los cálculos de caídas de presión y las constantes correspondientes se toman valores promediados en una sección transversal del segmento longitudinal de la geometría. Los valores de "aguas abajo" están medidos a $80 [mm]$ desde el INLET o el origen.

7.1 Configuración 50-40 [mm] $\beta = 0.8$

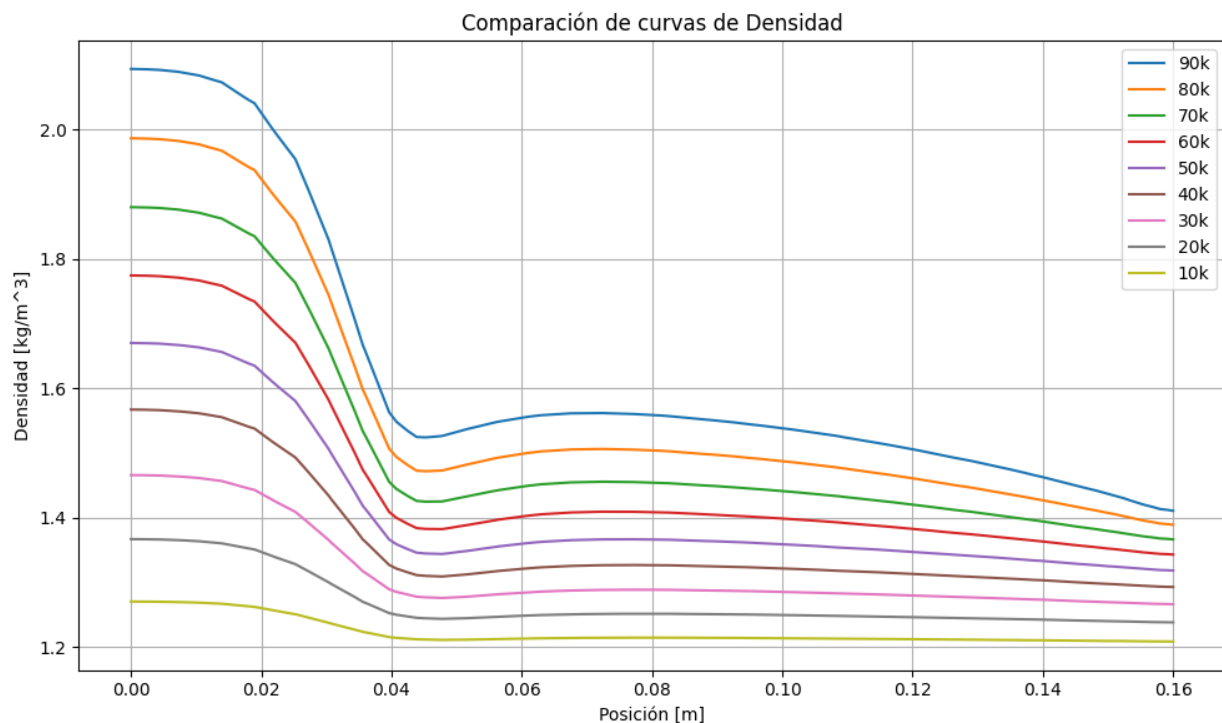


Figura 26: Densidad en línea central (5040)

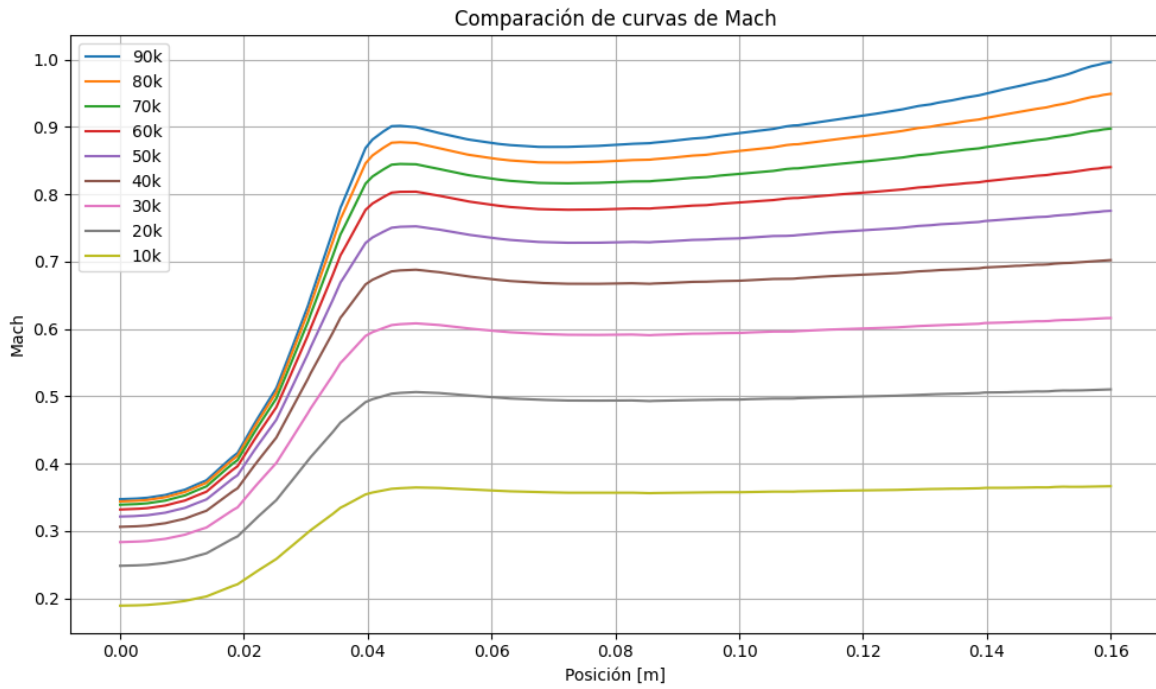


Figura 27: Número de Mach en línea central (5040) para diferentes presiones de entrada

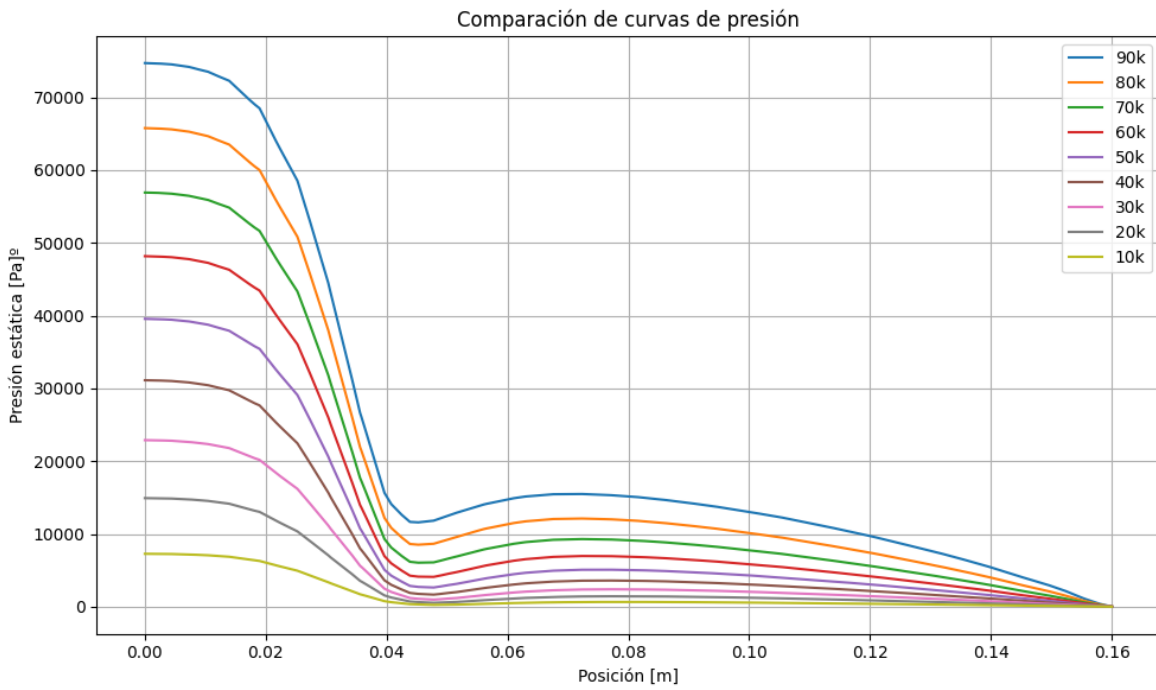


Figura 28: Presión en línea central (5040) para diferentes presiones de entrada

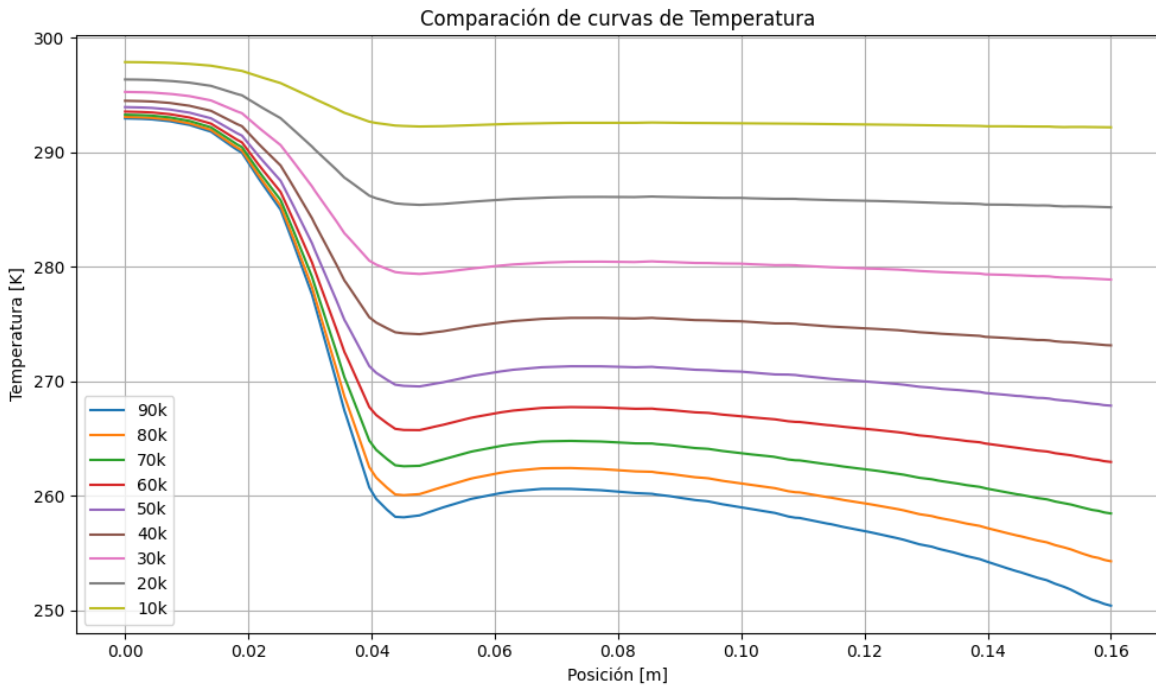


Figura 29: Temperatura en línea central (5040) para diferentes presiones de entrada

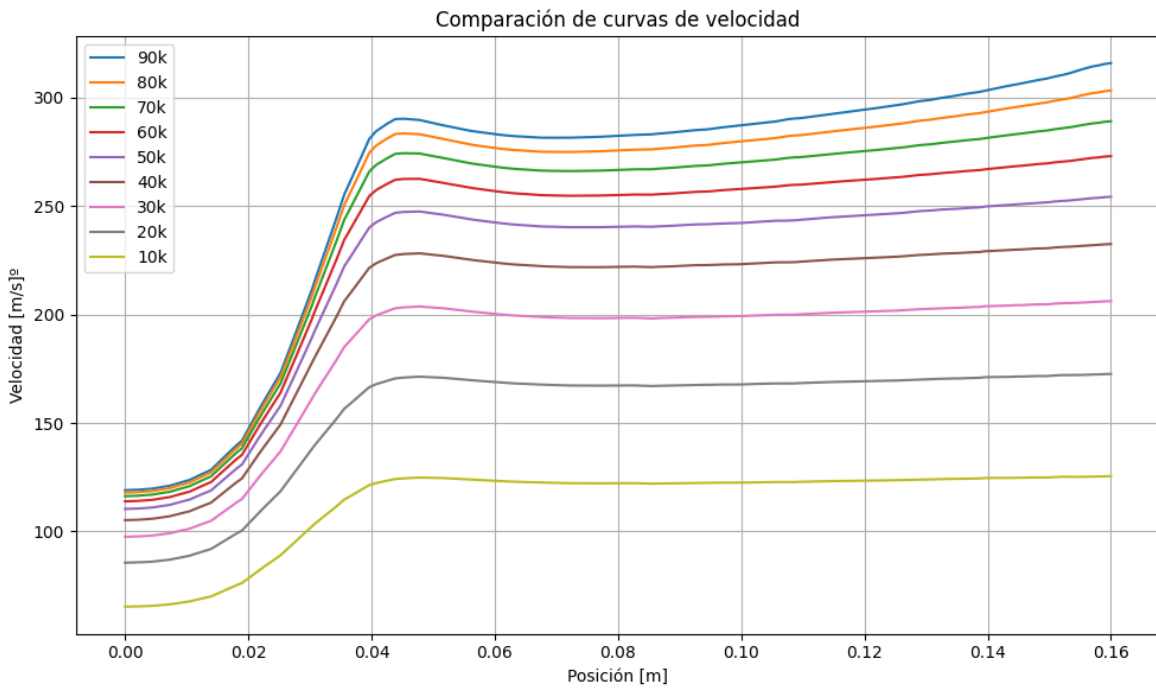


Figura 30: Velocidad en línea central (5040) para diferentes presiones de entrada

7.2 Configuración 50-35 [mm] $\beta = 0.7$

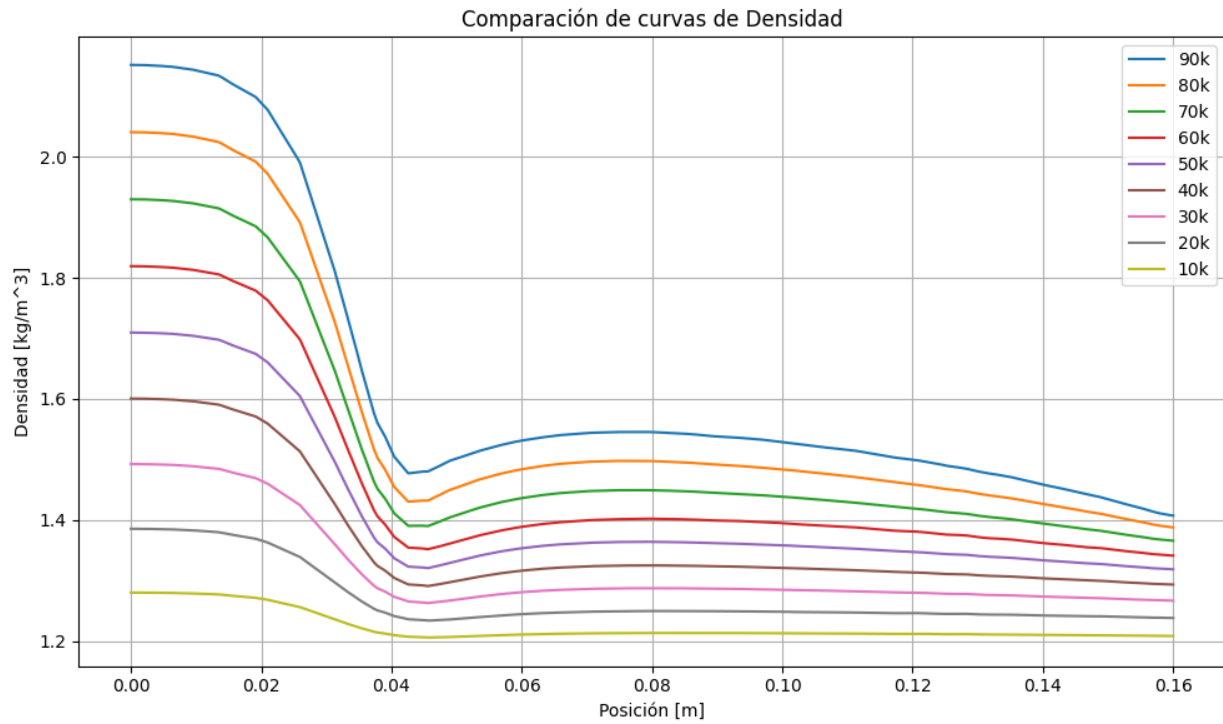


Figura 31: Densidad en línea central (5035) para diferentes presiones de entrada

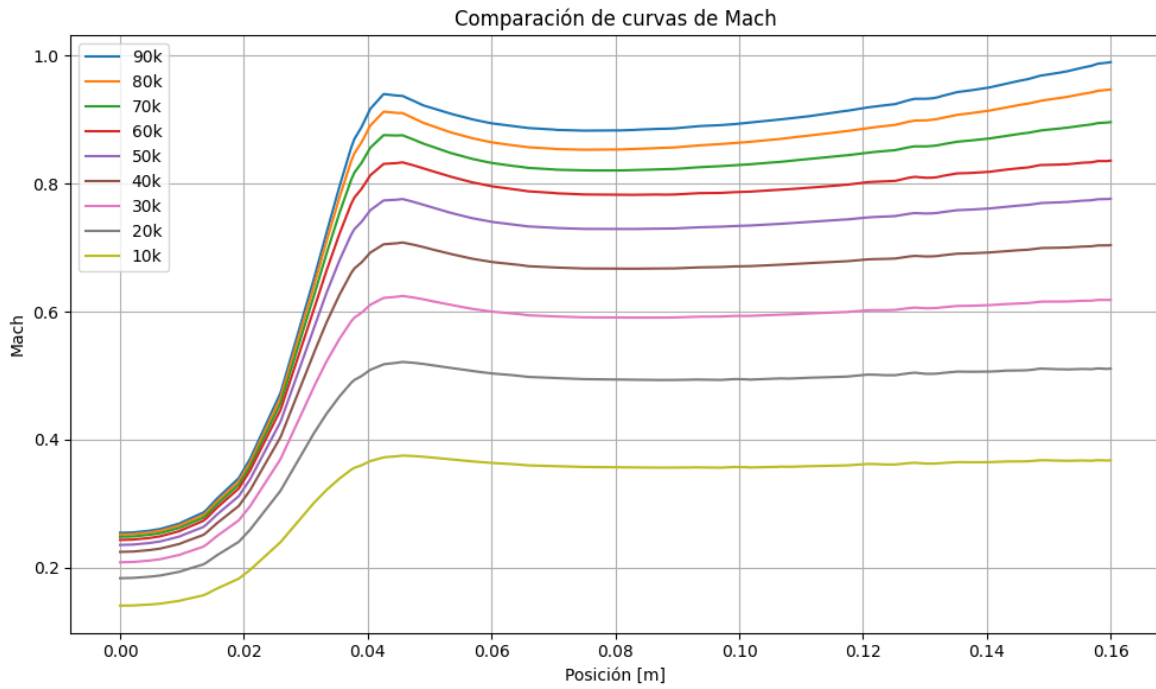


Figura 32: Número de Mach en línea central (5035) para diferentes presiones de entrada

