2016

"APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA STACKELBERG EN LA CADENA DE SUMINISTRO PRODUCTOR APLICADA A LA INDUSTRIA CÁRNICA."

OLAVARRÍA GONZÁLEZ, SEBASTIÁN HUGO RAÚL

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
SANTIAGO - CHILE

APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA STACKELBERG EN LA CADENA DE SUMINISTRO PARA LA INDUSTRIA CÁRNICA EN EL JUEGO GRANJERO-PRODUCTOR

SEBASTIÁN OLAVARRÍA GONZÁLEZ

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA	:	SR. VICTOR ALBORNOZ S.
PROFESOR CORREFERENTE	:	SRA. SARA RODRIGUEZ S.

OCTUBRE 2016

Dedicado a todas las persona que conocí en este camino y que seguiré conociendo. Dedicado a todos aquellos que transmiten el mensaje del cóndor y logran que vuele más alto.

RESUMEN EJECUTIVO

En este trabajo se busca establecer la coordinación entre agentes de una cadena de suministro (abastecimiento y operación) a través de la teoría de juegos. El juego entre estos dos participantes radica en encontrar la combinación de jugadas las cuales entreguen mayor utilidad para cada jugador. Para este caso, se plantea un escenario donde la empresa encargada de la operación tiene un mayor poder de negociación sobre el agente encargado del abastecimiento. Al plantearse esta suposición, la metodología aplicada corresponde a Stackelberg, en donde la toma de decisión se realiza de forma secuencial en base a que agente es el líder y cual el seguidor. Estos supuestos se trabajan sobre la aplicación a la industria cárnica, donde por un lado tenemos a la empresa manufacturera (operación) y por el otro a un granjero o centro de acopio (abastecimiento). El juego radica en cuantas carcasas debe vender el granjero a la empresa, de forma que ambos maximicen sus utilidades. Existen precios establecidos de compra los cuales van aumentando en el tiempo, es aquí donde debe caer la decisión de compra. La función de la empresa manufacturera es obtener productos a partir de las carcasas adquiridas. El análisis recae en que mientras más tiempo este un cerdo en sin vender aumenta su cantidad de carne y grasa, hasta alcanzar un máximo, para luego solo aumentar la grasa. Es por esto que la empresa productora puede obtener mayor cantidad de kilos por producto siguiendo la misma lógica del comportamiento de los precios.

Una vez analizado el aspecto teórico del juego, cabe cuantificar y modelar el comportamiento de los agentes. Ambos buscan maximización de utilidades en sus procesos. Entonces la pregunta que cabe hacer es ¿Cómo obtener un modelo de optimización en base a dos agentes que cada uno busca su maximización de beneficios en base al mismo proceso? La forma de resolverlo es a través de los modelos Bi-livel. Los modelos Bi-level(tambien conocidos como Bi-nivel) son aquellos en los cuales las decisiones tanto del líder como las del seguidor se encuentran presentes, junto a cada una de sus restricciones para encontrar el óptimo a la función objetivo del líder. Una vez identificado el líder y seguidor del juego, el modelo de optimización del líder incorpora como restricciones de su modelo aquellas restricciones del seguidor. Éstos son la mejor manera de representar situaciones según

la metodología Stackelberg, ya que representan una jerarquía en la toma de decisión y establece el rol de cada agente. Una forma de representar este modelo Bi-level, es agregar al problema del líder las restricciones del seguidor además de sus condiciones Kuhn-Tucker. Esto transforma estos dos problemas independientes en uno solo. El problema radica en que se obtiene un modelo de carácter no-lineal. La manera de modificar el modelo es a través de la aproximación de Kuhn-Tucker, la cual intercambia la restricción no-lineal por una serie de restricciones enteras mixtas, por lo que el problema de esta manera adquiere el mismo carácter.

En cuanto a resultados, se resuelven los modelos de forma independiente y en forma de Bi-level. Los resultados obtenidos demuestran que el líder obtiene las mismas decisiones tanto en su modelo individual como en el Bi-level y el seguidor se acomoda a lo decidido por el líder. Esto se da porque en el modelo del líder no existen variables de decisión propias del líder, mientras que en el modelo del seguidor si están presentes variables del seguidor. Por tanto, las decisiones del seguidor no afectan el líder mientras que las decisiones del líder si afectan al seguidor.

Índice de Contenidos

Índice de Tablas

Índice de Figuras

1 | Introducción

1.1. Industria alimentica

Los consumidores buscan día a día productos que puedan satisfacer las necesidades que tienen a bajo costo y la calidad deseada. Las empresas compiten en sus distintas industrias para lograr generar dichos productos los cuales sean de preferencia para el cliente. Lo mismo ocurre en la industria alimenticia, donde cada día se pueden observar una amplia gama de productos, diferenciados en cantidades de azúcar, de grasas, sabores, proceso de producción, orgánico y hasta en el formato en el que se le entrega al cliente: en conserva, congelado, al vacío, etc. Toda esta variedad de productos se da como una consecuencia a cambios en los hábitos del consumidor, a los cuales la industria debe reaccionar para seguir teniendo una ventaja competitiva. Factores como el envejecimiento, globalización, urbanización, comportamiento de los consumidores, son factores a los cuales esta industria debe prestar atención, ya que significan cambios a los mercados y deben ser el eje de la definición de políticas para los alimentos (Kearney, 2010). Frente a esta búsqueda de crear nuevos productos y estar en la vanguardia del mercado, son muchos las ideas o productos los cuales fallan, debido a un mal proceso de desarrollo de producto, en el cual la base está en el pensamiento de que es lo que quiere al cliente, en cambio de ir directamente a preguntarle. Junto a lo anterior, las empresas aparte de copiar productos ya existentes bajo su propia marca, porque conocen el éxito de éstos, incurren en el desarrollo de productos innovadores, debido a que encuentran una oportunidad de mercado no explorada la cual puede llegar a ser explotada. (Stewart-Knox and Mitchell, 2003). Estos fenómenos están muy ligados a la principal preocupación que tiene la industria alimenticia, sobre los desechos que se producen y los gastos innecesarios generados. Un estudio afirma que alrededor de un tercio de la producción industrial de alimentos es transformada en desperdicio.(Gustavsson et al., 2011) Esto aplica a la industria cárnica donde existe mayor demanda de algunos productos y el resto de la carcasa es desperdiciada. Es por lo cual que el desafío para las empresas es lograr generar una cadena de suministro sustentable, integrada y coordinada. Con el fin de disminuir costos, minimizar el desperdicio de alimentos y tener una firma la cual pueda alinear los factores ambientales, gubernamentales, científicos, tecnológicos, de mercado y socio-económicos con el fin de lograr una empresa competitiva y que sepa responder a los impactos estratégicos (Li et al., 2014). Ahumada y Villalobos (2009) en su trabajo plantean un problema a nivel táctico, que enfoca en las necesidades de la empresa, y se debe tomar en cuenta los factores externos para llevar la producción a niveles estratégicos y operacionales. El camino para lograr esta cadena de suministro sustentable, debe darse por analizar una serie de factores que describen Li,Wang, Chan, Manzini (2014): (i) los incentivos que se generan para las empresas, en donde la aplicación de una cadena sustentable reduce los niveles de gases de efecto invernadero, lo cual contribuye a una disminución en la incertidumbre del cambio climático. Éste ha sido uno de los principales agentes a los cambios en los mercados, a los precios, al acceso a comida, al uso que se le da a los alimentos. Por lo que en definitiva los incentivos se basan en una reducción de la incertidumbre y del riesgo de la industria. (ii) Implementar tecnología y darle un buen uso a las tecnologías de la información disponible. Utilizar sistemas como los RFID, para darle a las empresas mayor certeza de los que está ocurriendo hoy en día, y disminuir la brecha entre oferta y demanda, generando así menor cantidad de desperdicios o de producción innecesaria. (iii) Lograr una buena operación y logística asegurando la conexión entre los distintos agentes que participan de la cadena de suministro (abastecimiento, operación y distribución) y no como agentes distintos. La calidad de un buen alimento, depende tanto del proveedor que trae la materia prima, como de la empresa encargada del proceso de manufactura y como se le hace llegar al cliente este producto, tomando en cuenta el traslado, tiempos del procesos, condiciones en las que debe llegar, envasado, etc. (iv) El ciclo de vida que tienen los distintos productos, divididos principalmente en perecibles y no perecibles. Cada uno tiene distintas fechas de vencimiento asegurándole la calidad al cliente. Y además el ciclo de vida no solo se asocia a la calidad del producto, sino que además a las tendencias y demandas, las cuales el cliente busca, a lo cual también se le puede atribuir la estacionalidad. (v) El envasado de los productos, para conservar su calidad y que los factores ambientales, químicos, bióticos, influyan en menor medida alargando la vida de los productos. Junto a esto, la elaboración de envases que sean más amigables con el medio ambiente y la generación de procesos los cuales disminuyan los residuos. En definitiva, el futuro de la industria alimenticia se enfoca en cómo lograr para el cliente una alta variedad de productos que se enfoquen a cada segmento que se identifique, siempre de una manera sustentable que favorezca a todos los agentes involucrados en el proceso.

1.2. Problema de investigación

En el contexto de las investigaciones de operaciones, es común encontrar modelos matemáticos los cuales se encarguen de la maximización de utilidades, minimización de costos, optimización de rutas, logística de transporte, etc. Lo fundamental de estos problemas es ubicar el contexto y entorno en el cual se encuentra el problema a formular. Éste análisis es lo que se traduce en las restricciones del problema. Estos modelos pueden ser aplicados en distintos niveles de la cadena de suministro de una empresa, ya sea en el nivel de abastecimiento, operaciones o distribución. (Kogan and Tapiero, 2007) (Dolgui,A., Soldek,J., Zaikin,O., 2012) Hjaila et al. (2015) indica que en estos distintos escenarios de negociación, como lo son la interacción de proveedores con las firmas y las firmas con los clientes, se debe buscar el *"Win-Win"* para la optimización de la cadena de suministro en el ambiente competitivo en el cual se encuentra inmerso la industria. Este ambiente, en el actual, es conocido porque las firmas tienen cadenas de suministros descentralizados, externalizados y de múltiples productos. Estos escenarios de negociación se caracterizan por tener un líder, que generalmente es el cual tiene mayor poder en la negociación a través de factores tales como: participación de mercado, economías de escala, mayor capacidad de crecimiento, etc. El líder es aquel que fija una oferta sin conocer la reacción de aquel agente conocido como seguidor, el cual vendría siendo el segundo participante en esta negociación. El comportamiento de éste último se basa en la oferta presentada por el líder. El problema que se desea investigar es buscar la coordinación entre los agentes de la cadena y establecer como las decisiones tomadas por uno afectan las decisiones tomadas por el otro, en lugar de encontrar la mejor decisión para cada uno por separado. La literatura de teoría de juegos tiene bastantes modelos y autores distintos, basados en comportamiento de precios, cantidades, etc., pero ninguno de ellos aplicados al sector cárnico. Esta investigación en particular se basará en la Metodología de Stackelberg. Yang y Jiao(2015) establecen que la configuración estudiada obedece a una coordinación de modelos entre dos decisiones de intereses propio, en los cuales se pueden observar una secuencia de decisiones basado en modelos de optimización no lineales jerárquicos binarios. Con esto, se busca integrar ambas decisiones en un solo problema de optimización, con dos tipos de objetivos, traducido a una sola función objetivo.(Yang et al., 2015) (Sinha et al., 2014) (Yue and You, 2014)

Para poder formular un modelo, la investigación se basará en la industria alimenticia, la cual posee muchas similitudes en sus distintas áreas, como ganadera, agrícola, agropecuaria, etc., en el trato con proveedores, durabilidad del producto y logística de transporte. Ahumada y Villalobos (2009) revisan como modelos formulados para optimización de la cadena de suministro, se establecen bajo muchas restricciones que además van siendo alteradas debido a nuevas normas y tendencias que enfoca la industria.(Ahumada and Villalobos, 2009)

Finalmente, en base a los nuevos modelos de cadena de suministros formulados para dar mayor dinamismo a las firmas, es establecer como la interacción de estos distintos niveles de la cadena se van relacionando con el fin de obtener el máximo beneficio para ambas partes. El caso se aplicara a la industria alimenticia, con la idea de finalmente enfocarse en una industria más definida como la cárnica. (Rodríguez et al., 2014)

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Encontrar a través de la metodología de Stackelberg, la definición de la cantidad a vender entre los distintos agentes de la cadena de suministro. En particular, se **estudiará** solamente la interacción que maneja el proveedor y la firma (para su proceso de operación) para la **determinar** la cantidad a vender. Se debe **definir** que agente actúa como líder en este proceso, y quien como seguidor.

