UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA Y DE MATERIALES

SANTIAGO DE CHILE

INFLUENCIA DE LA REOLOGÍA DE UN RELAVE EN LA DISTANCIA PELIGROSA MEDIANTE HERRAMIENTAS DE FLUIDODINÁMICA COMPUTACIONAL (CFD)

ÁLVARO FERNANDO VERGARA BARRÍA

Memoria para optar al Título Profesional de

INGENIERO CIVIL DE MINAS

Profesor Guía:

Dr. Sergio Palma M.

Profesoras Correferentes:

Dra. Alejandra Álvarez V.

Dra. María Teresa Zandarín I.

ENERO 2021

Dedicado a mi familia,

por ser la base de mi desarrollo personal

y que, sin su apoyo, nada de esto habría sido posible

Agradecimientos

Es complejo concluir un trabajo sin agradecer a todas las personas que directa o indirectamente estuvieron presentes en él. En estas escasas líneas espero incluirlas a todas.

Parto primero agradeciendo a mis padres, por entregarme los valores suficientes, darme el cariño y todo el apoyo que me han permitido llegar a estas alturas.

A mi hermana, por siempre creer en mí, por enseñarme a vencer toda adversidad a costa de perseverancia y por animarme a sacar a nuestra familia adelante.

Al Dr. Sergio Palma, por su paciencia, confianza y fe depositada en mí, por todo el apoyo y motivación a seguir creciendo profesionalmente, porque siempre se puede aprender más.

A la Dra. Alejandra Álvarez y la Dra. María Teresa Zandarín, por darme la oportunidad de desarrollar este trabajo, pese a las dificultades que este particular año nos ha dado.

Al DIMM, por siempre creer en todos sus estudiantes, enseñando mucho más allá de la ciencia y el rol que tenemos como personas profesionales dentro de la sociedad.

Al CEEMIN 2019-2020, del cual fui parte, por permitirme formar grandes lazos en el equipo y que me fortalecieron como persona y futuro profesional.

A Fernando, Javiera y Karla, por ser parte de tremendos equipos de proyectos durante toda la carrera, acompañados de eternas noches de estudio, trabajos, cervezas y pizzas. Sin duda alguna, la mejor compañía en todo mi paso por la Universidad.

A Antonia, por enseñarme a creer en la política estudiantil, lograr grandes desafíos juntos en pos de nuestra carrera y por ser lejos la mejor representante que ha pasado por CEEMIN.

A Claudia, por su tremendo apoyo moral, compañía, consejos y soportar mis engorrosos y lateros ensayos previos a la defensa final.

Mención honrosa a Fernando, por ser un gran compañero, persona, amigo y no dudo que gran profesional.

Y a todas las personas, compañeros y amigos que, de alguna u otra manera, estuvieron presentes, creyeron en mí, me brindaron todo su apoyo y compañía y fueron parte importante de este maravilloso proceso universitario.

Resumen

La industria minera genera diariamente una gran cantidad de desechos húmedos, conocidos como relaves, los cuales son almacenados en depósitos que deben cumplir la normativa de seguridad para mantener un óptimo control y monitoreo de su estabilidad. Esto debido a que los depósitos de relaves son obras potenciales de fallar, con la capacidad de generar catástrofes medioambientales, económicas y sociales de alto impacto una vez colapsan.

En la presente memoria se realiza el modelamiento computacional de relaves como fluidos no newtonianos, utilizando herramientas CFD, en particular FLUENT®, con el objetivo de modelar el comportamiento de estos sistemas como un acercamiento preliminar al estudio de la distancia peligrosa a partir de las características físicas y reológicas de los relaves.

Para ello se realiza el análisis dimensional del sistema, considerando las variables más relevantes en el estudio, con el fin de determinar los parámetros adimensionales de interés que permiten describir de manera simple las relaciones funcionales entre dichas variables. Se realiza la simplificación del dominio físico a partir de la creación de un canal rectangular de 30 metros de longitud, sobre el cual el fluido escurre libremente en base a las condiciones de inicialización del modelo. Esta geometría es discretizada en 475.408 celdas poliédricas donde en cada una de ellas se encontrarán las soluciones aproximadas a las ecuaciones de conservación de masa y momentum en los distintos intervalos de tiempo. El flujo se modela en régimen laminar, siguiendo la estructura del modelo de viscosidad de Herschel-Bulkley utilizado para la descripción física de los relaves.

Los resultados muestran una muy buena correlación entre las variables, permitiendo deducir una alta influencia de la tensión de fluencia y la pendiente del terreno, reflejados tanto en el número de Reynolds como el coeficiente de fluencia. A partir de ellos, se propone un modelo matemático simple obtenido del análisis multidimensional y un ábaco acotado para intervalos regulares, que apoye como complemento adicional a los modelos simples ya existentes para la estimación de la distancia peligrosa. Con ello, se incentiva el uso de las herramientas CFD para perfeccionar el complejo estudio que conllevan los fluidos no newtonianos.

PALABRAS CLAVE: Distancia Peligrosa, Análisis Dimensional, Fluidos no Newtonianos, Modelo Reológico de Herschel-Bulkley, Fluidodinámica Computacional.

Abstract

The mining industry generates a large amount of wet mining waste daily, known as tailings, which are stored in deposits that must comply with safety regulations to maintain optimal control and monitoring of their stability. This given that tailings deposits are potential works to fail, with the capacity to generate high-impact environmental, economic, and social catastrophes once they collapse.

In this study, the computational modeling of tailings as non-Newtonian fluids is carried out, using CFD tools, provided by FLUENT®, with the aim of modeling the behavior of these systems as a preliminary approach to the study of the runout distance from the physical and rheological characteristics of the tailings.

For this, the dimensional analysis of the system is carried out, considering the most relevant variables in the study, to determine the dimensionless parameters of interest that allow the functional relationships between these variables to be described in a simple way. The simplification of the physical domain is carried out from the creation of a rectangular channel 30 meters long, over which the fluid flows freely from the initialization conditions of the model. This geometry is discretized in 475,408 polyhedral cells where in each one of them the approximate solutions to the mass and momentum conservation equations in the different time intervals will be found. The flow is modeled at a laminar regime, following the structure of the Herschel-Bulkley viscosity model used for the physical description of the tailings.

The results show a very good correlation between the variables, allowing to deduce a high influence of the yield stress and the slope, reflected both in the modified Reynolds number and the yield coefficient. Based on them, a simple mathematical model obtained from multidimensional analysis and a bounded abacus for regular intervals is proposed, which supports as an additional complement to the existing simple models for estimating the runout distance. This encourages the use of CFD tools to perfect the complex study involved in non-Newtonian fluids.

KEYWORDS: *Runout Distance, Dimensional Analysis, Non-Newtonian Fluids, Herschel-Bulkley Rheological Model, Computational Fluid Dynamics.*

Nomenclatura

C_p	Concentración de sólidos en peso (%)
C_v	Concentración de sólidos en volumen (%)
d	Diámetro de partícula (m)
D^*	Distancia peligrosa adimensional $(-)$
$D_{máx}$	Distancia máxima o peligrosa (m)
D/Dt	Derivada sustancial, total o material
$\mathbf{g}$	Aceleración de gravedad $(\mathrm{m/s^2})$
H	Altura del muro antes del colapso (m)
H_0	Altura inicial de la columna de fluido (m)
I	Número inercial $(-)$
J	Número viscoso $(-)$
k	Índice de consistencia (Pa $\mathrm{s^n}$)
m	Parámetro de regulación de Papanastasiou $(-)$
M	Masa fluida (kg)
n	Índice de comportamiento de la ley de potencia $(-)$
p	Presión estática (Pa)
$\mathbf{p}$	Vector cantidad de movimiento lineal (kg $\mathrm{m/s}$)
P	Presión de confinamiento (Pa)
Re	Número de Reynolds $(-)$
Re_2	Número de Reynolds generalizado para H-B $(-)$
t	Tiempo (s)
u	Componente *x* cartesiana de la velocidad $(\mathrm{m/s})$

v	Componente *y* cartesiana de la velocidad ($\mathrm{m/s}$)
$\mathbf{v}$	Campo de velocidad ($\mathrm{m/s}$)
V	Magnitud de velocidad media ($\mathrm{m/s}$)
V_F	Volumen de relaves liberado (m^3)
V_T	Volumen total de relaves almacenado (m^3)
w	Componente *z* cartesiana de la velocidad ($\mathrm{m/s}$)
W	Ancho del canal de flujo (m)
$\boldsymbol{\nabla}$	Operador gradiente
$\boldsymbol{\nabla}^2$	Operador laplaciano
$\partial/\partial t$	Derivada parcial respecto al tiempo
α	Fracción de volumen fásico (%)
$\dot{\gamma}$	Gradiente de deformación o tasa de corte (s^{-1})
θ	Pendiente o inclinación de superficie de flujo (° o rad)
μ	Viscosidad dinámica (Pa s)
μ_0	Viscosidad plástica de fluidos no newtonianos (Pa s)
ν	Viscosidad cinemática (m^2/s)
Π	Término Pi de Buckingham ($-$)
ρ	Densidad del fluido ($\mathrm{kg/m}^3$)
ρ_p	Densidad de partícula ($\mathrm{kg/m}^3$)
τ	Esfuerzo cortante (Pa)
τ_0	Esfuerzo de fluencia (Pa)
τ_2	Esfuerzo de fluencia adimensional ($-$)
ϕ	Fracción de volumen de partículas ($-$)

Abreviaturas

ASCII	*American Standard Code for Information Interchange*
CAD	*Computer-Aided Design*
CDA	*Canadian Dam Association*
CFD	*Computational Fluid Dynamics*
EDP	Ecuación en Derivadas Parciales
H-B	Modelo reológico de Herschel-Bulkley
MLT	Sistema de dimensiones Masa-Longitud-Tiempo
MVF	Método de Volúmenes Finitos
PISO	*Pressure-Implicit with Splitting of Operators*
SERNAGEOMIN	Servicio Nacional de Geología y Minería
SI	Sistema Internacional de Unidades
SIMPLE	*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*
SIMPLEC	SIMPLE-*Consistent*
VOF	*Volume of Fluid*
2D	Dos dimensiones
3D	Tres dimensiones

Lista de contenidos

1. INTRODUCCIÓN 1

1.1. Objetivos 2
1.1.1. Objetivo general 2
1.1.2. Objetivos específicos 2

1.2. Alcances 3

2. ESTADO DEL ARTE 4

3. MARCO TEÓRICO 10

3.1. Clasificación de fluidos 10
3.1.1. Fluidos newtonianos 10
3.1.2. Fluidos no newtonianos 11

3.2. Modelos reológicos para fluidos no newtonianos 13
3.2.1. Modelo de Ostwald-de Waele 13
3.2.2. Modelo de plástico ideal de Bingham 14
3.2.3. Modelo ideal de Herschel-Bulkley 14
3.2.4. Modelo de Papanastasiou 15

3.3. Flujo de fluidos 16
3.3.1. Flujos uniformes y variados 17
3.3.2. Flujos permanentes y transientes 17
3.3.3. Flujos laminares y turbulentos 17
3.3.4. Flujos compresibles e incompresibles 19

3.4. Flujo de suspensiones 20
3.4.1. Flujos homogéneos 21
3.4.2. Flujos heterogéneos 21
3.4.3. Lecho móvil 22
3.4.4. Lecho fijo 22

3.5. Reología de suspensiones 23

3.6. Depósitos de relaves 26
3.6.1. Tipos de depósitos de relaves 26
3.6.2. Métodos constructivos de los tranques de relaves 27

3.7. Fallas en depósitos de relaves **30**
3.7.1. Falla en operación 30
3.7.2. Falla en evento hidrológico extraordinario 31

4. MODELOS NUMÉRICOS Y ANÁLISIS DIMENSIONAL **32**

4.1. Modelos que rigen el movimiento de fluidos **32**
4.1.1. Ecuación de la conservación de la masa 33
4.1.2. Ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento 34

4.2. Fluidodinámica Computacional (CFD) **36**

4.3. Teorema π de Vaschy-Buckingham **39**

5. INTRODUCCIÓN A FLUENT® **40**

5.1. Modelos multifásicos **41**
5.1.1. Modelo del Volumen de Fluido (VOF) 41
5.1.2. Ecuación para la fracción de volumen y cantidad de movimiento 42

5.2. Métodos de solución numérica **44**
5.2.1. Algoritmo basado en la presión 44
5.2.2. Algoritmo basado en la densidad 45

6. METODOLOGÍA **46**

6.1. Análisis dimensional **46**

6.2. Geometría y mallado **47**

6.3. Simulaciones y casos de estudio **50**

6.4. Distancia de escurrimiento y análisis de datos **51**

7. AJUSTES DE LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL **52**

8. RESULTADOS Y ANÁLISIS **55**

8.1. Características del flujo **55**

8.2. Coeficiente de fluencia **58**

8.3. Número de Reynolds **60**

8.4. Pendiente del terreno **62**

8.5. Ajuste a grupo adimensional **64**

8.6. Resultado para intervalos acotados **66**

9. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES **68**

10. REFERENCIAS **70**

ANEXO A: ANÁLISIS DIMENSIONAL **73**

ANEXO B: CÓDIGOS MATLAB® **76**

Lista de Figuras

Figura 2.1: Relaciones obtenidas por Rico et al. (2007): (a) Distancia máxima vs Altura del muro; (b) Distancia máxima vs Volumen liberado; (c) Distancia máxima vs Factor de forma; (d) Volumen liberado vs Volumen embalsado. 4

Figura 2.2: Modificación de Concha et al. (2018), con datos actualizados por Chambers y Bowker. 6

Figura 2.3: Modelo generalizado utilizado por Lucía et al. (1981). 7

Figura 2.4: Geometría generalizada utilizada por Seddon para su modelo. Modificado de Seddon (2010). 8

Figura 2.5: Resultados obtenidos del análisis dimensional por Sofrá. 8

Figura 2.6: Comparación experimental y numérica obtenida por Liu (2018). 9

Figura 3.1: Clasificación de fluidos newtonianos y no newtonianos independientes del tiempo. 12

Figura 3.2: Ajuste del modelo Papanastasiou para fluidos ideales de Bingham y Herschel-Bulkley, con distintos valores del parámetro m [25]. 15

Figura 3.3: Movimiento de partículas en un flujo por corte y extensivo, modificado de Barnes (2000). 16

Figura 3.4: Esquema de flujo uniforme y variado. 17

Figura 3.5: Descripción visual de flujo en régimen laminar y turbulento. 18

Figura 3.6: Flujo homogéneo de pulpas, modificado de Rocafort (2019). 21

Figura 3.7: Flujo heterogéneo de pulpas modificado de Rocafort (2019). 21

Figura 3.8: Flujo con lecho móvil modificado de Rocafort (2019). 22

Figura 3.9: Flujo con lecho fijo modificado de Rocafort (2019). 22

Figura 3.10: Celda utilizada por Boyer et al. (2011) para el análisis de suspensiones. 23

Figura 3.11: Resultados obtenidos por Boyer et al. (2011) para el coeficiente de fricción (superior) y la fracción de volumen de partículas (inferior) en función del número viscoso ($Iv = J$). 24

Figura 3.12: Resultados obtenidos tras las simulaciones de Trulsson et al. (2012). 25

Figura 3.13: Secuencia de construcción del muro aguas arriba. 28

Figura 3.14: Secuencia de construcción del muro aguas abajo. 28

Figura 3.15: Secuencia de construcción del muro por eje central. 29

Figura 3.16: Volúmenes depositados según tipo de escurrimiento, modificado de Codelco (2018). 31

Figura 4.1: Volumen y superficie de control para el análisis integral de conservación. 33

Figura 4.2: Estructura general de trabajo de un código CFD, modificado de Moukalled (2016). 37

Figura 5.1: Esquema general de trabajo en un proyecto FLUENT. 40

Figura 5.2: Esquema genérico de la fracción fásica α_1. 42

Figura 5.3: Flujo de trabajo del algoritmo segregado (izquierda) y acoplado (derecha) basados en la presión. 45

Figura 5.4: Flujo de trabajo del algoritmo basado en la densidad. 45

Figura 6.1: Esquema de la geometría utilizada en el estudio. 48

Figura 6.2: Mallado poliédrico utilizado para las simulaciones. Obtenido de ANSYS 2020R1. 49

Figura 6.3: Vista interna de la malla, donde se visualizan los muros de contención del fluido. 49

Figura 6.4: Esquema de perfil utilizado para el análisis de pendiente. 50

Figura 7.1: Esquema de residuales obtenidos tras 10000 iteraciones. 54

Figura 8.1: Modelo al instante de la inicialización (t=0). 55

Figura 8.2: Inicio del flujo una vez iniciado el modelo. 56

Figura 8.3: Estabilización y detención del flujo transcurrido un amplio lapso. 57

Figura 8.4: Perfil de flujo modelado a distintos intervalos de tiempo. 57

Figura 8.5: Distancia peligrosa adimensional en función del coeficiente de fluencia. 58

Figura 8.6: Distancia peligrosa adimensional en función del número de Reynolds modificado. 60

Figura 8.7: Distancia peligrosa adimensional en función de la pendiente de flujo..... 62

Figura 8.8: Ajuste de datos entre la distancia peligrosa adimensional y el grupo adimensional propuesto. 64

Figura 8.9: Propuesta de estimación de distancia máxima para valores acotados. 66

Lista de Tablas

Tabla 6-1: Variables utilizadas para el análisis dimensional..... 46

Tabla 6-2: Dimensiones de la geometría utilizada en el estudio. 48

Tabla 7-1: Ajustes generales de la simulación. 52

Tabla 7-2: Descripción del modelo físico utilizado en la simulación. 52

Tabla 7-3: Condiciones de borde aplicadas en la simulación. 53

Tabla 7-4: Métodos de solución aplicados en la simulación. 53

Tabla 7-5: Definición de los parámetros de corrida de la simulación. 54

1. INTRODUCCIÓN

Por décadas, la minería del cobre se ha posicionado históricamente como una de las actividades económicas e industriales más productivas en nuestro país, aportando en el último año, según Cochilco, con un 9,9% al producto interno bruto y una producción de 5,6 millones de toneladas métricas de cobre fino, equivalente al 27,7% de la participación total a nivel mundial, ubicando a Chile como el principal productor de cobre en el mundo, superando a potencias industriales del rubro como China, Estados Unidos, Australia y Canadá [9].

Sin embargo, el desarrollo de esta actividad involucra inherentemente la generación masiva de desechos húmedos conocidos como relaves, producto del tratamiento del mineral metálico por concentración húmeda en flotación.

En Chile, la minería genera un promedio anual de 537 millones de toneladas de relaves [8], los que actualmente están almacenados en un total de 757 depósitos distribuidos en todo su territorio [31].

Dadas las condiciones sísmicas de nuestro país, ha sido de suma importancia evaluar las condiciones de estabilidad en las que se encuentran los distintos depósitos de relaves. Innumerables han sido los casos, tanto en Chile como en el resto del mundo, de catástrofes medioambientales como consecuencia del colapso de los depósitos y los graves efectos sociales y económicos que han traído consigo.

Por esta razón es que ha tomado relevancia el estudio y análisis de la distancia peligrosa como una evaluación de impactos para generar un control, monitoreo y categorización de los depósitos de relaves. Adicionalmente, se han llevado a cabo numerosos estudios de distinto enfoque al presente trabajo, para evaluar el comportamiento de la ola y la distancia máxima que recorrería el fluido liberado en función de sus distintos parámetros, incluyendo la reología de la pulpa, geometría del depósito y características propias de la topografía del sector. Ello con el objetivo de generar modelos predictivos que permitan evaluar o desarrollar los estudios suficientes que aseguren la estabilidad del depósito.

En la presente memoria se realiza el cálculo de la distancia peligrosa mediante herramientas computacionales utilizando el paquete FLUENT® de ANSYS®, junto con el análisis de los diversos parámetros que gobiernan la mecánica de fluidos complejos y su influencia en la dinámica de estos, para determinar la confiabilidad de los métodos numéricos para el cálculo de la distancia peligrosa como un acercamiento preliminar a los modelos computacionales aplicados.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

- Evaluar la influencia de distintos parámetros geométricos, fluidodinámicos y reológicos del relave que inciden en la distancia peligrosa, utilizando técnicas numéricas mediante la modelación por CFD.

1.1.2. Objetivos específicos

- Determinar las variables fluidodinámicas, reológicas y geométricas que inciden directamente en el comportamiento del relave una vez ocurrido el colapso, para la simplificación del modelo computacional.
- Visualizar cómo se abarca la problemática de la distancia peligrosa según la literatura existente con los distintos enfoques utilizados.
- Generar la simulación computacional que ayude a la obtención de la funcionalidad de las variables que inciden en la distancia peligrosa, deducidas a partir del análisis dimensional entre ellas.
- Evaluar los modelos y algoritmos ofrecidos por FLUENT® que mejor se ajustan al sistema en estudio, en base a calibración previa de modelos existentes.
- Determinar la confiabilidad de la modelación numérica para el cálculo de la distancia peligrosa.
- Proponer un modelo matemático simple como complemento a los modelos ya existentes, considerando las variables de análisis dentro del sistema.

1.2. Alcances

- Este estudio considera la modelación computacional bifásica del sistema, para evaluar el comportamiento del flujo una vez ocurrido el colapso del muro. Este se realizará utilizando el método del Volumen de Fluido (VOF), que permite hacer un seguimiento a la interfase del sistema.
- El comportamiento no newtoniano de los relaves se modela con la ley constitutiva de Herschel-Bulkley, según datos de entrada otorgados por JRI Ingeniería.
- Se enfoca el estudio al flujo de relaves una vez ocurrido el colapso, sin enfatizar en el proceso de ruptura del muro.

2. ESTADO DEL ARTE

Este capítulo recopila algunos de los estudios que se aluden a distintos métodos para calcular y caracterizar el comportamiento del flujo de relaves una vez ocurrido el colapso del muro y cómo este influye en la distancia de alcance.

Rico et al. (2007) [29] establecieron un conjunto de relaciones empíricas en gráficas tomando 29 casos históricos (28 completamente reportados) considerando parámetros geométricos y características hidráulicas del flujo en cada caso. Si bien es un análisis meramente empírico, es una de las metodologías muy utilizadas para el análisis preliminar de la distancia peligrosa en varias faenas de la industria minera.