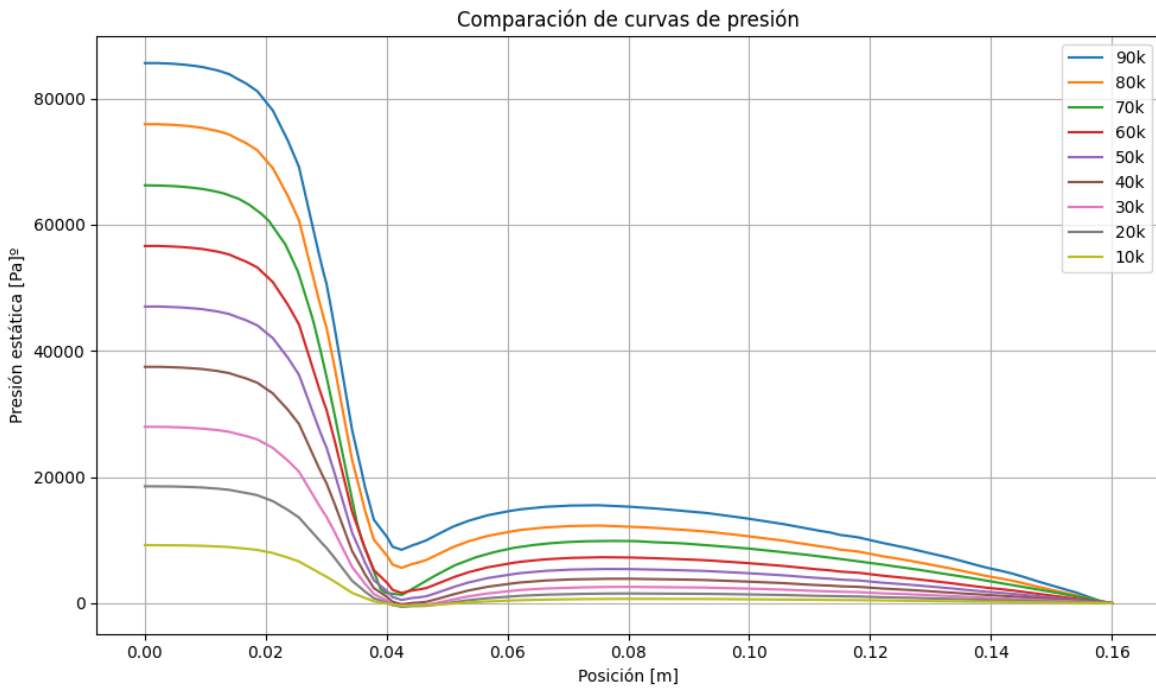


Figura 33: Presión en línea central (5035) para diferentes presiones de entrada

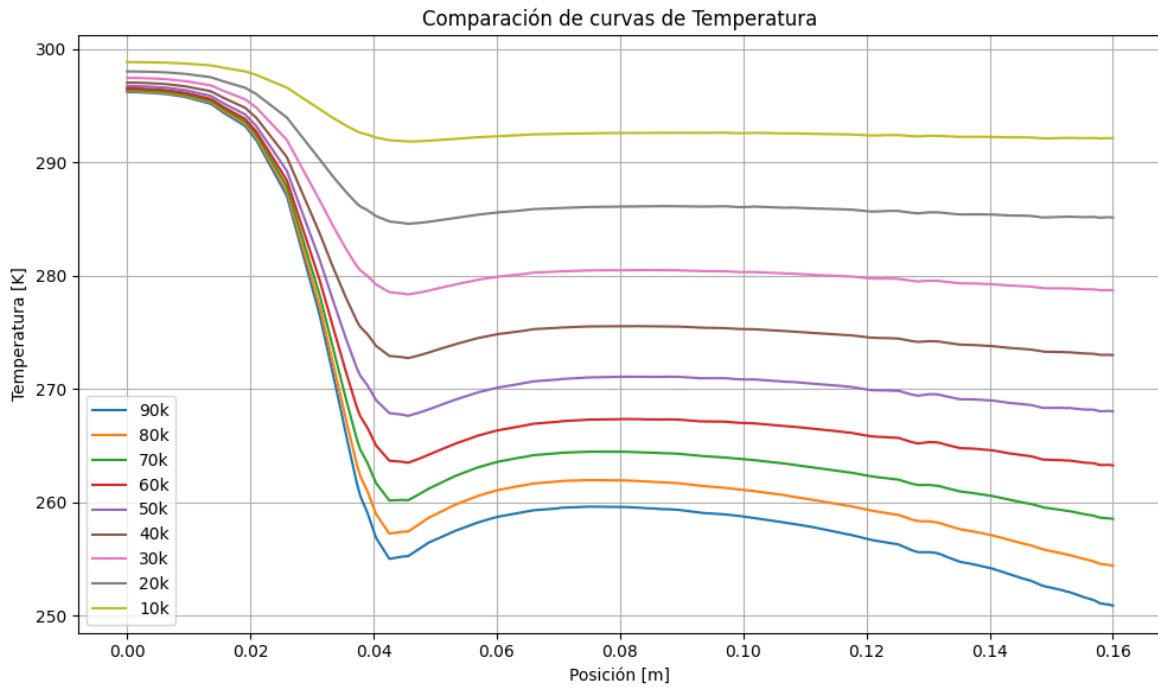


Figura 34: Temperatura en línea central (5035) para diferentes presiones de entrada

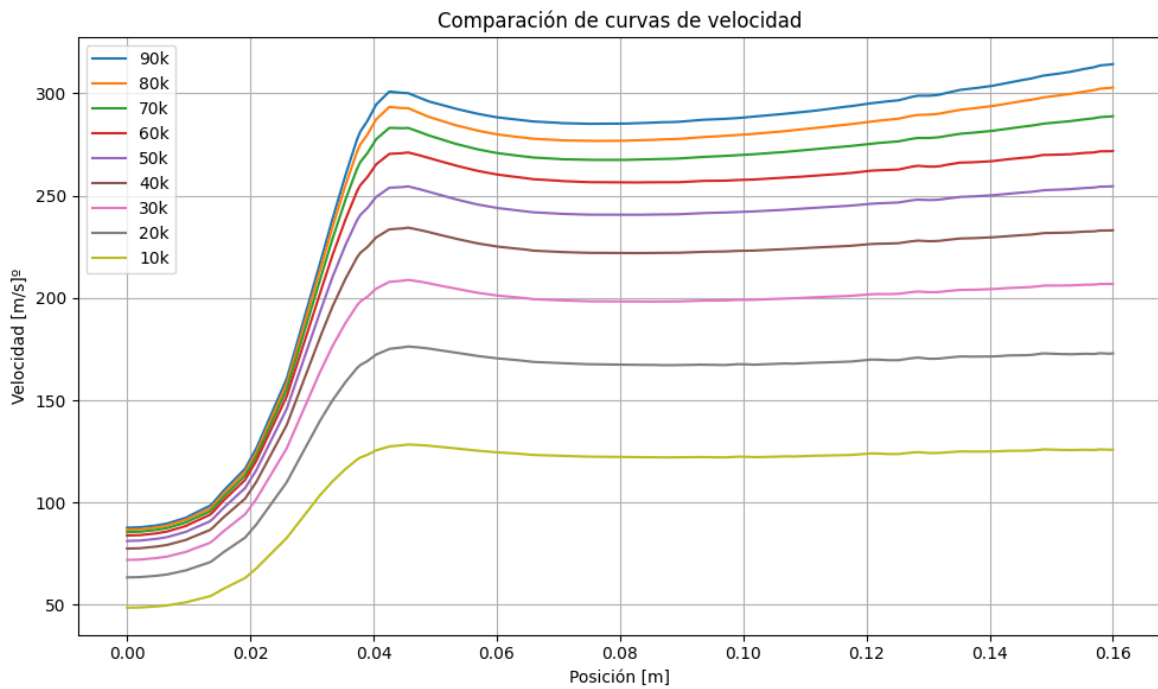


Figura 35: Velocidad en línea central (5035) para diferentes presiones de entrada

7.3 Configuración 50-30 [mm] $\beta = 0.6$

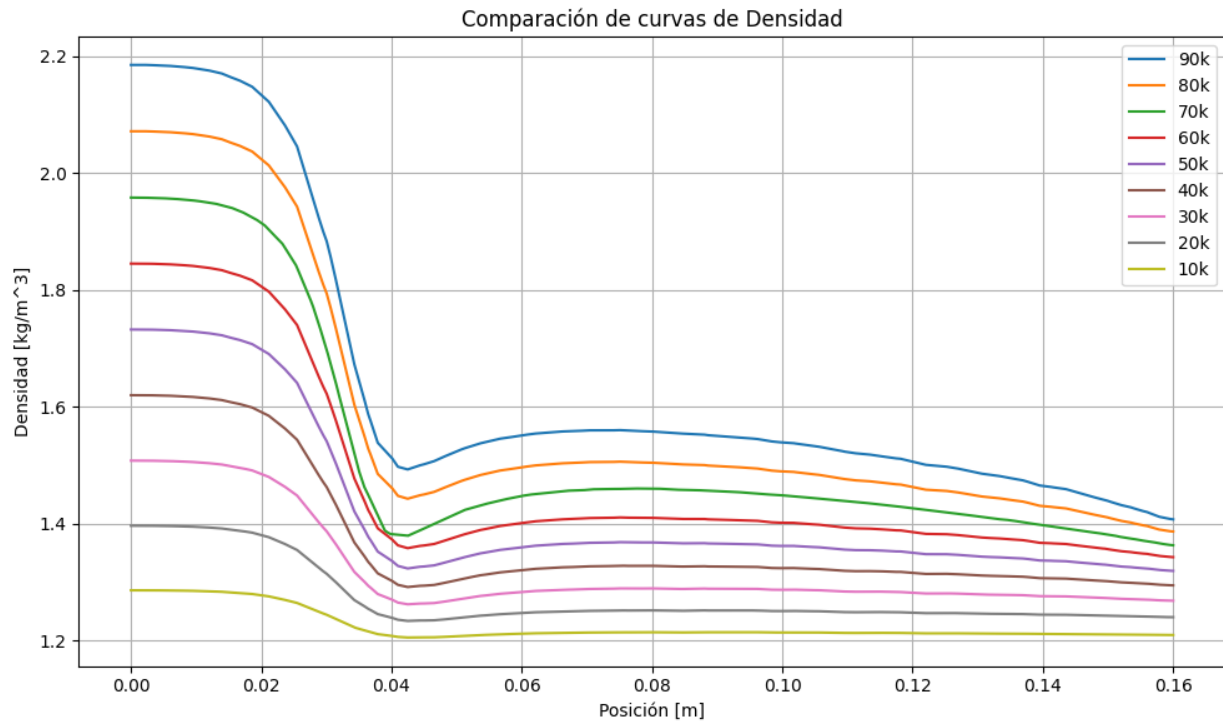


Figura 36: Densidad en línea central (5030) para diferentes presiones de entrada

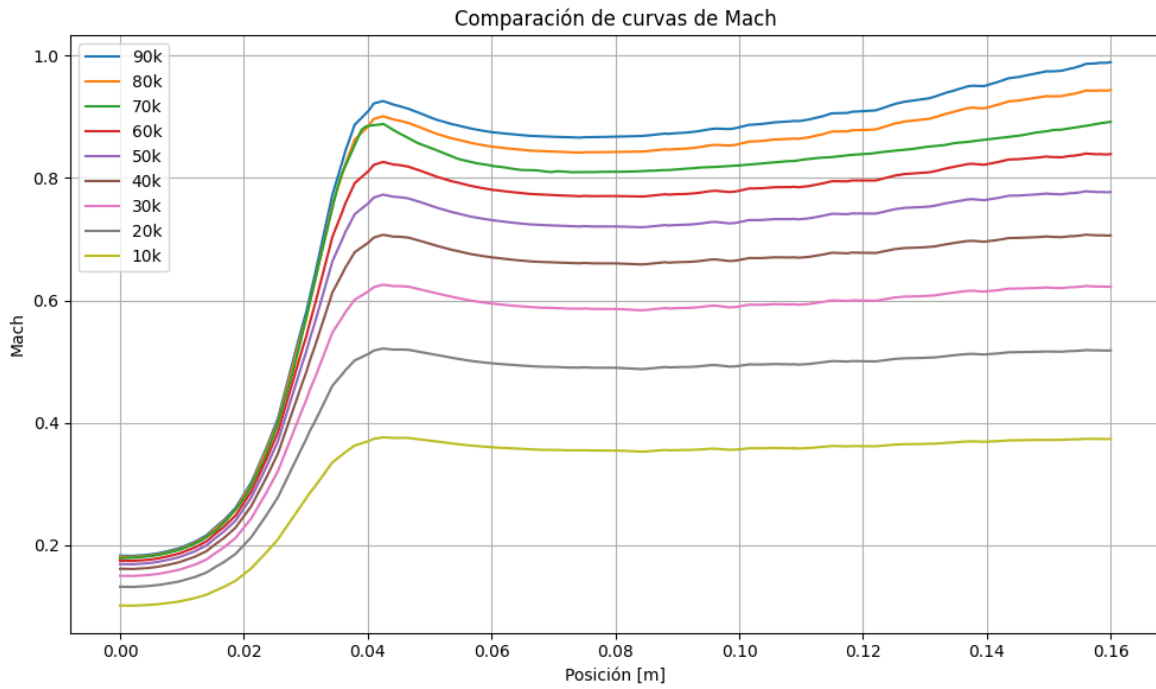


Figura 37: Número de Mach en línea central (5030) para diferentes presiones de entrada