1.3.2. Objetivos Específicos

Formular dos modelos lineales de carácter determinista, para cada agente, los cuales contemplen dentro de sus restricciones, ecuaciones que representen esta formulación de decisión secuencial. De esta manera se podrá establecer la cantidad correcta que debe vender el proveedor a la firma para la maximización de sus utilidades respectivas.

Comparar los modelos realizados con la metodología de Stackeleberg, con los modelos realizados sin aplicar la metodología.

Analizar las variaciones y beneficio entre un modelo Stackelberg y el analisis individual de cada agente.

1.4. Estructura

En adelante, la estructura del trabajo es la siguiente: en el Capítulo 2 se presenta el marco teórico de memoria, destacar cuales son los temas relevantes a detallar para el correcto entendimiento de la memoria, en base a las materias propuestas por autores anteriores. El Capítulo 3 presenta la descripción del problema y la metodología de trabajo realizada para alcanzar los resultados de esta investigación; en el Capítulo 4 se presentan los experimentos computacionales realizados y se discuten los resultados obtenidos; y finalmente, en el Capítulo 5 se establecen las conclusiones, así como posibles direcciones futuras para esta investigación.

2 | Marco Teórico

2.1. Teoría de Juegos

2.1.1. Teoría de Juegos y equilibrio de Nash

La existencia de la vida en sociedad, da la posibilidad de una constante interacción entre personas y distintos tipos de agentes. Para la economía ocurre un fenómeno similar en donde los distintos participantes, dígase empresas, entidades gubernamentales, agrupaciones sociales, etc., interactúan para poder tomar sus propias decisiones. “La teoría de Juegos es un estudio matemático de interacción entre agentes independientes e interés propio.”(Leyton-Brown and Shoham, 2008). “La teoría de juegos es el estudio de problemas de decisión multipersonales.”(Gibbons, 1993)). La teoría de juegos tiene cuatro grandes clasificaciones. Primero, si tienen carácter de estáticos o dinámicos. Estáticos hace referencia a un proceso de decisión simultánea entre los agentes participantes y su ganancia se basa en la decisión que ambos tomaron. Dinámicos significa que los agentes participantes toman sus decisiones de forma secuencial, es decir uno toma alguna decisión primero, y el segundo toma la decisión basándose en lo que el primero hizo. Luego, para ambas clasificaciones iniciales se hace la distinción entre la calidad de la información que posee un agente con respecto al otro. Esto se traduce en la distinción entre información completa e incompleta que manejan los participantes entre sí.

Todos los estudios de teoría de juegos se hacen en base a que el otro agente tomará decisiones de carácter racional las cuales le traigan mayores beneficios. Los agentes participantes siempre buscan maximizar su beneficio en base a la decisión que tomará el otro, por lo que uno asumirá que el otro participante elegirá la opción que le entregue mayores utilidades. Bajo estos supuestos se establece el equilibrio de Nash. Gibbons (1993), establece que dado $''n''$ participantes, se establece el conjunto del juego G, el cual se compone del conjunto de las distintas estrategias S_n para cada jugador y el elemeto U_n, el cual establece la utilidad para cada jugador n. El equilibrio de Nash se alcanza si para cualquier jugador i, s_i^* es la mejor respuesta frente a la mejor respuesta de los demás jugadores. Además, la elección de la mejor estrategia pude no ser única. Aquí es donde se divide el equilibrio de Nash entre equilibrio estricto o equilibrio débil. Para Leyton-Brown (2008), la diferencia se establece entre que para una elección estrictica, la generación de utilidades debe ser mayor para la estrategia escogida que para cualquier otra estrategia del jugador i, frente a las decisiones tomadas por los otros participantes. Mientras que la débil, la generación de utilidades para el jugador i debe ser mayor o igual para la estrategia escogida, que para cualquier otra estrategia que pueda tener.

Cournot para juegos estáticos

El modelo de Cournot, en su forma más sencilla, se basa en establecer la producción para dos jugadores de forma simultánea. Entiéndase q_1 y q_2 las cantidades a producir por los jugadores, de algún producto homogéneo. La determinación del precio a la cual se debe vender el producto viene dado por la relación P(Q)= a – Q, siendo Q la suma de la producción individual de cada firma. La estructura de costos, para simplicar el análisis, solamente viene dado por costos variables $C_i(q_i)$=$c * q_i$, donde a > c. El beneficio que reportara cada firma se establece por la relación:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(q_i + q_j) - c] = q_i[a - (q_i + q_j) - c] \tag{2.1}$$

Cada jugador buscara maximizar su beneficio en función de su producción por lo que por las condiciones de primer orden, se obtiene que:

$$q_i = \frac{1}{2}(a - q_j - c). \tag{2.2}$$

Para el modelo de cournot, en su equilibrio, también se alcanza el equilibrio de Nash, por lo que ambas firmas producen la cantidad que maximiza su beneficio, lo que se traduce en (q_i^*, q_j^*). Al tener la misma estructura de costos, las firmas producen cantidades iguales en el equilibrio. La ecuación anteriormente planteada corresponde a la función de reacción establecida para cada firma. Esta hace referencia a la cantidad a producir en función de variaciones en la producción que experimente la firma contraria. La intersección de ambas funciones es la que constituye el equilibrio de Nash.

La aplicación y estudio de este modelo viene relacionado a las tendencias a desarrollar en las cadenas de suministro, en donde se debe lograr las políticas de integración con proveedores y distribuidores. La implementación de VMI permite el conocimiento simultáneo de información para las necesidades de ambos "jugadores", con lo que se cumple el supuesto de información completa.

Bertrand para juegos estáticos

El modelo de Bertrand, a diferencia que el de Cournot, hace diferencia por el precio al cual puede vender cada firma y no cuanto producir (productos diferenciados). La metodología de resolución y comportamiento en equilibrio es similar para ambos modelos. La diferencia radica en las estrategias utilizadas, las funciones de ganancia (funciones de reacción para Cournot) generadas. La producción para cada firma viene dado por:

$$Q_i(p_i, p_j) = a - p_i + b * p_j \tag{2.3}$$

La función de producción en Bertrand hace alusión al grado de sustitución que tienen los productos entre ellos, por ende cuanto se puede elevar su precio para afectar la producción del otro. Este modelo sin embargo debe basarse en más supuesto: (i) los precios negativos no son factibles, (ii) si $p_i >$ a + b_j, la cantidad en realidad de producción qi es positiva. En el equilibrio, la maximización del beneficio viene dado por:

$$P_i^* = \frac{1}{2}(a + bp_j^* + c) \tag{2.4}$$

Para el model de Bertrand, el modelo tiene mayor injerencia en la integración vertical de la cadena de suministro. En el modelo de precios de Bertrand, tanto para el proveedor y el manufacturero buscan maximizar los beneficios, el proveedor eligiendo el precio al por mayor y la manufacturero eligiendo el precio de venta, p, y por tanto la cantidad de la orden q (p).

Por supuesto, cada uno de ellos tiene ganancias dependientes, dependiendo de las otras decisiones. Por lo tanto, un enfoque teórico, expresando la información disponible para cada uno, la relación de poder que co-existe entre estos jugadores y las reglas de negocio a la mano, determinar un marco que podemos utilizar para evaluar las implicaciones y las decisiones que cada uno de estos jugadores deben alcanzar. El juego vamos a considerar consiste en lo siguiente: se pone el proveedor el precio al por mayor, mientras que el manufacturero selecciona el precio de venta y por tanto la cantidad a pedir. El proveedor luego entrega la cantidad pedida. Desde este juego de fijación de precios es determinista, todos los productos que ordene el manufacturero serán vendidos (ya que no hay ningún punto en ordenar cantidades que se añade a un costo de inventario). Como resultado, nos enfrentamos a preguntas tales como: ¿Cuál es el efecto de la competición vertical entre el proveedor y el manufacturero en la precios al por menor (es decir, clientes)? ¿Sobre el precio al por mayor y las cantidades vendido por el proveedor?

2.1.2. Metodología Stackelberg

La metodología Stackelberg está basada en juegos dinámicos en la teoría de juegos. Anteriormente se establece una breve referencia sobre a que apuntan estos juegos dinámicos. Se desarrolla el modelo bajo el supuesto de que las empresas escogen cantidades, como en el modelo de Cournot (donde las empresas deciden simultáneamente en vez de sucesivamente como aquí). Para complementar, frente a dos actores en una toma de decisión, se tiene que el jugador 1 toma una decisión x_1 la cual pertenece a su conjunto de decisiones A_1. El jugador dos toma una decisión y_1 posterior a la que toma el jugador 1, del conjunto de decisiones A_2. Las ganancias para los jugadores queda determinada a partir de $u_i(x_1,y_1)$, donde i corresponde al jugador 1 o 2. De forma generalizada, las decisiones no son de 2 etapas sino que de *"n"* etapas, siendo *"n"* un número entero positivo. La forma de resolver este tipo de problemas es a través del método inducción hacia atrás. Consiste en que para la etapa final del juego, el participante al cual le corresponde decidir, toma su opción en base a la acción que tomará el jugador anteriormente. Por tanto las decisiones son tomadas en base a una función de reacción la cual depende de la decisión anterior que debería tomar el otro jugador. Para la elaboración de este método, se debe implementar la metodología del árbol de decisión, en donde cada decisión de los jugadores forma un nodo, el cual se ramifica en la cantidad de decisiones posibles que tenga el jugador al cual le corresponda decidir. Luego para esta ramificación de decisiones, existen más ramificaciones para un siguiente proceso de toma de decisión y así sucesivamente. Como lo dice la inducción hacia atrás, se parte por la decisión más lejana y se va analizando caso a caso, basando en pensamientos racionales, hasta encontrar la decisión óptima.

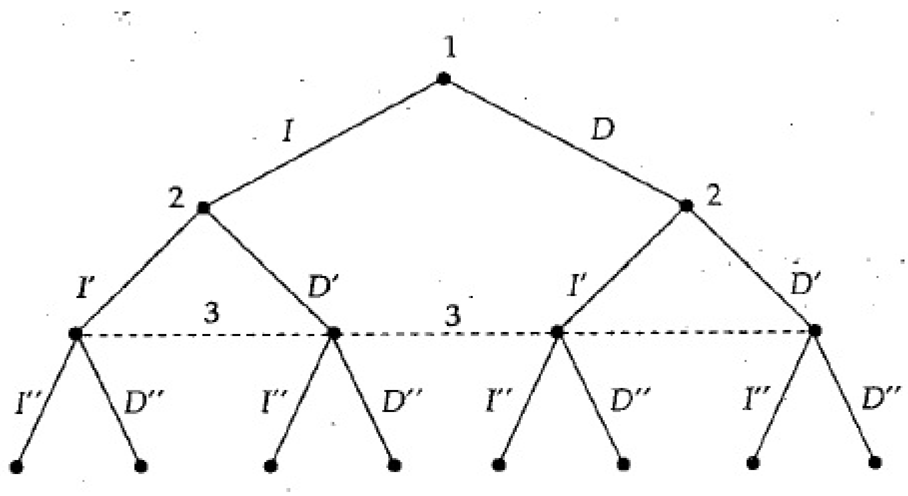

Figura 2.1: Ilustración árbol de decisión

Stackelberg plantea este mecanismo de decisión, dándoles atributos a los jugadores de líder y seguidor. La aplicación más común es para empresas envueltas en un oligopolio, pero la teoría es aplicable a distintos escenarios siempre que los jugadores tengan estas características. Las decisiones pueden ser aplicadas tanto para saber cuánto se puede producir (Cournot) o a qué precio se puede vender (Bertrand). Asi como el equilibrio de Cournot y el equilibrio de Bertrand se refieren al equilibrio de Nash den los juegos de Cournot y Bertrand, el equilibrio de Stackelberg significa que el juego es de decisiones sucesivas en vez de simultáneas. Sin embargo los juegos con decisiones sucesivas poseen múltiples equilibrios de Nash, de los cuales sólo uno está asociado can el resultado obtenido por inducción hacia atrás del juego, Por tanto, el equilibrio de Stackelberg puede referirse tanto a la naturaleza secuencial del juego como al uso de un criterio de solución más poderoso que el mero equilibrio de Nash.