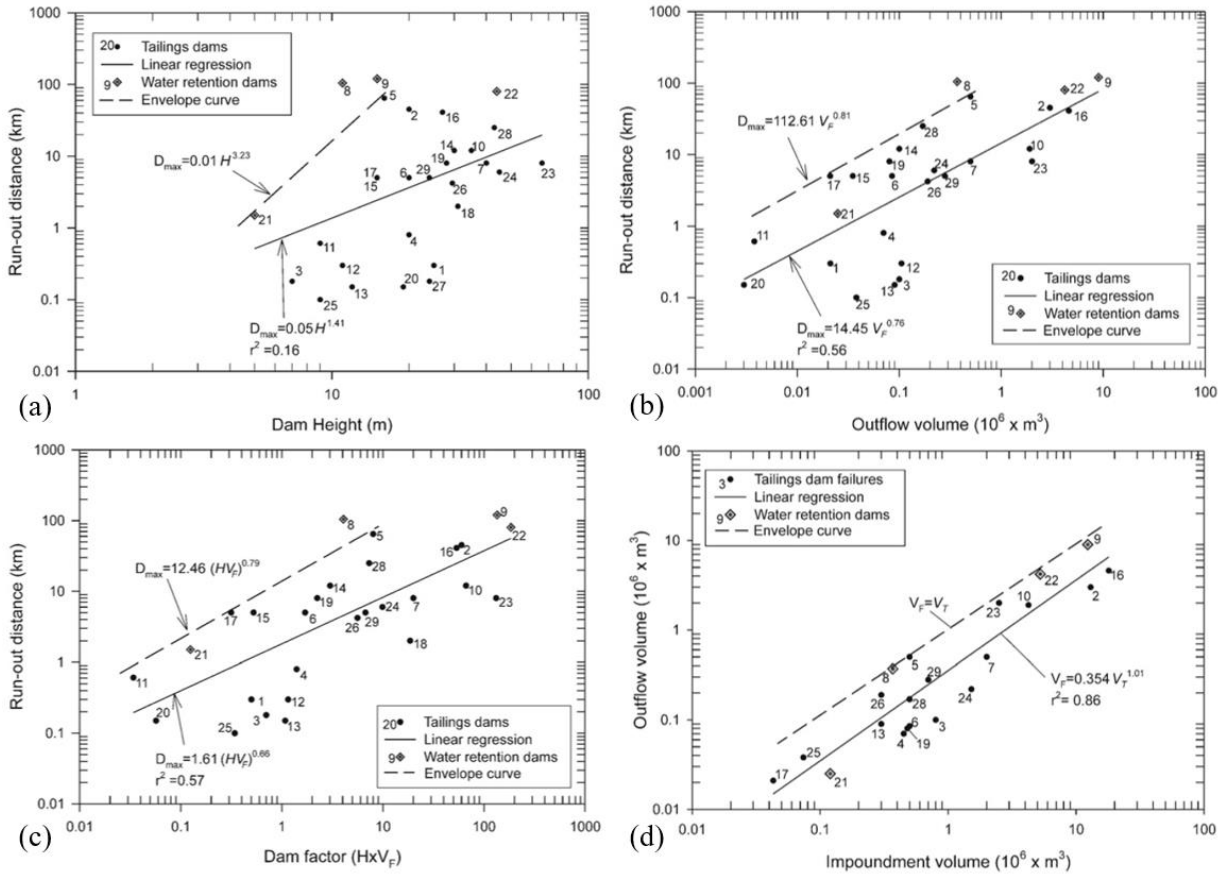

Figura 2.1: Relaciones obtenidas por Rico et al. (2007): (a) Distancia máxima vs Altura del muro; (b) Distancia máxima vs Volumen liberado; (c) Distancia máxima vs Factor de forma; (d) Volumen liberado vs Volumen embalsado.

Los resultados obtenidos según la **Figura 2.1** muestran las distintas correlaciones para las variables consideradas en el estudio, principalmente geométricas y propias del flujo del relave, resumidas a continuación:

$$\begin{aligned} &\text{(a) } D_{máx} = 0{,}05H^{1{,}41} && r^2 = 0{,}16 \\ &\text{(b) } D_{máx} = 14{,}45V_F^{0{,}76} && r^2 = 0{,}56 \\ &\text{(c) } D_{máx} = 1{,}61(HV_F)^{0{,}66} && r^2 = 0{,}57 \\ &\text{(d) } V_F = 0{,}354V_T^{1{,}01} && r^2 = 0{,}86 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde $D_{máx}$ es la distancia peligrosa (en kilómetros), V_T el volumen total de relaves almacenado (en millones de metros cúbicos), H la altura del muro al momento del colapso (en metros) y V_F el volumen de relaves liberado una vez ocurrido el colapso (en millones de metros cúbicos).

Según los autores, la pobre correlación que muestra la primera expresión (Distancia peligrosa vs Altura del muro), es debida a que la distancia peligrosa dependería además de otros factores y parámetros no considerados en la gráfica. Para los siguientes casos, donde la correlación es mejor, los autores comentan que la dispersión puede ser originada por la cantidad de agua contenida inicialmente en los depósitos, la razón agua/relave del fluido una vez ocurrido el colapso y la pendiente de flujo para cada caso reportado.

Mientras que uno de los mejores ajustes, es mostrado para la última relación. De ella, los autores comentan que aproximadamente un tercio del volumen almacenado en el depósito de relaves catastrados tiende a ser liberado ocurrido el colapso, únicamente basado en los registros considerados.

Sin embargo, los autores recomiendan que esta información debe ser actualizada y tomada como estudio preliminar, ya que no considera una dependencia de la distancia peligrosa de las propiedades físicas y reológicas propias de cada relave.

Para ello, **Concha et al.** (2018) [11] tomaron los datos obtenidos por Rico et al. para reajustar sus modelos con datos actualizados a la fecha por Chambers y Bowker, con el fin de entregar modelos que permitan estimar la distancia peligrosa y el volumen de relaves liberado con un grado de incertidumbre menor. Sus resultados se muestran a continuación:

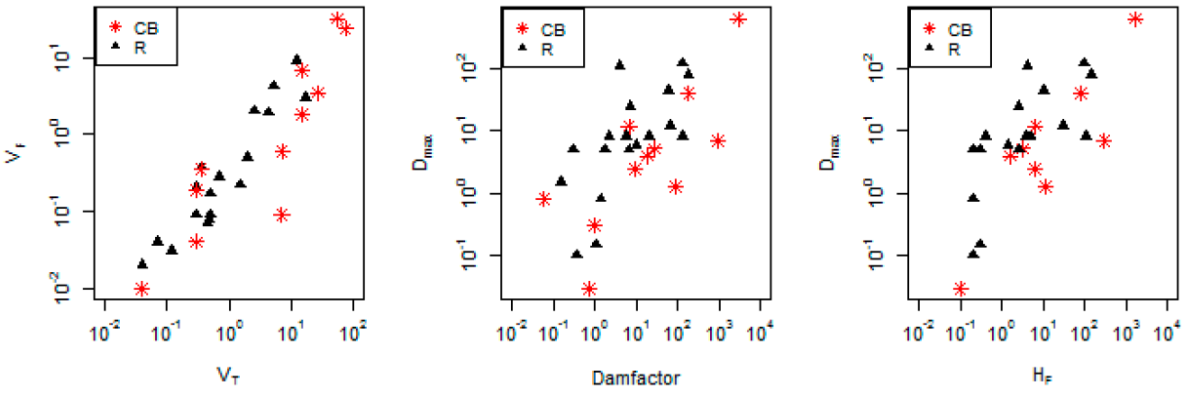

Figura 2.2: Modificación de Concha et al. (2018), con datos actualizados por Chambers y Bowker.

La manipulación de estos datos para la estimación de la distancia peligrosa consideró, según sus autores: ajustes logarítmicos para $D_{máx}$ y HV_F, modelos lineales generalizados con ajuste gaussiano para el caso anterior y un ajuste por aplicación de energía potencial al modelo. Las relaciones obtenidas tanto para el volumen liberado como la distancia peligrosa son las siguientes:

$$V_F = 0{,}332 V_T^{0{,}95} \qquad r^2 = 0{,}89$$
$$D_{máx} = 3{,}04 \left(\frac{HV_F^2}{V_T}\right)^{0{,}545} \qquad r^2 = 0{,}53 \tag{2.2}$$

A pesar de la precisión de ambos modelos, los autores recomiendan que, para estudios más sólidos y concretos, no deben despreciarse efectos propios que genera el flujo, definidos por las propiedades reológicas del relave (viscosidad, tensión de fluencia) y la geometría del terreno.

Jeyapalan et al. (1983) [19], llevaron a cabo experimentaciones en laboratorio para el análisis del flujo de relaves licuados para ser comparados con modelamientos con el software TFLOW y observaciones en terreno. En ellos concluyeron, con suficiente certeza, que los relaves pueden ser modelados como fluidos plásticos ideales (plásticos de Bingham) de alta viscosidad en régimen laminar. Además, siendo pioneros en el análisis numérico y experimental del flujo de relaves post colapso del muro, validando sus modelos entre sí y con comparaciones con datos reales. En sus modelos, determinan que el flujo de relaves se tiende a estabilizar hasta llegar a velocidad cero, de lo cual existe una dependencia entre las propiedades del relave y las condiciones propias del terreno

(pendiente, coeficiente de Manning, entre otros). A pesar de estos resultados, consideran una leve sobrestimación de la distancia en secciones más estrechas ya que no consideran resistencia a la fricción en los bordes y costados del canal.

Lucía et al. (1981) [22] propusieron un modelo semi-empírico basado en colapsos de 25 depósitos ocurridos principalmente debido a cargas sísmicas repentinas. Las condiciones de aplicación permiten estimar la distancia peligrosa para flujos que no superan 4° de pendiente natural y alturas de muro no superior de 69 metros, lo que hace cuestionable su aplicación para muros más altos.

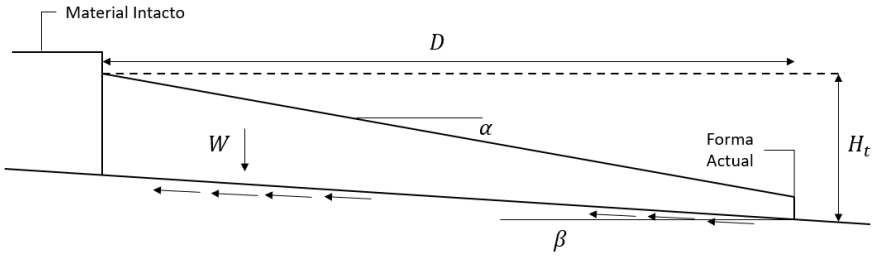

Figura 2.3: Modelo generalizado utilizado por Lucía et al. (1981).

Lemus et al. (2014) [20] proponen una metodología estructurada basada en el modelo de Lucía et al., que considera topografía, características geotécnicas del depósito y del fluido, condiciones locales aguas abajo del depósito y otros parámetros. La metodología consiste en estimar el volumen liberado como un cuerpo en forma de cuña (**Figura 2.3**) y comparar su volumen con el volumen depositado. Con ello, comparar con la metodología de Rico et al. y repetir el proceso hasta que estos volúmenes sean iguales. Sus resultados se aplican a casos conocidos y reportados en Chile (Tranque Las Palmas, Tranque Veta del Agua N°1 y Tranque El Cobre Viejo), obteniendo en general buenas aproximaciones.

Seddon (2010) [30] realizó estimaciones al cálculo de la distancia peligrosa, basado en aproximaciones de la resistencia de los relaves licuados, utilizando parámetros reológicos y la teoría del estado crítico del suelo (resistencia no drenada), asumiendo ausencia de viscosidad.

En la **Figura 2.4**, H_0 y x_0 corresponden a las dimensiones iniciales de altura y longitud uniformes de la columna de relave respectivamente, h es la altura final del flujo, medida desde el suelo y x_f es la distancia total desde el punto de flujo inicial al final.

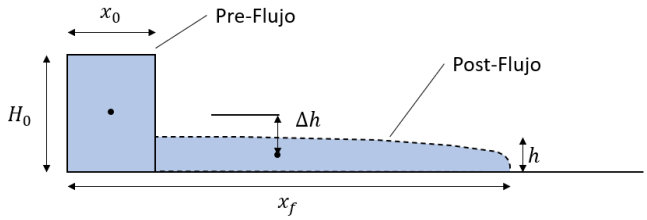

Figura 2.4: Geometría generalizada utilizada por Seddon para su modelo. Modificado de Seddon (2010).

La estimación de los parámetros la define a partir de la conservación de energía del sistema, donde γ es el peso específico de la columna fluida:

$$x_f^2 + x_0 x_f - 2\gamma x_0 \frac{H_0^2}{\tau_0} = 0$$
$$D_{máx} = x_f - x_0 \tag{2.3}$$

Sofrá et al. (2002) [32] realizaron estudios reológicos completos para describir depósitos de relaves en pasta (barros de bauxita), utilizando el modelo Herschel-Bulkley. Si bien este análisis no involucra distancia peligrosa, sí permite comprender de manera preliminar el comportamiento de fluidos no newtonianos de alta concentración y su caracterización basada en los parámetros reológicos que los describen. En el estudio determinaron una relación exponencial entre la tensión de fluencia y la concentración en peso de sólidos de una pulpa, para distintas pulpas industriales. En laboratorio, lograron determinar relaciones entre el ángulo de reposo de la pulpa concentrada en función de una serie de términos adimensionales conocidos, mostrados en la **Figura 2.5**.

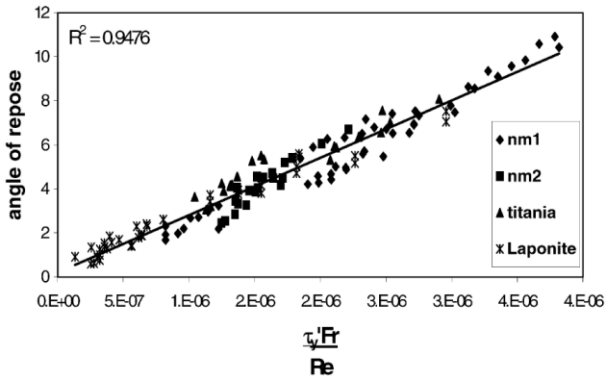

Figura 2.5: Resultados obtenidos del análisis dimensional por Sofrá.

Minussi y Freitas (2012) [24] realizaron estudios numéricos analizando el flujo de relaves siguiendo el modelo de viscosidad de Herschel-Bulkley, con el fin de comparar el perfil de la ola y la distancia máxima con sus estudios experimentales utilizando soluciones de Carbopol 940 para los experimentos de laboratorio y el modelo VOF del código CFX de ANSYS® para el modelamiento numérico. Sus resultados muestran muy buenas aproximaciones entre ambos modelos (experimental y numérico) a pesar de las diferencias en el inicio del flujo (una vez ocurrido el colapso en $t = 0$).

Liu (2018) [21] realizó, en su tesis doctoral, estudios experimentales y modelación numérica para describir el comportamiento de una pulpa a bajas tensiones de fluencia y bajos números de Reynolds, aplicando el modelo H-B a todas sus pruebas. En su trabajo, comparó la información de la distancia peligrosa e hidrogramas obtenidos en su experimentación física, que le permitieron validar con suficiente certeza su modelación computacional con FLUENT®. Estos resultados le permitieron concluir que la modelación numérica es una fuerte herramienta para este tipo de modelos, dados los certeros y buenos resultados que entrega.

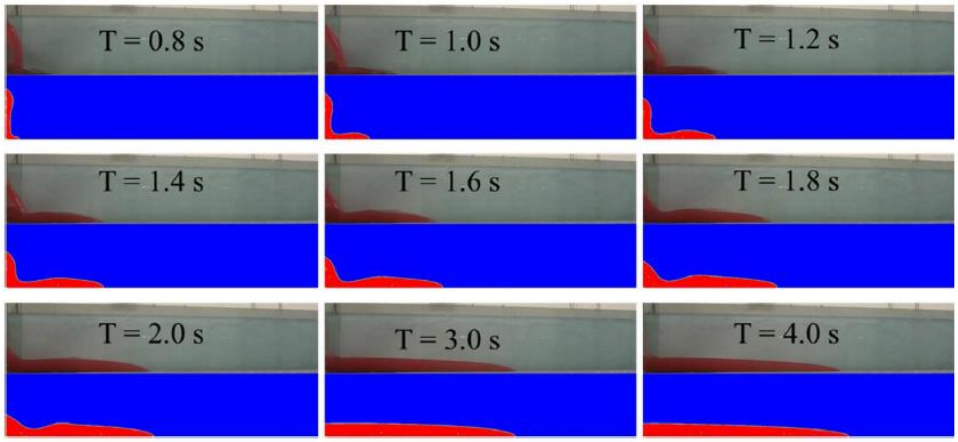

Figura 2.6: Comparación experimental y numérica obtenida por Liu (2018).

En síntesis, la revisión literaria muestra una variedad de enfoques que abarcan la problemática de la distancia de escurrimiento, con distintos grados de precisión e incertidumbre, pero utilizados hoy en día: analíticos, experimentales, numéricos y computacionales. Cabe destacar que el fin de esta memoria es hacer uso de la modelación numérica computacional como una herramienta preliminar para este tipo de cálculos y complementar los estudios ya existentes al respecto.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Clasificación de fluidos

Los fluidos son todas aquellas sustancias que experimentan movimiento bajo la influencia de un esfuerzo cortante, sin importar lo pequeño que este sea, pudiendo adaptar su volumen a un recipiente que los contenga.

Se pueden tratar como un medio continuo, de la base que todas las partículas que lo componen están distribuidas continuamente en una región de interés, suficientemente pequeñas respecto a dicha región, pero suficientemente grande respecto a sus moléculas componentes, lo que permite aplicar en ellos el análisis infinitesimal a escala macroscópica [27].

Un fluido es caracterizado según el comportamiento de su deformación (o la tasa de deformación) ante la aplicación de una fuerza cortante externa. Este comportamiento, difiere al de un material sólido en la capacidad que presentan para oponer resistencia a un esfuerzo de corte, esto es, un cuerpo sólido deja de deformarse luego de cierto límite (hasta experimentar fractura, por ejemplo), mientras que un fluido reacciona con una deformación continua (no se rompe). La disciplina encargada de estudiar la deformación y el flujo de materia es la reología.

Así, según la relación que exhibe el esfuerzo cortante en función del gradiente de deformación, los fluidos se clasifican en dos grupos: fluidos newtonianos y fluidos no newtonianos. Los fluidos no newtonianos tienen su propia subdivisión, que será descrita en las siguientes secciones, con mayor énfasis dada la aplicabilidad que tienen en el presente estudio.

3.1.1. Fluidos newtonianos

Cuando al estudiar la relación entre el esfuerzo de corte aplicado τ y la tasa de deformación del cuerpo $\dot{\gamma}$ se distingue un comportamiento lineal entre ambos parámetros, el fluido se denomina newtoniano.

Este tipo de fluidos, como el aire, el agua, la gasolina o el aceite, se rigen por la ley de viscosidad de Newton (razón por la que llevan su nombre), la cual establece que la fuerza tangencial ejercida (por unidad de área) por el fluido en contacto con una superficie u otro cuerpo, es directamente proporcional a la tasa de deformación tangencial que este experimenta este al fluir, siendo esta constante.

Matemáticamente, lo anterior puede expresarse como:

$$\tau = \mu\dot{\gamma} \tag{3.1}$$

Donde la constante de proporcionalidad μ es definida como la viscosidad dinámica del fluido newtoniano, propiedad que representa el grado de adhesión de un fluido o su resistencia a la deformación dado un esfuerzo cortante externo. Su unidad física en el SI es [Pa s].

Así, en un fluido newtoniano, la viscosidad es una propiedad que permanece constante en un sistema isotérmico y la ecuación (3.1) se cumple en cualquier punto dentro de dicho fluido.

3.1.2. Fluidos no newtonianos

Los fluidos no newtonianos se caracterizan porque el comportamiento entre el esfuerzo cortante y el gradiente de deformación es, generalmente, no lineal. En ellos, se observan tres distintos tipos de comportamientos: aquellos donde el esfuerzo de corte depende solamente del gradiente de deformación ($\tau = f(\dot{\gamma})$). En esta categoría entran los fluidos pseudoplásticos, dilatantes y plásticos de Bingham, conocidos como independientes del tiempo. Están además aquellos donde la dependencia es también temporal ($\tau = f(\dot{\gamma}, t)$), como los fluidos tixotrópicos y reopécticos y aquellos donde además el fluido reacciona elásticamente (viscoelásticos), donde la energía de deformación es recuperada tal como sucede con los sólidos elásticos [17]. El alcance de esta memoria tratará con los fluidos no newtonianos del primer grupo, de los cuales su comportamiento reológico es independiente del tiempo y se describen a continuación:

Fluidos dilatantes

Son aquellos donde la resistencia a la deformación aumenta gradualmente al aumentar el cizalle (se espesan), comportamiento que exhiben sustancias como las arenas movedizas o el almidón.

Fluidos pseudoplásticos

Son aquellos los cuales disminuyen su resistencia a la deformación al aumentar el cizalle (se adelgazan). Ejemplos son las suspensiones, las pulpas en agua, el plasma de la sangre o las resinas.

Plásticos de Bingham

En el caso límite de los fluidos plásticos, están los que requieren de un esfuerzo cortante finito para comenzar a fluir. Estos presentan un comportamiento elástico para valores menores a un esfuerzo cortante de fluencia (τ_0) y sobre este valor, muestran un comportamiento similar al de un fluido newtoniano.

La relación que siguen los fluidos plásticos de Bingham tiene la siguiente estructura:

$$\tau = \tau_0 + \mu_0 \dot{\gamma} \tag{3.2}$$

Donde la constante μ_0 es la viscosidad plástica definida como la razón $d\tau/d\dot{\gamma}$. Este tipo de modelos ideales se aplican con frecuencia en fluidos como pinturas, lodos y sólidos en suspensión en líquidos (como en el caso de relaves mineros).

La **Figura 3.1** muestra la clasificación genérica de los fluidos descritos en esta sección.

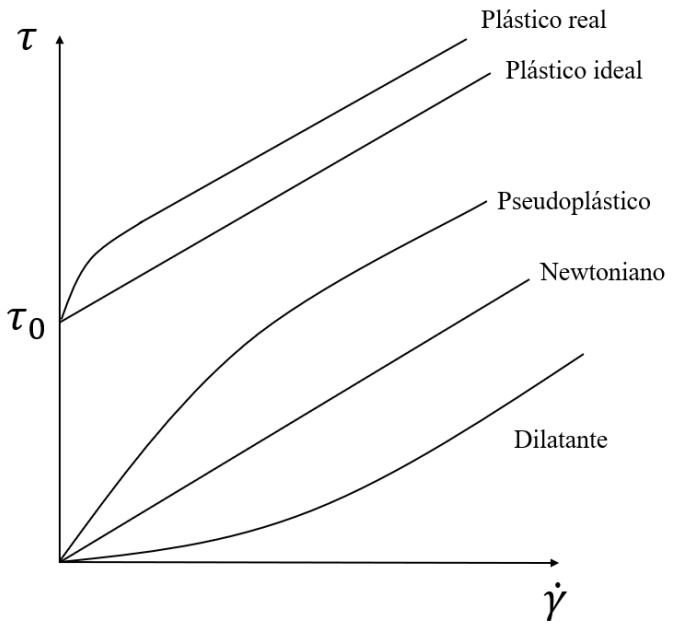

Figura 3.1: Clasificación de fluidos newtonianos y no newtonianos independientes del tiempo.

3.2. Modelos reológicos para fluidos no newtonianos

Los fluidos no newtonianos independientes del tiempo tienen la particularidad que varían su viscosidad una vez comienzan a fluir. Esta característica, propia de este tipo de fluidos, tiene una fuerte dependencia de la tasa de deformación $\dot{\gamma}$ del fluido. Por lo tanto, es de suma importancia evaluar la relación entre ambos parámetros y describir la viscosidad en términos de esta. De ello se encarga la reología, ciencia que enfoca su mirada al flujo de materia y su deformación al fluir. Para su estudio, diversos autores han desarrollado modelos que se ajustan a los distintos tipos de fluidos según la variación de la viscosidad como función de la tasa de deformación. Estos modelos permiten desarrollar un enfoque más amplio del comportamiento de los distintos fluidos presentes en la naturaleza, definidos a partir de sus viscosidades aparentes [4].