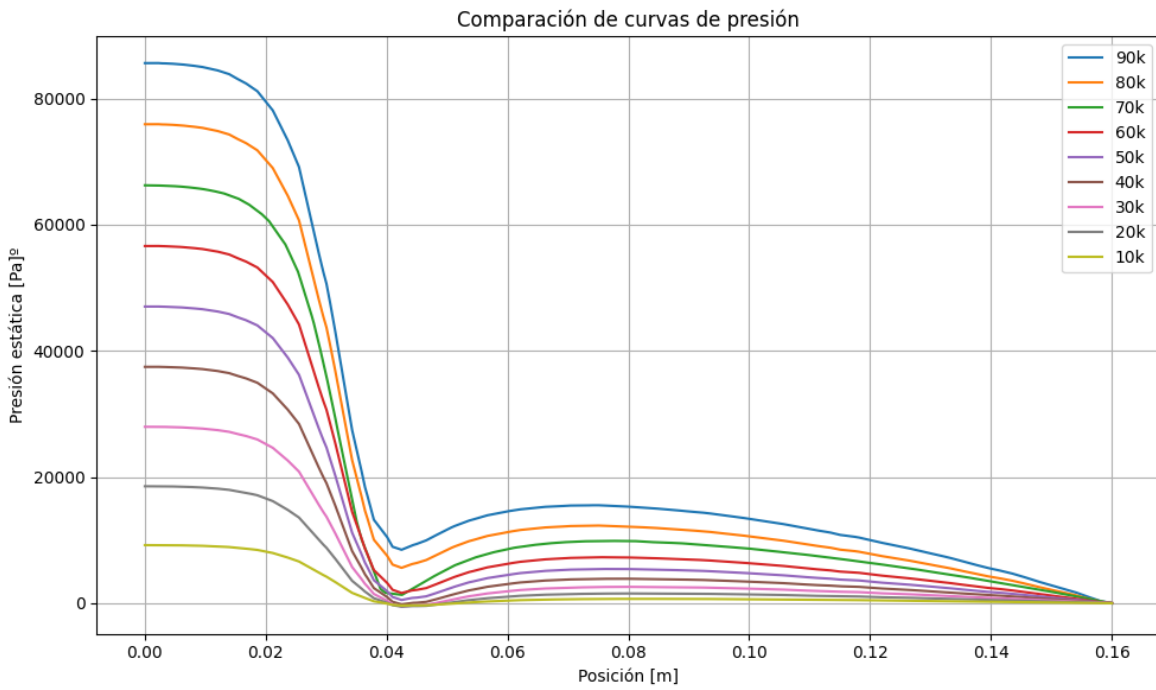


Figura 38: Presión en línea central (5030) para diferentes presiones de entrada

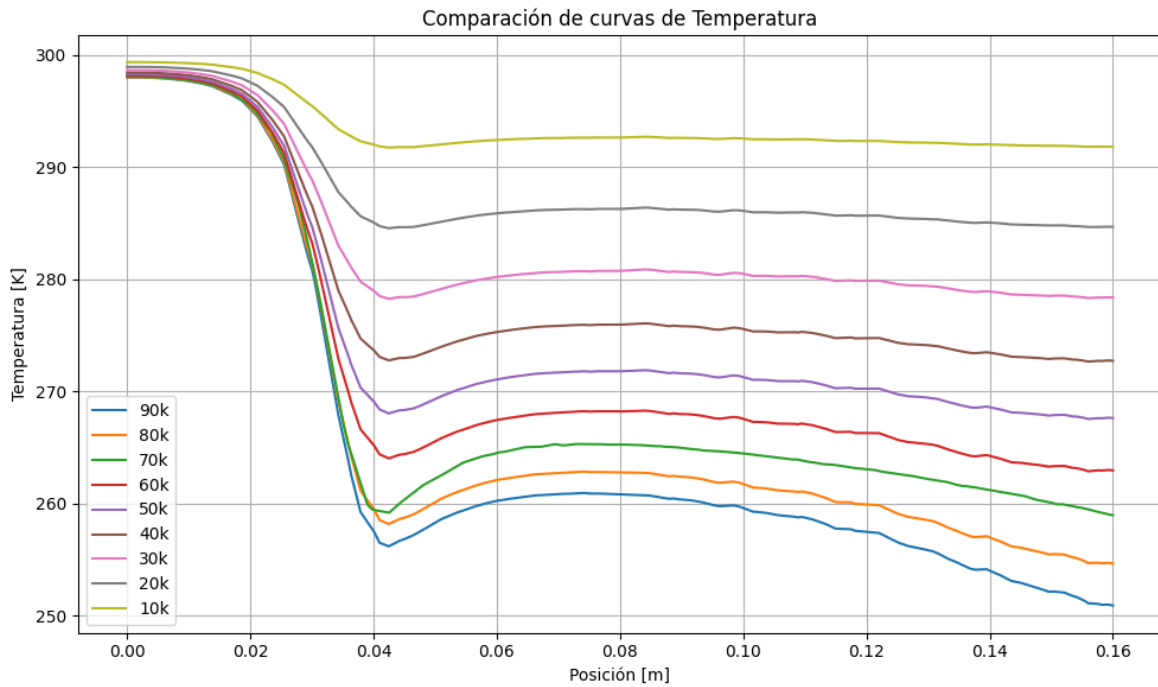


Figura 39: Temperatura en línea central (5030) para diferentes presiones de entrada

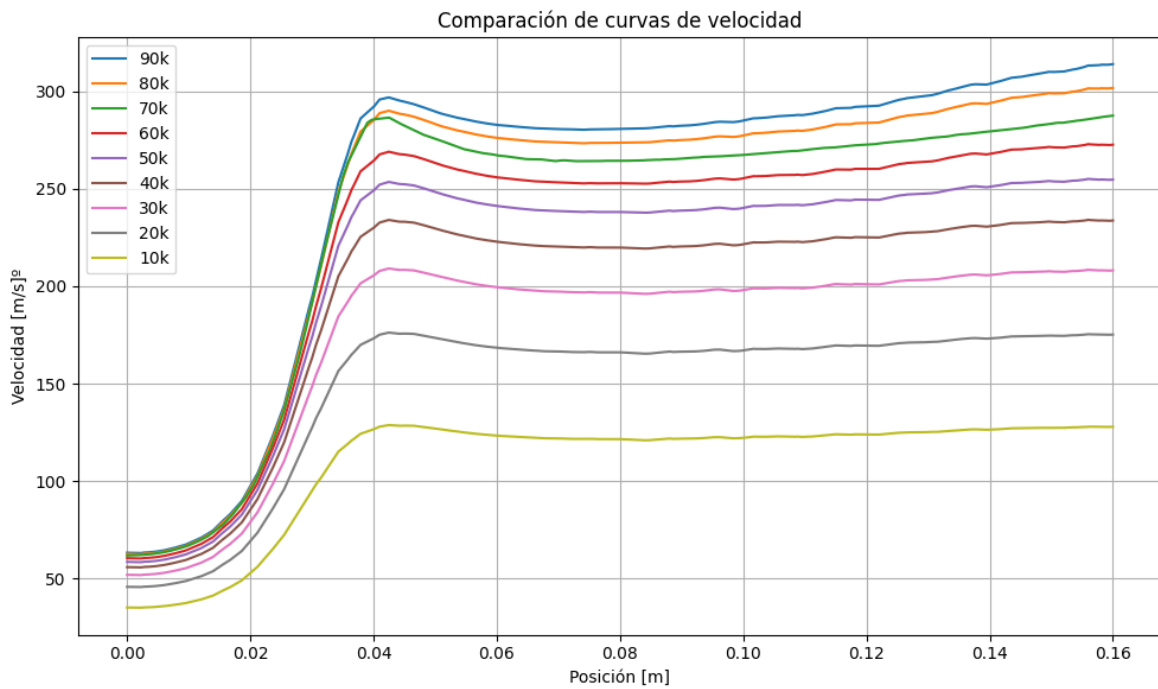


Figura 40: Velocidad en línea central (5030) para diferentes presiones de entrada

7.4 Configuración 50-25 [mm] $\beta = 0.5$

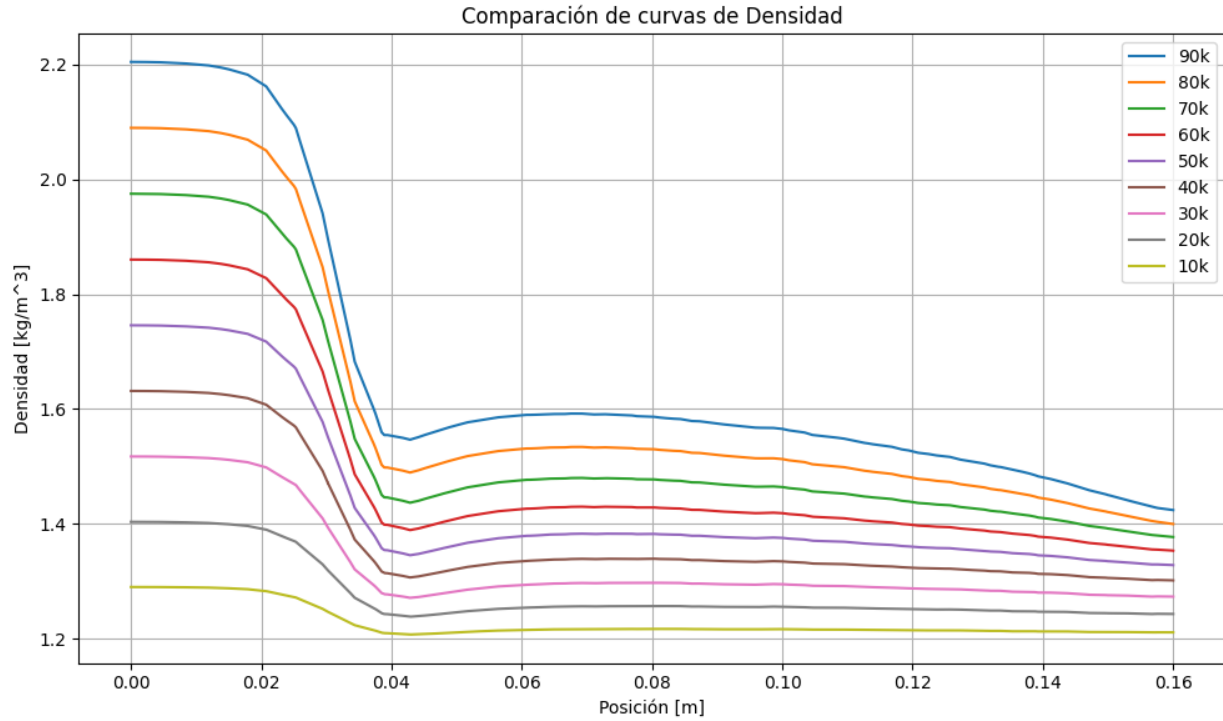


Figura 41: Densidad en línea central (5025) para diferentes presiones de entrada

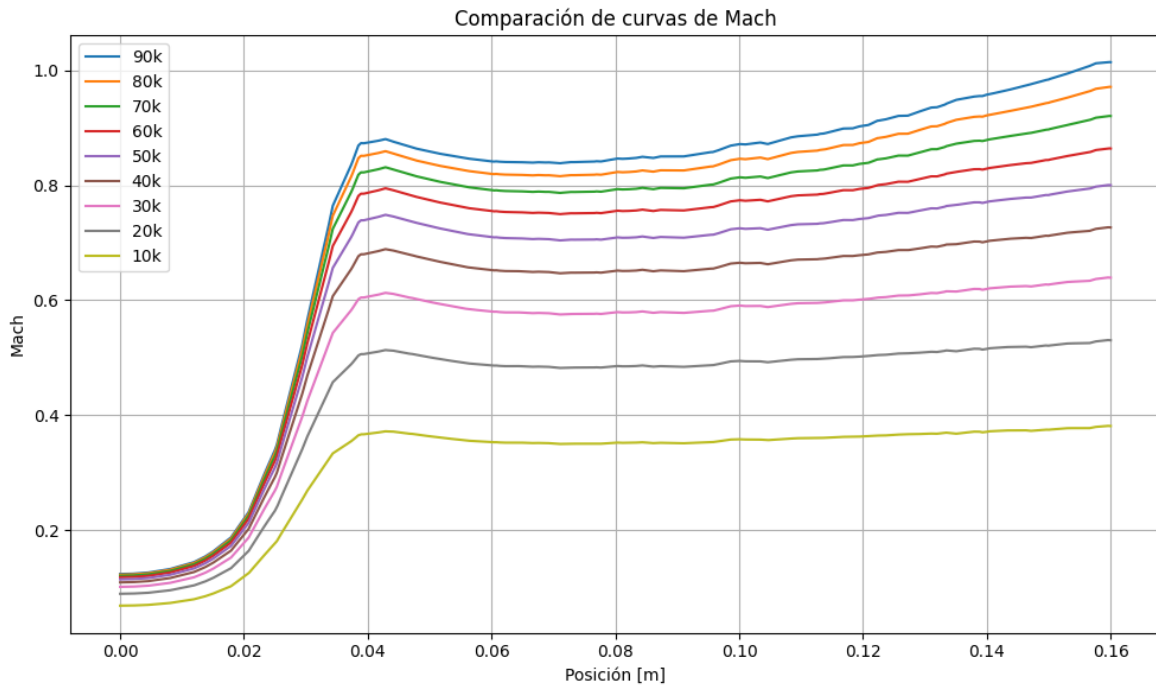


Figura 42: Número de Mach en línea central (5025) para diferentes presiones de entrada

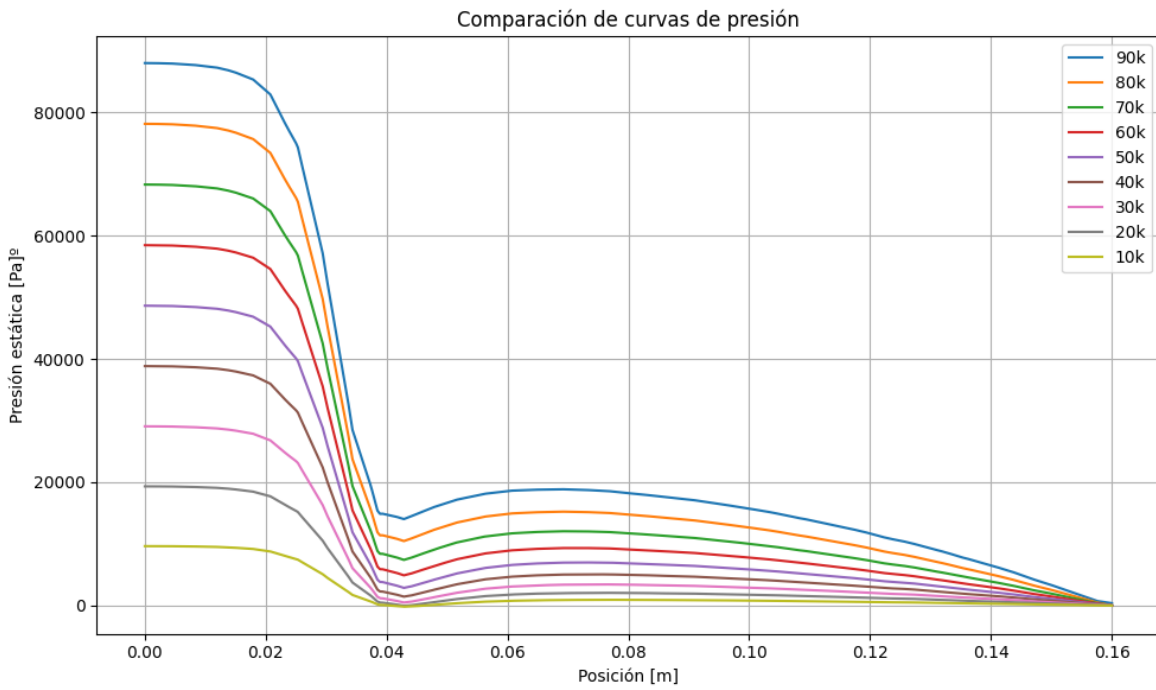


Figura 43: Presión en línea central (5025) para diferentes presiones de entrada

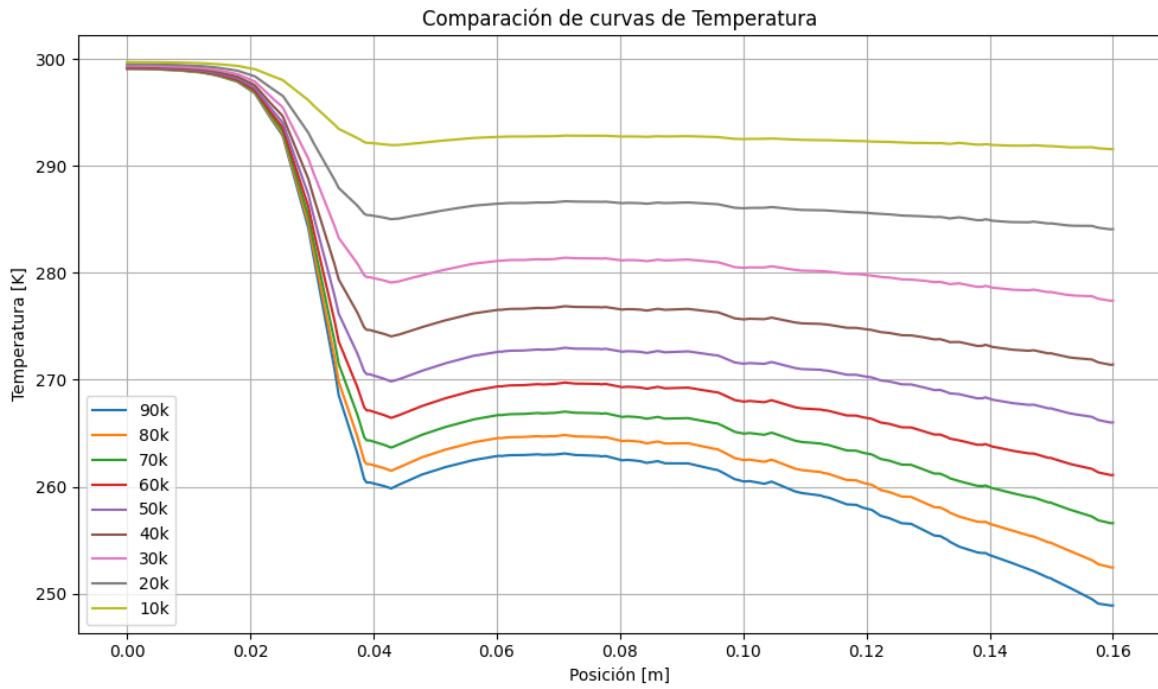


Figura 44: Temperatura en línea central (5025) para diferentes presiones de entrada