En el equilibrio de Nash del juego de Cournot ,cada empresa produce la misma cantidad debido a su estructura de costos y carácter simultaneo. Pero en Stackelberg, la cantidad que se produce (Q=q_1 + q_2) es mayor que la cantidad producida que en Cournot. de forma que, el precio de equilibrio de mercado es inferior en el juego de Stackelberg. Sin embargo, en el juego de Stackelberg la firma 1 podía haber escogido la cantidad correspondiente al juego de Cournot, , en cuyo caso la firma 2 habría respondido con su cantidad de Cournot. Por tanto, en el juego de Stackelberg, la firma 1 podría haber alcanzado el nivel de beneficios de Cournot, pero escogió no hacerlo, por lo que los beneficios de la frima 1 en el juego de Stackelberg deben ser mayores que sus beneficios en el juego de Cournot. Pero el precio de equilibrio es inferior en el juego de Stackelberg, de forma que los beneficios agregados son menores. Por tanto, el hecho de que la firma 1 esté mejor implica que la firma 2 está peor en el juego de Stackelberg que en el juego de Cournot.

La observación de que la empresa 2 se encuentra en peor situación en el juego de Stackelberg que en el juego de Cournot ilustra una diferencia importante que existe entre los problemas de decisión uni o multipersonales. En la teoría de la decisión con un único agente, el tener más información nunca puede hacer que el agente decisor esté peor. En teoría de juegos, sin embargo, tener más información (o más precisamente, que otros jugadores sepan que uno tiene más información) puede hacer que un jugador esté peor.

2.1.3. Teoría de Juegos incorporada a modelos de optimización

Existen estudios sobre el uso de la teoría de juegos incorporados en los distintos modelos de optimización. Hay un enfoque basado en las distintas etapas de una cadena de suministro en la cual, cada nivel es un distinto nivel de estructura y tomado como un “jugador” dentro de esta teoría. Yue y You (2014) parten de la base, que dado el dinamismo del mercado, las empresas manufactureras buscan externalizar sus actividades, de tal forma de lograr mayor alcance y poder focalizarse en su *core-bussines*. De tal forma, el centro operativo o manufacturero de la cadena toma el carácter de líder bajo un esquema Stackelberg, en el cual sus seguidores son los proveedores y sus posteriores clientes. El proceso se basa en un proceso no cooperativo, diseñado y planeado por el manufacturero. Cada agente busca por separado su maximización de beneficios, basando en tomas de decisión independiente sin cooperación ni colaboración. El modelo se basa en una relación de un solo líder y múltiples seguidores bajo el juego Stackelberg. El equilibro alcanzado para los seguidores se alcanza para la generalización del equilibrio de Nash. Además, los autores simplifican el problema considerando la cadena de suministro simplificada, en cambio, de una de tres etapas en la cual cada decisión depende de la anterior, quitándole un grado de generalidad al modelo. Finalmente el modelo formulado es de dos etapas(bi-level), integral-mixto y no lineal. En la primera etapa el líder, determina localización, capacidad, tecnologías, operaciones, precios, etc. El modelo se considera no lineal debido al uso de tecnologías para las economías de escala. En esta primera etapa se presenta un modelo no lineal y no convexo. En la segunda etapa viene la decisión de los seguidores, basado en las decisiones establecidas anteriormente. En esta etapa se establece una formulación de carácter lineal. El problema de dos etapas, se transforma en un modelo de una sola etapa, reemplazando el modelo de los seguidores en restricciones para el modelo bajo las condiciones de KKT.

Existe otra aplicación, la cual se basa en el enfoque hacia un sistema de *mass costumization*. Es conocido la tendencia de los consumidores, de cualquier industria, el exigir productos que cumplan con todas sus exigencias y necesidades cada vez más particulares y diferenciadoras. Es por lo cual que como no se puede tener líneas productivas para cada producto se establece la producción por familias de productos. Esto permite generar una gran cantidad de productos distintos sin cambiar la producción y no caer en tiempos de set-up innecesarios. Yang, Jiao, Ji, Du, Helo, Valente (2015) generan este modelo con el fin de poder satisfacer las distintas necesidades de múltiples segmentos del mercado. La decisión se enfoca en la integración de la toma de decisión para la configuración de una familia de productos y la configuración de la cadena de suministro. El modelo se enfoca en la metodología Stackelberg líder y seguidor, en donde el líder es la configuración de la familia de productos y el seguidor, la configuración de la cadena. Éste sigue un mecanismo de dos niveles, jerárquico, no cooperativo entre los agentes. Las decisiones del líder se enfocan en los módulos de producción, los tiempos y el establecer que productos componen esta familia. Mientras que para el seguidor se debe encontrar el óptimo para la configuración de la cadena y su nivel de inventarios. El modelo se plantea como no lineal, mixto-integral de dos niveles.

2.2. Programación lineal

En base al libro de (Gom, 1996):

2.2.1. Generalidades

La finalidad de la Programación lineal es determinar la forma más eficaz de utilizar los recursos disponibles para conseguir un determinado objetivo.

En general, estos recursos disponibles presentan dos características fundamentales:

- Ser limitados.
- Ser susceptibles de usos alternativos.

Esta doble característica de limitación de recursos y de la posibilidad de ser utilizados de diferentes maneras hace rentable la investigación de las posibles alternativas de aplicación con el fin de conseguir la máxima utilidad de ellos.

Un problema de programación lineal difiere de la clase general, en que se plantea un modelo matemático, o descripción del problema, usando relaciones llamadas lineales.

El planteamiento completo de un problema de programación lineal incluye un conjunto de ecuaciones lineales, que representan las condiciones del problema, y una función lineal que expresa el objetivo del mismo denominada comúnmente función económica.

En cuanto a la palabra lineal, significa solamente lo que representa; los problemas pueden adaptarse al modelo sólo si las relaciones algebraicas entre las varibales son lineales, o pueden aproximarse con precisión por medio de ecuaciones de primer orden. Si esta condición no se cumple, deben utilizarse otras técnicas

2.2.2. Estructura

Como lo plantea (**?**) Los problemas de programación lineal tienen la siguiente estructura:

- Existe un cierto objetivo a alcanzar, tal como un beneficio máximo, coste mínimo, o mínimo período de tiempo, del sistema que se estudia.
- Hay un gran número de variables que deben manejarse simultáneamente. Estas variables pueden ser productos, horas-máquina, horas-hombre, dinero, superficie, u otros factores según sea el problema.
- Muchos problemas de programación lineal se ven caracterizados por la presencia de restricciones que son contradictorias con el objetivo principal del problema.

De esta forma, la programación lineal tiende a asociarse con situaciones complejas, muchas varibales que interactuan, y objetivos competitivos junto con la optimización de algún criterio de efectividad del sistema.

En notación matricial el problema en su forma general queda expresado:

$$\begin{aligned} & \text{máx}\, z = c^T X \\ & s.a \\ & \quad AX \leq B \\ & \quad X \geq 0 \end{aligned}$$

En donde:

- $c \in \mathbb{R}^n$ es el vector de costos (vector renglón),
- $X \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de decisión (vector columna),
- A es la matriz de restricciones (matriz m × n) y
- $B \in \mathbb{R}^m$ es el vector de recursos o términos independientes (vector columna).

Todo problema de programación lineal puede ser expresado en forma canónica; es decir, puede definirs un problema en forma canónica equivalente a él. En efecto:

- si una restricción es de tipo $\geq$ puede ser multiplicada por -1 para obtener una de tipo $\leq$;
- una ecuación puede ser substituida por una desigualdad del tipo $\leq$ y otra del tipo $\geq$;
- para una variable no positiva x_i puede definirse $x_i^{'} = -x_i$ resultando $x_i^{'} \geq 0$;
- para una x_i no restringida pueden ser definidas dos variables no negativas $x_i^{'}$ y $x_i^{''}$ tales que $x_i^{'} - x_i^{''} = x_i$ considerando, de este modo, todos los valores posibles de x_i.
- Si el problema es de minimización, puede considerarse en vez de z la función $z^{'} = -z$ y en el problema equivalente se busca maximizar $z^{'}$.

2.2.3. Formas de Resolución

Existen tres métodos que permiten resolver los problemas de programación lineal:

1. Método Gráfico
2. Método del punto de esquina
3. Método simplex

Es necesario poner de relieve que el método gráfico no resulta muy práctico dado que sólo puede utilizarse en dos dimensiones, y existe la imposibilidad de dibujo en dimensiones superiores a tres. Asimismo, el método del punto de esquina resulta, poco útil como consecuencia del gran número de sistemas de ecuaciones a resolver.

2.2.4. Teoría de la Dualidad

Basandose en (Sal, 1993) Cualquier problema de programación lineal planteado en su forma general puede ser expresado a través de la función lagrangiana:

$$\text{máx}\, L(X, Y) = c^T X + Y(B - AX) \tag{2.5}$$

siendo $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ el vector de los multiplicadores de Lagrange. Las condiciones de optimalidad de esta funcion, llamadas condiciones de Kuhn-Tucker, son:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = C^t - Y\,A \leq 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = B - A\,X \geq 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} X = (C^t - Y\,A)X = 0 \tag{2.8}$$

$X \geq 0$

$$Y\frac{\partial L}{\partial Y} = Y(B - A\,X) = 0 \tag{2.9}$$

$Y \geq 0$ donde Y, B, C, A son ahora, respectivamente, el vector de las variables, el vector columna de los coeficientes de la función objetivo F', el vector columna de los términos independientes y la matriz técnica. En el programa primal tenían el significado de: vector fila de multiplicadores, vector columna de términos independientes, vector columna de coeficientes de la función objetivo y matriz técnica.