A continuación, se presentan cuatro modelos matemáticos aplicados con frecuencia en el análisis reológico de fluidos no newtonianos independientes del tiempo. Con ellos se permite conocer el comportamiento de la viscosidad del fluido cuando esta no es constante y determinar características propias del flujo de estos.

3.2.1. Modelo de Ostwald-de Waele

Uno de los modelos de viscosidad más simples que permiten describir el comportamiento reológico de fluidos no newtonianos, es el modelo de Ostwald-de Waele, basado en la ley de potencia (modelo matemático utilizado para describir múltiples fenómenos físicos) y descrito según la ecuación (3.3):

$$\begin{gathered} \tau = k\dot{\gamma}^{n} \\ \mu(\dot{\gamma}) = k\dot{\gamma}^{n-1} \end{gathered} \tag{3.3}$$

En esta ecuación, $\mu(\dot{\gamma})$ es la viscosidad aparente o efectiva del fluido no newtoniano (dependiente de la tasa de deformación), k es el índice de consistencia del fluido, y n es el índice de comportamiento, que indica la desviación del fluido no newtoniano respecto a uno newtoniano.

Así, si $n < 1$ el fluido “se adelgaza” a medida que aumenta la tensión de corte, comportamiento que experimenta un fluido pseudoplástico; si $n > 1$ el fluido “se espesa”, como un fluido dilatante y si $n = 1$, $k = \mu$, entonces el fluido es newtoniano.

Una desventaja de este tipo de modelos es que los parámetros k y n no tienen una interpretación física directa, sino que son constantes que dependen del ajuste aplicado a cada fluido.

3.2.2. Modelo de plástico ideal de Bingham

En este modelo se indica que, desde el reposo, un fluido no newtoniano experimenta movimiento una vez alcanzado cierto valor de un esfuerzo de corte inicial (esfuerzo o tensión de fluencia, inexistente en fluidos newtonianos), cumpliendo las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &\tau = \tau_0 + \mu_0 \dot{\gamma} \\ &\mu(\dot{\gamma}) = \mu_0 + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} \qquad para\ \tau > \tau_0 \\ &\dot{\gamma} = 0 \qquad\qquad\qquad para\ \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Cuando la magnitud de esfuerzo cortante τ es mayor que el esfuerzo de fluencia τ_0, el fluido experimenta movimiento y su comportamiento es similar al de un fluido newtoniano, en caso contrario, el fluido no presenta deformaciones por corte. Note el lector que si $\tau_0 = 0$, la ecuación (3.4) es igual a la ecuación (3.1), definida para un fluido newtoniano.

3.2.3. Modelo ideal de Herschel-Bulkley

El modelo plástico de Herschel-Bulkley, corresponde a una combinación de la ley de potencia de Ostwald-de Waele y el modelo ideal de Bingham (ecuaciones 3.3 y 3.4). Este modelo se define como:

$$\begin{aligned} &\tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n \\ &\mu(\dot{\gamma}) = k\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} \quad para\ \tau > \tau_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Al igual que el modelo ideal de Bingham, este tipo de fluidos requieren del esfuerzo de fluencia para experimentar movimiento. Para valores de cortante mayor al esfuerzo de fluencia, el fluido se comporta como pseudoplástico si $n < 1$ o como dilatante si $n > 1$. Si $n = 1$, el índice de

consistencia coincide con la viscosidad plástica del fluido, tal como se presentó al inicio de esta sección.

Este modelo, dada su amplia aplicación y buen ajuste a pulpas mineras, es el que será utilizado para el modelamiento de dichos fluidos en la presente memoria.

3.2.4. Modelo de Papanastasiou

Dada la presencia de inconvenientes de los modelos ideales anteriores para describir la viscosidad para valores muy pequeños de $\dot{\gamma}$, Papanastasiou propone solventar esta limitación mediante un ajuste exponencial para el esfuerzo de fluencia [23].

La ventaja de este modelo es que, con una sola ecuación, se describen tanto las zonas de fluencia como de no fluencia, mediante una función suavizada de la viscosidad que depende de la tasa de deformación y el parámetro de regularización temporal m, ajustando la viscosidad aparente de la siguiente manera, para los modelos de Bingham y H-B, respectivamente (**Figura 3.2**):

$$\begin{gathered}
\tau = \tau_0\left(1 - e^{-m\dot{\gamma}}\right) + \mu_0\dot{\gamma} \\
\mu(\dot{\gamma}) = \mu_0 + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}}\left(1 - e^{-m\dot{\gamma}}\right) \\
\tau_0\left(1 - e^{-m\dot{\gamma}}\right) + k\dot{\gamma}^n \\
\mu(\dot{\gamma}) = k\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}}\left(1 - e^{-m\dot{\gamma}}\right)
\end{gathered} \tag{3.6}$$

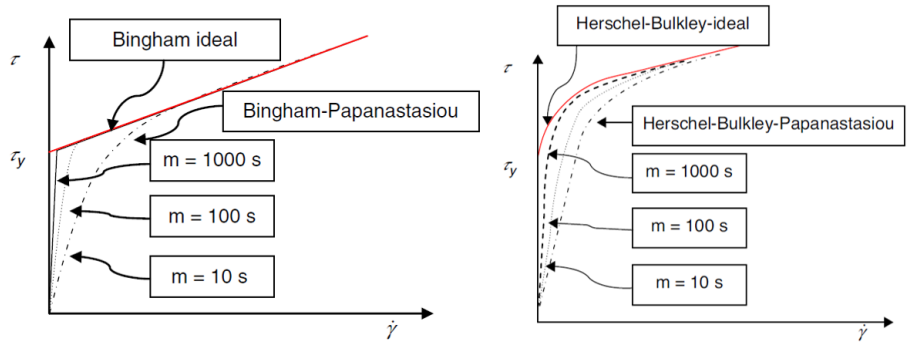

Figura 3.2: Ajuste del modelo Papanastasiou para fluidos ideales de Bingham y Herschel-Bulkley, con distintos valores del parámetro m [25].

3.3. Flujo de fluidos

Tal como se describió en la sección precedente, la reología juega un importante rol para el análisis del flujo de materia. Así, desde una mirada microscópica, el flujo de materia fluida se define como la deformación de elementos de fluido en el cual sus puntos adyacentes experimentan movimiento uno respecto al otro sea por corte (flujo de corte) o distancia (flujo extensivo) [4].

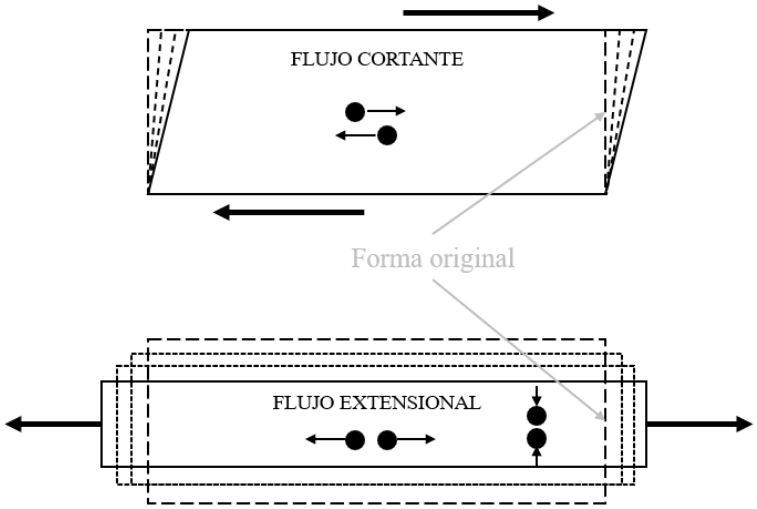

Figura 3.3: Movimiento de partículas en un flujo por corte y extensivo, modificado de Barnes (2000).

El análisis físico del movimiento de fluidos puede ser descrito a partir de dos perspectivas distintas: la visión lagrangiana y la visión euleriana. La descripción lagrangiana considera el movimiento del fluido como partículas individuales como una función espacio temporal, vale decir $\mathbf{x}(x_0, y_0, z_0, t)$, $\mathbf{v}(x_0, y_0, z_0, t)$ y $\mathbf{a}(x_0, y_0, z_0, t)$ para la posición, velocidad y aceleración cartesianas de cada partícula respectivamente.

Sin embargo, esta tarea es compleja cuando se analiza un enorme número de partículas y observar la influencia entre ellas. La alternativa es visualizar un punto fijo del espacio del campo de flujo, y observar la razón de cambio de la velocidad conforme pasan las partículas por dicho punto, es decir $\partial\mathbf{v}/\partial x$, $\partial\mathbf{v}/\partial y$ y $\partial\mathbf{v}/\partial z$ y si esta además varía en el tiempo en cada punto, esto es, $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Esta es la descripción euleriana del movimiento de fluidos y es utilizada en la mayoría de los problemas de ingeniería dada su aplicación a numerosos problemas físicos cotidianos [25]. A continuación, se presentan las principales clasificaciones del flujo de fluidos desde esta perspectiva.

3.3.1. Flujos uniformes y variados

El flujo uniforme se caracteriza porque las propiedades geométricas y del flujo (altura, perímetro mojado, caudal) son constantes en todo el tramo de análisis.

Por otra parte, en el flujo variado basta con que al menos una de las variables mencionadas, no sea constante en el tramo. Así, un canal puede mantener la misma geometría y condiciones, pero el flujo no necesariamente será uniforme. Sin embargo, un flujo variado puede, en el transcurso del tiempo, estabilizarse a flujo uniforme.

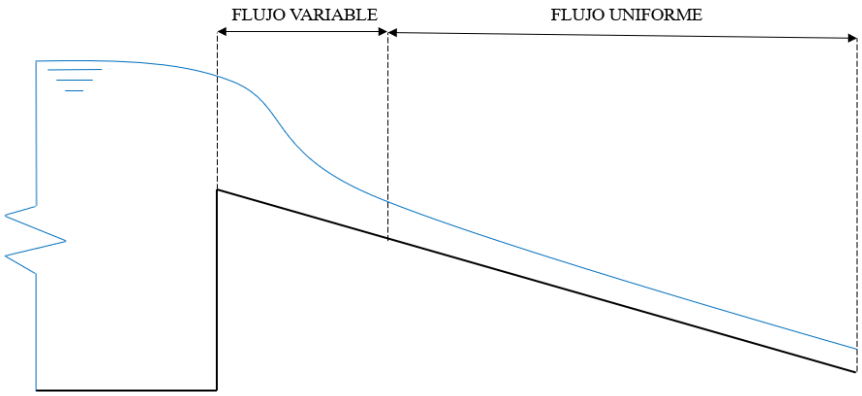

Figura 3.4: Esquema de flujo uniforme y variado.

3.3.2. Flujos permanentes y transientes

Un flujo permanente es aquel en el cual las propiedades del fluido y del flujo (como la velocidad, la densidad, o la presión) son independientes del tiempo en un punto fijo del dominio de flujo.

Mientras que un flujo transiente (o impermanente) es aquel donde al menos una de las propiedades del flujo mencionadas varía en el tiempo.

3.3.3. Flujos laminares y turbulentos

Algunos flujos suelen tener aspecto ordenados y distinguibles, otros caóticos. Este comportamiento puede clasificarse en laminar o turbulento. En un flujo laminar, el fluido fluye sin mezclado significativo entre las partículas de fluido circundantes generando un movimiento en capas bien definidas (“láminas”). Este escurrimiento es estable, suave, ordenado y estratificado, usualmente a condiciones de baja velocidad y alta viscosidad.

Por su parte, en el flujo turbulento el movimiento del fluido es irregular, de manera que las cantidades como la velocidad y la presión muestran variaciones aleatorias respecto al tiempo y espacio, por lo que se suelen tratar como variables estadísticas. La característica de este tipos de flujos es su dificultad para predecir su comportamiento y encontrar ecuaciones dinámicas que lo describan.

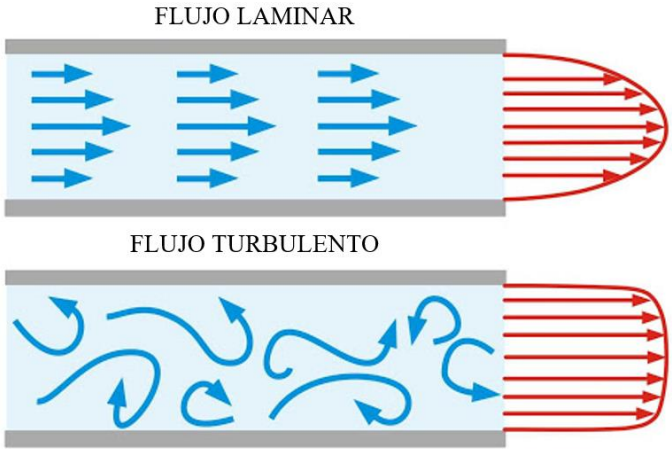

Figura 3.5: Descripción visual de flujo en régimen laminar y turbulento.

Determinar si un flujo es laminar o turbulento depende principalmente de tres factores: la longitud característica del sistema, la velocidad promedio del flujo y la viscosidad del fluido. Osborne Reynolds desarrolló en 1880 un valor adimensional utilizando estos parámetros, en el denominado número de Reynolds para fluidos newtonianos, definido como:

$$Re = \frac{VL}{\nu} = \frac{\rho VL}{\mu} \tag{3.7}$$

Así, cuando $Re < 2000$, el flujo es laminar, si $Re > 4000$ el régimen es turbulento, y el régimen de flujo está en transición si $2000 < Re < 4000$.

Sin embargo, si se habla de fluidos no newtonianos, el número de Reynolds pierde sentido dada la dependencia de la viscosidad al flujo del fluido, o bien, no son considerados sus parámetros propios como la tensión de fluencia. Por ello, varios autores han desarrollado correcciones o ajustes al número de Reynolds convencional, basados en los parámetros que otorga el modelo reológico de Herschel-Bulkley para fluidos no newtonianos.

Así, defínase el número de Reynolds generalizado Re_{HB} (o Re_2) como sigue:

$$Re_2 = \frac{\rho V^2}{\tau_0 + k\left(\frac{8V}{L}\right)^n} \tag{3.8}$$

Donde V es la velocidad característica del flujo, ρ la densidad del fluido, L la longitud característica del sistema, τ_0 la tensión de fluencia, y k, n los coeficientes del modelo H-B, descritos en la ecuación (3.3).

Usualmente se acepta que para $Re_2 < 2000$, el flujo es laminar, si $Re_2 > 8000$ el régimen es turbulento, y si $2000 < Re_2 < 8000$, el régimen de flujo está en transición.

3.3.4. Flujos compresibles e incompresibles

Otra clasificación del flujo de fluidos depende del comportamiento de la densidad de este en cada partícula del fluido. Si la densidad permanece aproximadamente constante cuando el fluido se mueve por todo su dominio, el flujo es incompresible, es decir, $D\rho/Dt$ es igual a cero. En general, la densidad de los fluidos es constante, por lo que sus flujos son típicamente incompresibles. Cuando la densidad del fluido sí influye o cambia considerablemente en el flujo de este, el flujo se denomina compresible [6].

3.4. Flujo de suspensiones

Los relaves mineros (como se detallará en la siguiente sección) corresponden a suspensiones de partículas sólidas en un medio líquido, generalmente agua. Esta característica permite definir dos fases (líquida y sólida) que componen la pulpa y el conocimiento de su complejo comportamiento ha permitido el desarrollo de su transporte en tuberías a larga distancia, considerando la enorme complejidad de estos sistemas dado que coexisten las propiedades del medio de suspensión (agua) con las de partículas sólidas.

Es por esta razón que, si bien algunas propiedades físicas de las suspensiones suelen estar bien definidas, es común referirse a ellas por la proporción de partículas sólidas presentes en su composición. Así, se definen los conceptos de concentración en peso de sólidos y concentración en volumen de sólidos:

$$C_p = \frac{masa\ sólidos}{masa\ pulpa} \tag{3.9}$$

$$C_v = \frac{volumen\ sólidos}{volumen\ pulpa} \tag{3.10}$$

En este punto es importante resaltar la presencia de las partículas sólidas en una distribución de tamaños (finas a gruesas) que dan una caracterización granulométrica a los relaves, siendo importante entenderla en sus fenómenos de sedimentación de partículas o incluso en sus propiedades reológicas (que además dependen de la mineralogía del relave).

De este modo, una suspensión queda caracterizada y definida con las propiedades del fluido portador, las de la fase sólida y la proporción que existe entre ambas. Así, puede estudiarse con más detalle los distintos fenómenos y flujos que ocurren en este tipo de medios.

Así, los siguientes fenómenos describen de manera general el comportamiento del flujo de suspensiones, basados en la sedimentación o concentración de la fase sólida y los perfiles de velocidad asociado a cada fenómeno.

3.4.1. Flujos homogéneos

En un flujo homogéneo de pulpas, las partículas sólidas están distribuidas de manera uniforme en el medio líquido, con ausencia de sedimentación dado el continuo movimiento del flujo a alta velocidad y de partículas finas. La **Figura 3.6** muestra los perfiles asociados a este tipo de flujos, con un esquema del perfil de sólidos, velocidad y concentración en función de la altura.

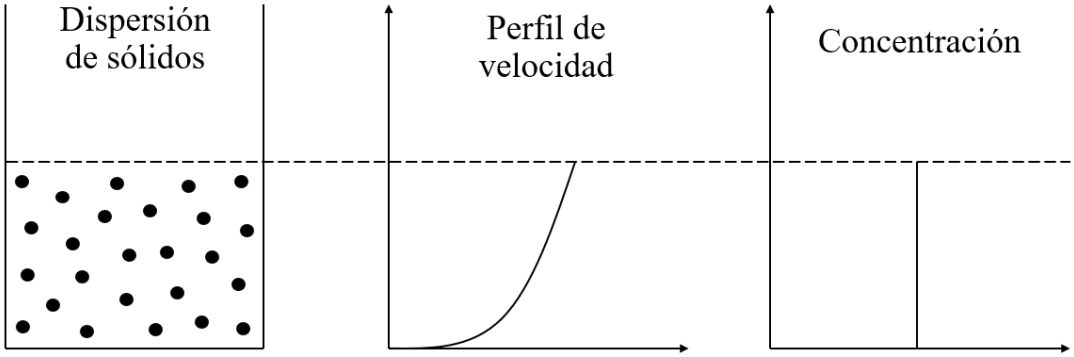

Figura 3.6: Flujo homogéneo de pulpas, modificado de Rocafort (2019).

3.4.2. Flujos heterogéneos

Este tipo de flujos se caracteriza por una distribución no uniforme de las partículas sólidas, generando un gradiente de concentración en el eje vertical del tubo o canaleta, incluso a altas velocidades. Los perfiles esquemáticos se muestran en la siguiente figura.

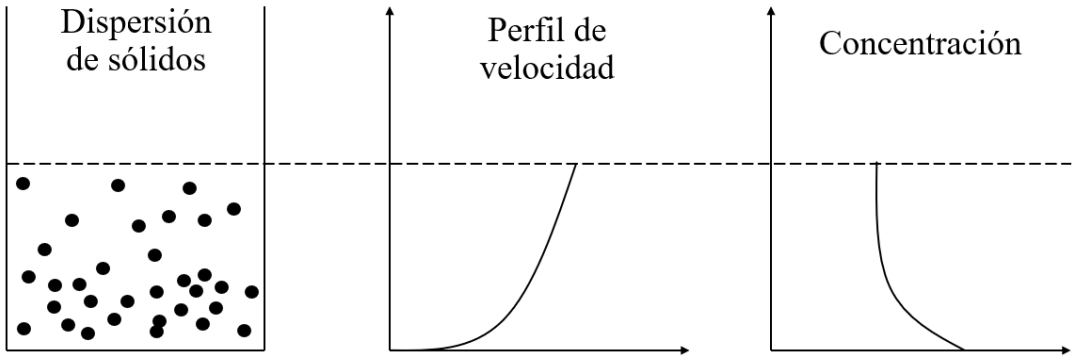

Figura 3.7: Flujo heterogéneo de pulpas modificado de Rocafort (2019).

3.4.3. Lecho móvil

En el flujo con lecho móvil, algunas partículas sedimentan al fondo del canal, mientras que otras siguen su movimiento en la suspensión. El gradiente de concentración muestra un cambio abrupto en las cercanías de la base del lecho. Este comportamiento se suele dar en condiciones de baja velocidad y/o partículas gruesas.

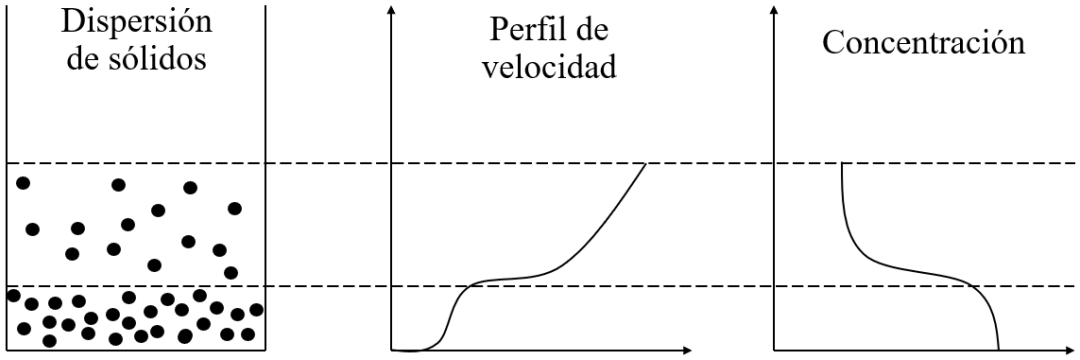

Figura 3.8: Flujo con lecho móvil modificado de Rocafort (2019).

3.4.4. Lecho fijo

En el flujo de lecho fijo o estático (el peor escenario en transporte de pulpas), existe una alta concentración fija de las partículas sólidas en la zona profunda del lecho, básicamente estática y una concentración casi vertical en la base. Este fenómeno puede ocurrir a velocidades muy bajas y partículas de gran tamaño.

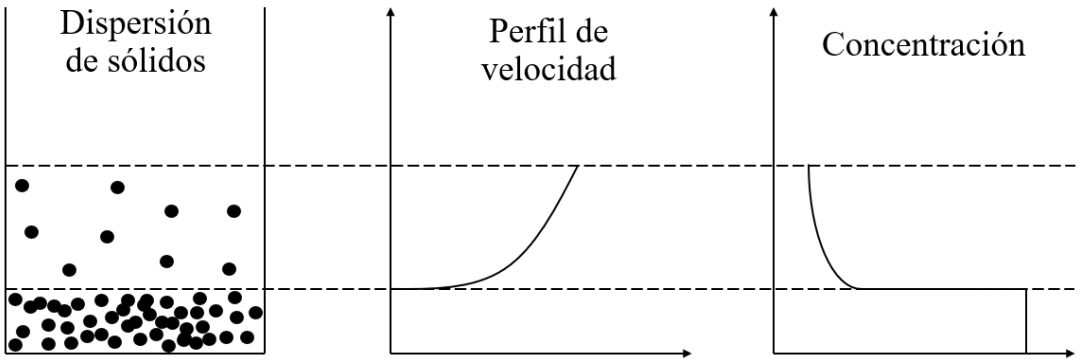

Figura 3.9: Flujo con lecho fijo modificado de Rocafort (2019).