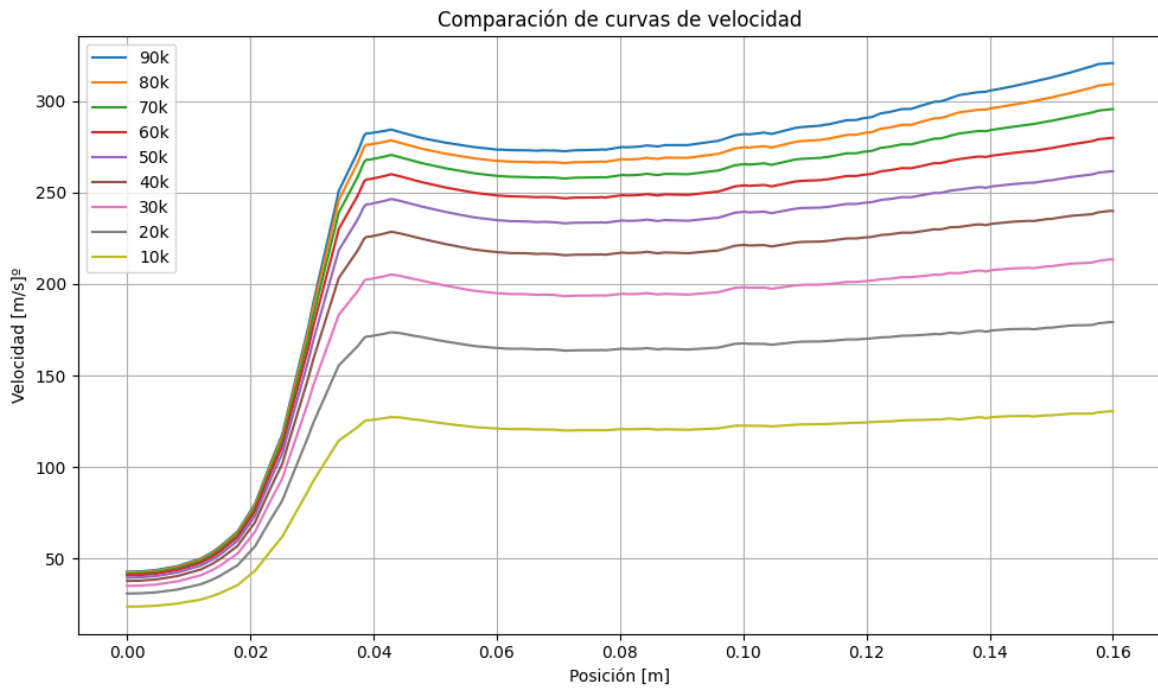


Figura 45: Velocidad en línea central (5025 para diferentes presiones de entrada)

7.5 Configuración 50-20 [mm] $\beta = 0.4$

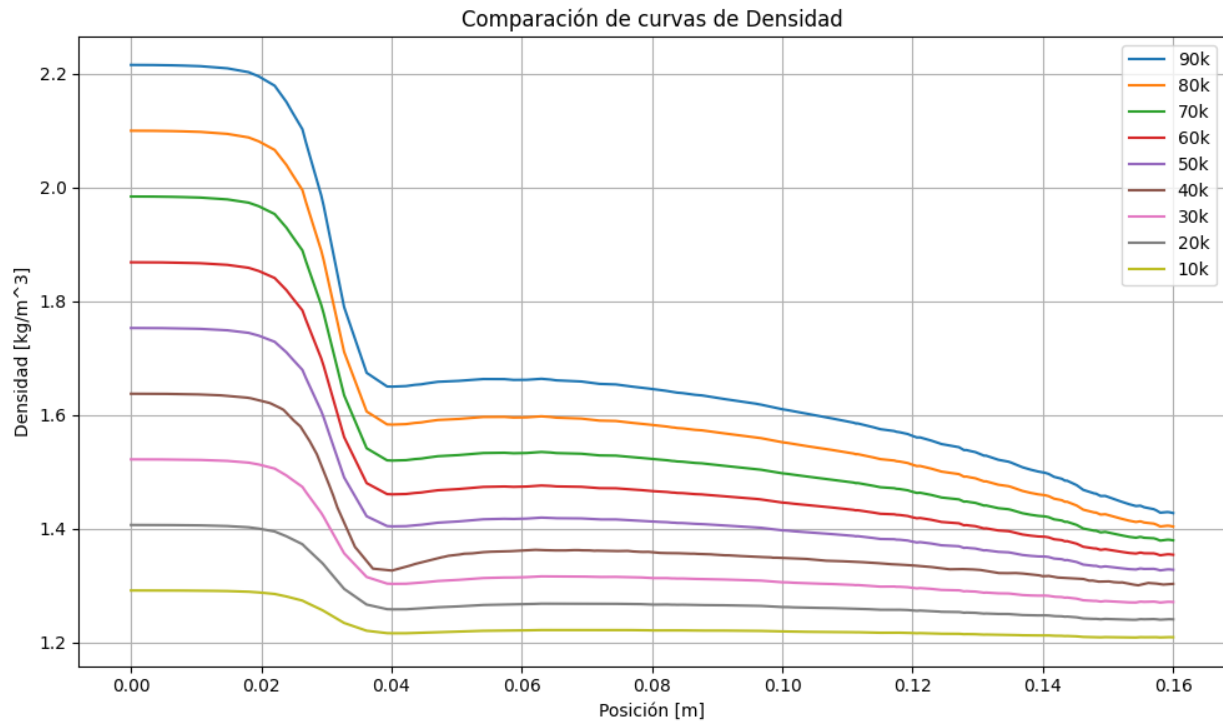


Figura 46: Densidad en línea central (5020) para diferentes presiones de entrada

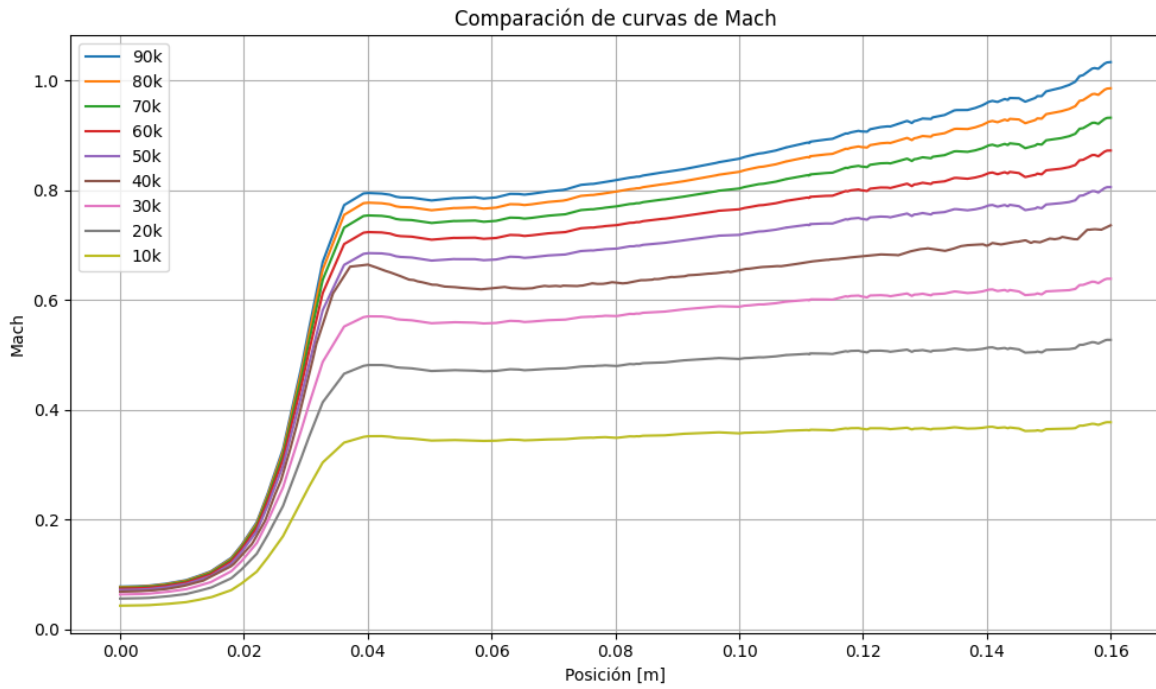


Figura 47: Número de Mach en línea central (5020) para diferentes presiones de entrada

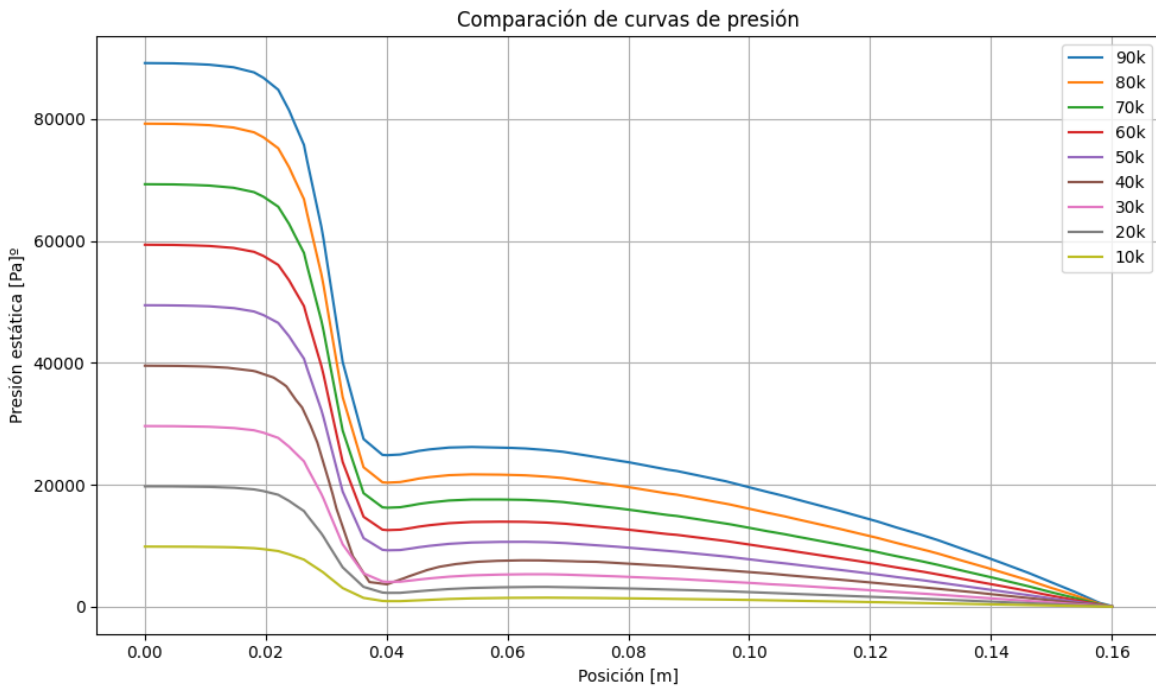


Figura 48: Presión en línea central (5020) para diferentes presiones de entrada

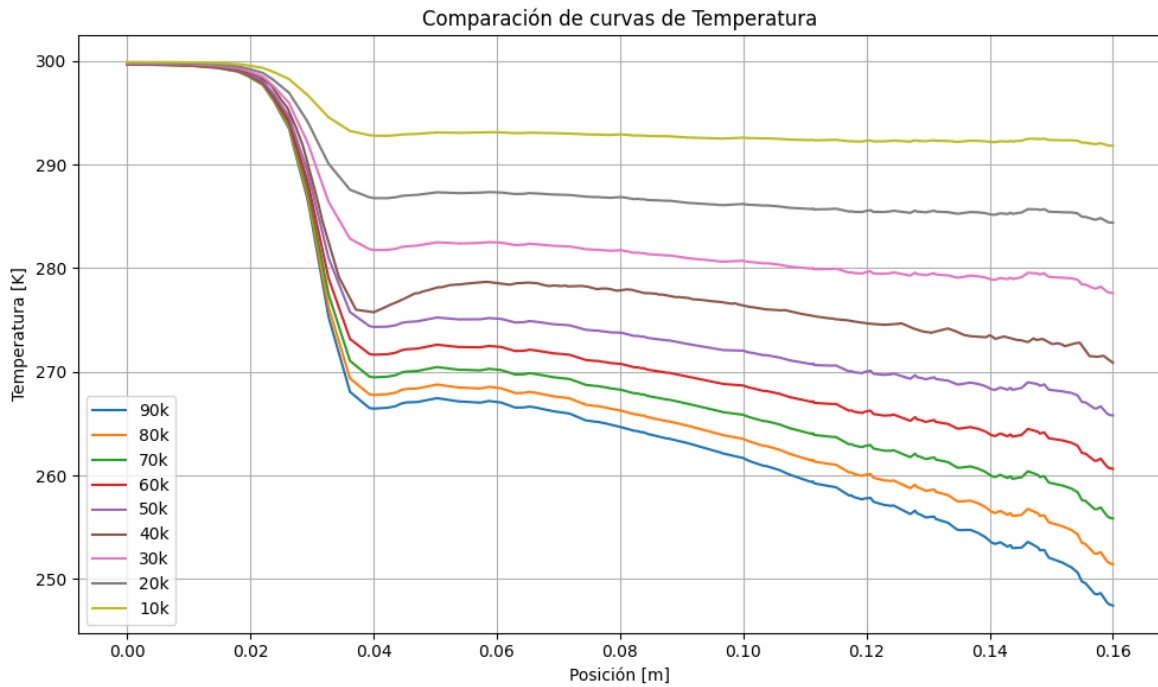


Figura 49: Temperatura en línea central (5020) para diferentes presiones de entrada

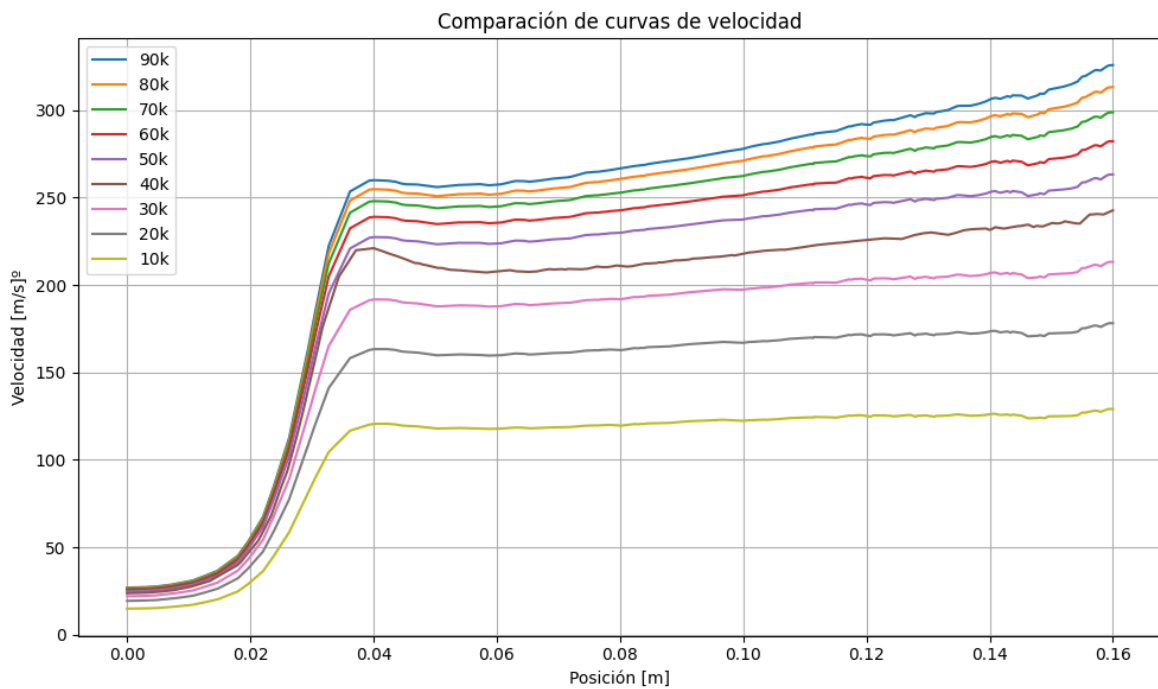


Figura 50: Velocidad en línea central (5020) para diferentes presiones de entrada