La función lagrangiana en este nuevo problema es:

$$\min L(Y, X) = YB + (C^T - YA)X \tag{2.10}$$

Siendo ahora X el vector columna de los multiplicadores de Lagrange en el programa dual (vector de variables en el primal). Las condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker son:

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = B - A\,X \geq 0 \tag{2.11}$$

$$Y\frac{\partial L}{\partial Y} = Y(B - A\,X) = 0 \tag{2.12}$$

$Y \geq 0$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = B - A\,X \geq 0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} X = (C^t - Y\,A)X = 0 \tag{2.14}$$

$X \geq 0$ Como se puede observar, las condiciones de Kuhn-Tucker son las mismas para ambos problemas, e incluso la expresión algebraica de la función lagrangiana es facil comprobar que coincide puesto que:

$$L(X,Y) = C^T X + Y(B - A\,X) = Y\,B + (C^T - Y\,A)X = L(Y,X) \tag{2.15}$$

Por lo tanto, a cada problema de programación lineal llamado primal se le puede asignar su correspondiente programa dual. Es evidente además, que el dual de un problema dual conduce al problema originalmente llamado primal.
El problema dual puede presentarse en dos formas distintas:

1. La forma simétrica de la dualidad es la que se obtiene a partir de un primal en forma general:

   Primal
   $\text{máx}\, F(X) = C^T X$
   A X ≤ B
   X ≥ 0

   Dual
   $\text{mín}\, F'(Y) = Y\,B$
   $Y\,A \geq C^T$
   Y <>0

2. La forma asimetria resulta a partir de un primal en forma standard

   Primal
   $\text{máx}\, F(X) = C^T X$
   A X ≤ B
   X ≥ 0

Dual

$$\text{mín } F^{'}(Y) = Y\,B$$

$$Y\,A \geq C^{T}$$

$$\mathrm{Y} <> 0$$

Las relaciones existentes entre el primal y el dual o la inversa son las siguientes:

a) Cuando en el primal el objetivo es maximizar una función, en el dual el objetivo es minimizar y a la inversa, si en el primal se minimiza, en el dual hay que maximizar.

b) En el problema dual hay tantas variables como restricciones tenga el problema primal.

c) El número de restricciones del dual viene determinado por el número de variables principales del problema primal.

d) Los términos independientes del problema primal pasan a ser los coeficientes de la función objetivo del problema dual.

e) Los coeficientes de la función objetivo del problema son los términos independientes del dual.

f) La matriz de las restricciones del problema dual corresponde a la traspuesta de la matriz formada por las restricciones del primal.

g) Por último las relaciones entre el signo de las variables del problema primal y las restricciones del problema dual y el signo de las restricciones del problema primal y las varibales del problema dual dependen de si el problema primal es de maximizar o minimizar, así pues la relación entre ellos es la siguiente:

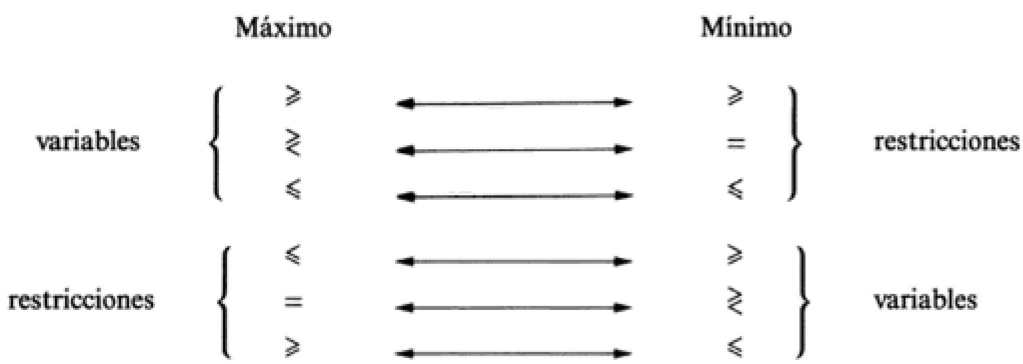

Figura 2.2: Relaciones entre el problema primal y el dual

2.3. Modelos de optimización Bi-level

2.3.1. Formulación general y conceptos básicos

Como lo plantea Labbé en su articulo (2016), un modelo de programación Bi-level consta de dos problemas de optimización, los cuales tienen una resolución jerárquica. Esto se traduce en que la solución de algunas variables del primer problema, se transforman en parámetros para encontrar una solución óptima al segundo.

En este ajuste, la primera función objetivo y sus limitaciones adecuadas, que no están relacionados para el segundo problema de optimización, por lo general se refieren a la llamada líder o primer nivel, mientras el segundo problema de optimización (función objetivo y restricciones) se refiere al seguidor o segundo nivel. Esta terminología define la secuencialidad del problema: primero, el seguidor elige su solución óptima una vez que la elección del líder es conocida, y por lo tanto el líder busca optimizar su elección teniendo en cuenta que el seguidor siempre reacciona de manera óptima a la misma. Para valores dados de las primeras variables de decisión de nivel, el segundo problema de nivel puede tener múltiples soluciones óptimas. En este caso, se pueden proponer diferentes métodos de modelización dependiendo del comportamiento del seguidor. Un comportamiento cooperativo conduce a una solución optimista, de modo que cuando hay múltiples soluciones líder asume que la elección del seguidor es siempre es la más favorable para él. Por el contrario, un comportamiento agresivo conduce a una solución pesimista, donde el líder protege a sí mismo contra del seguidor posible peor reacción.

Sea x e y los vectores de decisión, f y g las funciones objetivo de cada jugador y sean X e Y el conjunto de soluciones factibles para el lider y seguidor respectivamente. La fórmula general para un modelo de optimización con carácter de bi-level es:

$$\max_{x,y} f(x,y), \tag{2.16}$$

$$s.a.\ (x,y) \in X, \tag{2.17}$$

$$y \in S(x), \tag{2.18}$$

$$donde\ S(x) = \ arg \min_{y}\ g(x,y), \tag{2.19}$$

$$s.a.\ (x,y) \in Y. \tag{2.20}$$

2.3.2. Programación Lineal BiLevel

Como lo define Bard.J 1998 en su libro:

Sea $x \in \mathrm{X} \subset R^n$, $y \in \mathrm{Y} \subset R^m$, F: $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \rightarrow R^1$, y $f: \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \rightarrow R^1$, el modelo Bi-level de programación lineal puede ser escrito como:

$$\min_{x \in X} F(x,y) = c_1 x + d_1 y \tag{2.21}$$

$$subject\ to\ \ A_1 x + B_1 y \leq b_1 \tag{2.22}$$

$$\min_{y \in Y} f(x,y) = c_2 x + d_2 y \tag{2.23}$$

$$subject\ to\ A_2 x + B_2 y \leq b_2 \tag{2.24}$$

donde c_1, $c_2 \in R^n$, d_1 , $d_2 \in R^m$, $b_1 \in R^p$, $b_2 \in R^q$, $A_1 \in R^{pxn}$, $B_1 \in R^{pxm}$, $A_2 \in R^{qxn}$, $B_2 \in$

R^{qxm}. Los conjuntos X e Y añaden restricciones adicionales en las variables, tales como cotas superiores e inferiores o integralidad. Cuando el lider selecciona un x, el primer termino en la función objetivo del seguidor se convierte en una constante y puede ser removida del problema. En este caso se reemplaza *f(x,y)* con *f(y)*.

La naturaleza de una decisión secuencial implica que ***y*** puede ser vista como una decisión de ***x***, ***y=y(x)***.

Definiciones

1. Región factible:

$$S \triangleq \{(x,y):\ x \in X,\ y \in Y,\ A_1x + B_1y \leq b_1,\ A_2x + B_2y \leq b_2\} \tag{2.25}$$

2. Región factible para el seguidor para cada x:

$$S(x) \triangleq \{y \in Y:\ B_2y \leq b_2 - A_2x\} \tag{2.26}$$

3. Proyección de S en el espacio de decisión del lider:

$$S(X) \triangleq \{x \in X : \exists y \in Y,\ A_1x + B_1y \leq b_1,\ A_2x + B_2y \leq b_2\} \tag{2.27}$$

4. Conjunto de reacción racional para el seguidor, siendo x ∈ S(X):

$$P(x) \triangleq \{y \in Y : y \in argmin[f(x,\hat{y}) : \hat{y} \in S(x)]\} \tag{2.28}$$

5. Región Inducible:

$$IR \triangleq \{(x,y) : (x,y) \in S, y \in P(x)\} \tag{2.29}$$

Para asegurar la consistencia de la nomenclatura utilizada anteriormente, se asume que S es no vacío y compacto, y que para todas las decisiones tomadas por el líder, el seguidor tiene un espacio de respuesta (P(x) ≠ ∅), El conjunto de decisión racional, P(x), define la respuesta mientras que la región inducible IR representa el conjunto por el sobre el cual el líder puede optimizar. Siguiendo en términos de la notación anterior el problema bi-level puede ser escrito como:

$$\text{mín}\{F(x,y) : (x,y) : IR\} \tag{2.30}$$

2.3.3. Representación del modelo con las condiciones Kuhn-Tucker

En la búsqueda de una forma de resolver el los problemas Bi-level lineales, se debe representar de forma explicita la región inducible. Esto se logra reemplazando el problema del seguidor con sus condiciones de Kuhn-Tucker y anexar el sistema resultante a un problema del líder. Siendo $u \in R^q$ y $v \in R^m$ las variables duales asociadas a las restricciones del seguidor e $y \geq 0$, respectivamente, se plantea el siguiente modelo.

Una condición necesaria tal que (x^*, y^*) resuelva el problema lineal Bilevel, debe existir vectores (fila) u^* y v^* tal que (x^*, y^*, u^*, v^*) resuelva:

$$\text{mín}\, c_1 x + d_1 y \tag{2.31}$$

$$subject\ to\ \ A_1 x + B_1 y \leq b_1 \tag{2.32}$$

$$uB_2 - v = -d_2 \tag{2.33}$$

$$u(b_2 - A_2 x - B_2 y) + vy = 0 \tag{2.34}$$

$$A_2 x + B_2 y \leq b_2 \tag{2.35}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, u \geq, v \geq 0 \tag{2.36}$$

Esta formulación ha jugado un rol clave en el desarrollo de algoritmos. Una ventaja que ofrece ir que permite a modelos de gran tamaño ser resueltos sin introducir nuevas dificultades computacionales. En particular, reemplazando la función objetivo del seguidor con una forma cuadrática:

$$f(x, y) = c_2 x - d_2 y + x^T Q_1 y + \frac{1}{2} y^T Q_2 y \tag{2.37}$$

donde Q_1 es una amtriz n × m y Q_2 es una matriz m × m simétrica y positiva. Esto hace cambiar la restricción $uB_2 - v = -d_2$. La nueva restriccion sigue siendo linear, pero ahora incluye todas las variables del problema.

$$x^T Q_1 + y^T Q_2 + uB_2 - v = -d_2 \tag{2.38}$$

Desde un punto de vista conceptual, el modelo presentado, es un programa matemático estandar y debiese ser relativamente facil de resolver debido a que todas las restricciones son lineales con excepción de una. Sin embargo, virtualemt todo codigo no-lineal comercial encuentra términos complementarios.

2.3.4. Aproximación de Kuhn-Tucker

La aproximación más directa para resolver el problema lineal Bi-level, es resolver un programa matemático equivalente al modelo presentado desde las ecuaciones (2.31)-(2.36). En la práctica, esto no es tan directo como parece, sin embargo, como ese problema es lineal por excepción de la holgura complementaria en la ecuación (2.34), es natural preguntarse si hay una manera directa de relajar o incluso derivar el término de manera eficiente y talvez resolver una serie de problemas de menor complejidad en lugar del modelo planteado.
Se deben escribir las inecuaciones en el problema del seguidor como $g_i(x, y) \geq 0$, i=1, ..., q+m, y notar que las holguras complementarias simplemente significa $u_i g_i(x, y) = 0, i = 1, \ldots, q + m)$

Se propone un esquema que bordea estos términos multiplicativos. Básicamente, se convierte el modelo propuesto a uno de programación lineal entera reemplazando (2.34) con el siguiente conjunto de restricciones: $u_i \leq M * z_i, g_i \leq M * (1 - z_i)$, donde M es una constante lo suficientemente grande y $z_i \in 0, 1$ para todo i. El problema resultante contiene q+m variables adicionales y 2(q+m) restricciones. Puede ser resuelto con cualquier código entero mixto, pero no necesariamente con algún grado de eficiencia.