3.5. Reología de suspensiones

Esta sección aborda el flujo de materia desde una perspectiva granular, la cual aborda la reología de suspensiones como un apoyo a la comprensión de la dinámica de este tipo de sistemas. En este enfoque se considera la suspensión como una mezcla de partículas rígidas inmersas en un medio fluido, donde a escala microscópica es predominante la interacción entre las partículas y su respectivo reordenamiento y a escala macroscópica es válido el análisis de la mezcla como un fluido continuo. Además, las propiedades reológicas de suspensiones simples dependen solamente de la concentración de partículas en la suspensión y las características mineralógicas de estas [16].

Boyer et al. [5] realizaron estudios aplicados a suspensiones granulares densas, basados en una celda de corte (similar a la utilizada para medios granulares densos secos [1] [14] [15]) de placas porosas espaciadas a una distancia L, que contiene en su interior un conjunto de partículas sólidas de diámetro d inmersas en un fluido de viscosidad η_f, tal como lo muestra la **Figura 3.10**.

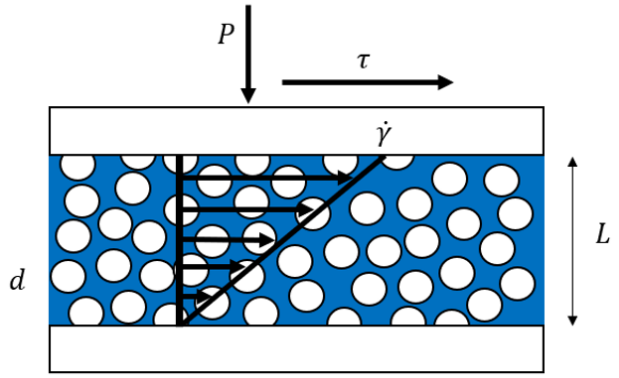

Figura 3.10: Celda utilizada por Boyer et al. (2011) para el análisis de suspensiones.

Los supuestos considerados en la experimentación incluyen partículas rígidas no deformables, predominio del régimen viscoso por sobre el inercial, interacción de partículas únicamente por contacto (fricción) e interacciones hidrodinámicas, y dimensiones del sistema mucho mayores al tamaño de cada partícula ($L \gg d$).

Así, lograron determinar que el sistema es gobernado por un único parámetro adimensional, al que denominaron número viscoso J, definido como:

$$J = \frac{\eta_f \dot{\gamma}}{P} \tag{3.11}$$

Donde la idea es generar leyes constitutivas para el coeficiente de fricción y la fracción de volumen, en función del número viscoso, obteniendo en sus distintos experimentos lo que se muestra en la **Figura 3.11**.

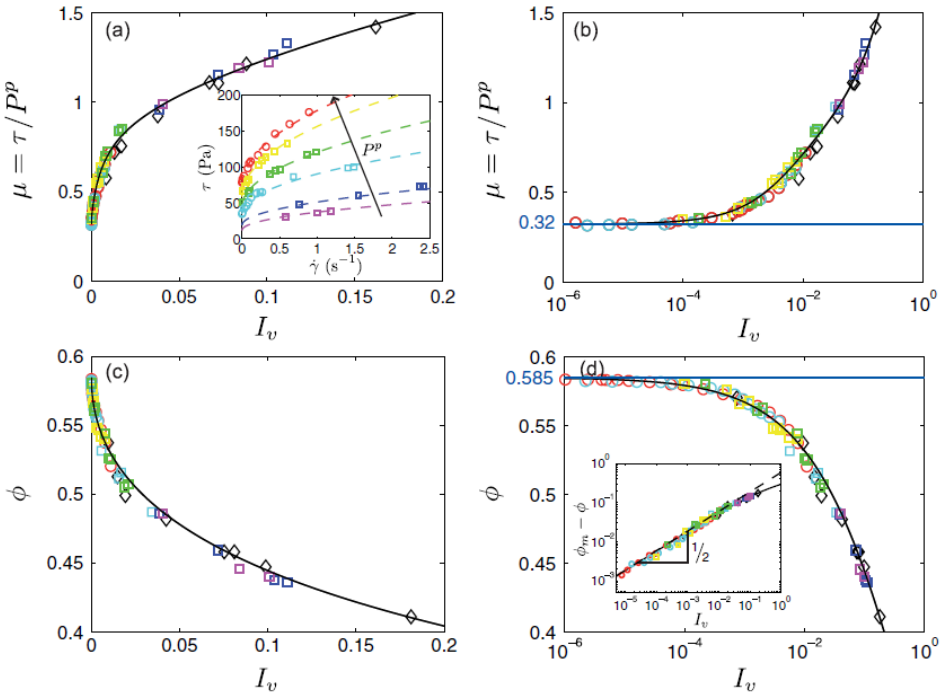

Figura 3.11: Resultados obtenidos por Boyer et al. (2011) para el coeficiente de fricción (superior) y la fracción de volumen de partículas (inferior) en función del número viscoso ($I_v = J$).

A partir de ello, las leyes constitutivas indican las siguientes relaciones:

$$\mu(J) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + J_0/J} + J + \frac{5}{2}\phi_m J^{1/2}$$
$$\phi(J) = \frac{\phi_m}{1 + J^{1/2}} \tag{3.12}$$

Sin embargo, Trulsson et al. [33] (2012) argumentan que existe una contribución energética de disipación a la reología de la suspensión ($\tau(K)$ y $\phi(K)$), a partir de un número adimensional K que depende tanto del número viscoso J (para suspensiones granulares) como del número inercial I (para medios granulares densos secos) a partir de la definición:

$$K = J + \alpha I^2 \tag{3.13}$$

Con α una constante de orden 1, que establece el grado de disipación del sistema.

A partir de sus experimentos, equivalentes al modelo de Boyer et al., los autores concluyen que, en todo sistema de suspensiones, existe una disipación de energía debida tanto a efectos viscosos de sistema como a la misma interacción entre las partículas, descritas por su ley constitutiva:

$$\begin{gathered} \phi(K) = \phi_c - b\sqrt{K} \\ \mu(K) = \mu_c + \frac{\mu_F - \mu_c}{1 + \sqrt{K_0/K}} \end{gathered} \tag{3.14}$$

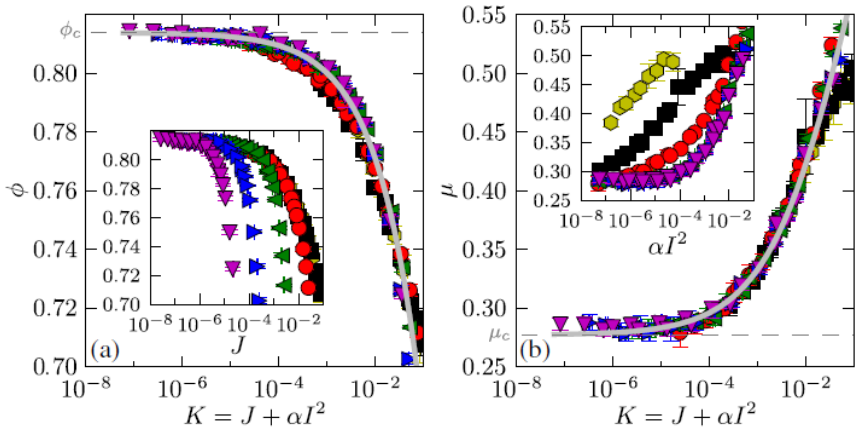

Figura 3.12: Resultados obtenidos tras las simulaciones de Trulsson et al. (2012).

3.6. Depósitos de relaves

Los relaves corresponden a una suspensión de sólidos en líquido, generados tras un proceso de concentración húmeda de flotación del mineral luego de experimentar una o varias etapas de molienda fina [29].

Al ser parte de los desechos mineros, toda faena debe por normativa contar con un proyecto debidamente aprobado, que incluya el diseño, construcción, operación y cierre de los depósitos de relaves, regulado por el Decreto Supremo 50 del Ministerio de Obras Públicas [12] y el Decreto Supremo 248 del Ministerio de Minería [13].

Según como lo define Sernageomin, los depósitos de relaves corresponden a toda obra estructurada en forma segura para contener los relaves provenientes de una planta de concentración húmeda de especies de minerales. Su función principal es la de servir como depósito seguro y definitivo de los materiales sólidos proveniente del relave transportado desde la planta, permitiendo así la recuperación, en gran medida, del agua que transporta dichos sólidos.

3.6.1. Tipos de depósitos de relaves

Actualmente, existen varios tipos de depósitos de relaves, que varían según la cantidad de agua que acompaña al relave y según la forma de contener la depositación [29].

Tranque de relaves

Depósitos cuyo muro de contención está construido por la fracción más gruesa del mismo relave (arenas), compactada y proveniente del hidrociclón (clasificador de sólidos). La parte fina (lamas), es depositada en la cubeta del depósito.

Embalse de relaves

Aquel cuyo muro de contención está construido por material de empréstito y laguna de aguas está en contacto con este, y tanto su coronamiento como el talud interno se encuentran impermeabilizados. También se les denomina embalse a aquellos depósitos ubicados en alguna depresión de terreno y no requieren necesariamente de la construcción de un muro de contención.

Relave espesado

Depósitos en el que el relave es previamente sometida a un proceso de sedimentación, en un equipo denominado espesador, con el objetivo de retirar parte importante del agua contenida. El depósito de relave espesado se construye de forma tal que impida que el relave fluya a otras áreas distintas a las del sitio autorizado, y contar con un sistema de piscinas de recuperación de agua remanente que pudiese fluir fuera del depósito.

Relave en pasta

Corresponden a una mezcla de agua con sólido, que contiene abundantes partículas finas y bajo contenido de agua, de modo que la mezcla tenga una consistencia espesa, similar a una pulpa de alta densidad.

Relave filtrado

Es similar al espesado. Se trata de un depósito en que la pulpa contiene aún menos agua, gracias al proceso de filtrado, para asegurar así una humedad menor a 20%.

3.6.2. Métodos constructivos de los tranques de relaves

Según la forma en la que se construye el muro de contención de arenas de un tranque de relaves, existen tres métodos principales: aguas arriba, aguas abajo y eje central, cada uno el cual presenta sus propias ventajas y desventajas en su aplicación [23] [28].

Método de Aguas Arriba

Este método consiste en la construcción de un muro de partida de material de empréstito compactado sobre el cual se inicia la depositación de los relaves, utilizando hidrociclones; la fracción más gruesa, se deposita junto al muro inicial, mientras la fracción más fina, se deposita hacia el centro del tranque en un punto más alejado del muro, de modo tal que se va formando una especie de playa al sedimentar las partículas más pesadas de lamas y gran parte del agua escurre, formando la laguna de sedimentación. Una vez que el depósito se encuentra próximo a llenarse se procede al crecimiento del muro de partida aguas arriba, provocando que los crecimientos del muro de contención se fundan sobre las lamas, las que ante un evento sísmico pueden licuar y perder la contención del relave.

Desde 1970 en Chile está prohibida la utilización de este método (tras la falla del Tranque El Cobre), dado que este tipo de muros es el que ofrece menos resistencia ante oscilaciones sísmicas.

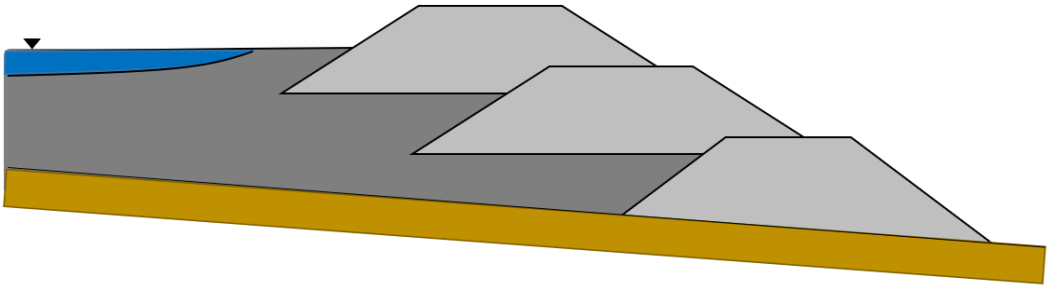

Figura 3.13: Secuencia de construcción del muro aguas arriba.

Método de Aguas Abajo

La construcción se inicia también con un muro de partida de material compactado desde el cual se vacía el material hacia el lado del talud aguas abajo de este muro y las lamas se depositan hacia el talud aguas arriba. Cuando el muro se ha peraltado lo suficiente, se efectúa su levante, desplazando los hidrociclones a una mayor elevación aguas abajo y comenzando una nueva etapa de descarga de arenas y peralte del muro. Las arenas se pueden disponer en capas inclinadas, según el manteo del talud del muro de partida, o bien, disponerlas en capas horizontales hacia aguas abajo del muro de partida. Este método de aguas abajo requiere disponer de un gran volumen de arenas y permite lograr muros resistentes más estables del punto de vista de la resistencia sísmica.

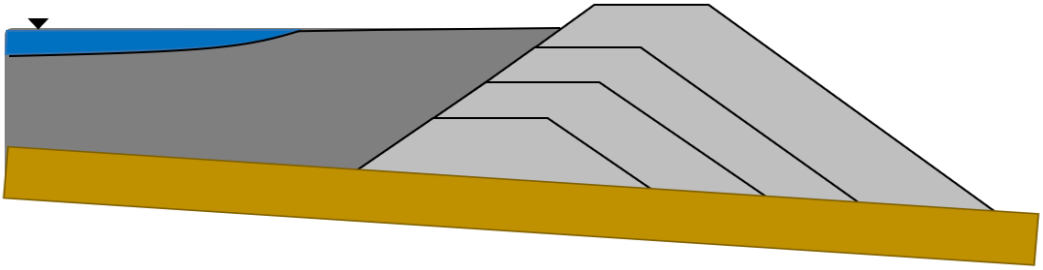

Figura 3.14: Secuencia de construcción del muro aguas abajo.

Método de Eje Central

Se inicia al igual que los métodos anteriores, con un muro de partida de material compactado, sobre el cual se depositan las arenas hacia el lado de aguas abajo y las lamas hacia el lado de aguas arriba. Una vez completado el vaciado de arenas y lamas correspondiente al muro inicial, se eleva la línea de alimentación de arenas y lamas, siguiendo el mismo plano vertical inicial de la berma de coronamiento del muro de partida, lo que permite lograr un muro de arenas cuyo eje se mantiene en el mismo plano vertical, cuyo talud de aguas arriba es más o menos vertical, y cuyo talud de aguas abajo puede tener la inclinación que el diseño considera adecuada. Este método requiere disponer de un volumen de arenas intermedio entre los dos métodos anteriores, y permite lograr muros suficientemente estables.

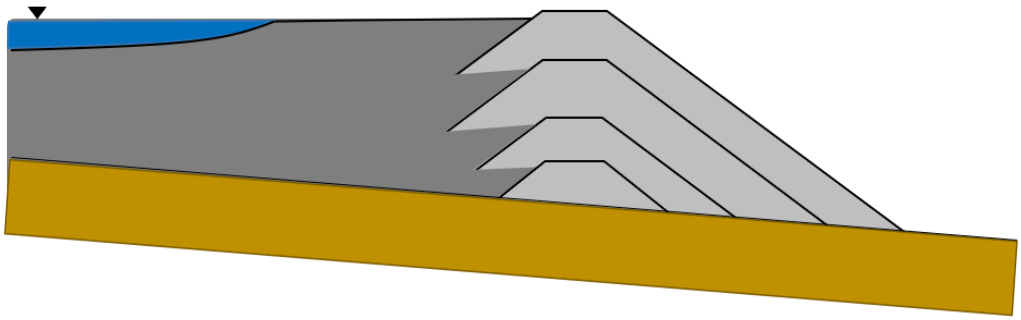

Figura 3.15: Secuencia de construcción del muro por eje central.

3.7. Fallas en depósitos de relaves

Las fallas en los depósitos de relaves consisten (en general) en la licuefacción y posterior liberación del volumen de relaves contenidos en ellos (o parte de este). Esto puede ser ocasionado por una falla estructural del muro de arenas o bien por un rebase del relave, sobrepasando la capacidad de almacenamiento real del depósito [10].

En base a ello, y con el fin de evaluar los distintos criterios de distancia peligrosa, la Asociación Canadiense de Depósitos (CDA por sus siglas en inglés), ha clasificado las fallas en depósitos de relaves en dos grupos: fallas en operación y fallas en condiciones hidrológicas extraordinarias [6].

3.7.1. Falla en operación

Corresponden a fallas repentinas del muro que ocurre durante la operación normal de la faena, sin ser inducido por algún evento hidrológico. Se distinguen cuatro modos de falla creíbles, de acuerdo con las guías de la CDA:

Falla de taludes

Incluye las fallas de los taludes del tipo rotacionales y traslacionales, además de la licuefacción del material componente del muro. Dentro de los factores técnicos relevantes al momento de evaluar este mecanismo, están la resistencia del material constituyente del muro, la solicitación sísmica del área, el potencial de licuefacción (medidas del nivel freático, sistemas de drenaje) y el monitoreo de la construcción del muro.

Falla de fundación

Este modo de falla incluye las fallas de deslizamientos ocasionadas por deficiencias en el terreno de fundación. Este mecanismo se asocia a la sobreestimación de la resistencia de los materiales constituyentes del muro, erosión y licuefacción del suelo de fundación o bien la presencia de planos de debilidad. Una fundación competente es definida como: gravas o arenas densas (cuya velocidad de onda “s” supere los $400\ \mathrm{m/s}$), roca de RMR > 60 o conglomerados. Si esta información no es respaldada, se deben analizar los parámetros de resistencia del suelo, la solicitación sísmica y el potencial de licuefacción.

Falla por *overtopping*

Este mecanismo de falla creíble obliga a que exista laguna operacional en contacto permanente con el muro, y que esta aumenta su nivel por sobre la revancha, liberando la laguna y relaves líquidos. En este caso, el análisis incluirá como factores técnicos: el diseño de la revancha, monitoreo de los niveles de la laguna, vulnerabilidad del sistema y operación del depósito.

Falla por erosión interna

Esta incluye la existencia del nivel freático al interior del muro, ocasionando pérdida de resistencia y vaciamiento del relave y la laguna, debido a subestimaciones de los volúmenes de infiltración y diseño de drenes y filtros. Así, se deben evaluar factores como la susceptibilidad de erosión del muro, presencia de barreras hidráulicas y monitoreo del nivel freático del muro.

3.7.2. Falla en evento hidrológico extraordinario

Corresponde a la falla por inundación natural de gran magnitud producto de eventos climáticos no frecuentes. Este análisis debe considerar los eventos extremos basados en estudios de precipitaciones máximas probables (a efecto del cambio climático), que permita proyectar una nueva laguna operacional incluyendo el volumen de agua que aportaría dicho evento, considerando obras de emergencia como túneles o vertederos de emergencia.

En este caso, el modo de falla creíble existente es la falla por *overtopping*, que considera el volumen de la laguna más una fracción del relave escurriendo aguas abajo del depósito.

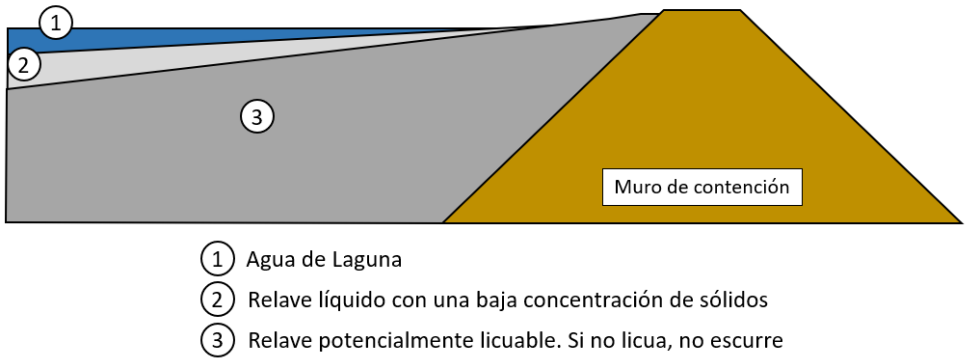

Figura 3.16: Volúmenes depositados según tipo de escurrimiento, modificado de Codelco (2018).

4. MODELOS NUMÉRICOS Y ANÁLISIS DIMENSIONAL

Determinar analíticamente las soluciones a las ecuaciones que describen el movimiento de fluidos en geometrías complejas, es prácticamente imposible, dada la complejidad de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, por lo que se requiere de la ayuda del análisis numérico aplicado con herramientas computacionales para resolver los campos de velocidad y presión.

En este capítulo se presentarán las ecuaciones fundamentales que son parte del entendimiento del movimiento de fluidos, basados en los principios físicos clásicos y cómo las herramientas computacionales son un fuerte apoyo para la resolución de este tipo de problemas que, matemáticamente, son muy complejos de tratar.

4.1. Modelos que rigen el movimiento de fluidos

Una de las principales características de los fluidos es su complejidad para describir su movimiento. Las leyes fundamentales por las que se rige su dinámica se deducen a partir del principio de conservación de la masa, la segunda ley de Newton y la primera ley de la termodinámica. Para algunos sistemas presentes en ingeniería, el flujo de fluidos se supone incompresible (la densidad del fluido permanece constante) e isotérmico (el gradiente de temperatura es despreciable), por lo que el campo de temperatura no desempeña una gran función para estos casos, omitiendo el análisis por conservación de energía. De este modo, la ecuación de continuidad y la conservación de la cantidad de movimiento entregan la información suficiente sobre el campo de velocidad y la presión del sistema [25].

Así, para un problema de escurrimiento en tres dimensiones, el problema se reduce a resolver cuatro ecuaciones (una escalar, para la conservación de masa y tres vectoriales para la conservación de la cantidad de movimiento) para cuatro incógnitas (la presión p y las tres componentes cartesianas de la velocidad u, v y w).

Otra característica de estos sistemas de ecuaciones es que todas están acopladas, vale decir, las variables (o algunas de ellas) están en las cuatro ecuaciones, por lo que el sistema debe resolverse simultáneamente para todas las incógnitas. Además, se deben especificar las condiciones de frontera e iniciales para cada variable en todos los límites del dominio de flujo, considerando entradas, salidas y paredes. Y si el flujo de estudio no es estacionario, debe llevarse la solución a lo largo del tiempo conforme el campo de flujo cambie.

4.1.1. Ecuación de la conservación de la masa

A partir del análisis de un pequeño volumen de control como el de la **Figura 4.1**, el principio de conservación de la masa establece que el flujo másico neto que ingresa a este es equivalente a la rapidez de cambio de la masa del elemento.