7.6 Configuración 50-15 [mm] $\beta = 0.3$

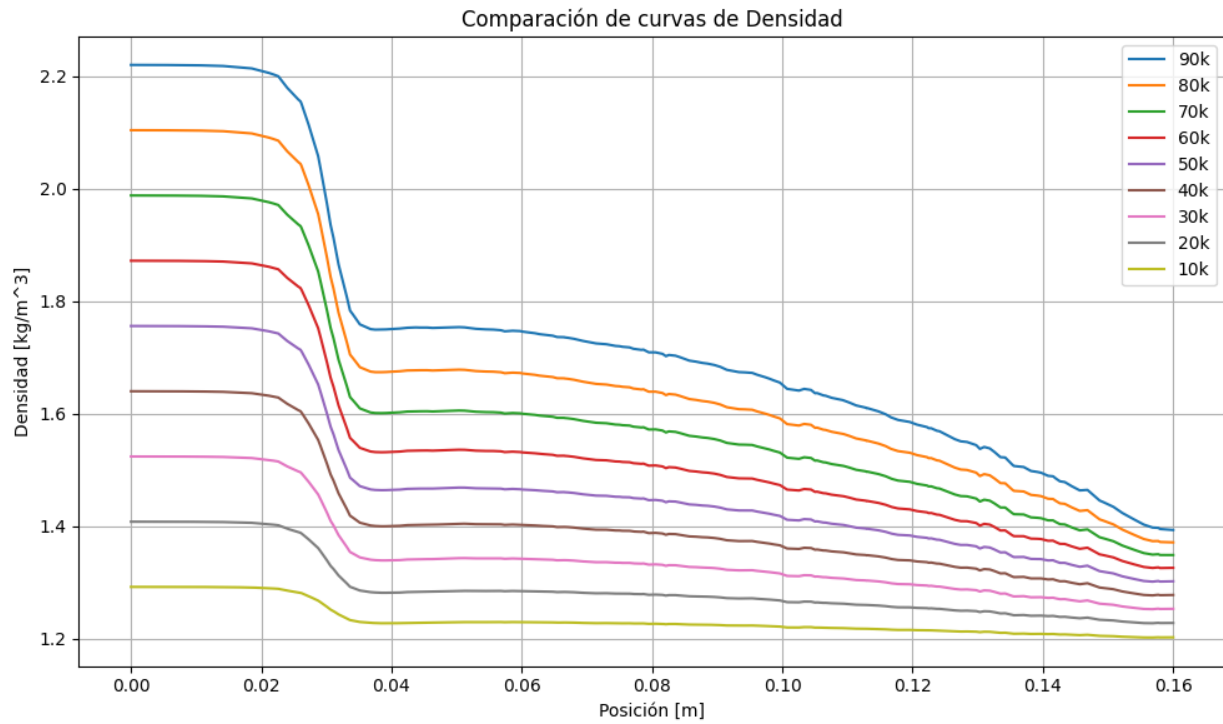


Figura 51: Densidad en línea central (5015) para diferentes presiones de entrada

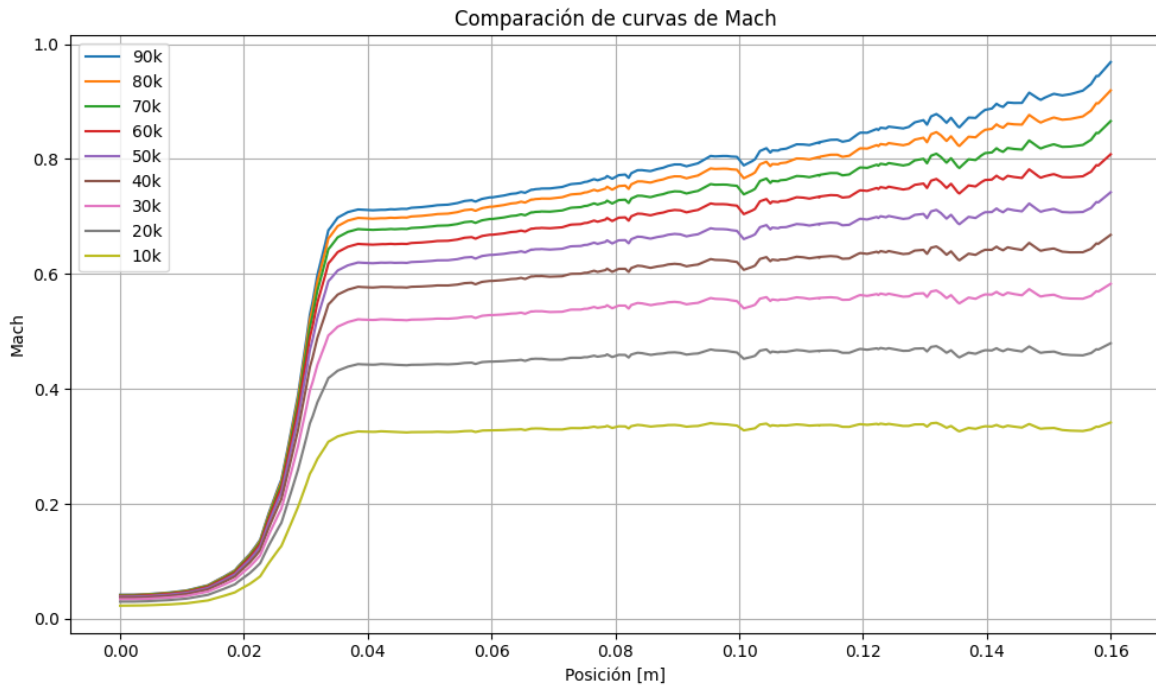


Figura 52: Número de Mach en línea central (5015) para diferentes presiones de entrada

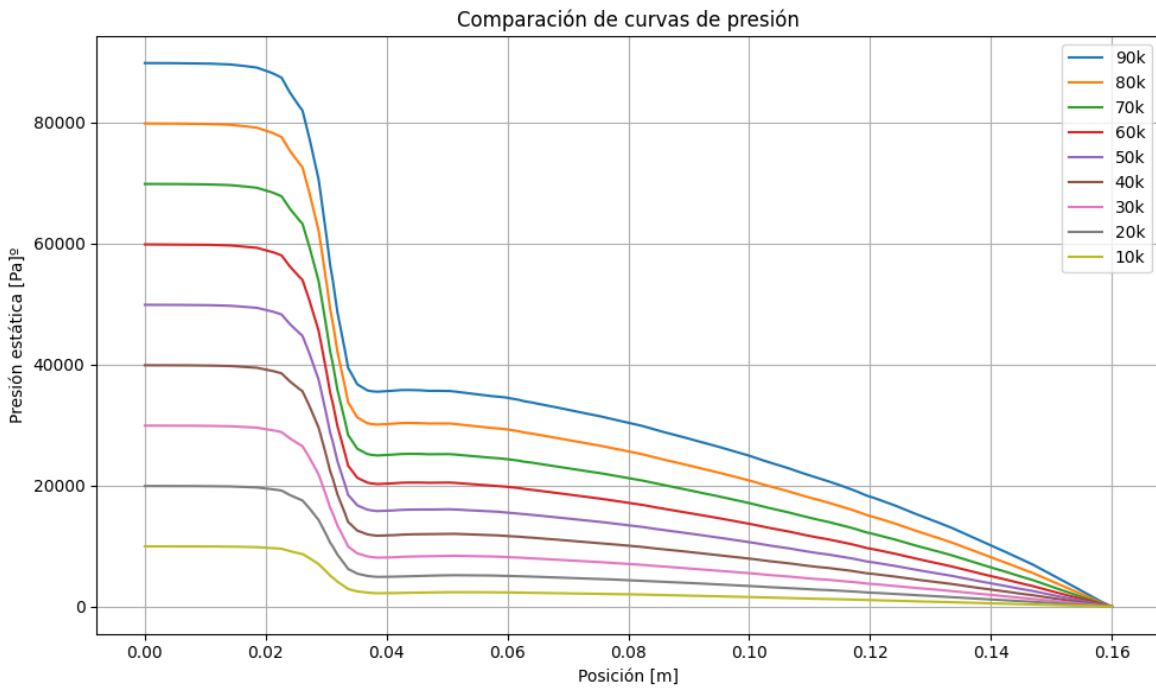


Figura 53: Presión en línea central (5015) para diferentes presiones de entrada

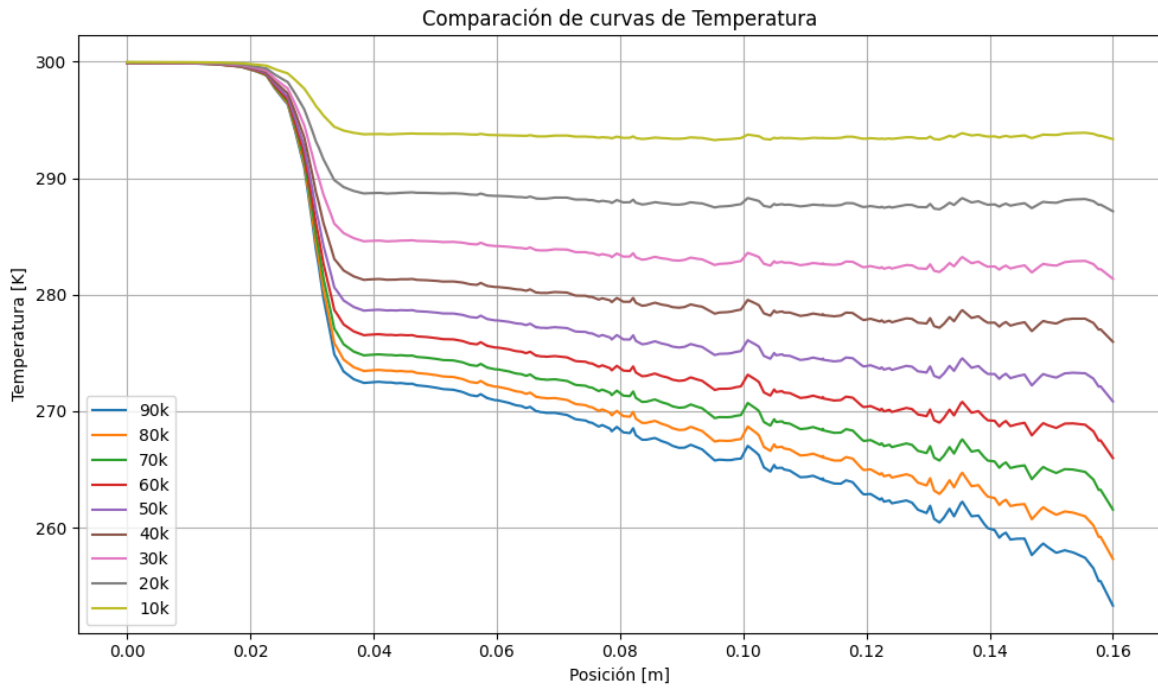


Figura 54: Temperatura en línea central (5015) para diferentes presiones de entrada

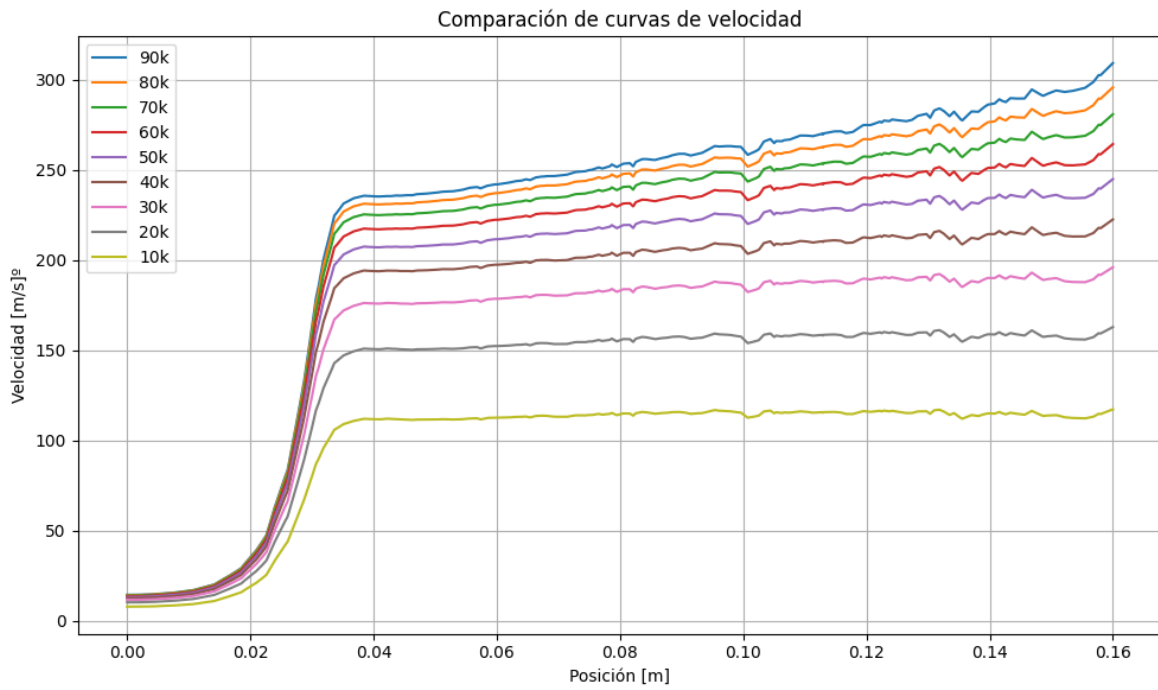


Figura 55: Velocidad en línea central (5015) para diferentes presiones de entrada

8 Análisis y comparación de resultados

En el siguiente segmento se discuten los resultados obtenidos por simulación y una posterior comparación de los distintos modelos de incompresibilidad y compresibilidad, así como también la veracidad de las estimaciones del valor de K a velocidades cercanas a las del sonido.

8.1 K v/s número de Mach

Se obtienen los máximos números de Mach desde la línea central de cada simulación, haciendo un balance de energía y momentum podemos despejar K de la siguiente forma:

$$K = \frac{2g \cdot H_{loss}}{V_{downstream}^2} \quad (8.1)$$

De donde H viene dado por el balance energético como:

$$H_{loss} = \frac{1}{g} \left[\left(\frac{p_{in}}{\rho_{in}} - \frac{p_{downstream}}{\rho_{downstream}} \right) + \left(\frac{v_{in}^2}{2} - \frac{v_{downstream}^2}{2} \right) \right] \quad (8.2)$$

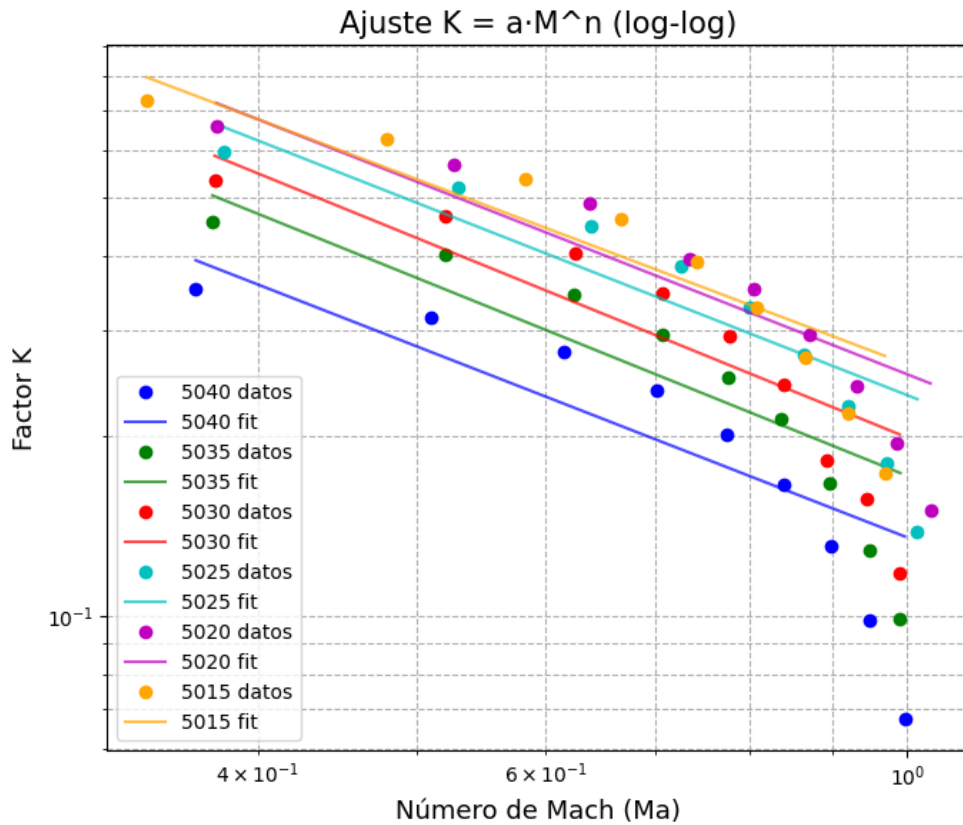


Figura 56: Numero de Mach vs K ajustado

La gráfica representa un ajuste exponencial en formato **log-log**, esto nos permite verificar si el comportamiento de la función es de la forma:

$$K = A(M)^n \quad (8.3)$$

$$\ln(K) = n \ln(M) + \ln(A) \quad (8.4)$$

Se calcula el error relativo porcentual, lo que indica que tan alejados están los valores de la curva ajustada, permitiéndonos graficar los residuos en una escala relativa en lugar de logarítmica dada por:

$$Error\% = \frac{K_{datos} - K_{modelo}}{K_{datos}} * 100 \quad (8.5)$$

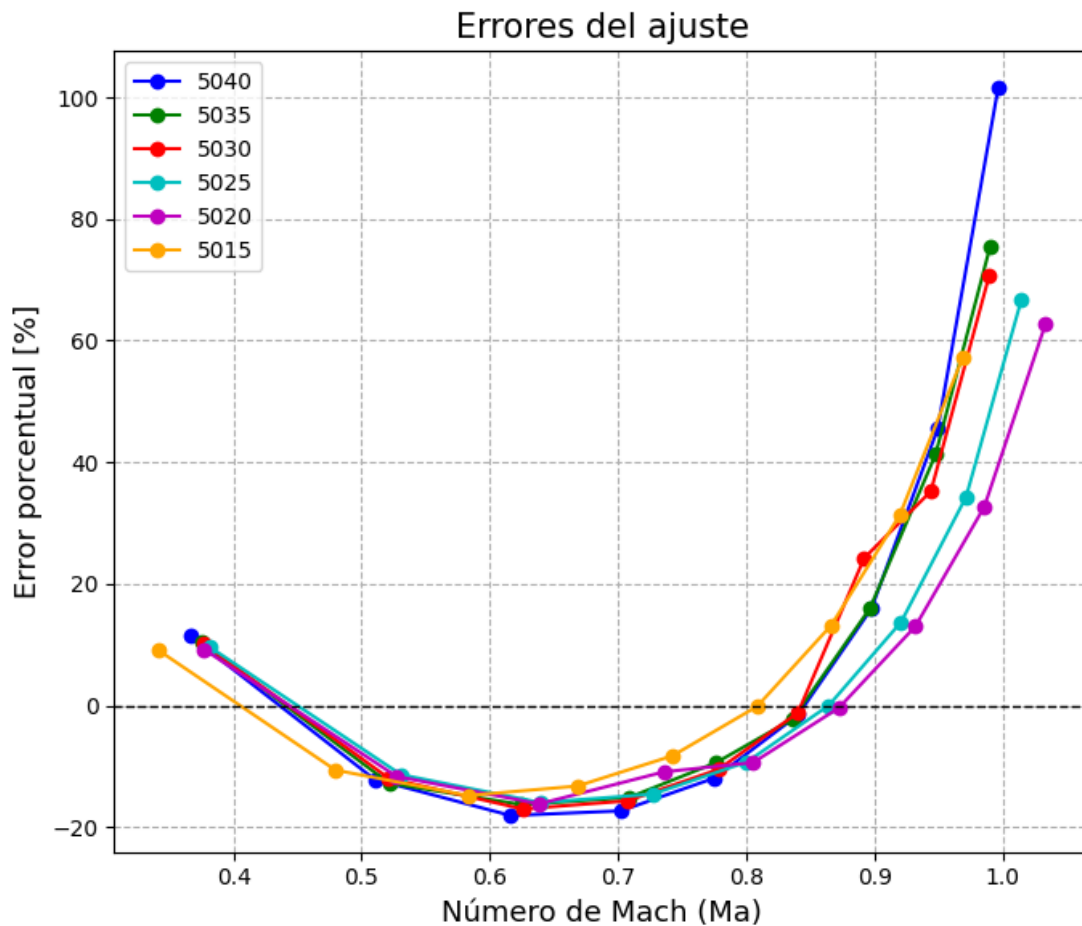


Figura 57: Residuos del modelo ajustado

Se calcula R^2 , el cual representa que tan bien se ajusta el modelo a los datos.