2.4. Cadena de Suministro

La cadena de suministros es la forma en la que las materias primas fluyen a lo largo de distintos procesos productivos hasta lograr un producto terminado para el cliente.
En la literatura, existen múltiples definiciones acerca de la gestión de la cadena de suministro. Su divergencia se basa en los distintos puntos de vista, enfoques, modelos de negocios, etc. El US-based Council of Supply Chain Management Professionals (CSCMP) define la ésta gestion como:
"La gestión de la cadena de suministro (GCS) abarca la planificación y gestión de todas las actividades implicados en el origen y la adquisición, conversión, y todas las actividades de gestión de la logística. Es importante destacar que, también incluye la coordinación y colaboración con los socios de canal, los cuales pueden ser proveedores, intermediarios de terceros proveedores de servicios y clientes. En esencia, GCS integra la gestión de la oferta y la demanda dentro y fuera de las empresas".(CSCMP, 2010)

2.4.1. Decisiones en Modelos de optimización

Como en todas las industrias, el objetivo de las firmas es buscar la maximización de beneficios, a través de distintos métodos como aumentar los ingresos, aumentar la producción, disminuir los costos, etc. Para la industria alimenticia, el elaborar modelos de optimización encuentra su complejidad al analizar los factores los cuales hacen injerencia sobre la toma de decisión. La perecibilidad, la durabilidad, el resguardo de los productos, la calidad de los mismos, la contaminación que se genera, la variación en las demandas, el transporte, son algunos de los temas que repercuten al momento de incorporarlos en los distintos modelos.(García-Flores et al., 2015) También se puede hacer la distinción de una forma macro entre la industria ganadera y agrícola. En la primera se tienen los procesos de inseminación a las hembras, luego el proceso de crianza y la engorda de animales. A esto se suma el cuidado que se tiene que tener con el animal, en cuanto a la compatibilidad de la genética, los remedios, la alimentación, etc. (Rodríguez et al., 2014). En el sector agrícola se debe tomar en cuenta, la siembra, tiempos de crecimiento, la cosecha, el clima, las plagas, entre otros.(Soto-silva et al., 2015) Junto a los procesos propios de la producción, los factores externos definidos en la sección anterior son relevantes para los modelos como lo es la globalización, en donde ya no se le compra a un productor nacional, sino que se expande a múltiples productores de carácter internacional.

2.4.1.1. Modelamiento de la cadena de suministro

El enfoque y dirección que ha tomado la elaboración de la cadena de suministro para esta industria es lograr entregar un producto de calidad para el cliente, en donde este pueda encontrar el balance entre sus preferencias, lo que entrega el producto, el costo en el cual se incurre, la disponibilidad, la elaboración del producto, traducido en cinco grandes categorías: Relacionado al producto, Relacionado al mercado, lo económico, lo social y factores psicológicos (Tijskens et al., 2001). Sin embargo, si bien el cliente es el agente principal de la cadena y al cual se debe abocar los procesos, se deben elaborar cadenas las cuales sean sustentables y tomen en consideración todos agentes participantes para la elaboración final del producto. Garnett (2014) plantea la posibilidad de lograr una cadena sustentable a través de tres principales enfoques como lo son: (i) mejorar la eficiencia de los procesos, logrando la reducción de contaminantes de efecto invernadero, ahorro de agua, ahorro de materias primas para las empresas, reducción de la huella de carbono y mejor uso de las tierras. (ii) Restricciones de demandas, debido a que se está generando un exceso de consumo en las personas, no teniendo la conciencia de lo absolutamente necesario que necesita el organismo. (iii) La transformación del sistema de alimentos, el cual es un desbalance de los anteriores que genera sobreoferta en algunos mercados y quiebre de stock en otros, por la mala distribución de los recursos. Li,Wang, Chan, Manzini (2014) en su estudio presentan distintas formas de modelar distintos escenarios y enfoques en base a una cadena sustentable. Por un lado existen modelos los cuales son objetivos múltiples de dos etapas en donde optimizan problemas de localización y transporte para productos perecibles y de esta forma generar menores perdidas de alimentos. Otro modelo se enfoca en las operaciones de *"cross docking"*, para la gestión de inventarios despachos y distribución de costos. Además también se encuentran modelos que se basan en la teoría de juegos como lo es la fijación de precios cuando productos perecibles cuando disminuyen la cantidad de productos y su calidad de forma simultánea, y un sistema de producción para un mercado de vegetales aplicando el equilibrio de Nash y estrategia de Cournot para encontrar el óptimo de producción.

Ahumada y Villalobos (2009) afirman que no es fácil el modelamiento de para la industria alimenticia, por los altos tiempos de procesos, alta volatilidad en la demanda, el ciclo de vida de los productos, etc. Sumado a lo anterior, además de elaborar planes de producción, se debe incorporar políticas, canales de marketing, actividades logísticas, coordinación vertical de los procesos y el manejo del riesgo. Es por lo mismo que se pueden encontrar con modelos tanto deterministas como estocásticos, basándose en programación lineal, dinámica, entera mixta, programación estocástica, etc.

Es evidente que la industria se ve enfrentada día a día a mas exigencias, como lo es la sustentabilidad, exigencias del cliente, dinamismo del mercado, la competencia interna y es por lo cual que los modelos que se generan para lograr una optimización de recursos deben tener mayor análisis y considerar mayor cantidad de factores en distintos niveles. Soto-Silva(2015) plantea un esquema (basado en Ahumada y Villalobos(2009)), de cómo elaborar dichos modelos estableciendo el propósito, o mejor dicho la actividad del proceso productivo que se quiere optimizar y con qué objetivo se busca la actividad. Las decisiones sobre éstas, debe establecer a que nivel de decisión se busca establecer dicha actividad y buscar el modelo correcto según sea determinista o estocástico.

2.4.2. Relación con proveedores

Detallado con las secciones anteriores, la industria de los alimentos debe contar con una buena relación con sus proveedores para lograr alinear la cadena de suministros. Es importante considerar un buen control de los procesos de la integración vertical, para lograr la calidad final de los productos. Li,Wang, Chan, Manzini (2014) en su estudio afirman el concepto de *"Responsabilidad Social Cooperativa"*, para enfatizar lo importante que es el proveedor en la generación de una cadena de suministro sustenable y eficiente. Debe existir entre proveedor/cliente compromiso, cooperación, satisfacción que demuestren la necesidad que existe entre ambos agentes.

Con los proveedores deben existir metodologías de trabajo como lo es la implementación de CPFR, Sistemas de Información para contribuir al uso eficiente de recursos. Como bien lo detalla Tijskens (2001) debe existir el concepto de ECR, donde el trabajo en conjunto de todos los agentes de la cadena maximiza la satisfacción del cliente y reduce los costos del sistema.

2.5. Aplicación de la Teoría de Juegos en otras industrias

2.5.1. Modelo de optimización utilizando Teoría de Juegos en la industria del transporte

Catalano (2014), establece un problema de optimización, basado en el juego de Stackelberg para el diseño de un terminal logístico, en Sicilia, al sur de Italia. Los precedentes del problema son la necesidad de construir un centro terminal logístico para establecer una conexión entre las redes de transportistas y fletes, con el fin de estimular una cooperación que logre mayor coordinación, facilidades, reducción de costos y mejoramiento de la calidad del servicio. El actual sistema presenta serias ineficiencias, que afectan la economía regional y el medioambiente. La industria está dominada por pequeñas empresas, con pequeñas flotas, las cuales tienen bajos indicadores de uso de su capacidad máxima, lo que se traduce en muchos viajes y mal uso de los activos. Se busca crear un sistema de mayor eficiencia y sustentabilidad para la organización del transporte de fletes y transporte en general. En este problema Stackelberg, el líder es el diseñador del proyecto, el cual debe planear sus decisiones en base a las predicciones de la reacción de los transportistas y así determinar el flujo de fletes que circularan por el terminal. Además se debe determinar la localización de este terminal y el aporte público que se debe recibir para maximizar la suma entre: la utilidad que reciben los transportistas, la diferencia de costos entre las situaciones con y sin proyecto y la disminución de los costos medioambientales. Los seguidores deben tomar sus decisiones en base a la optimización de la ruta a partir del costo monetario a transportar, tiempos de viaje, tiempo empleado en el terminal y el costo de utilizar el terminal.

2.5.2. Modelo de optimización utilizando Teoría de Juegos en la industria del retail

Un artículo publicado por Yu, Huang, Liang (2009) , muestra en efecto un problema de optimización entre un manufacturero y distintos agentes del retail los cuales buscan optimizar su beneficio individual. El manufacturero adquiere las materias primas, según la necesidad de los “retailers” y les distribuye los productos terminados a precio por mayor. Luego la venta en el POS (point of sale) se realiza a precio que fije el retailer. El modelo se basa en una interacción entre cliente/proveedor a través de un sistema VMI el cual establece tanto cooperación como competencia entre los agentes. Cooperación debido ambos se preocupan de la publicidad y el aumento de la demanda, y además el manufacturero regula los envíos de productos terminados en base sus niveles de ventas, externalizando el inventario para el retailer. Competitivo ya que cada participante busca la maximización de su beneficio por separado en base a sus objetivos. Es por esto que cada uno determina sus precios de venta, inversiones en publicidad, etc. Durante este proceso de decisión el manufacturero conoce el inventario del retailer y la demanda del mercado, siendo así, como el manufacturero maneja el inventario del retailer, este último debe responder según la decisión del primero para maximizar su beneficio. Es aquí donde se adopta el carácter de metodología Stackelberg, debido a que como maneja su nivel de inventario el manufacturero es tratado como líder de la cadena y el retailer como seguidor. Como líder, la empresa manufacturera conoce las acciones de cada retail, por lo que optimiza sus inversiones, precio al por mayor y niveles de inventario para maximizar su beneficio. Luego cada retailer, conociendo la decisión del líder, determina sus precios de venta e inversiones para maximizar sus propios beneficios. La solución óptima al problema viene dada por el equilibrio de Stackelberg. Esta metodología explica cómo cada jugador de la cadena de suministro trabaja en conjunto para maximizar sus beneficios y encontrar la solución óptima. Además se puede hacer el análisis de sensibilidad, para ver en que rango pueden fluctuar mis decisiones frente a cambios externos.

3 | Metodología

3.1. Modelo de Optimización

3.1.1. Descripción del problema

El juego entre el granjero (seguidor) y el productor (líder) puede definirse como la comercialización de carcasas para la producción de productos cárnicos para atender una demanda determinada.
Aquí se aborda un problema en el cual existen dos agentes de una cadena de suministro, los cuales cada uno busca la mejor decisión para sus intereses.
Las decisiones del granjero como lo es la cantidad de carcasas a comercializar va a impactar sobre el líder en cuanto a que dependiendo de la disponibilidad de carcasas, ello va a limitar el nivel de producción. A su vez la decisión del líder de cuantas carcasas comprar va a tener una afectación sobre la decisión del seguidor en cuantas carcasas ofertar. Es importante encontrar la coordinación de los agentes de forma que ambos encuentren la mejor decisión considerando al otro participante. Ambos tienen conocimiento del escenario en el cual se encuentra inmerso el otro jugador, sabiendo a priori cuales son las posibles decisiones del otro, que curso tomará.
Se puede considerar dicha coordinación como un problema que sigue los principios de la teoría de juegos, debido a que justamente se plantea un "juego" sobre el cual uno toma una decisión, en base a lo que puede o podría decir el otro participante. Cada participante tiene más de una posible decisión en base a lo que decida el otro agente. A pesar de aquello, este juego se presenta con un grado de jerarquía entre los participantes, donde el líder presenta mayor poder en la toma de decisión que el seguidor. Es por esto, que el juego sigue la

metodología Stackelberg, siendo la decisión del granjero un juego secuencial de lo que diga el productor y su posterior respuesta.

Se hace la suposición que ambos agentes son racionales, y tomaran decisiones las cuales le reporten mayor beneficio.

El problema del productor se basa en el problema planteado por Albornoz 2015.

La diferencia con aquel modelo, es que no se utiliza producto congelado y solamente se trabaja con producto fresco. El problema del granjero busca maximizar los ingresos de las carcasas, teniendo egresos por concepto de costos de inventario. El juego entre ambos radica en que las carcasas presentan distintos precios de compra en el horizonte de planificación. Además el rendimiento de los patrones de corte, también varían en los periodos. Esta suposición se hace en base a que los cerdos aumentan su carne magra hasta un cierto periodo, y luego solamente aumentan su grasa. Aquí cabe la decisión de entre comprar a un precio más elevado, pero obtener mayor cantidad de producción por carcasa.