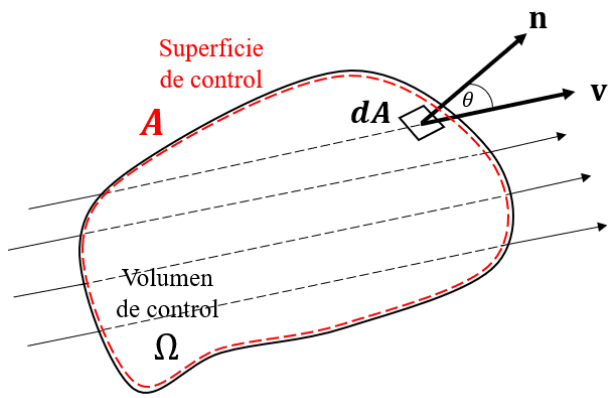

Figura 4.1: Volumen y superficie de control para el análisis integral de conservación.

Aplicando el teorema del transporte de Reynolds para la masa, el principio se describe como sigue:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{\Omega} \rho d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \oiint_{A} \rho\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \tag{4.1}$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss-Ostrogradsky, aplicado a la expresión (4.1):

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{v} \right) d\Omega = 0 \tag{4.2}$$

Finalmente, en términos diferenciales y a partir de la ecuación (4.2), se desprende la ecuación diferencial de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{4.3}$$

En el caso de flujos incompresibles, donde la densidad se supone constante en todo el dominio cuando la partícula se desplaza ($\partial \rho / \partial t = 0$), se cumple:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \tag{4.4}$$

Esto es, la divergencia de la velocidad es cero para todo flujo incompresible. Este es el caso más simple de la ecuación de continuidad, aplicable únicamente a flujos incompresibles.

4.1.2. Ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento

Para determinar la descripción completa del movimiento de fluidos, la ecuación (4.4) es insuficiente dada la cantidad de incógnitas que presenta. La conservación de la cantidad de movimiento, deducida desde la segunda ley de Newton aplicada al volumen de control de la **Figura 4.1**, entrega la información tensorial que permite la deducción de un nuevo sistema de ecuaciones que completa el estudio descriptivo del movimiento de fluidos.

La ley enuncia que la tasa de incremento de la cantidad de movimiento en una partícula fluida es igual a la suma de fuerzas aplicadas sobre dicha partícula:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \, \mathbf{v} d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} d\Omega + \oiint_{A} \mathbf{v} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b \tag{4.5}$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la expresión (4.5):

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} (\rho \mathbf{v}) \right) d\Omega = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b \tag{4.6}$$

Donde $\mathbf{F}_s$ son las fuerzas de superficie (debidas a la presión y esfuerzos viscosos) y $\mathbf{F}_b$ las fuerzas de cuerpo (principalmente la ejercida por gravedad).

Así, considerando estos conceptos, la ecuación de la conservación de momentum, en su forma diferencial queda:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial \mathrm{t}} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\rho\mathbf{v}) = -\boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{\nabla}\cdot\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}} + \rho\mathbf{g} \tag{4.7}$$

A diferencia de la conservación de la masa, la ecuación (4.7) es una ecuación vectorial, con tres componentes cartesianas x, y y z.

La simplificación de este sistema para fluidos newtonianos fue propuesta primeramente por Claude-Louis Navier y desarrollada por Gabriel Stokes, en el sistema fundamental de la fluidodinámica conocido como las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla}p + \rho\mathbf{g} + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} \tag{4.8}$$

Esta ecuación vectorial, permite determinar para todas las componentes cartesianas, polares o esféricas, los campos de velocidad y presión en cada punto del dominio para el flujo de fluidos newtonianos. Para el caso de fluidos no newtonianos, el problema se reduce a determinar la conservación de movimiento para viscosidad variable, determinada por la ecuación (4.7).

En síntesis, el conjunto entre la ecuación de continuidad y las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento, componen la base teórica de la dinámica de fluidos. La complejidad radica en que este sistema de ecuaciones en derivadas parciales es de segundo orden, no lineal e inestable, por lo que su solución analítica no está definida para flujos turbulentos, no desarrollados o no irrotacionales. Por esta razón, es que el análisis numérico toma una fuerte importancia para entregar las soluciones numéricas aproximadas para sistemas de flujos complejos.

En la siguiente sección se discutirá la importancia del cálculo numérico, el cual es la base matemática del desarrollo de la presente memoria, aplicada al modelamiento con herramientas CFD.

4.2. Fluidodinámica Computacional (CFD)

La Fluidodinámica Computacional (CFD por sus siglas en inglés) es el análisis numérico que resuelve las ecuaciones continuas para el escurrimiento de fluidos, transferencia de calor, etc., pudiendo incorporar fenómenos asociados a reacciones químicas. Esta técnica es muy sofisticada y ampliamente usada en problemas industriales y no industriales en las diversas áreas de la ingeniería.

Dado su enorme desarrollo en la actualidad, es una herramienta muy frecuente para el diseño de productos y procesos que involucran la presencia de fluidos y transferencias de calor y masa. Tiene como principales ventajas permitir el estudio y control de sistemas que no pueden ser estudiados directamente, ya sea por las dimensiones del dominio o condiciones extremas y estudiar sistemas bajo condiciones de peligro y un ilimitado nivel de detalle en sus resultados [34].

La solución a los distintos sistemas es llevada a cabo mediante el análisis numérico. De los métodos más utilizados para este tipo de análisis, están los elementos finitos (o MEF) y los de volúmenes finitos (o MVF, una variante del método de diferencias finitas), estos últimos los más aplicados en sistemas fluidos. Estos mecanismos definen su eficiencia y precisión mediante la estabilidad y convergencia de sus soluciones y la propagación del error numérico en las soluciones que le siguen. Ambos presentan la siguiente estructura:

Discretización del dominio

La región espacial y temporal del estudio debe ser simplificada a un sistema de celdas compuesta por puntos (sistema de mallas donde las variables se evalúan tanto en las caras como en el centro de cada volumen) y niveles de tiempo. La simplificación de dicha geometría depende tanto del sistema a modelar (qué tan simple o complejo se desea el modelo), como también de los recursos computacionales presentes.

Discretización de las Ecuaciones Diferenciales Parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que describan el estudio, presentadas en la sección anterior, deben ser sustituidas por un sistema de ecuaciones algebraicas que se resolverán en cada celda de la malla en todo el dominio, dado que los algoritmos utilizados en estas herramientas utilizan operadores elementales para su ejecución. Esta discretización se emplea con el fin de

desarrollar las ecuaciones fundamentales en cada celda de la malla creada como base de la discretización del dominio.

Especificar el algoritmo

Se debe asegurar que las soluciones entregadas por celda a cada nivel de tiempo, debe estar descrita con detalle, por lo que el usuario escoge el algoritmo que más se adapta a la solución del sistema. Este paso es dependiente del grado de precisión que presentan los distintos algoritmos que ofrecen los distintos códigos.

La **Figura 4.2** esquematiza de manera simplificada como trabaja un código CFD [26].

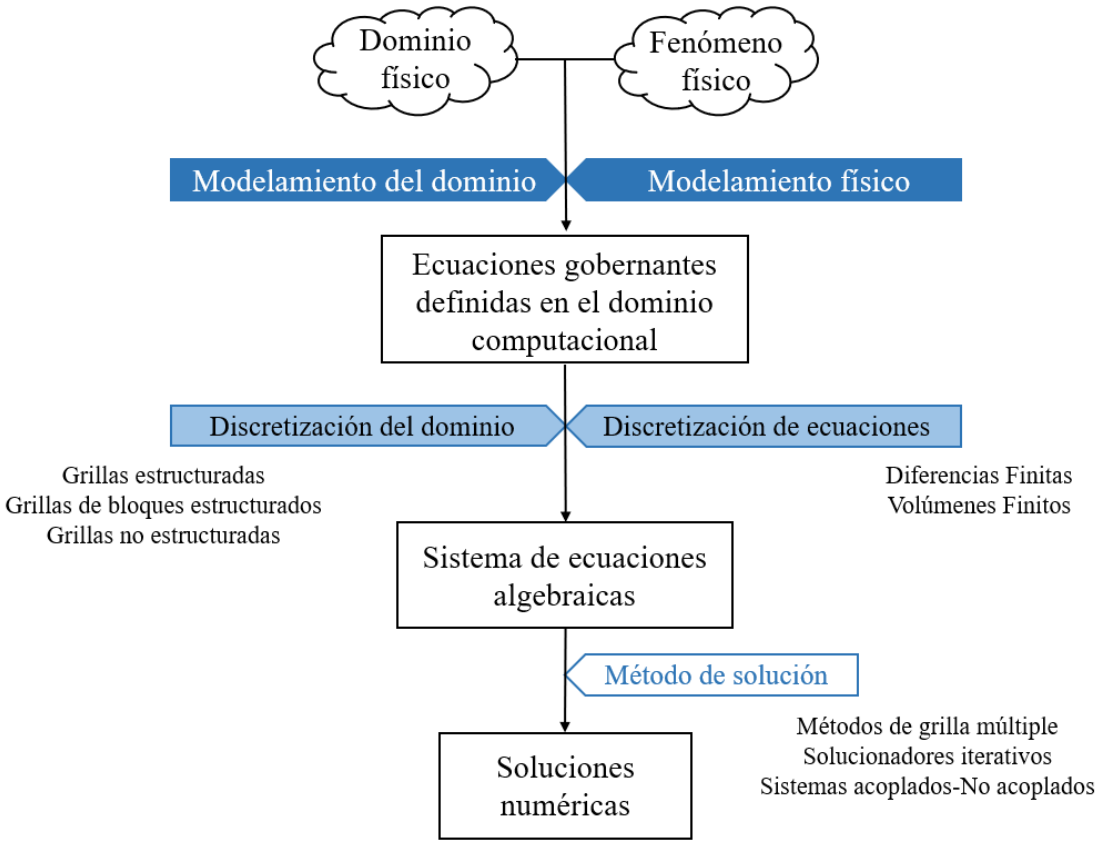

Figura 4.2: Estructura general de trabajo de un código CFD, modificado de Moukalled (2016).

Esta estructura, que presentan los distintos códigos CFD, es simplificada en tres módulos bien definidos que tienen en común, enfatizados en el capítulo 5 para el software FLUENT y descritos como siguen:

Pre-Procesamiento

Consiste en la entrada del problema de flujo en el programa CFD, donde se define la geometría de la región de interés: el dominio computacional sobre el cual se realizará el análisis. Una vez construida la geometría, esta se discretiza en elementos que componen la malla: la grilla de celdas (volúmenes de control o elementos). Se define, además, el fenómeno físico a modelar junto con las propiedades del fluido y las condiciones de borde apropiadas para la resolución del sistema de ecuaciones.

La solución a los problemas de flujo es definida en nodos al interior de cada celda, por lo que mientras mayor sea el número de elementos del modelo, mayor será la precisión de sus resultados, pero mayor será el consumo de recursos computacionales y tiempo de simulación.

***Solver* o solucionador**

El *solver* tiene la finalidad de entregar soluciones numéricas al sistema definido en el pre-procesamiento, otorgado por los algoritmos de entrada (que discretizan las matemáticas del fenómeno) y las condiciones de borde del modelo. Estas ecuaciones se resuelven por iteración en cada celda del dominio y en cada nivel de tiempo definido por el usuario.

Post-Procesamiento

Este módulo consiste en la visualización de los resultados del modelo simulado, como gráficas entre variables de interés, campos vectoriales, gráficas de contorno, animaciones, manipulación visual, además de entregar información alfanumérica para la manipulación por parte del usuario en otros procesadores de datos (Excel, Python, MATLAB®, etc.).

Dentro de la gama de software que ejecutan los métodos numéricos para la resolución del flujo de fluidos, diversos desarrolladores ofrecen productos como FLUENT®, CFX®, OpenFOAM®, HELYX®, FLO2D®, Flow-3D®, que varían en costos, método de desarrollo de algoritmos, problemas de aplicación (flujos simples, complejos, bidimensionales, tridimensionales, etc.).

Para el desarrollo de la presente memoria, se utilizará el paquete FLUENT® de ANSYS®, dada la amplia variedad de modelos que incluye y la facilidad para evaluarlos en el análisis del escurrimiento de fluidos no newtonianos, aplicados a la metodología del estudio, definida en el capítulo 6 de este documento.

4.3. Teorema π de Vaschy-Buckingham

El análisis tanto experimental como numérico permite la manipulación de grandes volúmenes de datos producto de la ejecución física o computacional de un modelo. Estos resultados suelen ser expresados en forma de curvas, que permiten visualizar el fenómeno a partir de las variables que lo involucran y cómo se relacionan estas mismas. El análisis dimensional es una técnica que permite hacer esta acción y su principal motivación es generar análisis gráficos económicos y compactos a partir de la información que entregan los resultados de los parámetros de la experimentación [7].

El teorema Π, enunciado por Aimé Vaschy en 1892 y desarrollado por Edgar Buckingham en 1914, es una herramienta del análisis dimensional que reduce una serie de variables dimensionales, en grupos adimensionales. Se enuncia como sigue: si un proceso físico satisface el principio de homogeneidad dimensional y relaciona n variables dimensionales, este proceso se puede describir mediante una relación de k parámetros adimensionales (llamados parámetros Π) obtenidos desde j dimensiones primarias (sistema MLT). Siempre se cumple $k = n - j$.

Esta técnica se reduce a forzar productos adimensionales a partir de las variables repetitivas con los parámetros restantes, evaluados según sus dimensiones físicas (masa, longitud y tiempo). De este modo, se generan los términos Π, dependientes e independientes, cumpliendo la siguiente forma:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_k) \tag{4.9}$$

El procedimiento para llevar a cabo el análisis dimensional consiste en:

- Escribir la forma funcional de la variable dependiente que depende de las $n - 1$ variables independientes.
- Identificar j variables repetitivas, las que se combinarán con el resto de las variables para encontrar cada término π. Estas variables no deben ser términos π por sí solas, y deben incluir las dimensionas primarias.
- Generar cada término π combinando las variables repetitivas con el resto de las variables.
- Escribir la forma funcional de los $n - j$ términos π adimensionales (ecuación 4.9).

5. INTRODUCCIÓN A FLUENT®

FLUENT® es un programa CFD de simulación de fluidos distribuido por ANSYS®, utilizado para la predicción de escurrimientos (laminares o turbulentos, compresibles o incompresibles), transferencias de calor y masa, reacciones químicas y otros procesos [2].

Este paquete ofrece soluciones para estos sistemas usando una amplia variedad de modelos físicos y matemáticos de turbulencia, de flujos multifásicos o discretos, transferencia de calor, combustión y optimización de procesos, haciendo uso del método de volúmenes finitos para resolver los sistemas de ecuaciones presentados previamente.

El software trabaja mediante un flujo de trabajo ordenado que ofrece al usuario herramientas y módulos que abarcan desde el pre-procesamiento con la creación de la geometría con sus herramientas CAD (extensión *Design Modeler*) y el mallado de esta (extensión *Meshing*), el *solver* FLUENT, que permite los ajustes y discretización del cálculo, y el post-procesamiento (extensión CFD-Post) que entrega facilidades para la manipulación de los resultados gráficos, visuales y animados.

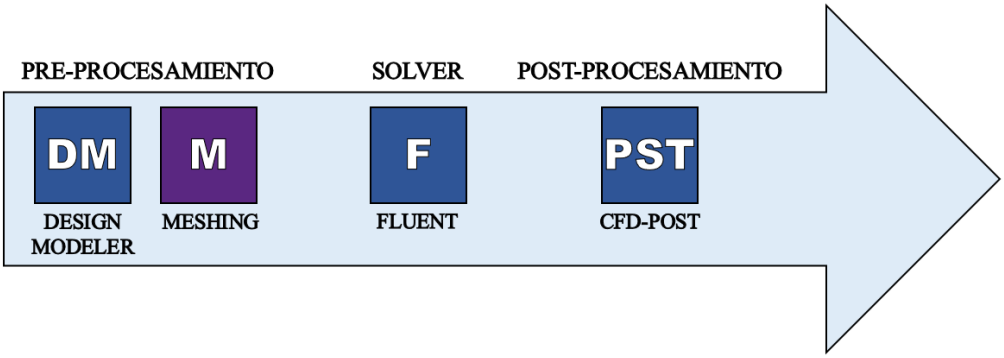

Figura 5.1: Esquema general de trabajo en un proyecto FLUENT.

En este capítulo se describen los rasgos generales de la modelación multifásica y los algoritmos ofrecidos por el software para la discretización de las EDP que gobiernan el flujo de fluidos, desde la perspectiva conceptual y matemática, aplicada en esta memoria al estudio de un sistema de dos fases definidas.

5.1. Modelos multifásicos

En un flujo multifásico, una fase puede ser definida como una clase de material identificable que tiene una respuesta inercial propia e interactúa con el flujo en el campo donde está inmersa. En el caso de estudio, las fases componentes del análisis son gas-líquido, compuesta por aire (fase gas) y relave (fase fluida) separados por una interfase muy bien definida, tal como ocurre en el flujo de fluidos con superficie libre. Una de las aproximaciones otorgadas por FLUENT® es la denominada aproximación Euler-Euler, en donde las diferentes fases se tratan matemáticamente como continuos inmiscibles [3].

Como el volumen de una fase no puede ser ocupado por las otras fases, se introduce el concepto de fracción de volumen fásico α (no confundir con la fracción de volumen granular ϕ). Se supone que estas fracciones de volumen son funciones continuas del espacio y tiempo y su suma es siempre igual a uno. Dentro de los modelos proporcionados por FLUENT® para el estudio de flujos multifásicos, se encuentra el modelo del volumen de fluido (VOF), el modelo de mezcla y el modelo euleriano. Las siguientes subsecciones enfatizarán en la teoría tras el modelo VOF, el cual tiene aplicación directa al estudio.

5.1.1. Modelo del Volumen de Fluido (VOF)

Este modelo es una técnica de seguimiento de superficie aplicada a una malla fija en flujos multifásicos. Está diseñado para dos o más fluidos inmiscibles donde la posición de la interfase entre los fluidos es de interés. En el modelo VOF, los fluidos comparten un único conjunto de ecuaciones de momentum, y la fracción de volumen de cada uno de los fluidos en cada celda computacional se rastrea a través del dominio. Es uno de los modelos más utilizados en flujos de superficie libre (fase atmósfera y líquida) y flujo de fluidos después de la ruptura de una presa.

La formulación de este modelo se basa en el hecho de que dos o más fluidos (o fases) no se interpenetran. Para cada fase adicional que se agregue al modelo, se introduce una variable: la fracción de volumen de la fase α en la celda del dominio. En cada volumen de control, las fracciones de volumen de todas las fases siempre suman uno.

Las propiedades son compartidas por las fases y representan valores promediados en un volumen determinado, siempre que la fracción de volumen de cada una de las fases sea conocida en cada ubicación del dominio. Así, las variables y las propiedades en cualquier celda dada son puramente representativas de una de las fases, o representativas de una mezcla de las fases, dependiendo de

los valores de la fracción de volumen. En otras palabras, si la fracción de volumen del q-ésimo fluido se denota como α_q, entonces se tienen tres posibles condiciones:

$$\begin{aligned} \alpha_q &= 0, \text{ la celda no contiene el fluido } q \\ \alpha_q &= 1, \text{ la celda está llena del fluido } q \\ 0 < \alpha_q &< 1, \text{ la celda contiene la interfase entre los fluidos} \end{aligned} \tag{5.1}$$

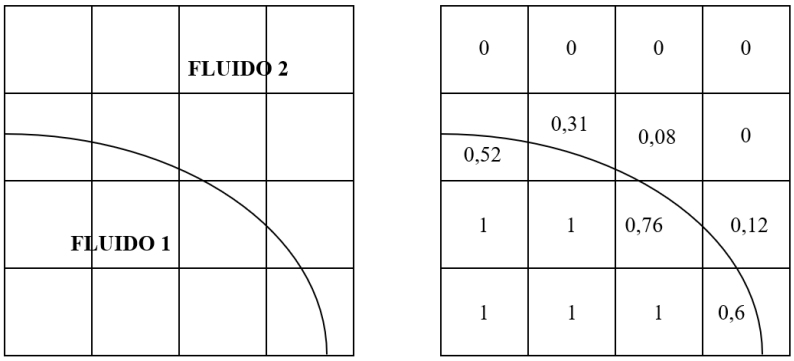

Figura 5.2: Esquema genérico de la fracción fásica α_1.

Para la densidad, el método VOF permite definirla en cada una de las celdas considerando dos fases 1 y 2, y si la fracción de volumen de la segunda fase es la rastreada:

$$\rho_{celda} = \alpha_2 \rho_2 + (1 - \alpha_2)\rho_1 \tag{5.2}$$

De la misma forma, se pueden definir las distintas propiedades del fluido para cada uno de los volúmenes de control.

5.1.2. Ecuación para la fracción de volumen y cantidad de movimiento

El seguimiento de la interfase entre los fluidos se logra desarrollando la ecuación de continuidad aplicada a la fracción de volumen de una de las fases. Así, para la fase q:

$$\frac{1}{\rho_q}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_q \rho_q\right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\alpha_q \rho_q \mathbf{v}_q\right)\right) = \frac{1}{\rho_q}\sum_{p=1}^{n}\left(\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}\right) \tag{5.3}$$

Donde $\dot{m}_{pq}$ es la masa transferida de la fase p a la fase q, y $\dot{m}_{pq}$ es la masa transferida de la fase q a la fase p. [3]

Por último, la ecuación de movimiento se calcula a través de todo el dominio para obtener el campo de velocidad que comparten las fases. Esta ecuación es dependiente de las fracciones de volumen de todas las fases, como también de sus densidades y viscosidades.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = -\boldsymbol{\nabla} p + \rho \mathbf{g} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mu(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^{\mathbf{T}})\right) \tag{5.4}$$

5.2. Métodos de solución numérica

FLUENT® ofrece dos métodos numéricos para la resolución de los sistemas: la aproximación basada en la presión y la aproximación basada en la densidad [3]. Usualmente, se asocia el primer método para flujos lentos incompresibles, mientras que el segundo para flujos rápidos compresibles [3]. Ambos se utilizan para resolver las ecuaciones de conservación de masa y momentum basados en la técnica del volumen de control, que consiste en:

- Dividir el dominio computacional en volúmenes discretos mediante las herramientas de mallado computacional.
- Integrar las ecuaciones dentro de cada volumen construyendo ecuaciones algebraicas que desarrollan las variables dependientes (velocidad, presión, temperatura, y otras variables escalares).
- Linealización y solución de las ecuaciones discretizadas, para actualizar los valores de las variables dependientes.

5.2.1. Algoritmo basado en la presión

Este método emplea un algoritmo en el que la restricción de la conservación de la masa del campo de velocidad se logra resolviendo una ecuación de corrección de la presión. Esta se deriva de las ecuaciones de continuidad y momentum de tal manera que el campo de velocidad satisface la continuidad. Dado que las ecuaciones no son lineales y están acopladas entre sí, el proceso implica iteraciones en las que todo el conjunto de ecuaciones se resuelve repetidamente hasta que la solución converge. FLUENT® proporciona distintos algoritmos basados en la presión: SIMPLE, SIMPLEC, PISO, entre otros. Para cálculos de estado estacionario generalmente se usa SIMPLE o SIMPLEC (mayor velocidad en encontrar la convergencia de la solución), mientras que se recomienda PISO para cálculos transientes con grandes pasos de tiempo y mallas asimétricas.