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{tot}}} \quad (8.6)$$

donde

$$SS_{\text{res}} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (8.7)$$

$$SS_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad (8.8)$$

con y_i los valores observados, \hat{y}_i los valores predichos por el modelo y \bar{y} la media de los valores observados.

Se presentan una tabla con los resultados del modelo al ajuste, donde β corresponde a la relación de diámetros conocida.

Tabla 12: Parámetros del ajuste $K = A M^n$

β	A	n	R^2	Error máx [%]
0.8	0.772	-1.88	0.956	76.2
0.7	1.02	-1.92	0.973	54.2
0.6	1.20	-1.94	0.981	50.0
0.5	1.29	-1.82	0.987	47.4
0.4	1.41	-1.82	0.990	42.5
0.3	1.49	-1.90	0.992	36.9

Podemos notar en la gráfica **log-log**, que a priori, una recta no se ajusta bien a los datos, esto es corroborado posteriormente en el calculo de R^2 , si bien en la literatura un ajuste superior a 0.9 es considerado "bueno", podemos verificar que se presentan altos errores al suponer un modelo exponencial. Por lo tanto es recomendado ajustar el modelo de forma polinomial como sigue:

El ajuste polinomial de grado 3 se expresa como:

$$K = a_0 + a_1 M + a_2 M^2 + a_3 M^3 \quad (8.9)$$

El ajuste polinomial de tercer grado posee una mayor correlación con los datos presentados, los valores para R^2 son cercanos a 1 en prácticamente todas las curvas. El coeficiente a_1 nos habla del comportamiento decreciente de K a medida que el numero de Mach aumenta, podemos notar que los valores de la constante K parten desde valores menores a 1, cercanos a los valores relativos al caso incompresible, pero a medida que aumenta la velocidad en el tubo aguas abajo, la constante $K \approx [0.2 - 0.1]$. Esto quiere decir que para valores cercanos a la velocidad del sonido, para el rango de β estudiado, la constante se comporta de manera parecida para cálculos prácticos.

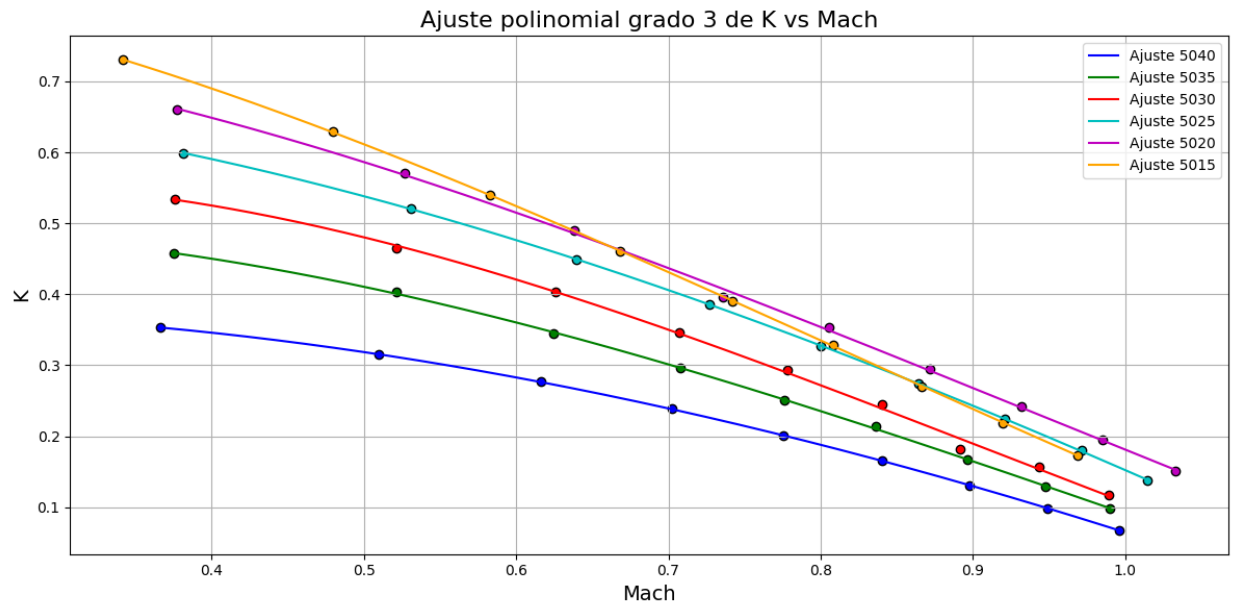


Figura 58: Curva de ajuste polinomial de tercer orden

Tabla 13: Parámetros del ajuste polinomial de grado 3 para cada serie

β	a_0	a_1	a_2	a_3	Error máximo [%]	R^2
0.8	0.071	-0.527	0.158	0.363	0.36	1.00
0.7	0.327	-1.03	0.329	0.462	1.59	1.00
0.6	0.600	-1.64	0.662	0.484	8.04	0.998
0.5	0.154	-0.706	0.018	0.686	0.50	1.00
0.4	0.334	-0.946	0.023	0.769	3.04	0.999
0.3	0.449	-1.10	-0.067	0.865	0.56	1.00

La pendiente se inclina a medida que disminuye el valor de β , superando la unidad para el caso $\beta = 0.3$, bastaría experimentar con relaciones de diámetros más grandes (menor valor de β) para asegurar que a medida que nos acercamos al "caso de un orificio", la curva tienda a tener pendiente infinita. De igual manera los datos confirman que para valores de β pequeños, la constante disminuye de manera más acelerada.

Cabe mencionar que el hecho de que K disminuya al aumentar el número de Mach no significa que la pérdida de carga sea menor a medida que el Mach aumenta. De la ecuación 8.1 podemos ver que $H_{loss} = K(V_{downstream}^2/2g)$, si bien K disminuye con M , $V_{downstream}$ es proporcional a M , de modo que el factor $V_{downstream}^2$ crece según M^2 . Esta tasa de aumento cuadrática es superior a la tasa a la cual decae K , de modo que el efecto neto todavía es un incremento de H_{loss} con el número de Mach.

8.2 Comparación de K obtenido y K de literatura

En la figura 59 se muestra la diferencia entre el K obtenido por medio de la ecuación para λ (ecuación (4.35)) K (ecuación(4.37)), precisamente el error porcentual entre ambas constantes a medida que aumenta el número de Mach.

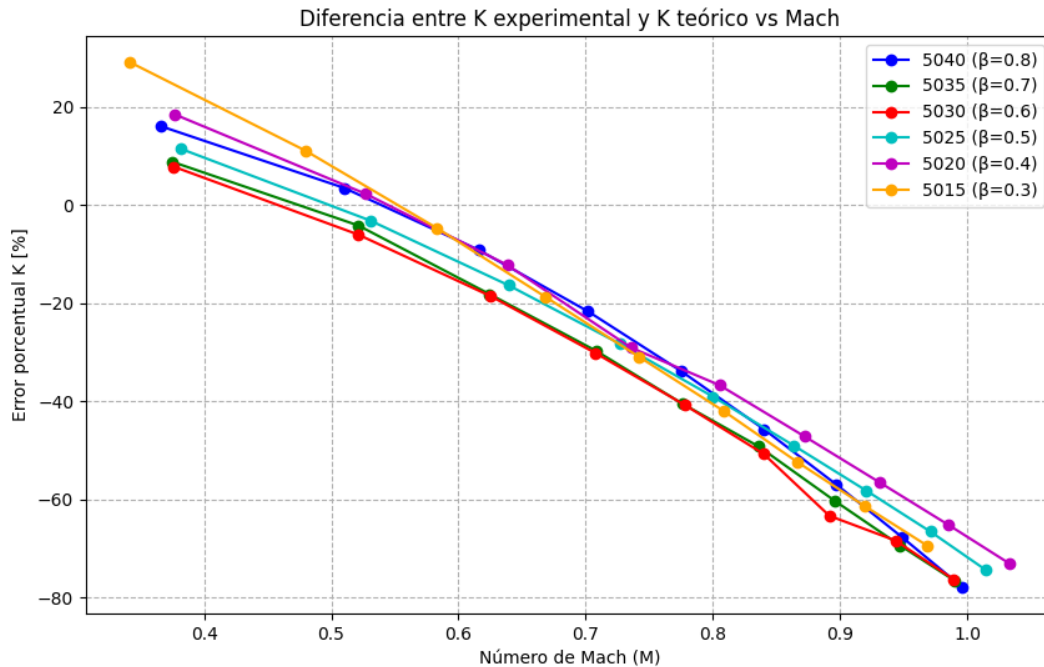


Figura 59: Diferencia de K teórico y K obtenido vs número de Mach

Esta gráfica es útil ya que nos permite calcular la diferencia que existe entre un K incompresible y un K adaptado a un caso más real, entregando de manera directa una relación entre los valores conocidos y esperados obtener.

Tabla 14: Comparación de K teórico y K simulado

β	K_{teo}	K_{sim}	Error máximo [%]
0.8	0.3097	0.0674 - 0.3533	77.86
0.7	0.4219	0.0988 - 0.4577	76.51
0.6	0.4924	0.1178 - 0.5343	76.22
0.5	0.5380	0.1383 - 0.5992	74.26
0.4	0.5920	0.1505 - 0.6606	73.01
0.3	0.6590	0.1732 - 0.7307	69.41

Para valores bajos de K , la diferencia es positiva, donde el error porcentual se encuentra entre 0 y 20%, a medida que aumenta el valor de Mach la diferencia se hace negativa, es en

el régimen cercano al sónico donde la diferencia teórica y simulada se alejan en un máximo valor. Pertinente es afirmar que aunque no se supera el 100% de error entre ambas constantes, asumir una incompresibilidad para valores de Mach altos puede alejar las estimaciones de pérdidas de presión en hasta casi el doble.

8.3 Análisis de la aproximación por TPR

Según se señala en Benedict and Webb, 1966 en base a la ecuación TPR (4.38), podemos obtener la diferencia de presiones totales a la entrada y aguas abajo para casos incompresibles como lo señala la ecuación. De esta manera al asumir que conocemos las condiciones iniciales previas a la contracción abrupta, podemos hacer una estimación con un K incompresible para luego poder estimar de manera teórica la presión y densidad aguas abajo. La siguiente demostración algebraica demuestra la deducción de esta aproximación teórica:

Usamos la notación $up(u)$ y $down(d)$ para referirnos a aguas arriba y abajo respectivamente. Tenemos que R_{down} :

$$R_d = \frac{p_d}{p_{td}}$$

De la ecuación TPR (4.38) reemplazando.

$$\begin{aligned} p_{td} &= \frac{p_{tu}}{1 + (1 - p_d/p_{td})K} \\ &= p_{td}(1 + K) - p_dK = p_{tu} \\ &= p_d + \rho_d v_d^2 (1 + K)/2 = p_{tu} \\ &= p_d + \rho_d \frac{G_d^2}{\rho_d^2} (1 + K)/2 \end{aligned}$$

Sea d_d el diámetro del tubo aguas abajo y G_d dado por:

$$G_d = \frac{\dot{m}}{\pi d_d^2/4}$$

Definimos μ como:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{G_d^2(1 + K)}{2} \\ p_d + \frac{\mu}{\rho_d} &= p_{tu} \end{aligned} \tag{8.10}$$

Nos queda por lo tanto determinar la densidad aguas abajo, para esto empleamos la ley de gases ideales de la siguiente forma:

$$p_{estatica} = \rho RT$$

Y de la ecuación de conservación y energía tenemos:

$$T_d - T_u = 1/C_p \left(\frac{v_u^2}{2} - \frac{G_d^2}{\rho_d^2} \right)$$

Nos queda una ecuación cuadrática para ρ_d :

$$\rho_d^2 \left[RT_u + \eta \frac{v_u^2}{2} \right] - p_{tu} \rho_d + 1/2 G_d^2 (1 + K - \eta) = 0$$

Con η :

$$\eta = R/C_p$$

Nos quedan los valores a, b, c de la ecuación cuadrática:

$$a\rho_d^2 + b\rho_d + c = 0$$

$$a \left[\frac{m^2}{s^2} \right] = RT_u + \eta \frac{v_u^2}{2}$$

$$b [Pa^2] = -p_{tu}$$

$$c \left[\frac{kg^2}{m^4 s^2} \right] = 1/2 G_d^2 (1 + K - \eta)$$

A partir del cálculo de la densidad, podemos posteriormente calcular la presión absoluta a la aguas abajo. Para realizar los cálculos tomamos todos los datos obtenidos por la simulación a la entrada, con esto le entregamos a la ecuación los valores iniciales para estimar las constantes mostradas. Se ilustra una tabla con los valores para el caso de 40[mm], los resultados generales de las presiones aguas abajo pueden ser encontrados en el anexo.

Tabla 15: Coeficientes de la ecuación cuadrática para $D = 40$ mm

D [mm]	P_t [kPa]	K	a	b	c	Discriminante
40	90	0.3045	88002.655	-191325	73124.73	$0 < \Delta$
40	80	0.3045	87967.288	-181325	64595.83	$0 < \Delta$
40	70	0.3045	87915.692	-171325	56246.83	$0 < \Delta$
40	60	0.3045	87841.226	-1161325	48039.67	$0 < \Delta$
40	50	0.3045	87735.271	-151325	39947.68	$0 < \Delta$
40	40	0.3045	87585.499	-141325	31934.24	$0 < \Delta$
40	30	0.3045	87375.688	-131325	23976.67	$0 < \Delta$
40	20	0.3045	87081.546	-121325	16021.90	$0 < \Delta$
40	10	0.3045	86671.281	-111325	8043.19	$0 < \Delta$

En la siguiente figura podemos apreciar los resultados, donde vemos los valores de la presión absoluta a la entrada y la estimación de la presión $gauge(p_{abs} - p_{atm})$ a la salida para facilitar la comparación con los resultados de la simulación.

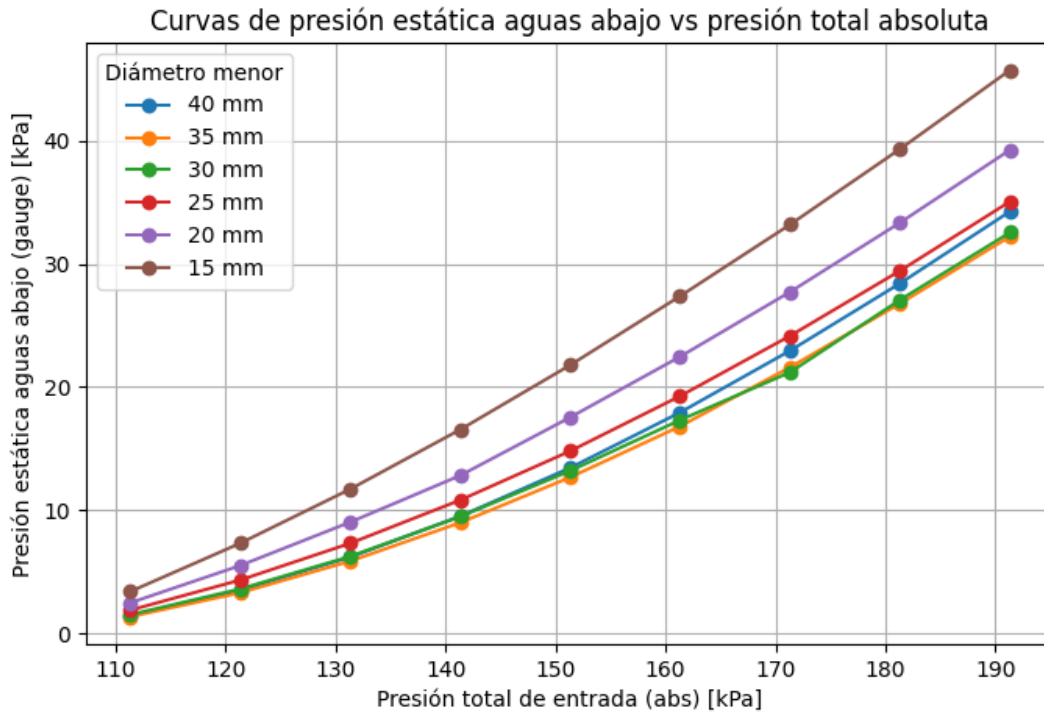


Figura 60: Estimación de presiones aguas abajo por aproximación de TPR

La aproximación por TPR tiende a sobrestimar las presiones aguas abajo, si bien los resultados se encuentran en el orden de magnitud al compararlos con los de la simulación, aun así no podemos afirmar que utilizar esta ecuación sea una buena herramienta a la hora del cálculo de pérdidas de carga.