En base a todo lo descrito anteriormente, es que se decide plantear el problema como un modelo de bi-level, buscando integrar las decisiones de ambos jugadores en un solo modelo para buscar el óptimo para ambos.

3.1.2. Formulación del problema

Conjuntos y Parámetros

T	:	Número de periodos en el horizonte de planificacion.
J	:	Número de patrones de corte.
L	:	Días de Frescura.
H	:	Carcasas disponibles durante todo el horizonte de planificación.
$k \in K$	:	conjunto de secciones.
$j \in J_k$	:	Conjunto de patrones de corte.
$r \in R$	:	Conjunto a representar los distintos tipos de carcasas.
$i \in P$	:	Conjunto de productos.

α_r : Proporciones de carcasas del tipo r.

$\psi_{i,j,r,t}$: Rendimiento del producto *i* usando el patrón de corte *j* en la carcasa de tipo *r* en el tiempo *t*.

c_j : Costo operacional del patron *j*.

c_j^e : Costo operacional del patron *j* en horas extras.

h : Costo de inventario para el lider por periodo.

$d_{i,t}$: Demanda del producto *i*, en el tiempo *t*.

$Pre_{i,t}$: Precio de compra del producto *i* en el tiempo *t*.

cf_i : Costo de faltante por producto.

W : Capacidad de la bodega.

t_j : Tiempo operacional del patrón de corte *j*.

T_w : Tiempo disponible en tiempo regular.

T_w^e : Tiempo disponible en horas extras.

P_t : Precio unitario por carcasas en el periodo *t* al cual se le vende al líder.

z : Costo de mantener a un cerdo por periodo.

R_t : Precio unitario por carcasas en el periodo *t* al cual se vende en ferias libres.

Variables de Decisión

$x_{i,t}$: Cantidad total del producto *i* a ser procesado en el tiempo *j*

$I_{i,t}$: Cantidad de inventario del producto *i* a tener en el periodo *t* .

$z_{j,r,t}$: Número de veces que se usa el patrón *j* en la carcasa de tipo *r*, en el periodo *t* para el horario regular.

$z_{j,r,t}^e$: Número de veces que se usa el patrón *j* en la carcasa de tipo *r*, en el periodo *t* para el horario extra.

$f_{i,t}$: Cantidad de faltante del producto *i* en el periodo *t*.

$vd_{i,t}$: Cantidad de producto i vendido en el periodo t.

Sb_i : Sobrante del producto i en el horizonte de planificación.

H_t : Cantidad de carcasas entregadas al líder en el periodo t.

Y_t : Inventario de Cerdos en el periodo t.

M_t : Cantidad de carcasas vendidas en ferias libres en el periodo t.

3.1.2.1. Problema del Lider

Función Objetivo La función objetivo tiene como finalidad encontrar el máximo beneficio de la operación, la cual abarca costos operacionales como los costos de inventario , costos de realizar los patrones de corte. Además, se incluyen los costos de adquisición y costos por faltante.

$$\text{máx} \sum_{i\in P}\sum_{i=1}^{T} Pre_{i,t}vd_{i,t} - \sum_{i\in P}\sum_{i=1}^{T} h*I_{i,t,} - \sum_{i=1}^{T}\sum_{j\in J}\sum_{r\in R}(c_j*z_{j,r,t}+c_j^e*z_{j,r,t}^e) - \sum_{t=1}^{T} P_t*H_t - \sum_{i\in P}\sum_{i=1}^{T} cf_i f_{i,t} \tag{3.1}$$

$$subject\ to\ \ x_{i,t} = \sum_{r\in R}\sum_{j\in J}\psi_{i,j,r,t} * (z_{j,r,t} + z^{e}_{j,r,t}) \qquad \forall i \in P, t = 1,\dots T \tag{3.2}$$

$$\sum_{r\in R}\sum_{j\in J} t_j * z_{j,r,t} \leq T_w \qquad \forall t = 1,\dots T. \tag{3.3}$$

$$\sum_{r\in R}\sum_{j\in J} t_j * z^{e}_{j,r,t} \leq T^{e}_w \qquad \forall t = 1,\dots T. \tag{3.4}$$

$$vd_{i,t} + f_{i,t} = d_{i,t} \qquad i \in P, \forall t = 1,\dots |T| \tag{3.5}$$

$$x_{i,t} + I_{i,t} - I_{i,t+1} = vd_{i,t} \qquad i \in P, \forall t = 1,\dots |T| - 1. \tag{3.6}$$

$$x_{i,t} + I_{i,t} - Sb_i = vd_{i,t} \qquad i \in P,\ t = |T|. \tag{3.7}$$

$$\sum_{i\in P} I_{i,t} \leq W \qquad i \in P \tag{3.8}$$

$$\text{mín} \sum_{t\in T} zY_t - P_tH_t - R_tMt \tag{3.9}$$

$$subject\ to\ \ \sum_{t=1}^{T} H_t + M_t = H \tag{3.10}$$

$$2 * (Y_{t-1} - Y_t) = H_t + M_t \qquad t = 1,\dots T. \tag{3.11}$$

$$\alpha_r * H_t = \sum_{j\in J_k}(z_{j,r,t} + z^{e}_{j,r,t}) \qquad t = 1,\dots T, \forall r \in R, \forall k \in K. \tag{3.12}$$

$$Y_{|T|} = 0 \tag{3.13}$$

Descripción de las Restricciones

1. Rendimiento de los patrones de corte.(3.2)

   Un patrón de corte es una combinación de un conjunto de productos y sus rendimientos, que es posible extraer al aplicar dicho patrón sobre una carcasa. Se asume que la obtención de un producto es en base al patrón de corte aplicado, y no por sobre una sección especifica del animal. Para efectos del analisis no se considera la piel ni huesos. La finalidad de la restricción es calcular el total de kilogramos producidos a partir de la totalidad de cortes empleados en cada periodo.

2. Horas de trabajo en horario regular disponibles por periodo.(3.3)

   Asegura que las horas de trabajo disponibles no sean excedidas por la suma del tiempo operacional al aplicar los patrones de corte.

3. Horas de trabajo en horario extra disponibles por periodo.(3.4)
   La misma restricción anterior, pero aplicado al trabajo disponible en horas extra.

4. Cumplimiento de la demanda(3.5)
   Asegura que el nivel de demanda sea alcanzado utilizando producción, inventario o faltante.

5. Producto vendido (3.6 y 3.7)
   La cantidad de producto vendido debe ser igual a lo producido mas lo que se encuentra en inventario menos lo que se debe dejar en inventario para el periodo siguiente.

6. Capacidad de la Bodega(3.8)
   Fuerza a que los productos en inventario para cada periodo, no excedan la capacidad de la bodega.

7. Función objetivo del Seguidor(3.9)
   El problema se presenta como una minimización. El problema original plantea la maximización de sus ingresos. Para continuar con la nomenclatura de la literatura se escribe como minimización

8. Cantidad maxima de carcasas (3.10)
   La cantidad de carcasas vendidas entre el líder y el las ferias libres durante el proceso de planificación debe ser igual a la cantidad inicial de carcasas.

9. Variación del inventario (3.11)
   El doble de la diferencia obtenida entre la cantidad de cerdos en un periodo y su sucesor, debe ser igual a la cantidad de carcasas vendidas entre el líder y ferias libres.

10. Carcasas a ser procesadas (3.12)

Los patrones de corte son divididos por secciones para reducir el número de diferentes patrones. Las carcasas son cortadas en distintas secciones , y para cada sección un patrón de corte es aplicado. Estas restricciones aseguran el balance los patrones de corte y el número de carcasas a ser procesadas en cada periodo. La igualdad obliga a que no sea posible dejar sección sin procesar.

11. Inventario Final (3.13)

    Obliga a que no queden cerdos al final de los periodos contemplados para vender en esa planificación.

12. Naturaleza de las variables

    Todas las variables son continuas y mayores o iguales a cero.

3.2. Método de Resolución

Se debe plantear el problema como una representación del modelo con las condiciones Kuhn-Tucker:

$$\text{mín} \sum_{i\in P}\sum_{i=1}^{T} h*I_{i,t,}+\sum_{i=1}^{T}\sum_{j\in J}\sum_{r\in R}(c_j*z_{j,r,t}+c_j^e*z_{j,r,t}^e)+\sum_{t=1}^{T}P_t*H_t+\sum_{i\in P}\sum_{i=1}^{T}cf_if_{i,t}-\sum_{i\in P}\sum_{i=1}^{T}Pre_{i,t}vd_{i,t} \tag{3.14}$$

$$subject\ to \quad \sum_{r\in R}\sum_{j\in J} t_j * z_{j,r,t} \leq T_w \qquad \forall t = 1,\dots T. \tag{3.15}$$

$$\sum_{r\in R}\sum_{j\in J} t_j * z^e_{j,r,t} \leq T^e_w \qquad \forall t = 1,\dots T. \tag{3.16}$$

$$vd_{i,t} + f_{i,t} = d_{i,t} \qquad i \in P, \forall t = 1,\dots |T| \tag{3.17}$$

$$x_{i,t} + I_{i,t} - I_{i,t+1} = vd_{i,t} \qquad i \in P, \forall t = 1,\dots |T| - 1. \tag{3.18}$$

$$x_{i,t} + I_{i,t} - Sb_i = vd_{i,t} \qquad i \in P,\ t = |T|. \tag{3.19}$$

$$\sum_{i\in P} I_{i,t} \leq W \qquad i \in P \tag{3.20}$$

$$uB_2 - v = -d_2 \tag{3.21}$$

$$u(b_2 - A_2x - B_2y) + vy = 0 \tag{3.22}$$

$$\sum_{t=1}^{T} H_t + M_t = H \tag{3.23}$$

$$2 * (Y_{t-1} - Y_t) = H_t + M_t \quad t = 1,\dots T. \tag{3.24}$$

$$\alpha_r * H_t = \sum_{j\in J}(z_{j,r,t} + z^e_{j,r,t}) \qquad t = 1,\dots T, \forall r \in R. \tag{3.25}$$

$$Y_{|T|} = 0 \tag{3.26}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, v \geq 0 \tag{3.27}$$

Para este caso, no se debe complir que $u \geq 0$ debido a que las restricciones del seguidor contienen signos de igualdad. Bajo las condiciones de Kuhn-Tucker, si las restricciones contienen igualdad, es indiferente el signo que tome la variable dual u. En la sección Resultados, se detallará la dimensión correspondiente a cada matriz y la forma final de las restricciones (3.21) y (3.22), una vez definido la cantidad de elementos correspondiente a cada conjunto. A pesar de aquello, a continuación se detalla la dimensión de cada matriz en su forma general para este analisis.

$B_2 =$

$$\begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,3T} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,3T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{(K+1)T+2,1} & B_{(K+1)T+2,2} & \dots & B_{(K+1)T+2,3T} \end{pmatrix}$$

$u_q =$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{(K+1)T+2} \end{pmatrix}$$

$A_2 =$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,T(3I+2J)} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,T(3I+2J)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{(K+1)T+2,1} & A_{(K+1)T+2,2} & \dots & A_{(K+1)T+2,T(3I+2J)} \end{pmatrix}$$

$v_m =$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{3T} \end{pmatrix}$$

$A_1 =$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,T(3I+2J)} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,T(3I+2J)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{T(2I+3),1} & A_{T(2I+3),2} & \dots & A_{T(2I+3),T(3I+2J)} \end{pmatrix}$$

$B_1 =$

$$\begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,3T} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,3T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{T(2I+3),1} & B_{T(2I+3),2} & \dots & B_{T(2I+3),3T} \end{pmatrix}$$

$y =$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{3T} \end{pmatrix}$$

$x =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{T(3I+2J)} \end{pmatrix}$$

El problema se resolverá a través de la aproximación de Kuhn-Tucker, por lo que se debe eliminar la restricción (3.22) reemplazandola por $2*((R+1)T+2+3T)$ restricciones y se deben agregar $((R+1)T+2+3T)$ nuevas variables de carácter binario. Las condiciones establecidas para utilizar este método de resolcuón es que el modelo no contenga variables enteras orginialmente. El problema original planteado por (Albornoz et al., 2015), considera las variables de patrones de corte y carcasas adquiridas de naturaleza entera. En este trabajo se relajará dicha integralidad, con el efecto de aplicar la aproximación de Kuhn-Tucker.