La **Figura 5.3** muestra el flujo general de trabajo de este tipo de algoritmos.

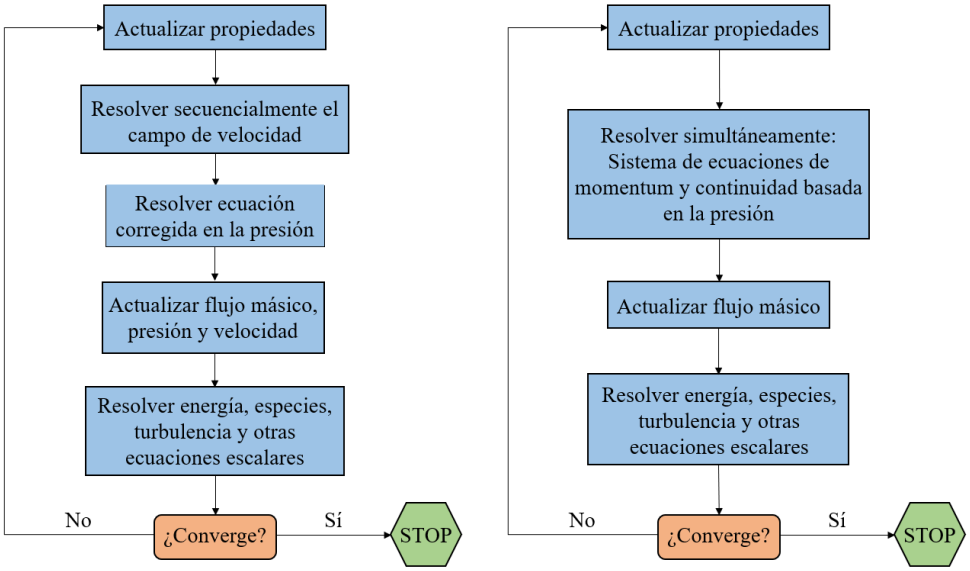

Figura 5.3: Flujo de trabajo del algoritmo segregado (izquierda) y acoplado (derecha) basados en la presión.

5.2.2. Algoritmo basado en la densidad

El solucionador basado en la densidad resuelve las ecuaciones de continuidad, momentum y (cuando corresponde) el transporte de energía y especies simultáneamente. Debido a que las ecuaciones no son lineales (y están acopladas), se deben realizar varias iteraciones del bucle de solución antes de obtener una solución convergente, tal como el método anterior. La **Figura 5.4** muestra el esquema general de este método.

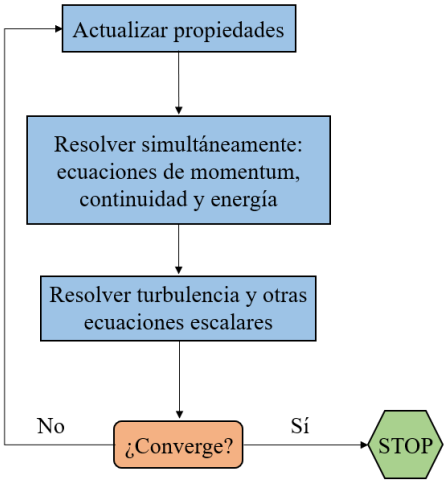

Figura 5.4: Flujo de trabajo del algoritmo basado en la densidad.

6. METODOLOGÍA

6.1. Análisis dimensional

A partir del teorema Π de Vaschy-Buckingham, enunciado en la sección 4.3, se determinan los parámetros adimensionales que serán la base y objetivo del presente estudio, con el fin de establecer las relaciones funcionales que existen entre ellas. Los resultados de este análisis dimensional pueden además ser utilizados para generar la experimentación física a escala acorde a los parámetros estudiados en este trabajo, cuyo objetivo es reducir y simplificar el análisis de múltiples variables dentro de un sistema fluido complejo tal como lo recomienda Islam [18].

Tabla 6-1: Variables utilizadas para el análisis dimensional.

Parámetro	**Símbolo**	**Unidades**	**Dimensiones**
Distancia máxima	$D_{máx}$	[m]	[L]
Altura de columna	H_0	[m]	[L]
Tensión de fluencia	τ_0	$[\mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-2}}]$	$[\mathrm{ML^{-}T^{-2}}]$
Densidad del fluido	ρ	$[\mathrm{kg\ m^{-3}}]$	$[\mathrm{ML^{-3}}]$
Velocidad característica	V	$[\mathrm{m\ s^{-1}}]$	$[\mathrm{LT^{-1}}]$
Viscosidad	μ	$[\mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-1}}]$	$[\mathrm{ML^{-}T^{-}}]$
Pendiente	θ	[rad]	$-$

Donde las variables geométricas se definen como $D_{máx}$, la distancia máxima recorrida por el relave desde la ruptura del muro hasta su punto de detención, H_0 la altura inicial de la columna de relave, equivalente a la altura del muro menos la revancha, y θ la pendiente media del terreno aguas abajo.

Aplicando el teorema de productos adimensionales, desarrollado en Anexo A: Análisis Dimensional, la expresión general queda:

$$\frac{D_{máx}}{H_0} = f\left(\frac{\tau_0}{\rho V^2}, \frac{\rho H_0 V}{\mu}, \theta\right) \tag{6.1}$$

La expresión (6.1) puede desglosarse por parámetro, para determinar la funcionalidad de cada variable entre sí, a partir de las simulaciones computacionales que permiten obtener los gráficos para cada variable, y encontrar la(s) ecuación(es) que describan el fenómeno físico de acuerdo con las relaciones obtenidas para cada parámetro. El término de la izquierda de la igualdad es la distancia máxima adimensional, el primer término de la función es el coeficiente de fluencia o tensión de fluencia adimensional, el segundo término el número de Reynolds, el cual para efectos del estudio se hará referencia al número de Reynolds modificado (definido en la sección 3.3), y el último término la pendiente de la superficie donde se produce el flujo. Por lo tanto, las relaciones de interés quedan definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D^* &= f_1(\tau_2) \\ D^* &= f_2(Re_2) \\ D^* &= f_3(\theta) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Esta expresión será la base del modelo final, a partir de la cual se determinarán las relaciones funcionales de dichos productos para generar una expresión matemática simple y semi-empírico como propuesta al cálculo de la distancia de escurrimiento.

6.2. Geometría y mallado

Para las simulaciones ejecutadas se construye mediante la extensión CAD de FLUENT® (*Design Modeler*) un canal rectangular abierto a la atmósfera a partir del cual se analizará el escurrimiento del fluido. Este dominio será utilizado para cada una de las simulaciones llevadas a cabo en todo el estudio. A continuación, se describe y se caracteriza la geometría.

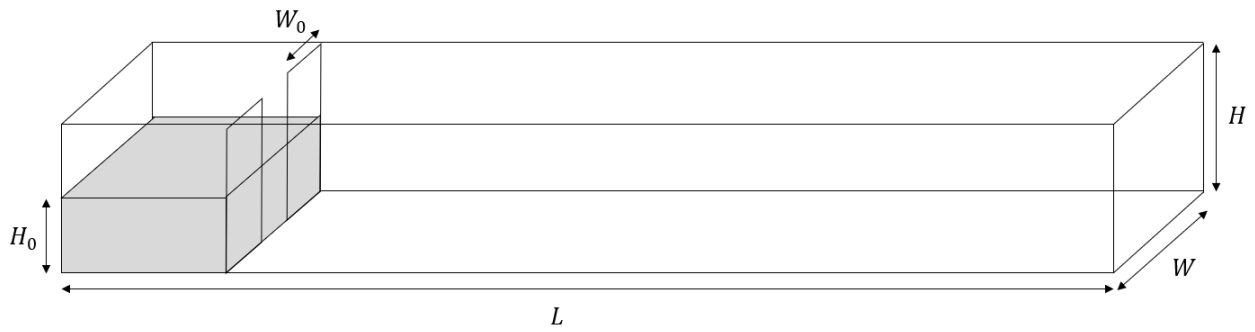

Figura 6.1: Esquema de la geometría utilizada en el estudio.

La geometría cuenta con una barrera que contiene el fluido, el cual a partir del instante $t = 0$ es liberado a través de un espacio generado, tomando el supuesto de que dicha brecha ya está desarrollada al momento de la inicialización del modelo. Así, el fluido comienza a escurrir libremente por la superficie del canal limitado por los bordes de este, hasta su detención, a distintos ángulos de inclinación de este.

Las dimensiones de la geometría están detalladas en la **Tabla 6-2**, donde L es la longitud total del canal, a lo largo del cual es medida la distancia máxima, W es el ancho total del canal, W_0 el ancho total de cada una de las barreras de contención del fluido, H la altura total del recipiente, y L_0 y H_0 la longitud y el alto inicial respectivamente de la columna de fluido.

Tabla 6-2: Dimensiones de la geometría utilizada en el estudio.

Parámetro	**Valor**
Largo total L	$30\ [m]$
Ancho total W	$0.5\ [m]$
Ancho barrera W_0	$0.2\ [m]$
Altura total H	$0.5\ [m]$
Largo columna fluida L_0	$0.6\ [m]$
Altura columna fluida H_0	$0.3\ [m]$

Para la discretización del dominio, se utiliza el mallado poliédrico tipo panal (módulo *Meshing* de FLUENT®) con elementos de 5 [cm] de tamaño, abarcando una red de 475.408 elementos o celdas de malla en total.

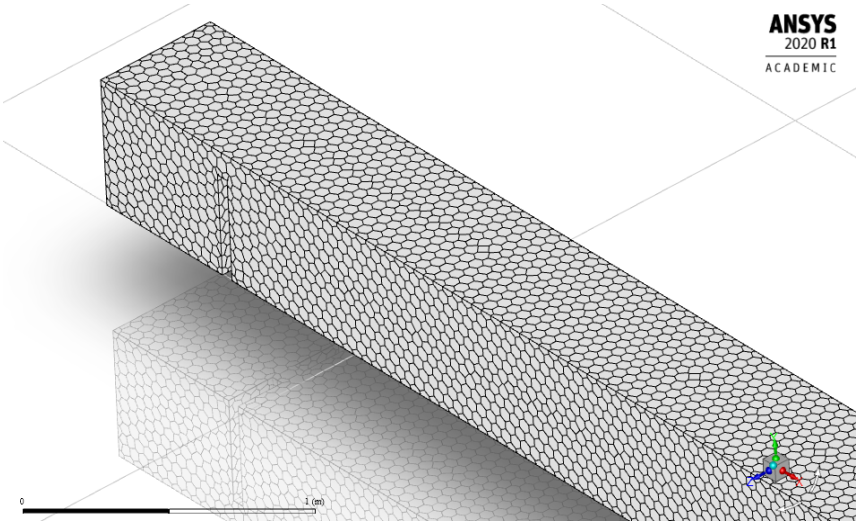

Figura 6.2: Mallado poliédrico utilizado para las simulaciones. Obtenido de ANSYS 2020R1.

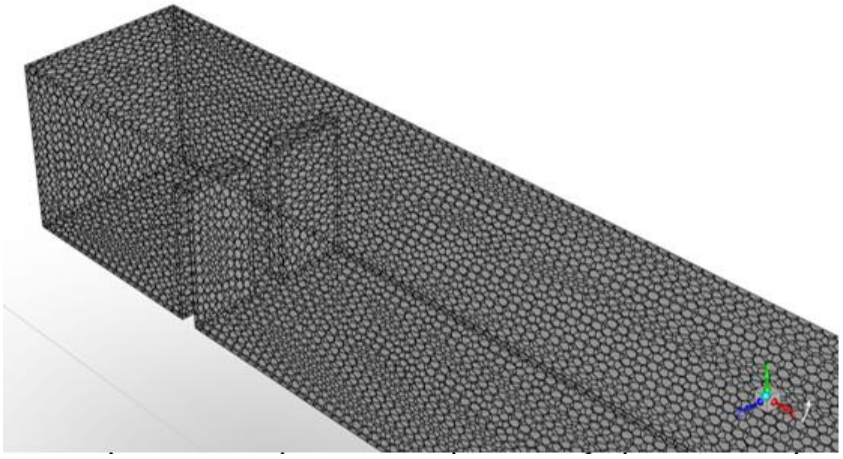

Figura 6.3: Vista interna de la malla, donde se visualizan los muros de contención del fluido.

La decisión del tamaño de celda, el tipo de geometría utilizada y los ajustes de la simulación computacional (descritos en el siguiente capítulo), se debe a la previa calibración del modelo. Esto es, se consideraron distintos tamaños de elementos de malla (3 [cm], 5 [cm] y 10 [cm]) y algoritmos matemáticos de resolución (SIMPLE, PISO, SIMPLEC) y, a partir de los resultados de las experimentaciones de Liu [21], se comparan los resultados obtenidos con cada configuración malla-algoritmo para esperar resultados confiables pero aplicadas al presente estudio en ausencia de experimentación física directa.

6.3. Simulaciones y casos de estudio

En total se realizan 104 simulaciones computacionales, variando la tensión de fluencia en un rango $[0.1 - 1000]$ Pa, abarcando un amplio intervalo de valores (desde relaves diluidos hasta fluidos de alta viscosidad) y enfatizando en el intervalo $[5 - 100]$ Pa, rango en el que se encuentran relaves espesados depositados en tranques más frecuentes en la industria nacional. El fluido utilizado sigue el modelo de viscosidad no-newtoniana de Herschel-Bulkley de densidad constante igual a $1800\ [\mathrm{kg/m^3}]$, y cumple la siguiente estructura:

$$\tau = \tau_0 + 0.4\dot{\gamma}^{0.8} \tag{6.3}$$

El otro parámetro que se evalúa es la pendiente del fondo del canal, tomando valores desde los $0°$ hasta valores altos de $30°$, enfatizando el intervalo $[0° - 5°]$ para pendientes naturales.

Esta variable se modifica alterando las componentes cartesianas de la aceleración de gravedad, cuyo módulo se supone como $9.81\ [\mathrm{m/s^2}]$ en dirección al eje y-cartesiano.

La **Figura 6.4** es un esquema ficticio del dominio con las condiciones definidas para la aceleración de gravedad.

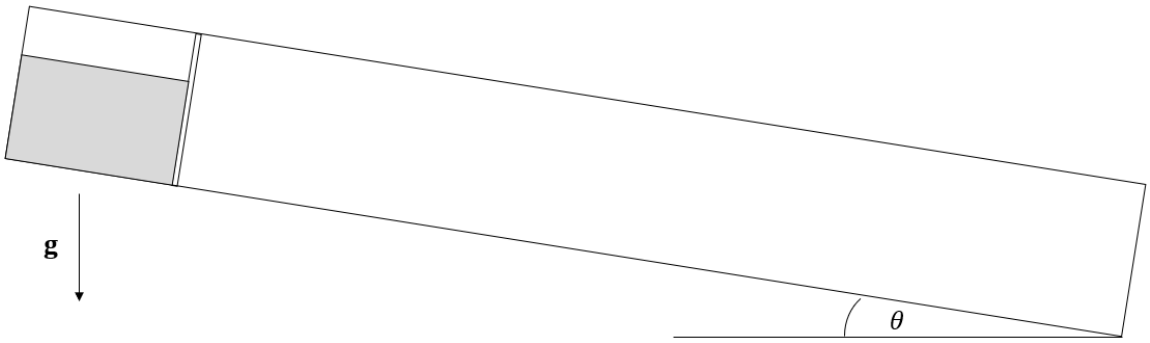

Figura 6.4: Esquema de perfil utilizado para el análisis de pendiente.

6.4. Distancia de escurrimiento y análisis de datos

Una vez realizadas las simulaciones, se extraen los datos en archivos ASCII para ser procesados en MATLAB® y generar los gráficos correspondientes a cada variable de la expresión (6.2).

Determinar cuándo el fluido está completamente detenido es un trabajo complejo ya que a pesar de que pareciera que el fluido ha dejado de fluir, este experimenta movimiento por el simple hecho de su composición interna. Por ende, la distancia peligrosa se considera para el estudio como la distancia horizontal máxima que alcanza la interfase una vez llegue a una velocidad aproximada a la milésima parte de la velocidad inicial del flujo, asumiendo que, al momento del colapso, toda la energía potencial acumulada del fluido se transforma en energía cinética al fluir, enfatizando que la simulación inicia con el escurrimiento una vez desarrollada la falla.

Por otra parte, la interfase relave-aire se determina a partir de los datos de fracción de relave, considerando los valores de fracción fásica (porcentaje de cada fase en una celda de malla) en el rango $0.4 \leq \alpha \leq 0.6$ para tener un intervalo más adecuado al realizar el análisis del punto en que ambas fases convergen dentro de la celda, es decir, una interfase bien definida.

7. AJUSTES DE LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

Definida la discretización del dominio físico (geometría y malla), los ajustes a utilizar en cada una de las simulaciones juegan un rol importante en la precisión de los resultados, además de mejorar el modelo para su óptima representación. Las siguientes tablas exhiben las características del ajuste del modelamiento en FLUENT® de acuerdo con el orden de su interfaz.

Tabla 7-1: Ajustes generales de la simulación.

Ajustes de la sección General	
Solver	Basado en la presión
Formulación de velocidad	Absoluta
Régimen	Transiente
Gravedad	Magnitud 9.81 $[\mathrm{m/s^2}]$

Para todas las simulaciones se utiliza el método basado en la presión, dada la rapidez de sus algoritmos en alcanzar la convergencia de las soluciones, se elige además régimen transiente, aplicado para flujos en desarrollo en el tiempo. La aceleración de gravedad se define para cada caso de simulación, según lo explicado en la sección anterior.

Tabla 7-2: Descripción del modelo físico utilizado en la simulación.

Modelos físicos	
Régimen de escurrimiento	Laminar
Multifase	
Fases	Gas-líquida
Método	*Volume of Fluid*
Formulación fracción fásica	Explícita
Número de Courant	0.25

El modelo constitutivo que se utiliza es el de Herschel-Bulkley para la viscosidad, además del modelo multifase (bifásico) para aire y relave. El número de Courant queda definido por defecto del modelo, valor recomendado para alcanzar la convergencia rápida de las soluciones.

Tabla 7-3: Condiciones de borde aplicadas en la simulación.

Condiciones de borde	
Entrada	*Pressure inlet*
Salida	*Pressure outlet*
Interior	*Fluid domain*
Bordes	*Wall + No Slip*

Estas condiciones de borde son clave para la inicialización y desarrollo del modelo, lo que simula una entrada superior abierta a la atmósfera y un dominio interno del fluido el cual permite que este fluya por el canal. Los bordes sólidos el canal se imponen con las condición de muros, para que el fluido se mantenga confinado entre las paredes del canal y no escape al exterior de este y condición de no deslizamiento en la pared.

Tabla 7-4: Métodos de solución aplicados en la simulación.

Métodos de solución numérica	
Acoplamiento presión-velocidad	
Esquema	SIMPLE
Discretización espacial	
Gradiente	*Least Squares Cell Based*
Presión	PRESTO!
Momentum	*Second Order Upwind*
Fracción fásica	*Geo-Reconstruct*

Los métodos de solución aplicados en las simulaciones corresponden a los recomendados por FLUENT® para este tipo de flujos. Se utiliza principalmente el esquema SIMPLE dada su alta velocidad para alcanzar la convergencia de las soluciones del sistema, tal como lo muestra la siguiente figura:

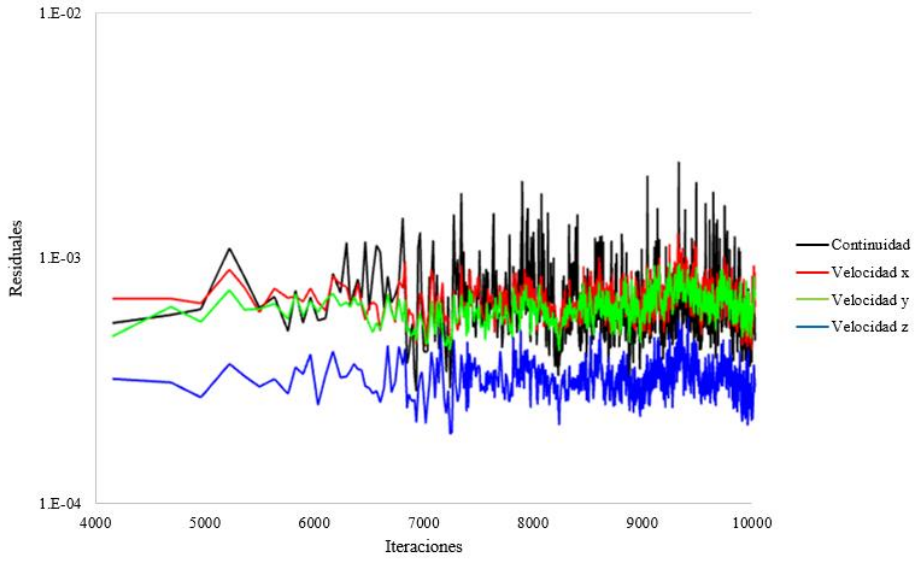

Figura 7.1: Esquema de residuales obtenidos tras 10000 iteraciones.

La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** indica que la convergencia de las s oluciones se alcanza mucho antes de las 10000 iteraciones, por lo que se aseguró que cada una de las simulaciones haya alcanzado la convergencia para validar su resultado.

Por último, se definen los parámetros temporales del cálculo de las soluciones, lo que implica un tiempo de cálculo del modelo de 50 [s] reales tras 10000 iteraciones. Se utiliza una iteración por cada paso de tiempo netamente por la capacidad limitada de los recursos computacionales, lo que no significó algún tipo de problema en los resultados finales.

Tabla 7-5: Definición de los parámetros de corrida de la simulación.

Parámetros del cálculo	
Número de pasos de tiempo	10000
Tamaño del paso de tiempo	0.005 [s]
Iteraciones por paso	1

8. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir de las simulaciones llevadas a cabo, los cuales se mostrarán en su mayoría mediante visualización gráfica y sus respectivos ajustes, herramienta otorgada por MATLAB®, e imágenes extraídas del post-procesamiento de FLUENT®. El objetivo de esta sección es mostrar los resultados y los respectivos modelos que describen las variables que influyen en el sistema en cuestión.

Esta sección se divide por parámetro de análisis de acuerdo con lo obtenido por el análisis dimensional, con una breve descripción del flujo observado en las simulaciones, y una discusión de los modelos obtenidos para las distintas variables.

8.1. Características del flujo

En la **Figura 8.1**, se observa el instante justo de inicialización del modelo ($t = 0$) que muestra el fluido confinado tras el muro. Esta condición impuesta permite corroborar lo que se busca modelar: el escurrimiento libre del fluido confinado una vez desarrollada la falla en el muro, desde la cual el fluido es liberado.

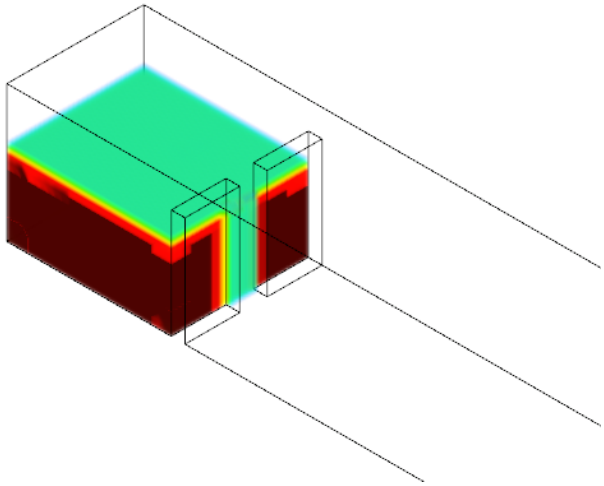

Figura 8.1: Modelo al instante de la inicialización (t=0).