Se ilustra en la siguiente tabla la diferencia porcentual que existe entre las presiones aguas abajo obtenidas por la simulación y por la ecuación, la **diferencia positiva indica que la presión de la simulación es menor a la mencionada**, esto quiere decir que en la práctica la aproximación por TPR puede servir como factor de seguridad, ya que al suponer sobrepresiones en un sistema, estas pueden ser reguladas con válvulas y otros elementos hidráulicos, no así en el caso donde nos encontraríamos con faltas de presión en el mismo, en tal caso el sistema debe ser rediseñado para disminuir las pérdidas o aumentar la presión de entrada.

Tabla 16: Diferencia porcentual entre presión de simulación y por ecuación TPR

Caso [kPa]	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.6$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.3$
90	125.02%	132.60%	112.56%	92.24%	65.93%	50.68%
80	137.99%	136.54%	122.66%	99.48%	70.35%	53.53%
70	149.51%	146.80%	113.86%	106.13%	74.58%	56.51%
60	158.53%	166.13%	138.88%	111.52%	78.48%	59.81%
50	163.50%	156.97%	143.47%	116.03%	81.96%	62.24%
40	162.61%	154.76%	144.33%	117.50%	82.05%	64.43%
30	155.84%	147.42%	141.40%	116.92%	86.02%	66.32%
20	142.07%	148.64%	134.09%	113.87%	86.01%	67.46%
10	121.20%	129.18%	123.09%	107.19%	83.94%	67.70%

8.4 Correlación entre Reynolds y K

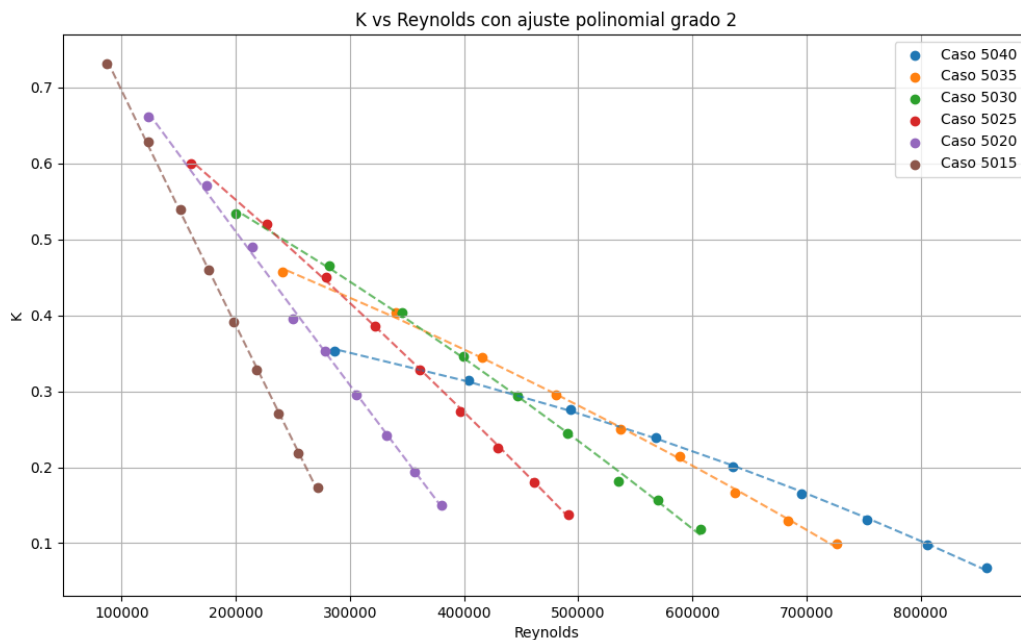


Figura 61: Ajuste polinomial entre el Numero de Reynolds y K

Se presenta un ajuste polinomial de segundo orden:

$$K = a_0 + a_1 Re + a_2 Re^2 \quad (8.11)$$

β	a_2	a_1	a_0
0.8	-3.18×10^{-13}	-1.46×10^{-7}	4.24×10^{-1}
0.7	-2.68×10^{-13}	-4.97×10^{-7}	5.97×10^{-1}
0.6	-3.60×10^{-13}	-7.61×10^{-7}	7.05×10^{-1}
0.5	-3.84×10^{-13}	-1.17×10^{-6}	8.01×10^{-1}
0.4	1.31×10^{-13}	-2.09×10^{-6}	9.22×10^{-1}
0.3	3.07×10^{-13}	-3.18×10^{-6}	1.01

Tabla 17: Coeficientes del ajuste polinomial de grado 2 para K vs Re

El valor de Re en el mismo tubo cambia muy poco posterior a la contracción, esto se debe a que el producto entre la densidad velocidad y área corresponden al flujo másico, el cual es constante en la tubería, el factor de cambio en la ecuación es la viscosidad dinámica del fluido, la cual varía muy poco (del orden del 10%) con el cambio de temperatura simulado en cada caso. Por lo tanto es correcto asumir que cada tubería, en cada caso específico de simulación, posee un valor de Re "fijo" luego de la contracción.

Se observa que a medida que disminuye β , las curvas presentan un comportamiento más lineal, con pendientes que se acercan a la vertical para $\beta = 0.3$, al mismo tiempo que Re disminuye para cada caso en particular cuando el número de Mach se acerca a 1.

El coeficiente de pérdida K disminuye al aumentar el número de Reynolds, esto es consistente con el comportamiento esperado ya que a mayor Re los efectos viscosos relativos son menores y las pérdidas de presión localizadas tienden a disminuir. La figura 61 muestra que el número de Reynolds influye significativamente la magnitud de K , sobre todo a valores pequeños de Re , valores que se estabilizan a medida que este aumenta.

9 Análisis General y Conclusiones

Artículos como el de Benedict (Benedict and Webb, 1966) nos entregan valiosa información que es ampliamente utilizada en la industria y academia, desde una simple estimación de parámetros como la presión o velocidad existentes en fenómenos como el bombeo de agua residencial o la inyección de gases o líquidos en hornos industriales. Si bien literatura disponible permite dimensionar casos generales, es cuando en casos más acotados la información necesaria no llega a ser suficiente. Las simulaciones realizadas en ANSYS Fluent abarcan una serie de metodologías ampliamente estudiadas como lo es la mecánica computacional, el estudio de fluidos y la matemática pura. Estas herramientas nos permiten generar estimaciones certeras que se adaptan a las necesidades de los usuarios, ya sean estudiantes o industrias dedicadas a la ingeniería

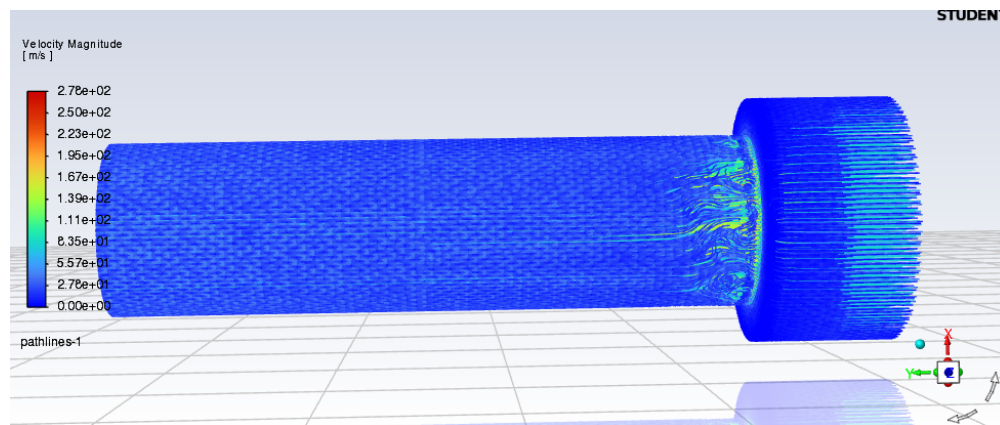


Figura 62: "Pathlines" de velocidad

Como es apreciable en los resultados obtenidos, las simulaciones son congruentes con lo esperado, esto quiere decir que los valores de la simulación cumplen con las leyes fundamentales que los rigen, como la ecuación de energía, continuidad y momentum. De la misma manera se observan caídas de presiones, densidades y aumentos de temperaturas relativos a lo que una contracción abrupta significa.

Como se puede observar en la siguientes figuras, se forman zonas de recirculación cercanas al límite de la contracción, como también un aumento significativo de la velocidad y principalmente la formación del fenómeno de vena contracta posterior a la disminución del diámetro. Esta vena aumenta su tamaño a medida que el diámetro del tubo mas pequeño crece, esto significa que posee una relación directa con el aumento de velocidad que experimenta el flujo. Las simulaciones indican que un polinomio de grado 3 se ajusta bien al comportamiento decreciente de K a medida que aumenta el valor del número de Mach, donde la influencia de la velocidad obtenida aguas abajo converge en valores que se encuentran entre 0.1 a 0.2 K , por lo que es posible afirmar que las pérdidas de presión disminuyen, en general, a medida que aumenta la velocidad, dependiendo en cada caso de la relación β .

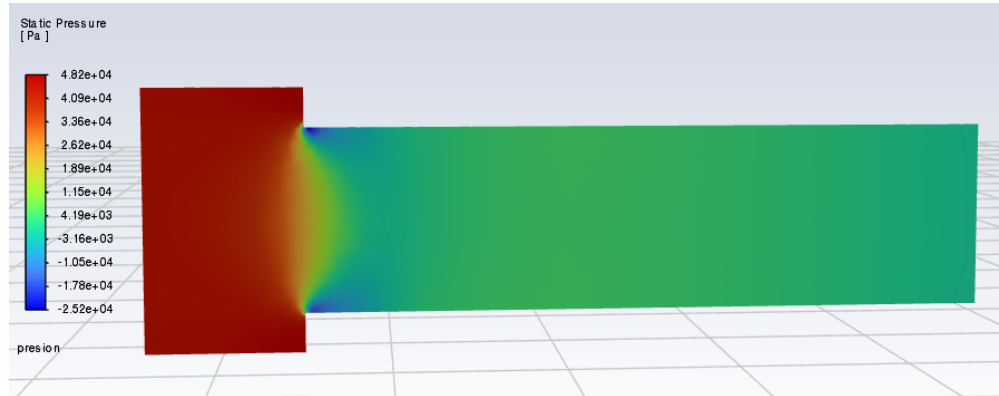


Figura 63: Corte longitudinal de presión

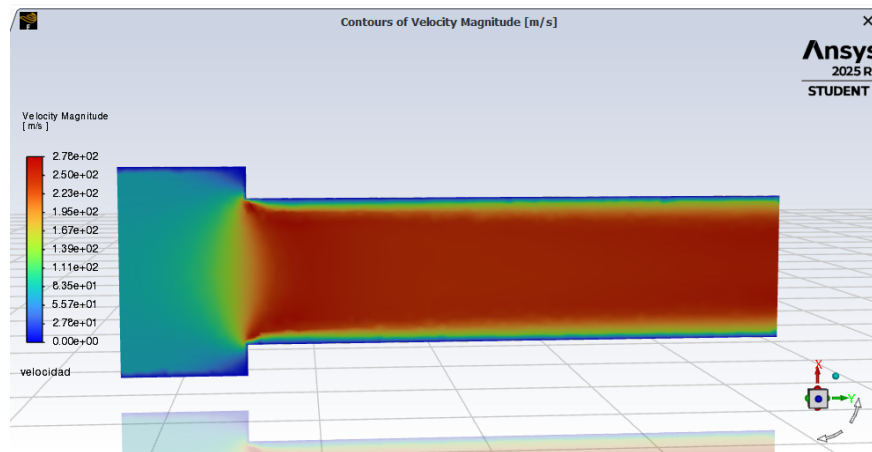


Figura 64: Corte longitudinal de velocidad

Las aproximaciones de flujo incompresible no son suficientes para casos donde las velocidades son altas, esto quiere decir que la literatura experimental citada sirve como una base para realizar nuevas aproximaciones elaboradas por simulación.

Como se ven en la figura 56, un ajuste polinomial presenta una buena relación entre el número de Mach y el valor de pérdida de carga K , esto difiere de los casos ya estudiados en la literatura, donde el valor de K dependía netamente de la geometría del tubo y no así de la velocidad alcanzada a la salida, por ejemplo. Es posible también notar que existen relaciones entre el número de Reynolds y K , donde el valor de K disminuye al aumentar Re . La razón de esta disminución es similar a la discutida para la variación de K con M .

De esta manera la pérdida de energía disponible en energía no recuperable (*head loss*) representa una variable a tomar en consideración al realizar experimentos con altas presiones o cambios bruscos de geometrías. Es en estos casos donde los resultados expuestos en la figura 59 pueden ser de gran ayuda, entregan de forma acotada una estimación de la esperada diferencia entre los valores de K de la literatura y los obtenidos por simulación.



Realizar simulaciones como la estudiada nos permiten a los estudiantes adentrarnos en el mundo de la ingeniería aplicada a casos reales, como también a situaciones a los que la industria se ve enfrentada en el día a día. Las herramientas de *CFD* simplifican tareas y procesos que pueden resultar costosos de realizar en la práctica, esto permite democratizar tanto el conocimiento como la accesibilidad a la implementación de tecnologías de simulación para todo tipo de tareas, beneficiando tanto al estudiante como al ingeniero en el campo de la ingeniería mecánica.

References

- [1] ScienceDirect Topics. *Newtonian Fluid - an overview* / *ScienceDirect Topics*. 2024. <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/newtonian-fluid>
- [2] Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab®*. Springer, Cham, 2016.
- [3] Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. En: *Fluid Mechanics and Its Applications*, Springer International Publishing, vol. 113, pp. 103–164, 2016.
- [4] White, Frank M. *Fluid Mechanics*, 6a edición. McGraw-Hill, 2006.
- [5] Rennels, Donald C. y Hudson, Hobart M. *Pipe Flow: A Practical and Comprehensive Guide*, 3a edición. John Wiley & Sons, 2022.
- [6] Benedict, R. P. y Webb, R. B. Pressure Drop for Flow Through Short Tube Orifices. *Journal of Basic Engineering*, vol. 88, no. 4, pp. 843–850, 1966.
- [7] Idelchik, I. E. *Handbook of Hydraulic Resistance*, 3a edición. Jaico Publishing House, 2005. Publicado en acuerdo con Begell House, Inc.
- [8] ANSYS Inc. *ANSYS Fluent Theory Guide*. ANSYS Inc., Canonsburg, PA, USA, 2025. Versión 2025 R1.
- [9] ANSYS Inc. *ANSYS Fluent Theory Guide*. Manual de software, 2025. <https://www.ansys.com>.
- [10] Ward-Smith, A. J. *Internal Fluid Flow: The Fluid Dynamics of Flow in Pipes and Ducts*. Clarendon Press, Oxford, 1980.
- [11] Wang, Z. J., “A p-adaptive method for the Euler and Navier–Stokes equations,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 33, No. 8, pp. 917–926, 2000.