El modelo queda de la siguiente manera:

$$\text{mín} \sum_{i \in P} \sum_{i=1}^{T} h * I_{i,t,} + \sum_{i=1}^{T} \sum_{j \in J} \sum_{r \in R} (c_j * z_{j,r,t} + c_j^e * z_{j,r,t}^e) + \sum_{t=1}^{T} P_t * H_t + \sum_{i \in P} \sum_{i=1}^{T} cf_i f_{i,t} - \sum_{i \in P} \sum_{i=1}^{T} Pre_{i,t} vd_{i,t} \tag{3.28}$$

$$subject\ to \quad \sum_{r\in R}\sum_{j\in J} t_j * z_{j,r,t} \leq T_w \qquad \forall t = 1,\ldots T. \tag{3.29}$$

$$\sum_{r\in R}\sum_{j\in J} t_j * z^e_{j,r,t} \leq T^e_w \qquad \forall t = 1,\ldots T. \tag{3.30}$$

$$vd_{i,t} + f_{i,t} = d_{i,t} \qquad i \in P, \forall t = 1,\ldots |T| \tag{3.31}$$

$$x_{i,t} + I_{i,t} - I_{i,t+1} = vd_{i,t} \qquad i \in P, \forall t = 1,\ldots |T| - 1. \tag{3.32}$$

$$x_{i,t} + I_{i,t} - Sb_i = vd_{i,t} \qquad i \in P,\ t = |T|. \tag{3.33}$$

$$\sum_{i\in P} I_{i,t} \leq W \qquad i \in P \tag{3.34}$$

$$uB_2 - v = -d_2 \tag{3.35}$$

$$u_i \leq M * z_i \tag{3.36}$$

$$(b_2 - A_2x - B_2y)_i \leq M * (1 - z_i) \tag{3.37}$$

$$v_j \leq M * z_j \tag{3.38}$$

$$y_j \leq M * (1 - z_j) \tag{3.39}$$

$$\sum_{t=1}^{T} H_t + M_t = H \tag{3.40}$$

$$2 * (Y_{t-1} - Y_t) = H_t + M_t \qquad t = 1,\ldots T. \tag{3.41}$$

$$\alpha_r * H_t = \sum_{j\in J}(z_{j,r,t} + z^e_{j,r,t}) \qquad t = 1,\ldots T, \forall r \in R. \tag{3.42}$$

$$Y_{|T|} = 0 \tag{3.43}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, v \geq 0, z_i \in \{0,1\}, z_j \in \{0,1\} \tag{3.44}$$

4 | Experimentos Computacionales

4.1. Descripción

Para validar el modelo propuestos, se han utilizado datos reales de costos de producción, costos y capacidad de almacenamiento y tiempos de producción. Otros parámetros y datos como la demanda de los diferentes tipos de productos, rendimiento de los patrones de corte, costos de faltante, costos de aquisición de carcasas, precio de venta de los productos, fueron generadas aleatoriamente para todos los periodos distintos al inicial. La forma de generarlos, fue establecer relaciones en base al parametro del periodo anterior para efectos de la experimentación. Aproximándose en base a antecedentes de empresas, esto permitió contar con instancias de tamaños aproiados y similares a los problemas que deben resolver este tipo de empresas diariamente para planificar sus ventas. Todas las experiencias detalladas a continuación fueron implementadas usando el software de optimización AMPL CPLEX 12.6.2.0, ejecutado a través del solver online $www.neos - server.org$.

4.2. Instancias

Con los datos proporcionados, se busca lograr la comparación, para posterior analisis, entre resolver el modelo del líder y seguidor independientemente con el modelo formulado como bilevel. En total se trabajó con 17 patrones de cortes distintos, un horizonte de planificación de 10 días y 40 productos. Las carcasas de cerdo se dividen en 5 secciones las cuales son: Pierna, Espaldilla, Pecho, Entrecoy y Cabeza de Lomo. Se realizara el analisis con un solo tipo de carcasa por lo tanto, no se trabajará con el conjunto R. El modelo del seguidor presenta un total de 30 variables de decisión, siendo todas continuas y 12 restricciones. El modelo del líder alcanza un tamaño de 1990 variables continuas y positivas, y 1321 restricciones. Por último, el problema matemático formulado como un modelo de Bilevel posee 2194 variables de decisión, de las cuales 92 son varibales binarias, y 1545 restricciones.

En la siguiente sección se muestran los resultados para cada una de estas instancias, haciendo énfasis en valores de la función objetivo y del valor de las variables.

4.2.1. Supuestos

- Se pueden adquirir/vender números fraccionales de carcasas en los periodos.
- Dos carcasas corresponden a un animal
- Los patrones de cortes pueden ser utilizados de manera fraccionaria, aludiendo a que no se trabajó con una carcasa entera.
- El inventario al final del periodo de planificación, puede ser mayor que cero.
- No existe un número máximo de carcasas a comprar por periodo. Solamente se limita por el tiempo total disponible por operación de los patrones de corte empleados.
- La máxima cantidad de carcasas disponibles para el horizonte de planificación son 3000(1500 animales).

4.3. Resultados

Modelo del Seguidor

Si la venta de carcasas dependiese solamente del granjero, en base a los precios por carcasa fijados, se tienen los siguientes resultados:

Utilidades	69000		
Carcasas vendidas			Inventario
Periodo	Empresa	Ferias Libres	Animales
1	0	0	1500
2	0	0	1500
3	0	0	1500
4	0	0	1500
5	0	0	1500
6	0	0	1500
7	3000	0	0
8	0	0	0
9	0	0	0
10	0	0	0

Tabla 4.1: Decisiones individuales del Seguidor

El seguidor, a no estar sujeto a obligaciones fuera de su proceso productivo, vende todos sus cerdos en el periodo donde el precio de venta es mas alto. Esto se logra debido al bajo costo que tiene inventariar a los cerdos.

Modelo del Líder

Se establece un precio de compra de carcasas y la empresa debe elegir el mejor plan de producción en base a las condiciones impuestas. En este caso el líder asume que las carcasas que necesita estan disponibles.

Utilidades	2.299.240,611

Carcasas compradas	
Periodo	Cantidad
1	513,61
2	372,586
3	245,09
4	221,22
5	394,39
6	395,51
7	547,80
8	390,80
9	0
10	0

Tabla 4.2: Decisiones individuales del Líder

Claramente las decisiones de cuantas carcasas comprar/vender y en que periodo son distintas entre los dos agentes. El modelo bilevel busca integrar a ambos participantes en un mismo contexto en el cual cada uno debe sumarse a las restricciones del otro para obtener el mejor resultado. A continuación se presentan las decisiones obtenidas en el modelo Bilevel.

Modelo Bilevel

Cabe recordar que en el capitulo Metodología, se planteó de forma generica para el modelo, la dimensión de las matrices y vectores auxiliares que dan forma al modelamiento del problema como Bi-level. La matriz B_2, correspondiente a los coeficientes que acompañan a las decisiones del seguidor en las restricciones de éste mismo, tiene dimensión 62×30. El vector u, correspondiente al vector de variables duales asociadas a cada restricción, tiene dimensión 1×62 (vector fila). La matriz A_2, asociada a los coeficientes que acompañan las decisiones del líder en las restricciones del seguidor, tiene dimensión 62×1540. El vector v, representa las variables duales asociadas a las decisiones del seguidor, tiene dimensión 1 $\times$ 30(vector fila).

Por tanto se re-escriben las restricciones (3.35)-(3.39) según la aproximación de Kuhn-Tucker, en base a los parámetros del problema.
La matriz B_2, se particiona en 4 matrices por efectos de una mejor notación. B_2^1 corresponde a un vector columa que incluye la primera columna de la matriz B_2, por tanto tiene dimensión 30×1. B_2^2 corresponde a una matriz que incluye desde la segunda columna de la matriz B_2 hasta la onceava, por tanto tiene dimension 30×10. B_2^3 es una matriz que incluye desde la doceava columna hasta la columna 61, posee dimension 30×50. Por ultimo, B_2^4, es un vector columna, siendo la última columna de la matriz B_2, teniendo dimension 30 $\times$ 1. El vector u, igualmente se desagrega en un número igual de vectores. u^1 es un vector unitario, u^2 es un vector fila con 10 variables, u^3 es un vector fila con 50 variables y por último u^4 es un vector unitario. Por tanto:

$$u^1 \cdot B_2^1 + u^2 \cdot B_2^2 + u^3 \cdot B_2^3 + u^4 \cdot B_2^4 - v = -d_2 \tag{4.1}$$

donde d_2 es un vector columna que contiene a los coeficientes que acompañan a las decisiones del seguidor en la función objetivo del mismo.

Esta ecuación resplaza a la restricción en (3.35).

A continuación se procede a reemplazar las demás ecuaciones.
Se crean vectores z que poseen variables binarias. Se desagrega en vectores z^1, z^2, z^3, z^4,

los cuales tienen igual dimensión que aquel vector u son el mismo supraindice.

$$u^1 \leq M * z^1 \tag{4.2}$$

$$u^2 \leq m * z^2 \tag{4.3}$$

$$u^3 \leq m * z^3 \tag{4.4}$$

$$u^4 \leq m * z^4 \tag{4.5}$$

$$H - (\sum_{t \in T} H_t + M_t) \leq M * (1 - z^1) \tag{4.6}$$

$$2Y_{t-1} - H_t - M_t - 2Y_t \leq M * z_t^2 \qquad \forall t \in T. \tag{4.7}$$

$$\alpha H_t - (\sum_{j \in J_1} z_{j,t} + z_{j,t}^e) \leq M * (1 - z_t^3) \qquad \forall t \in T. \tag{4.8}$$

$$\alpha H_t - (\sum_{j \in J_2} z_{j,t} + z_{j,t}^e) \leq M * (1 - z_{t+10}^3) \qquad \forall t \in T. \tag{4.9}$$

$$\alpha H_t - (\sum_{j \in J_3} z_{j,t} + z_{j,t}^e) \leq M * (1 - z_{t+20}^3) \qquad \forall t \in T. \tag{4.10}$$

$$\alpha H_t - (\sum_{j \in J_4} z_{j,t} + z_{j,t}^e) \leq M * (1 - z_{t+30}^3) \qquad \forall t \in T. \tag{4.11}$$

$$\alpha H_t - (\sum_{j \in J_5} z_{j,t} + z_{j,t}^e) \leq M * (1 - z_{t+40}^3) \qquad \forall t \in T. \tag{4.12}$$

$$- Y_{|T|} \leq M * (1 - z^4) \tag{4.13}$$

Además se debe definir un nuevo vector z^5 de igual dimensión que el vector v. Igualmente se desagrega en vector z^5 en tres nuevos vectores de igual dimension entre ellos 1×10, $z^{5,1}$, $z^{5,2}$,$z^{5,3}$.
Se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$v \leq M * z^5 \tag{4.14}$$

$$H_t \leq M * (1 - z_t^{5,1}) \qquad \forall t \in T. \tag{4.15}$$

$$Y_t \leq M * (1 - z_t^{5,2}) \qquad \forall t \in T. \tag{4.16}$$

$$M_t \leq M * (1 - z_t^{5,3}) \qquad \forall t \in T. \tag{4.17}$$

Estas son las restricciones que reemplazan a las anteriores para la correcta formluación del modelo aplicado a la dimensión de los conjuntos establecidos.

Siendo la empresa el agente líder del modelo, se busca minimizar su función objetivo y el valor obtenido para el seguidor se calcula a partir de las variables obtenidas.