Esta condición se impone de la base que el fluido presenta únicamente una acumulación de energía potencial mecánica, la que, al momento del colapso del muro, es convertida en energía cinética, que permite el movimiento continuo del fluido, y energía perdida por la fricción entre el contacto superficie-fluido que permite su detención gradual.

Una vez iniciada la corrida de la simulación, el fluido comienza a escurrir libremente, observando patrones típicos de flujo, como la expansión longitudinal y lateral del fluido mientras es vaciado el depósito. La **Figura 8.2** muestra cómo el fluido se adapta a la geometría del canal mientras fluye, y el vaciamiento de la parte anterior a los muros.

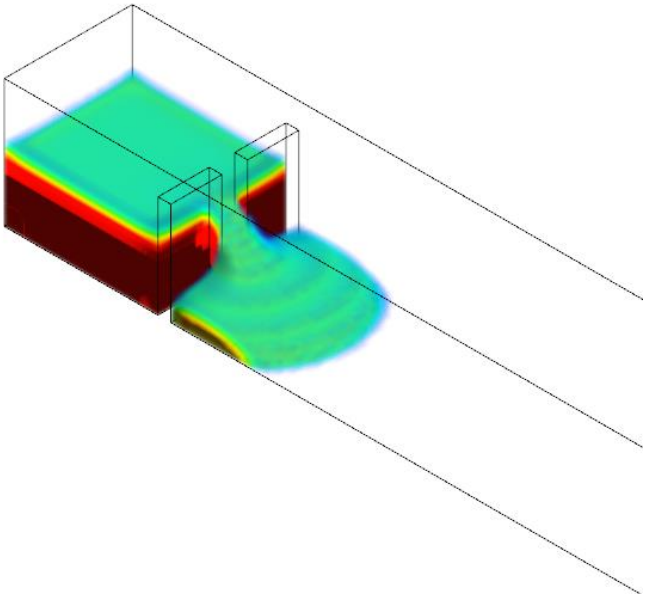

Figura 8.2: Inicio del flujo una vez iniciado el modelo.

Este flujo, representado por volumen y coloreado por efectos netamente visuales, comienza a desarrollarse por el canal, alcanzando una alta magnitud de velocidad en su inicio.

Una vez el flujo se desarrolla por completo, se observa que el fluido tiende a estabilizarse, comenzando un decaimiento paulatino y gradual de la velocidad hasta su posterior detención.

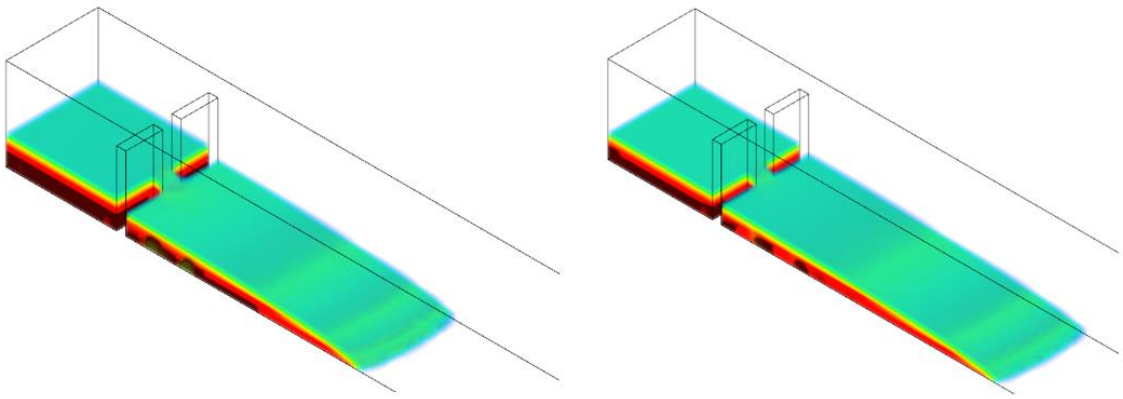

Figura 8.3: Estabilización y detención del flujo transcurrido un amplio lapso.

La **Figura 8.4** muestra los perfiles obtenidos para una simulación en específico (simulación 100, para relave de 250 [Pa] de fluencia), en distintos intervalos, que muestran el avance de la ola una vez iniciado el flujo. Este comportamiento es observado en gran parte de los fluidos modelados, en particular aquellos de baja tensión de fluencia (< 20 [Pa]). Aquellos fluidos de alta viscosidad (tipo pastas), se observa al inicio la formación de una masa fluida mayor (como en el caso $t = 2.5$ [s]) que se desplaza a muy baja velocidad.

De las simulaciones se desprende que el patrón de flujo modelado presenta la misma estructura para todos los fluidos (independiente de su tensión de fluencia), considerando que todos los modelos contaban con el mismo volumen almacenado, difieren en su patrón de velocidad media al alcanzar la estabilización del flujo en menos tiempo aquellos fluidos de alta tensión de fluencia.

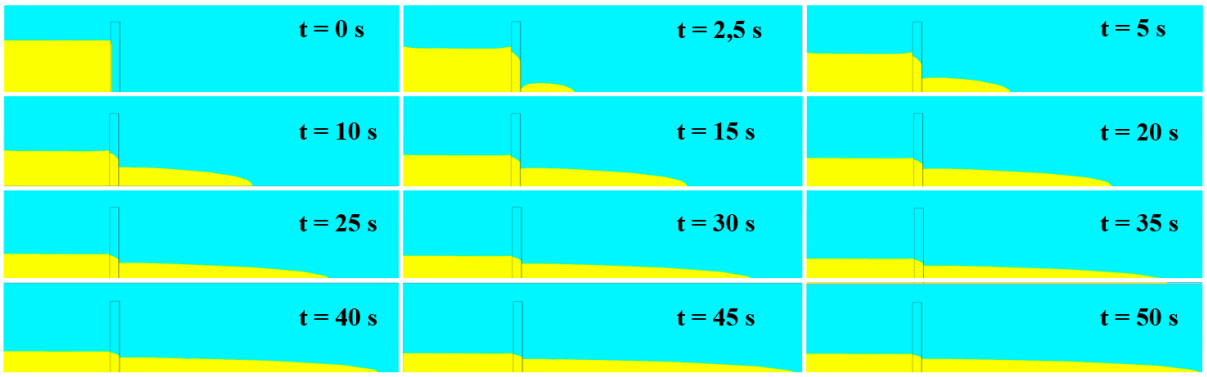

Figura 8.4: Perfil de flujo modelado a distintos intervalos de tiempo.

8.2. Coeficiente de fluencia

En la **Figura 8.5** se representa la distancia peligrosa adimensional D^* en función del coeficiente de fluencia τ_2. A partir de los ajustes a los distintos modelos matemáticos, se obtiene una alta correlación entre ambas variables. Este comportamiento muestra un dependencia decreciente potencial entre ambos parámetros, indicando que la tensión de fluencia es un parámetro fuertemente incidente en el comportamiento del relave, permitiendo que un relave de alta tensión de fluencia (relaves espesados a pastas) tienda a detenerse antes (ya que "fluye menos") respecto a un fluido de baja tensión de fluencia (relave diluido).

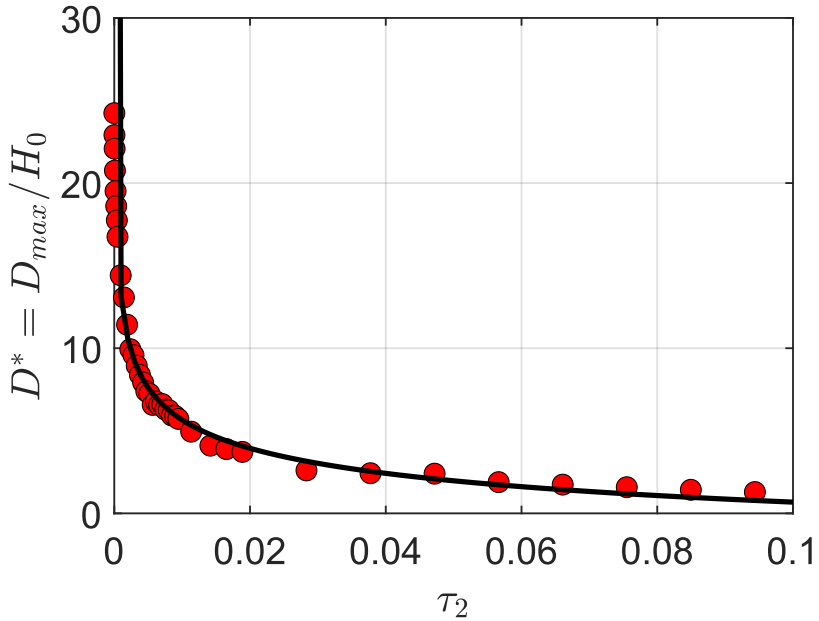

Figura 8.5: Distancia peligrosa adimensional en función del coeficiente de fluencia.

El modelo matemático obtenido tras el ajuste de la mejor curva es de la forma:

$$D^* = C_1 \tau_2^{C_2} + C_3 \tag{8.1}$$

Cuyos coeficientes definidos por el modelo al ajuste son los siguientes:

$$C_1 = 6.605$$
$$C_2 = -0.1766$$
$$C_3 = -9.239$$
$$R^2 = 0.999 \tag{8.2}$$

Por lo que el modelo para la relación entre la distancia máxima adimensional y el coeficiente de tensión fluencia es:

$$D^* = 6.605\tau_2^{-0.1766} - 9.239 \tag{8.3}$$

A partir del modelo, es deducible que fluidos no newtonianos de baja tensión de fluencia experimentan un mayor alcance de flujo respecto a aquellos de alta tensión de fluencia.

Un punto importante de la curva se observa en fluidos cuya tensión de fluencia supera los 100 Pa (relaves espesados a pastas), cuyo comportamiento tiende a una estabilización de su movimiento. Esto es, existe un punto crítico a partir del cual el fluido casi no fluye o experimenta escaso movimiento.

Por esta razón es que es de suma importancia optar la depositación de relaves en pastas o filtrados (reduciendo notoriamente su cantidad de agua), ya que su composición reológica permite que presenten una alta tensión de fluencia de tal manera que sea más difícil su deformación y experimenten movimiento menos pronunciado.

8.3. Número de Reynolds

En el caso del número de Reynolds, parámetro inherente en el análisis del flujo de fluidos, el modelo muestra una alta correlación que indica que valores altos de número de Reynolds (dentro del rango laminar) influyen en un mayor alcance de la ola. La **Figura 8.6** representa el comportamiento de este parámetro.

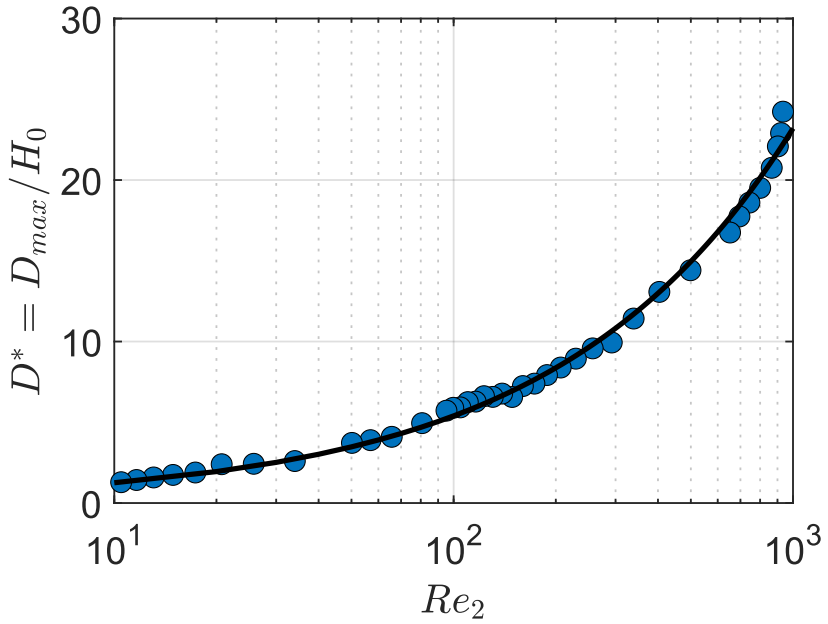

Figura 8.6: Distancia peligrosa adimensional en función del número de Reynolds modificado.

Considerando el número de Reynolds por su definición, esto es, razón entre las fuerzas inerciales y viscosas, es de esperar que en este tipo de flujo gobiernen las fuerzas viscosas, las que a su vez están dominadas por la tensión de fluencia del fluido, por lo que es plausible pensar tal como el caso anterior, que una mayor tensión de fluencia restringe el grado de deformación del fluido, acotando su movimiento.

El modelo ajustado a la curva de Reynolds modificado es del tipo potencia con la siguiente estructura:

$$D^* = C_1 Re_2^{C_2} \tag{8.4}$$

Cuyos coeficientes determinados al mejor ajuste por coeficiente de determinación mediante regresión son:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.2920 \\ C_2 &= 0.6334 \\ R^2 &= 0.999 \end{aligned} \tag{8.5}$$

De este modo, el modelo matemático propuesto para la distancia adimensional en función del número de Reynolds modificado es:

$$D^* = 0.292 {Re_2}^{0.6334} \tag{8.6}$$

Cabe mencionar que, por su definición, el número de Reynolds modificado presenta una serie de parámetros propios del modelo Herschel-Bulkley que para efectos del estudio no fueron analizados en detalle, principalmente por la complejidad de otorgar sentido físico a dichos coeficientes, pero no es menor considerar su influencia dentro de este tipo de sistemas.

Además, dado que se ha modelado el sistema en régimen completamente laminar, es un ejercicio interesante evaluar las implicancias que esto pueda llevar en un posterior modelamiento físico y finalmente extrapolar a modelos superiores, considerando los obstáculos externos a los que está sujeto el sistema real y las desviaciones de los resultados.

8.4. Pendiente del terreno

El último parámetro analizado, es la pendiente del canal de flujo, el cual es considerado de importancia dada la influencia de la aceleración de gravedad en el dominio de flujo. Por esta razón, es que implícitamente la gravedad es parte del análisis del flujo (como lo es el número de Froude) para el caso de pendientes variables. La **Figura 8.7** representa los resultados obtenidos para esta variable, como función de la distancia máxima adimensional alcanzada por el fluido.

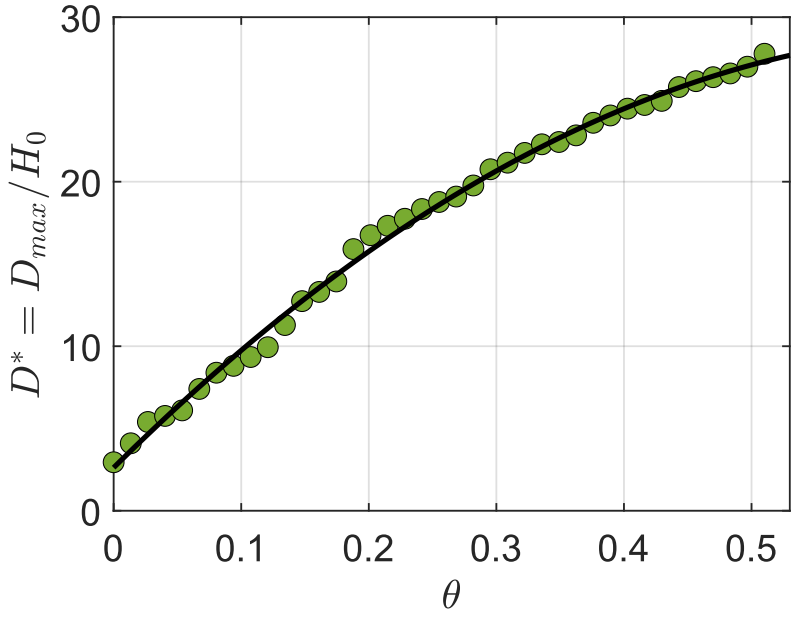

Figura 8.7: Distancia peligrosa adimensional en función de la pendiente de flujo.

Dado que la pendiente es considerada como un parámetro independiente, es que se considera como una variable adimensional por sí sola, a pesar si es el argumento o no de una función trigonométrica, la que debe ser definida mediante la resolución analítica del problema.

Por ende, el modelo que mejor se ajusta al comportamiento de esta variable es el modelo polinómico de segundo grado, definido y resuelto como sigue:

$$D^* = C_1\theta^2 + C_2\theta + C_3 \tag{8.7}$$

Cuyas constantes que maximizan el coeficiente de determinación al ajuste son:

$$C_1 = -55.816$$
$$C_2 = 76.867$$
$$C_3 = 2.618$$
$$R^2 = 0.999 \tag{8.8}$$

Finalmente, el modelo aplicado para el caso en estudio, en consideración única de la pendiente de flujo, está dado por:

$$D^* = -55.816\theta^2 + 76.867\theta + 2.618 \tag{8.9}$$

Es de esperar que el flujo tenga mayor alcance cuanto mayor sea la pendiente media del terreno. En este caso se han considerado 40 simulaciones con el objetivo de contar con la suficiente representatividad de los valores y el análisis es similar. A pesar de que pareciera estabilizarse la curva, considérese que, al hablar de pendiente, es imperioso aludir a pendientes naturales, cuyos valores son aproximadamente los primeros 10 puntos de la curva.

Sin embargo, es interesante considerar el comportamiento de la pendiente para un conjunto de tensiones de fluencia, de modo de corroborar el comportamiento creciente. Esta restricción será analizada en secciones posteriores, con el objetivo de proponer un ábaco simple obtenido a partir de dicho análisis.

8.5. Ajuste a grupo adimensional

Con el fin de relacionar los resultados obtenidos recientemente mostrados, se unifican los modelos anteriores en un único gráfico compacto que incluya una familia adimensional compuesta por los tres productos adimensionales ya estudiados.

La idea es reunir (de manera preliminar) en un único modelo, las variables adimensionales que inciden dentro del sistema, similar a lo propuesto por Sofrá [30] para pastas de alta densidad, a partir del análisis multidimensional mostrado en la **Figura 8.8** como el mejor ajuste lineal a la distancia adimensional D^* y el grupo $\nu_1 \tau_2^{\nu_2} Re_2^{\nu_3} (1-\theta)^{\nu_4}$.

$$D^* = \nu_1 \tau_2^{\nu_2} Re_2^{\nu_3} (1-\theta)^{\nu_4} \tag{8.10}$$

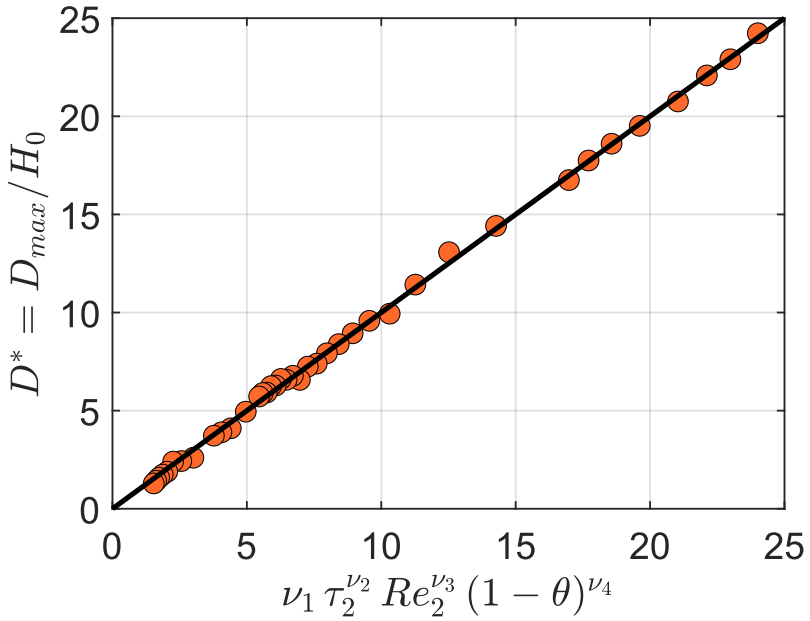

Figura 8.8: Ajuste de datos entre la distancia peligrosa adimensional y el grupo adimensional propuesto.

A partir de los ajustes a cada constante, de manera de tener el mejor coeficiente de determinación, se obtienen:

$$\nu_1 = 0.3953$$
$$\nu_2 = -0.0531$$
$$\nu_3 = 0.5261 \tag{8.11}$$
$$\nu_4 = 0.234$$
$$R^2 = 1$$

Aplicado al modelo final (8.10):

$$D^* = 0.3953\tau_2^{-0.0531} Re_2^{0.526}(1-\theta)^{0.234} \tag{8.12}$$

Finalmente, simplificando la relación anterior, el modelo de distancia de escurrimiento puede expresarse como:

$$D_{máx} = 0.4H_0 {Re_2}^{1/2}(1-\theta)^{1/4} \tag{8.13}$$

Obsérvese que en la ecuación (8.13) no está presente de manera explícita el coeficiente de fluencia, esto dado que en la ecuación (8.12) tiene menor influencia (matemáticamente) respecto al resto de los parámetros. Esto no representa problema alguno, dado que, como se comentó en la sección 8.3, la influencia del número de Reynolds en el modelo está gobernada principalmente por las fuerzas viscosas, las que a su vez tienen una alta dependencia de la tensión de fluencia del fluido (ecuación 3.8), por lo que su efecto no está siendo despreciado en lo absoluto en el modelo propuesto.

De este modo, la ecuación (8.13) es un interesante resultado que resume todo el estudio realizado, la cual entrega una propuesta a los modelos de distancia peligrosa a partir de consideraciones geométricas y reológicas del sistema.

8.6. Resultado para intervalos acotados

Finalmente, dado el amplio rango de valores considerados en los resultados previamente mostrados, se propone acotar los intervalos para las variables de interés, de tal manera de mostrar el comportamiento para relaves con tensiones de fluencia en el intervalo $[5 - 20]$ Pa y pendientes naturales $[0° - 5°]$.

El objetivo de esta gráfica no es presentar un modelo similar al de la ecuación (8.13), sino una propuesta del tipo ábaco que permita estimar, de manera preliminar, la distancia máxima a partir de la tensión de fluencia del relave y la pendiente media natural del terreno aguas abajo.