10 Anexos

10.1 Código de graficado de funciones

```
1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import re
4
5
6 def leer_datos_ansys(ruta):
7     """Lee un archivo de ANSYS y devuelve un DataFrame ordenado."""
8     with open(ruta, 'r') as f:
9         lines = f.readlines()
10        data_lines = [line for line in lines if re.match(r"^\d", line)]
11
12        data = []
13        for line in data_lines:
14            parts = line.split()
15            try:
16                x = float(parts[0])
17                y = float(parts[1])
18                data.append([x, y])
19            except ValueError:
20                continue
21
22        df = pd.DataFrame(data, columns=["Position", "Static Pressure"])
23        if (df.iloc[0] == df.iloc[-1]).all():
24            df = df.iloc[:-1]
25        df = df.sort_values(by="Position")
26        return df
27
28
29 def plot_combinado(rutas_archivos, etiquetas=None):
30     """Grafica mltiples curvas en un solo plot."""
31     plt.figure(figsize=(10, 6))
32
33     for i, ruta in enumerate(rutas_archivos):
34         df = leer_datos_ansys(ruta)
35         label = etiquetas[i] if etiquetas and i < len(etiquetas)
36         else f"Curva {i + 1}"
37         plt.plot(df["Position"], df["Static Pressure"], label=label)
38
39     plt.xlabel("Posici n [m]")
40     plt.ylabel("Mach")
41     plt.title("Comparaci n de curvas de Mach")
42     plt.legend()
```



```
43 plt.grid(True)
44 plt.tight_layout()
45 plt.show()
46
47 def maximo_mach(ruta):
48     with open(ruta, 'r') as f:
49         lines = f.readlines()
50         data_lines = [line for line in lines if re.match(r"^\d", line)]
51
52         mach_values = []
53         for line in data_lines:
54             parts = line.split()
55             try:
56                 mach = float(parts[1])
57                 mach_values.append(mach)
58             except (IndexError, ValueError):
59                 continue
60
61         if not mach_values:
62             raise ValueError(f"No se encontraron valores
63                 de Mach v lidos en el archivo {ruta}")
64
65         return max(mach_values)
66
67 rutas = [
68     r"C:\Users\Mart n\OneDrive\Desktop\TESIS\PLOTS 5040\90kM",
69     r"C:\Users\Mart n\OneDrive\Desktop\TESIS\PLOTS 5040\80kM",
70     r"C:\Users\Mart n\OneDrive\Desktop\TESIS\PLOTS 5040\70kM",
71     r"C:\Users\Mart n\OneDrive\Desktop\TESIS\PLOTS 5040\60kM",
72     r"C:\Users\Mart n\OneDrive\Desktop\TESIS\PLOTS 5040\50kM",
73     r"C:\Users\Mart n\OneDrive\Desktop\TESIS\PLOTS 5040\40kM",
74     r"C:\Users\Mart n\OneDrive\Desktop\TESIS\PLOTS 5040\30kM",
75     r"C:\Users\Mart n\OneDrive\Desktop\TESIS\PLOTS 5040\20kM",
76     r"C:\Users\Mart n\OneDrive\Desktop\TESIS\PLOTS 5040\10kM",
77 ]
78
79 etiquetas = ["90k", "80k", "70k", "60k", "50k",
80 "40k", "30k", "20k", "10k"]
81
82 plot_combinado(rutas, etiquetas)
```



10.2 Código de estimación de presión total aguas abajo

```
1 import math
2 import numpy as np
3 import pandas as pd
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 # ----- Constantes -----
7 gamma = 1.4
8 R_air = 287 # J/(kg K)
9 Cp_aire = 1005 # J/(kg K)
10 T0 = 300 # K temperatura total de entrada
11 p_atm = 101325 # Pa presi n atmosf rica
12
13 # ----- Geometria -----
14 d_u = 0.05 # 50 mm
15 d_down_values = np.arange(0.04, 0.014, -0.005) # 40 mm hasta 15 mm
16
17 # ----- Presiones de entrada (gauge) -----
18 p_t_gauge_values = np.arange(90000, 9000, -10000)
19 # 90kPa a 10kPa gauge (9 valores)
20
21 # ----- Datos experimentales -----
22 m_puntos = []
23 densidades_u = []
24 presiones_estaticas_u = []
25 velocidades_u = []
26
27 # ----- Funcion aguas abajo -----
28 # ----- Funci n aguas abajo -----
29 def calcular_condiciones_abajo(
30 d_u, d_d, p_u_abs, v_u, pt_u_abs, T_u, m_punto):
31     """
32     Condiciones aguas abajo usando balance de energ a y p rdid as .
33     Todas las presiones absolutas.
34     """
35     A_d = (math.pi * d_d ** 2) / 4
36     beta = d_d / d_u
37
38     lamda = 1 + 0.622 * (1 - 0.0215 * beta ** 2 - 0.785 * beta ** 5)
39     K = 0.0696 * (1 - beta ** 5) * lamda ** 2 + (lamda - 1) ** 2
40
41     R_u = p_u_abs / pt_u_abs
42     G_d = m_punto / A_d
43     eta = R_air / Cp_aire
44     mu = (G_d ** 2) * (1 + K) / 2
```



```
45
46     a = R_air * T_u + (eta * v_u ** 2) / 2
47     b = -pt_u_abs
48     c = (G_d ** 2) * (1 + K - eta) / 2
49
50     disc = (b ** 2) - (4 * a * c)
51
52     if disc < 0:
53         return None, None
54
55     rho_d = (-b + math.sqrt(disc)) / (2 * a)
56     p_d_abs = pt_u_abs - mu / rho_d
57     return rho_d, p_d_abs
58
59 # ----- C lculo -----
60 resultados = []
61
62 for i, d_d in enumerate(d_down_values):           # 6 di metros
63     for j, p_t_gauge in enumerate(p_t_gauge_values): # 9 presiones
64         p_t_abs = p_t_gauge + p_atm
65         m_punto = m_puntos[i][j]
66         rho_u = densidades_u[i][j]
67         v_u = velocidades_u[i][j]
68         p_u_abs = presiones_estaticas_u[i][j] + p_atm
69         # en absoluta no gauge
70
71
72         rho_d, p_d_abs = calcular_condiciones_abajo(
73             d_u, d_d, p_u_abs, v_u, p_t_abs, T0, m_punto)
74
75         if rho_d is not None:
76             resultados.append({
77                 "Diametro_mm": d_d * 1000,
78                 "Presion_total_abs_kPa": p_t_abs / 1000,
79                 "m_punto": m_punto,
80                 "Presion_estatica_entrada_abs_kPa": p_u_abs / 1000,
81                 "Velocidad_entrada_m_s": v_u,
82                 "Densidad_entrada_kg_m3": rho_u,
83                 "Densidad_abajo_[kg/m3]": rho_d,
84                 "Presion_abajo_gauge [kPa]": (p_d_abs - p_atm) / 1000,
85                 "Presion_abajo_abs_kPa": p_d_abs / 1000
86             })
87         else:
88             print(f" discriminante < 0 para D={d_d*1000:.0f}
89                   mm, P_t={p_t_abs/1000:.0f} kPa")
90 pd.set_option('display.max_columns', None)
```

```
91 pd.set_option('display.width', None)
92 df = pd.DataFrame(resultados)
```

10.3 Tablas de resultados promediados en el área transversal

Caso 5040

INLET			
5040	Presión [Pa]	Velocidad	densidad
90k P_{in}	75551.08	115.4349	2.100516
80k P_{in}	66553.94	114.357	1.992831
70k P_{in}	57637.29	112.766	1.885827
60k P_{in}	48824.16	110.4294	1.779698
50k P_{in}	40139.55	107.0168	1.674653
40k P_{in}	31616.22	101.9984	1.570963
30k P_{in}	23289.19	94.52123	1.468913
20k P_{in}	15209.1	82.91105	1.368912
10k P_{in}	7426.02	63.25314	1.271344

AGUAS ABAJO						
5040	Presión [Pa]	Velocidad	densidad	Reynolds	HEAD LOSS	K
90k P_{in}	15220.24	247.1613	1.517839	857488	2058	0.06
80k P_{in}	11940.8	240.5994	1.465944	806183	2845	0.09
70k P_{in}	9201.489	232.0018	1.419199	752586	3525	0.13
60k P_{in}	6943.046	221.1097	1.37697	695911	4044	0.16
50k P_{in}	5105.701	207.5707	1.338562	635077	4338	0.20
40k P_{in}	3629.282	190.8007	1.303252	568368	4339	0.23
30k P_{in}	2427.273	169.8383	1.270064	493041	3988	0.27
20k P_{in}	1458.62	142.5922	1.238389	403621	3203	0.31
10k P_{in}	665.7974	103.7981	1.207506	286484	1903	0.35

Tabla 18: Resultados del caso 5040



Caso 5035

INLET			
5035	Presión [Pa]	Velocidad	densidad
90k P_{in}	82313.96	83.62008	2.157606
80k P_{in}	72864.79	82.75778	2.046173
70k P_{in}	63443.88	81.59444	1.934883
60k P_{in}	54065.63	79.96709	1.82388
50k P_{in}	44773.24	77.4659	1.713737
40k P_{in}	35551.91	73.90647	1.604115
30k P_{in}	26432.2	68.61032	1.495339
20k P_{in}	17438.16	60.41337	1.387574
10k P_{in}	8614.56	46.30687	1.281259

AGUAS ABAJO						
5035	Presión [Pa]	Velocidad	densidad	Reynolds	HEAD LOSS	K
90k P_{in}	13851.15	242.8136	1.496737	726856	2913	0.098
80k P_{in}	11321.56	235.2589	1.452731	683535	3568	0.12
70k P_{in}	8758.382	226.3741	1.408288	637599	4276	0.16
60k P_{in}	6321.421	215.5975	1.36495	588559	4968	0.21
50k P_{in}	4937.426	201.6467	1.331618	537032	5088	0.25
40k P_{in}	3535.594	184.9802	1.297799	480134	5060	0.29
30k P_{in}	2379.293	164.3317	1.265935	416066	4648	0.34
20k P_{in}	1337.873	137.7335	1.234639	340102	3823	0.40
10k P_{in}	603.9462	100.0424	1.205515	241205	2290	0.45

Tabla 19: Resultados del caso 5035



Caso 5030

INLET			
5035	Presión [Pa]	Velocidad	densidad
90k P_{in}	86153.76	58.9364	2.189772
80k P_{in}	76426.31	58.34951	2.075916
70k P_{in}	66688.85	57.84003	1.961974
60k P_{in}	57038.35	56.30111	1.848763
50k P_{in}	47392.79	54.53197	1.735588
40k P_{in}	37781.63	52.03535	1.622703
30k P_{in}	28218.07	48.36117	1.510213
20k P_{in}	18720.64	42.60967	1.398271
10k P_{in}	9306.371	32.72632	1.287018

AGUAS ABAJO						
5035	Presión [Pa]	Velocidad	densidad	Reynolds	HEAD LOSS	K
90k P_{in}	15309.5	235.1727	1.50551	606951	3258	0.11
80k P_{in}	12160.79	228.3652	1.455808	569924	4089	0.15
70k P_{in}	9917.269	220.2417	1.416499	534809	4408	0.18
60k P_{in}	7254.679	208.8668	1.369764	490454	5328	0.24
50k P_{in}	5426.327	195.5186	1.332688	446683	5607	0.29
40k P_{in}	3887.611	179.3049	1.298062	398998	5566	0.34
30k P_{in}	2599.502	159.2688	1.265487	345518	5116	0.4
20k P_{in}	1552.852	133.3859	1.23482	282355	4142	0.46
10k P_{in}	694.9264	96.81071	1.205361	200043	2503	0.53

Tabla 20: Resultados del caso 5030



Caso 5025

INLET			
5035	Presión [Pa]	Velocidad	densidad
90k P_{in}	88267.39	39.45755	2.20738
80k P_{in}	78391.76	39.04789	2.092288
70k P_{in}	68524.89	38.47096	1.97727
60k P_{in}	58669.27	37.65293	1.862345
50k P_{in}	48827.28	36.49289	1.747534
40k P_{in}	39002.98	34.81251	1.632869
30k P_{in}	29200.13	32.341	1.518383
20k P_{in}	19425.75	28.50278	1.404134
10k P_{in}	9688.44	21.90969	1.290192

AGUAS ABAJO						
5035	Presión [Pa]	Velocidad	densidad	Reynolds	HEAD LOSS	K
90k P_{in}	18234.94	225.1129	1.529365	491828	3504	0.13
80k P_{in}	14758.1	218.774	1.476743	461532	4304	0.17
70k P_{in}	11720.52	210.706	1.42839	429957	4992	0.22
60k P_{in}	9112.829	200.5999	1.384145	396656	5507	0.27
50k P_{in}	6857.768	188.1615	1.343232	361063	5798	0.32
40k P_{in}	4983.59	172.749	1.305815	322254	5754	0.38
30k P_{in}	3382.123	153.5695	1.270802	278794	5300	0.44
20k P_{in}	2037.908	128.7138	1.237891	227619	4310	0.52
10k P_{in}	924.1054	93.45584	1.206696	161103	2616	0.59

Tabla 21: Resultados del caso 5025



Caso 5020

INLET			
5035	Presión [Pa]	Velocidad	densidad
90k P_{in}	89340.8	24.30357	2.21632
80k P_{in}	79389.03	24.03374	2.100594
70k P_{in}	69440.41	23.66216	1.984894
60k P_{in}	59496.16	23.13734	1.86923
50k P_{in}	49556.41	22.41513	1.753604
40k P_{in}	39621.15	21.45197	1.638014
30k P_{in}	29698.22	19.8438	1.522529
20k P_{in}	19783.78	17.47361	1.407113
10k P_{in}	9882.827	13.4266	1.291809

AGUAS ABAJO						
5035	Presión [Pa]	Velocidad	densidad	Reynolds	HEAD LOSS	K
90k P_{in}	23648.31	211.0215	1.57766	380480	3351	0.15
80k P_{in}	19570.37	205.4358	1.51939	356728	4100	0.19
70k P_{in}	15878.97	198.3129	1.464903	332010	4760	0.24
60k P_{in}	12591.12	189.2633	1.414295	305913	5283	0.29
50k P_{in}	9644.562	178.084	1.367024	278222	5598	0.35
40k P_{in}	7048.163	165.4177	1.324083	250316	5414	0.39
30k P_{in}	4865.887	146.1531	1.282871	214280	5229	0.48
20k P_{in}	2974.018	122.7139	1.245258	174640	4294	0.57
10k P_{in}	1363.171	89.25048	1.21001	123421	2631	0.66

Tabla 22: Resultados del caso 5020

Caso 5015

INLET			
5035	Presión [Pa]	Velocidad	densidad
90k P_{in}	89812.95	12.93838	2.220242
80k P_{in}	79826.94	12.78368	2.104232
70k P_{in}	69841.93	12.56912	1.988229
60k P_{in}	59858.18	12.26885	1.872238
50k P_{in}	49875.42	11.87131	1.756254
40k P_{in}	39894.45	11.30821	1.640285
30k P_{in}	29915.67	10.48536	1.524335
20k P_{in}	19939.71	9.224151	1.408408
10k P_{in}	9967.411	7.079552	1.292511

AGUAS ABAJO						
5035	Presión [Pa]	Velocidad	densidad	Reynolds	HEAD LOSS	K
90k P_{in}	30333.15	193.7706	1.63864	272160	3250	0.17
80k P_{in}	25603.46	188.9253	1.574243	254926	3907	0.21
70k P_{in}	21202.15	182.6803	1.513036	236915	4507	0.27
60k P_{in}	17130.78	174.6784	1.454977	217845	5016	0.32
50k P_{in}	13426.94	164.7885	1.400648	197837	5305	0.39
40k P_{in}	10066.17	152.2543	1.349609	176128	5336	0.46
30k P_{in}	7051.179	136.1262	1.301837	151897	4998	0.53
20k P_{in}	4382.836	114.6949	1.257279	123602	4136	0.62
10k P_{in}	2040.314	83.67212	1.215666	87186	2557	0.73

Tabla 23: Resultados del caso 5015

10.4 Tabla de presiones obtenidas por TPR

Tabla 24: Resultados para $P_{estatica} = 10$ [kPa]

Diametro [mm]	P_{total} [kPa]	P_{abajo} [kPa]	ρ_{abajo} [kg/m ³]
40.0	111.325	1.473	1.208
35.0	111.325	1.384	1.209
30.0	111.325	1.550	1.211
25.0	111.325	1.915	1.216
20.0	111.325	2.507	1.222
15.0	111.325	3.422	1.230

Tabla 25: Resultados para $P_{estatica} = 20$ [kPa]

Diametro [mm]	P_{total} [kPa]	P_{abajo} [kPa]	ρ_{abajo} [kg/m ³]
40.0	121.325	3.531	1.246
35.0	121.325	3.326	1.247
30.0	121.325	3.635	1.252
25.0	121.325	4.358	1.259
20.0	121.325	5.532	1.271
15.0	121.325	7.340	1.289

Tabla 26: Resultados para $P_{estatica} = 30$ [kPa]

Diametro [mm]	P_{total} [kPa]	P_{abajo} [kPa]	ρ_{abajo} [kg/m ³]
40.0	131.325	6.210	1.290
35.0	131.325	5.887	1.291
30.0	131.325	6.275	1.297
25.0	131.325	7.336	1.309
20.0	131.325	9.052	1.326
15.0	131.325	11.727	1.351

Tabla 27: Resultados para $P_{estatica} = 40$ [kPa]

Diametro [mm]	P_{total} [kPa]	P_{abajo} [kPa]	ρ_{abajo} [kg/m ³]
40.0	141.325	9.531	1.342
35.0	141.325	9.007	1.342
30.0	141.325	9.499	1.349
25.0	141.325	10.839	1.363
20.0	141.325	12.831	1.383
15.0	141.325	16.552	1.418

Tabla 28: Resultados para $P_{estatica} = 50$ [kPa]

Diametro [mm]	P_{total} [kPa]	P_{abajo} [kPa]	ρ_{abajo} [kg/m ³]
40.0	151.325	13.454	1.399
35.0	151.325	12.688	1.397
30.0	151.325	13.211	1.405
25.0	151.325	14.815	1.422
20.0	151.325	17.549	1.449
15.0	151.325	21.784	1.489

Tabla 29: Resultados para $P_{estatica} = 60$ [kPa]

Diametro [mm]	P_{total} [kPa]	P_{abajo} [kPa]	ρ_{abajo} [kg/m ³]
40.0	161.325	17.950	1.463
35.0	161.325	16.823	1.458
30.0	161.325	17.330	1.465
25.0	161.325	19.275	1.485
20.0	161.325	22.472	1.516
15.0	161.325	27.377	1.564

Tabla 30: Resultados para $P_{estatica} = 70$ [kPa]

Diametro [mm]	P_{total} [kPa]	P_{abajo} [kPa]	ρ_{abajo} [kg/m ³]
40.0	171.325	22.958	1.531
35.0	171.325	21.616	1.524
30.0	171.325	21.209	1.523
25.0	171.325	24.159	1.553
20.0	171.325	27.721	1.587
15.0	171.325	33.183	1.640

Tabla 31: Resultados para $P_{estatica} = 80$ [kPa]

Diametro [mm]	P_{total} [kPa]	P_{abajo} [kPa]	ρ_{abajo} [kg/m ³]
40.0	181.325	28.417	1.603
35.0	181.325	26.780	1.594
30.0	181.325	27.077	1.600
25.0	181.325	29.439	1.624
20.0	181.325	33.338	1.662
15.0	181.325	39.310	1.719

Tabla 32: Resultados para $P_{estatica} = 90$ [kPa]

Diametro [mm]	P_{total} [kPa]	P_{abajo} [kPa]	ρ_{abajo} [kg/m ³]
40.0	191.325	34.249	1.679
35.0	191.325	32.217	1.667
30.0	191.325	32.542	1.673
25.0	191.325	35.054	1.698
20.0	191.325	39.239	1.739
15.0	191.325	45.707	1.801