Utilidades Líder	2.299.240,611
Utilidades Seguidor	65984

Carcasas compradas/vendidas			
Periodo	Empresa	Ferias Libres	Animales
1	513,61	0	1243,19
2	372,59	0	1056,9
3	245,09	0	934,36
4	221,22	0	823,75
5	394,39	0	626,55
6	395,51	0	428,8
7	547,80	0	154,90
8	309,80	0	0
9	0	0	0
10	0	0	0

Tabla 4.3: Decisiones conjuntas del Bilevel

Como se puede observar las utilidades del líder se mantienen a pesar de incorporar las decisiones del seguidor, mientras que las utilidades del seguidor disminuyen. Esto se da debido a que las variables de decisión del lider toman el mismo valor que para el modelo resuelto sin incorporar las decisiones del seguidor.

4.4. Análisis de resultados

Luego de haber presentado los distintos resultados obtenidos en cada modelo,en esta sección se procede a analizarlos y comentarlos.

4.4.1. Modelo Seguidor

El seguidor al estar asociado a un bajo costo de inventario (en comparación a los precios de venta), decide preservar todos los cerdos en el inventario y vender en el periodo que mas dinero puede obtener por carcasa al comprador que le ofrezca mas dinero. El escenario presentado es de carácter utopico, debido a que es poco probable encontrar un proveedor que necesite tal demanda en determinado momento. Al no estar incorporado el granjero a una cadena de suministro, sus ingresos pueden presentar alta variabilidad, dependiendo de la demanda de la industria, guerra de precios presente por los proveedores de carcasas. Los resultados obtenidos finalmente representan el mejor escenario para el granjero, pero no el que se ajusta a las tendenicas del mercado.

4.4.2. Modelo Líder

La resolución del modelo del líder deja ver las decisiones que debe emplear para maximizar su ganacia. Estas son tomadas de forma independiente, en base a su propio plan de producción para satisfacer las demandas. Debido a los bajos costos de inventario por kilogramo de producto, se obtiene gran cantidad de kilos de producto en inventario para el último periodo de producción. El modelo enfoca en cumplir la demanda de los productos que reporten mayor cantidad de beneficios, asumiendo el costo del inventario. El costo de inventario asciende a 502.897[um] representando solamente un 9,04 % de los costos totales. La mayor cantidad de costos estan asociados al faltante con un 85,33 % debido a que no tiene la suficiente cantidad de carcasas para atender todas las demandas y debe privilegiar el cumplimiento de demanda para los productos que le reporten mayor cantidad de ingresos (estos también tienen asociados el mayor costo de faltante por kilogramo de producto). A través de un analisis de sensibilidad realizado sobre la cantidad de carcasas maximas a adquirir se puede analizar que a medida que aumentan la cantidad de carcasas disponibles, los costos asociados a la operación tienen una diferente distribucion porcentual, aumentanto los costos de inventario, por utilizar los patrones de corte y adquisición de carcasas, mientras que disminuye los costos de faltante.

3100 carcasas disponibles		
Tipo de costo	Monto	Porcentual
Costos de inventario	531.387	9,77 %
Costos de patrón de corte	238.389	4,38 %
Costos de faltante	4.586.700	84,30 %
Costos de adquisición	84.269	1,55 %

Tabla 4.4: Costos asociados a 3100 carcasas disponibles

3200 carcasas disponibles		
Tipo de costo	Monto	Porcentual
Costos de inventario	556.512	10,44 %
Costos de patrón de corte	246.465	4,62 %
Costos de faltante	4.301.660	82,26 %
Costos de adquisición	89.505,5	1,71 %

Tabla 4.5: Costos asociados a 3200 carcasas disponibles

3300 carcasas disponibles		
Tipo de costo	Monto	Porcentual
Costos de inventario	583.425	11,16 %
Costos de patrón de corte	254.762	4,87 %
Costos de faltante	4.162.710	82,26 %
Costos de adquisición	92.106,5	1,79 %

Tabla 4.6: Costos asociados a 3300 carcasas disponibles

3400 carcasas disponibles		
Tipo de costo	Monto	Porcentual
Costos de inventario	615.277	11,99 %
Costos de patrón de corte	263.244	5,13 %
Costos de faltante	4.162.710	81,09 %
Costos de adquisición	92.106,5	1,79 %

Tabla 4.7: Costos asociados a 3400 carcasas disponibles

3500 carcasas disponibles		
Tipo de costo	Monto	Porcentual
Costos de inventario	638.152	12,67 %
Costos de patrón de corte	271.377	5,39 %
Costos de faltante	4.031.790	80,06 %
Costos de adquisición	94587,9	1,88 %

Tabla 4.8: Costos asociados a 3500 carcasas disponibles

4.4.3. Modelo Bilevel

En base a los datos obtenidos, el líder tiene la misma ganancia a pesar de incorporar las restricciones del seguidor, mientras que el seguidor disminuye sus utilidades. Esto se da debido a que a pesar de incorporar las restricciones en un solo modelo de optimización, las decisiones propias del seguidores no son parte de las restricciones del modelo inicial del líder. Aquí se marca una diferencia ya que solamente las decisiones del seguidor se ven reflejadas en la función objetivo del líder. La diferencia con el seguidor, es que éste si tiene en sus restricciones decisiones del seguidor, por lo que su región factible de soluciones si se ve afectada por las decisiones del líder. A primera impresión, se podria comentar que para el seguidor no es conveniente entrar en este juego, ya que obtiene menores utilidades que resolver vender sus productos fuera de este modelo lider-seguidor. Sin embargo, como se comentó anteriormente, el incorporar al seguidor con un agente abastecedor de la cadena de suministro le asegura la venta de sus productos, al precio determinado. Para el líder tambien es conveniente lograr este modelo ya que asegura la cantidad de carcasas que necesita para lograr el mejor retorno en base a plan de producción. A través de esta metodología ambos jugadores llegan a la mejor decisión posible en base a las jugadas posibles que podia realizar el otro jugador.

5 | Conclusiones y Trabajo a Desarollar

En este trabajo se buscó reflejar la participación de dos agentes según la teoría de juegos traducido a un modelo de optimización. La aplicación se vio reflejada en el proceso de abastecimiento y operación de una cadena de suministro. El objetivo fue lograr la coordinación entre ambos agentes y buscar que cada uno eligiera la mejor jugada (la cual le reportará mayor cantidad de beneficios) en base a las posibles decisiones del otro. La finalidad es lograr la integración de dos agentes a un proceso que tome en cuenta los requerimientos del otro y no busquen solamente su beneficio propio. Se hizo el enfoque sobre la industria cárnica, para ver el juego entre un granjero que posee cerdos y una empresa que necesita comprar carcasas de cerdo para cumplir con su demanda. La representación se realiza a través de un modelo Bilevel que busca minimizar o maximizar, según sea el caso, del líder sujeto a sus propias restricciones y las del seguidor. Los objetivos propuestos fueron logrados, ya que se construyeron los modelos para cada agente por separado y luego compararlos a través de los resultados del Bilevel. En base al trabajo propuesto, se puede seguir con la investigación en base a dos propuestas principales: Primero, lograr formular un modelo que las decisiones del seguidor tengan injerencia en las restricciones del líder. Segundo, lograr una resolución de modelos Bilevel, en el cual tengan los problemas de los agentes tengan originalmente en sus decisiones variables de naturaleza entera, ya que para este trabajo se debió trabajar con la relajación de dicha integralidad para poder aplicar la aproximación de Kuhn-Tucker al problema planteado.

Bibliografía

(1993). *Programación lineal: metodología y problemas*. Editorial Tébar. 2.2.4

(1996). *Ejercicios de Investigación de Operaciones*. ESIC Editorial. 2.2

(1998). *Practical Bilevel Optimization*. Springer Science Business Media. 2.3.2

Ahumada, O. and Villalobos, J. R. (2009). Application of planning models in the agri-food supply chain: A review. *European Journal of Operational Research*, 196(1):1–20. 1.1, 1.2, 2.4.1.1

Albornoz, V. M., Gonzalez-Araya, M., Gripe, M. C., Rodriguez, S. V., and Juventino Treviño, E. (2015). *An Optimization Model for Planning Operations in a Meat Packing Plant*, pages 136–146. Springer International Publishing, Cham. 3.1.1, 3.2

Catalano, M. and Migliore, M. (2014). A Stackelberg-game approach to support the design of logistic terminals. *Journal of Transport Geography*, 41:63–73. 2.5.1

CSCMP (2010). Cscmp supply chain management definitions and glossary. recuperado de:http://www.cscmp.org. 2.4

Dolgui,A., Soldek,J., Zaikin,O. (2012). *Supply Chain Optimisation*, volume 33. 1.2

García-Flores, R., de Souza Filho, O., Martins, R., Martins, C., and Juliano, P. (2015). *Modeling Food Processing Operations*. Elsevier. 2.4.1

Garnett, T. (2014). Three perspectives on sustainable food security: efficiency, demand restraint, food system transformation. What role for life cycle assessment? *Journal of Cleaner Production*, 73:10–18. 2.4.1.1

Gibbons, R. (1993). *Un primer curso de teoria de Juegos*. 2.1.1

Gustavsson, J., Cederberg, C., Sonesson, U., van Otterdijk, R., and Meybeck, A. (2011). Global food losses and food waste: extent, causes and prevention. *Save Food!*, page 38. 1.1

Hjaila, K., Puigjaner, L., and Espuña, A. (2015). *12th International Symposium on Process Systems Engineering and 25th European Symposium on Computer Aided Process Engineering*, volume 37 of *Computer Aided Chemical Engineering*. Elsevier. 1.2

Kearney, J. (2010). Food consumption trends and drivers. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological sciences*, 365(1554):2793–807. 1.1

Kogan, K. and Tapiero, C. S. (2007). *Supply Chain Games: Operations Management and Risk Valuation*. 1.2

Labbé, M. (2016). Bilevel programming and price setting problems. *Annals of Operations Research*. 2.3.1

Leyton-Brown, K. and Shoham, Y. (2008). *Essentials of game theory*, volume 2. 2.1.1

Li, D., Wang, X., Chan, H. K., and Manzini, R. (2014). Sustainable food supply chain management. *International Journal of Production Economics*, 152:1–8. 1.1, 2.4.1.1, 2.4.2

Rodríguez, S., Plà, L., and Faulin, J. (2014). New opportunities in operations research to improve pork supply chain efficiency. *Annals of Operations Research*, 219(1):5–23. 1.2, 2.4.1

Sinha, A., Malo, P., Frantsev, A., and Deb, K. (2014). Finding optimal strategies in a multi-period multi-leader-follower Stackelberg game using an evolutionary algorithm. *Computers and Operations Research*, 41:374–385. 1.2

Soto-silva, W. E., Nadal-roig, E., González-araya, M. C., and Pla-aragones, L. M. (2015). Operational research models applied to the fresh fruit supply chain. *European Journal of Operational Research*, 000:1–11. 2.4.1, 2.4.1.1

Stewart-Knox, B. and Mitchell, P. (2003). What separates the winners from the losers in new food product development? *Trends in Food Science & Technology*, 14(1-2):58–64. 1.1

Tijskens, L., Koster, A., and Jonker, J. (2001). *Food Process Modelling*. Elsevier. 2.4.1.1, 2.4.2

Yang, D., Jiao, J. R., Ji, Y., Du, G., Helo, P., and Valente, A. (2015). Joint optimization for coordinated configuration of product families and supply chains by a leader-follower Stackelberg game. *European Journal of Operational Research*, 246(1):263–280. 1.2, 2.1.3

Yu, Y., Huang, G. Q., and Liang, L. (2009). Stackelberg game-theoretic model for optimizing advertising, pricing and inventory policies in vendor managed inventory (VMI) production supply chains. *Computers & Industrial Engineering*, 57(1):368–382. 2.5.2

Yue, D. and You, F. (2014). Game-theoretic modeling and optimization of multi-echelon supply chain design and operation under Stackelberg game and market equilibrium. *Computers & Chemical Engineering*, 71:347–361. 1.2, 2.1.3