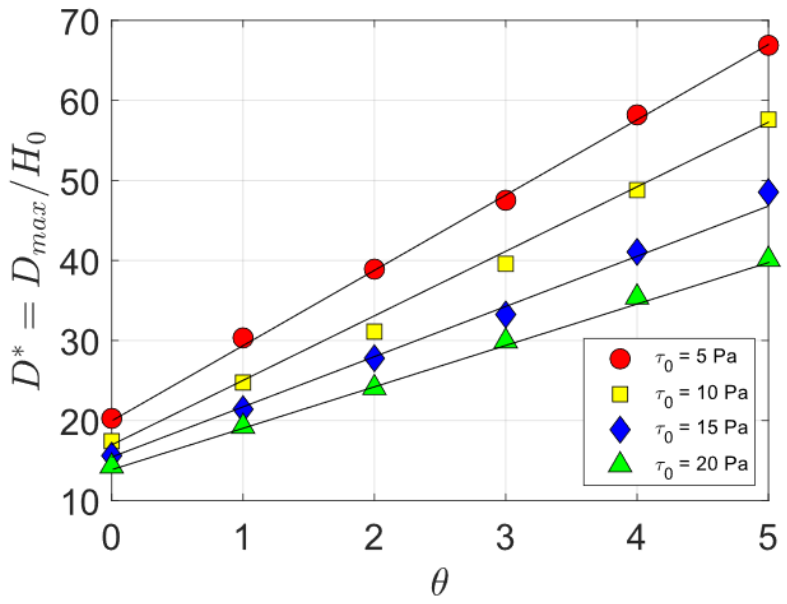

Figura 8.9: Propuesta de estimación de distancia máxima para valores acotados.

Esta gráfica se ha realizado con un set de 24 simulaciones adicionales a las 80 que se utilizaron en los modelos previamente expuestos, esto dado que se consideraron distintas condiciones de flujo entre las variables, que no necesariamente fueron cubiertas en los modelos. El fin del ábaco es apoyar y complementar los modelos empíricos presentados en el estado del arte de esta memoria, considerando que se construye a partir de modelación computacional y variables no analizadas previamente por los distintos autores.

La **Figura 8.9** presenta en síntesis los resultados obtenidos para las condiciones mencionadas anteriormente, dados los parámetros en que fluctúan con frecuencia las tensiones de fluencia de los relaves depositados en nuestro país.

El comportamiento es de acuerdo con lo esperado, y coincidente con los resultados ya analizados en las secciones anteriores, donde relaves con mayor tensión de fluencia tienden a alcanzar un menor alcance de la ola dada la resistencia que el fluido otorga antes la deformación. Por su parte, la pendiente influye negativamente en el flujo del relave, dada la influencia de la aceleración de gravedad en el movimiento.

9. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En la presente memoria se ha realizado la modelación numérica del flujo de fluidos, mediante las herramientas que ofrece la fluidodinámica computacional para la resolución matemática aproximada de dichos sistemas. Esta modelación se realizó bajo la consideración de relaves modelados según la ecuación constitutiva de Herschel-Bulkley, a partir de los datos entregados de entrada. El modelo numérico fue resuelto utilizando el software FLUENT® aplicando los modelos multifásicos en régimen laminar, en conjunto con sus algoritmos basados en la presión que optimizan la estabilidad de las soluciones aproximadas.

El modelamiento en FLUENT® fue desarrollado a base de condiciones simples de manera tal de simplificar el dominio físico tridimensional y su discretización, considerando las capacidades limitadas del recurso computacional y del tiempo que usa dicho recurso. Aun así, se desarrollaron las simulaciones suficientes para determinar una alta representatividad de los valores, considerando un amplio rango de estos.

Se evaluó la influencia de los parámetros reológicos en la distancia recorrida por un fluido no newtoniano, como un primer acercamiento a la evaluación de la distancia peligrosa considerando este tipo de variables, que han estado registradas con menor frecuencia en la literatura científica actual. De este modo, se obtuvieron muy buenos ajustes para cada variable adimensional, que permiten proponer modelos matemáticos semi-empíricos simples como un complemento sólido a los estudios ya existentes de evaluación de la distancia peligrosa, considerando variables reológicas.

Los resultados muestran además una alta dependencia del comportamiento del fluido, de la tensión de fluencia de este, concluyendo que la mejor alternativa es fomentar la depositación de relaves con el menor porcentaje de humedad posible, con el fin de minimizar las consecuencias de un posible colapso, o extraer la mayor cantidad de agua posible de aquellos que se encuentran ya depositados, con el fin de reducir su contenido de humedad y recuperar agua fresca para el procesamiento mineral. Esto considerando que los relaves tienen distintas formas de depositación, por lo que es relevante evaluar previamente las características físicas de este.

La influencia de la tensión de fluencia puede verse reflejada tanto en el coeficiente de fluencia, como en el número de Reynolds modificado de Herschel-Bulkley, mostrando que, como componente de las fuerzas cortantes y viscosas, induce un grado de dificultad al inicio del flujo tras la resistencia que opone el fluido a ser deformado, por lo que el alcance de la ola es notoriamente menor para altas tensiones de fluencia.

La pendiente de flujo, como parámetro geométrico propio de las características geográficas del emplazamiento del depósito, muestra una influencia negativa para valores mayores, esto dado que se favorece el desplazamiento del fluido a favor de la aceleración de gravedad en la dirección del flujo. Sin embargo, es importante recalcar que el canal de flujo modelado no cuenta con algún tipo de obstáculos, por lo que es interesante que futuros complementos al análisis, puedan incluir sectores topográficos reales, donde el fluido cuente además con otro tipo de obstrucciones y trabas que impidan su libre escurrimiento, además de la propia tensión de fluencia.

A partir de resultados restringidos a valores comunes y frecuentes en la industria minera nacional, se ha propuesto un ábaco que estima la distancia peligrosa a partir de la tensión de fluencia del relave, la pendiente media natural del terreno aguas abajo y la altura de la columna fluida (equivalente a la altura del muro menos la revancha), que apoye los estudios preliminares de una manera simple de evaluar.

De acuerdo con los resultados, es recomendable para futuros trabajos, considerar el modelamiento físico que de alguna manera logre validar los resultados numéricos obtenidos en esta memoria. Se entregan las herramientas basadas en el análisis dimensional que permiten obtener relaciones que apoyen el escalamiento del sistema en su experimentación física. Además, se recomienda evaluar el comportamiento del sistema bajo condiciones distintas para apoyarse de los hidrogramas y la influencia del volumen almacenado y vertido en la distancia máxima, parámetros no considerados en el presente estudio.

Agregar también, a modo de recomendación, el desarrollo de estos sistemas en régimen turbulento, con geometrías mayores (muros más altos y mayor cantidad de volumen embalsado) de manera que genere mayor energía cinética y forzar la turbulencia, donde se logre visualizar la paulatina pérdida de energía del sistema, pasando por régimen en transición y luego laminar, verificando el comportamiento del relave en tales regímenes.

Es importante recalcar que la validación de los modelos propuestos es una importante herramienta para confirmar el alto grado de confiabilidad de utilizar las herramientas de fluidodinámica computacional aplicadas al flujo de fluidos no newtonianos, de manera que permita impulsar del desarrollo de esta ciencia y su aplicación masiva en la industria minera.

10. REFERENCIAS

[1] Andreotti, B. Forterre, Y., Pouliquen, O. Granular Media – Between Fluid and Solid. Estados Unidos, Cambridge University Press, 2013. 471 p.

[2] ANSYS Inc. Fluent User's Guide, Release 15, Estados Unidos, 2013. 2692 p.

[3] ANSYS Inc. Fluent Theory Guide, Release 15, Estados Unidos, 2013. 814 p.

[4] Barnes, H. A Handbook of Elementary Rheology. 1st Edition. Gales, The University of Wales: Institute of Non-Newtonian Fluids Mechanics, 2000. 210 p.

[5] Boyer, F., Guazzelli, E. and Pouliquen, O. Unifying Suspension and Granular Rheology. Physical Review Letters. (107): 1-5, 2011.

[6] Canadian Dam Association (CDA). Application of Dam Safety Guidelines to Mining Dams. Technical Bulletin. Canadá, Dam Safety, 2014. 49 p.

[7] Cengel, Y. y Cimbala, J. Mecánica de Fluidos, Fundamentos y Aplicaciones. 1ª Edición, México, McGraw-Hill, 2006. 956 p.

[8] CESCO. Los relaves son una oportunidad para avanzar en una minería de menor impacto [en línea], <http://www.cesco.cl/2019/08/16/los-relaves-son-una-oportunidad-para-avanzar-en-una-mineria-de-menor-impacto/> [consultado el 2 de mayo del 2020].

[9] COCHILCO. Base de datos electrónica [en línea] <http://www.cochilco.cl:4040/boletin-web/> [consultado el 2 de mayo del 2020].

[10] CODELCO. Criterios para Estudio de Distancia Peligrosa, Amec Foster Wheeler, 2018.

[11] Concha, P. y Lall, U. Tailings Dam Failures: Updated Statistical Model for Discharge Volume and Runout. MDPI, Environments, 1-10, 2018.

[12] Decreto Supremo 50. Reglamento que establece las condiciones técnicas que deberán cumplirse en el proyecto, construcción y operación de obras hidráulicas a que hace referencia el artículo 294 del Código de Aguas. Diario Oficial de la República de Chile, Santiago, 2015, 32 p.

[13] Decreto Supremo 248. Reglamento para la Aprobación de Proyectos de Diseño, Construcción, Operación y Cierre de los Depósitos de Relaves. Diario Oficial de la República de Chile, Santiago, 2007, 15 p.

[14] Forterre, Y. and Pouliquen, O. Flows of Dense Granular Media. The Annual Review of Fluid Mechanics, (40): 1-24, 2008.

[15] GDR MiDi. On dense Granular Flows. The European Physical Journal, (14):341-365, 2004.

[16] Guazzelli, E. and Pouliquen, O. Rheology of dense granular suspensions. Journal of Fluid Mechanics, vol. 852, 2018.

[17] Ibarrola, E. Introducción a los Fluidos No Newtonianos, Cátedra de Mecánica de los Fluidos, Universidad Nacional de Córdoba.

[18] Islam, M. and Lye, L. Combined use of dimensional analysis and modern experimental design methodologies in hydrodynamics experiments. Ocean Engineering. ELSEVIER, 2009, (36): 237-247.

[19] Jeyapalan, J K., Duncan, J M. y Seed, H B. Investigation of Flow Failures of Tailings Dams, J. Geotech. Eng, (109): 172-189, 1983.

[20] Lemus, L., Palacios, J., Espinace, R. Criteria for determining the runout distance in tailings dams. 2nd International Seminar on Tailings Management. Tailings, 2014, pp. 1-12.

[21] Liu, H. An Experimental and numerical study of runout from a tailings dam failure. Tesis (Doctor of Philosophy). Australia, The University of Western Australia, 2018. 236 h.

[22] Lucía, P., Duncan, J. and Seed, H. Summary of research on case histories of flow failures of mine tailings impoundments. Technology Transfer Workshop on Mine Waste Disposal Techniques, U.S. Bureau of Mines, Denver, CO, 1981, pp. 46-53.

[23] Mine Safety and Health Administration (MSHA). Engineering and Design Manual, 2nd Edition, Estados Unidos, U.S. Department of Labor, 2009. 869 p.

[24] Minussi, R. and Freitas, G. Numerical Experimental Comparison of Dam Break Flows with non-Newtonian Fluids. Journal of the Brazilian Society of Mechanics, Sciences & Engineering. ABCM, 34(2): 167-178. 2011.

[25] Moreno, E. y Cervera, M. Elementos finitos mixtos estabilizados para flujos confinados de Bingham y de Herschel-Bulkley. Rev. Int. de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. ELSEVIER, 2016. 32(2): 100-109.

[26] Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. Suiza, Springer, 2016. 799 p.

[27] Potter, M., Wiggert, D., Ramadan, B. Mecánica de Fluidos. 4ª Edición, México, Cengage Learning, 2012.

[28] Ramírez, N. Guía Técnica de Operación y Control de Depósitos de Relaves. Servicio Nacional de Geología y Minería, Chile, 2007.

[29] Rico, M., Benito, G., Díez-Herrero, A. Floods from tailings dam failures. Journal of Hazardous Materials. ELSEVIER, (154): 79-87. 2007.

[30] Seddon, K D. Approaches to Estimation of Run-Out Distances for Liquefied Tailings. Mine Waste. Australian Centre of Geomechanics, pp. 63-70. Australia, 2010.

[31] SERNAGEOMIN. Catastro de Depósitos de Relaves en Chile, actualización 2020 [en línea] <https://www.sernageomin.cl/datos-publicos-deposito-de-relaves/ [consulta 05/12/2020].

[32] Sofrá, F. y Boger, D. Environmental Rheology for Waste Minimisation in the minerals industry. Chemical Engineering Journal. ELSEVIER (86): 319-330. 2002.

[33] Trulsson, M., Andreotti, B. and Claudin, P. Transition from the Viscous to Inertial Regime in Dense Suspensions. Physical Review Letters. (109): 1-5, 2012.

[34] Versteeg, H K. y Malalasekera, W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method, 2nd Edition, Inglaterra, Pearson-Prentice Hall, 2007. 517 p.

ANEXO A: ANÁLISIS DIMENSIONAL

De la **Tabla 6-1**, que muestra las variables consideradas y sus dimensiones físicas:

Parámetro	**Símbolo**	**Unidades**	**Dimensiones**
Distancia máxima	$D_{máx}$	m	L
Altura de columna	H_0	m	L
Tensión de Fluencia	τ_0	kg m^{-1} s^{-2}	$ML^{-}T^{-2}$
Densidad del fluido	ρ	kg m^{-3}	ML^{-3}
Velocidad característica	V	m s^{-1}	LT^{-1}
Viscosidad	μ	kg m^{-1} s^{-1}	$ML^{-}T^{-}$
Pendiente	θ	rad	$-$

La descripción funcional general del modelo a partir de las variables, indica que se busca determinar la dependencia de la distancia peligrosa en función de la altura inicial de la columna de fluido, tensión de fluencia, la densidad del fluido, la velocidad media del flujo, la viscosidad del fluido y la pendiente de flujo:

$$D_{máx} = f(H_0, \tau_0, \rho, V, \mu, \theta) \tag{A.1}$$

Dado que son 7 variables en total a utilizar, que incluyen todas las unidades del sistema MLT, se deben encontrar 4 parámetros adimensionales (o términos Π) que acoplen todas estas en términos más simples.

Se utilizarán como variables dimensionalmente independientes H_0, ρ y V. Con ellas, se buscan los términos Π aplicando estas al resto de las variables.

Término general por encontrar:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4) \tag{A.2}$$

i. Primer término Π:

$$\pi_1 = D_{máx} H_0^{\alpha} \rho^{\beta} V^{\gamma} = M^0 L^0 T^0$$

$$L L^{\alpha} M^{\beta} L^{-3\beta} L^{\gamma} T^{-\gamma} = M^0 L^0 T^0$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 0$$

$$1 + \alpha - 3\beta + \gamma = 0$$

$$\alpha = -1$$

$$\boldsymbol{\pi_1 = \frac{D_{máx}}{H_0} = D^*} \tag{A.3}$$

Esta es la distancia adimensional, la base del estudio.

ii. Segundo término Π:

$$\pi_2 = \tau_0 H_0^{\alpha} \rho^{\beta} V^{\gamma} = M^0 L^0 T^0$$

$$M L^{-1} T^{-2} L^{\alpha} M^{\beta} L^{-3\beta} L^{\gamma} T^{-\gamma} = M^0 L^0 T^0$$

$$1 + \beta = 0$$

$$-1 + \alpha - 3\beta + \gamma = 0$$

$$-2 - \gamma = 0$$

$$\alpha = 0 \rightarrow \beta = -1 \rightarrow \gamma = -2$$

$$\boldsymbol{\pi_2 = \frac{\tau_0}{\rho V^2} = \tau_2} \tag{A.4}$$

Este término se conoce como coeficiente de fluencia, frecuente en el análisis de sistemas que involucran fluidos no newtonianos.

iii. Tercer término Π:

$$\pi_3 = \mu H_0^{\alpha} \rho^{\beta} V^{\gamma} = M^0 L^0 T^0$$

$$M L^{-1} T^{-1} L^{\alpha} M^{\beta} L^{-3\beta} L^{\gamma} T^{-\gamma} = M^0 L^0 T^0$$

$$1 + \beta = 0$$

$$-1 + \alpha - 3\beta + \gamma = 0$$

$$-1 - \gamma = 0$$

$$\alpha = -1 \rightarrow \beta = -1 \rightarrow \gamma = -1$$

$$\boldsymbol{\pi_3 = \frac{\mu}{\rho H_0 V} = \frac{\rho H_0 V}{\mu} = Re} \qquad \text{(A.5)}$$

Este es el número de Reynolds, que, para el caso en estudio, se utilizará su versión modificada para fluidos que siguen el modelo viscoso de Herschel-Bulkley.

iv. Cuarto término Π:

$$\boldsymbol{\pi_4 = \theta} \qquad \text{(A.6)}$$

La pendiente de flujo, al ser una variable adimensional, forma un término Π por sí sola.

Finalmente, reuniendo A.3, A.4, A.5 y A.6 en A.2

$$\frac{D_{máx}}{H_0} = f\left(\frac{\tau_0}{\rho V^2}, \frac{\rho H_0 V}{\mu}, \theta\right)$$
$$D^* = f(\tau_2, Re_2, \theta) \qquad \text{(A.7)}$$

ANEXO B: CÓDIGOS MATLAB®

i. Código para gráficos adimensionales con ajustes:

```
clear all;
close all;
clc;

data = load('datos1.txt');

PI_D = data(:,1);

PI_T = data(:,2);

PI_R = data(:,3);

data2 = load('datos2.txt');

PI_A = data2(:,1);

PI_D2 = data2(:,2);

%==============================================================================

figure(1);
plot(PI_T,PI_D,'MarkerFaceColor',[1 0 0],...
               'MarkerSize',10,'Marker','o',...
               'LineStyle','none',...
               'Color',[0 0 0]);

% Propiedades del gráfico
set(gca,'Fontsize',18);
%set(gca, 'XScale', 'log');
xlabel('$\tau_{2}$','interpreter','latex');
ylabel('$D_{max}/H_{0}$','interpreter','latex');
grid on;
hold on;
%axis([1e-6 1e0 0 30]);
axis([0 0.1 0 30]);


% Ajuste de datos con modelo polinomio tipo y = ax^2+bx+c
y_d_theta = PI_D;
x_t_theta = PI_T;

fun_0 = @(p,y_d_theta)p(1).*exp(p(2).*x_t_theta)+p(3).*exp(p(4).*x_t_theta); %
Modelo
x0 = [0, 0, 0, 0]; % Valores iniciales
```

```
p = lsqcurvefit(fun_0,x0,x_t_theta,y_d_theta); % Coeficientes

hold on;
X = linspace(1E-8,1,1000); % Vector con valores para graficar el modelo
ajustado


Y = 6.605.*X.^-0.1766-9.239;
plot(X,Y,'LineWidth',2.5,'Color',[0 0 0]);
%axis([0 0.53 0 30]);

print -depsc2 fit1.eps;

%==============================================================================

figure(2);
% Gráfico
plot(PI_R,PI_D,'MarkerFaceColor',[0 0.447058823529412 0.741176470588235],...
    'MarkerSize',10,...
    'Marker','o',...
    'LineStyle','none',...
    'Color',[0 0 0]);

% Propiedades del gráfico
set(gca,'Fontsize',18);
set(gca, 'XScale', 'log');
xlabel('$Re_{2}$','interpreter','latex');
ylabel('$D_{max}/H_{0}$','interpreter','latex');
grid on;
hold on;
axis([10 1000 0 30]);
hold on;

% Ajuste de datos con modelo polinomio tipo y = ax^2+bx+c
y_d_theta = PI_D;
x_t_theta = PI_R;

fun_0 = @(p,y_d_theta)p(1).*x_t_theta.^p(2); % Modelo
x0 = [0, 0]; % Valores iniciales
p = lsqcurvefit(fun_0,x0,x_t_theta,y_d_theta); % Coeficientes

hold on;
X = linspace(10,1000,100); % Vector con valores para graficar el modelo
ajustado

Y = p(1).*X.^p(2);

plot(X,Y,'LineWidth',2.5,'Color',[0 0 0]);
%axis([0 0.53 0 30]);

print -depsc2 fit2.eps;

%==============================================================================
```

```
figure(3);
% Gráfico
plot(PI_A,PI_D2,'MarkerFaceColor',[0.47,0.67,0.19],...
    'MarkerSize',10,...
    'Marker','o',...
    'LineStyle','none',...
    'Color',[0 0 0]);

% Propiedades del gráfico
set(gca,'Fontsize',18);
xlabel('$\theta$','interpreter','latex');
ylabel('$D_{max}/H_{0}$','interpreter','latex');
grid on;
hold on;

%==============================================================================

% Ajuste de datos con modelo polinomio tipo y = ax^2+bx+c
y_d_theta = PI_D2;
x_t_theta = PI_A;

fun_0 = @(p,y_d_theta)p(1).*x_t_theta.^2+p(2).*x_t_theta+p(3); % Modelo
x0 = [0, 0, 0]; % Valores iniciales
p = lsqcurvefit(fun_0,x0,x_t_theta,y_d_theta); % Coeficientes

hold on;
X = linspace(0,0.55,100); % Vector con valores para graficar el modelo
ajustado

Y = p(1).*X.^2+p(2).*X+p(3);
plot(X,Y,'LineWidth',2.5,'Color',[0 0 0]);
axis([0 0.53 0 30]);

print -depsc2 fit3.eps;


%% Ajuste multivariable

%PI_A(1) = PI_A(2);
X = [PI_T,PI_R,PI_A];


%fun = @(a,PI_T)a(1).*(X(:,1).^(a(2))).*(X(:,2).^(a(3)).*(X(:,3).^(a(4))));
fun = @(a,PI_T)a(1).*(X(:,1).^(a(2))).*(X(:,2).^(a(3)).*((1-X(:,3)).^(a(4))));


x0 = [0.1,0.1,0.1,0.1];

a = lsqcurvefit(fun,x0,X,PI_D)

%a = [0.5   -0.05   0.5   0.03]
E_2 = a(1).*(X(:,1).^(a(2))).*(X(:,2).^(a(3)).*((1-X(:,3)).^(a(4))));
```

```
figure(4)
plot(E_2,PI_D, 'MarkerFaceColor',[1.00,0.41,0.16],...
    'MarkerEdgeColor',[0 0 0],...
    'MarkerSize',10,...
    'Marker','o',...
    'LineStyle','none',...
    'Color',[0 0 0]);
grid on;
set(gca,'Fontsize',18);
hold on;
x = linspace(0,25,100);
plot(x,x,'LineWidth',2.5,'Color',[0 0 0]);


xlabel('$\nu_{1}\hspace{0.5mm}\tau_{2}^{\nu_{2}}\hspace{0.5mm}Re_{2}^{\nu_{3}}
\hspace{0.5mm}(1-\theta)^{\nu_{4}}$','interpreter','latex')
ylabel('$D_{max}/H_{0}$','interpreter','latex');

print -depsc2 fit4.eps;
```

ii. Código para gráfico acotado:

```
clear all;
close all;
clc;

data3 = load('datos3.txt');

Pend = data3(:,1);

Dist5 = data3(:,2);

Dist10 = data3(:,3);

Dist15 = data3(:,4)

Dist20 = data3(:,5)

%==============================================================================

figure(5);
plot(Pend, Dist5,'MarkerFaceColor','r',...
               'MarkerSize',10,'Marker','o',...
               'LineStyle','none',...
               'Color',[0 0 0]);
% Propiedades del gráfico
set(gca,'Fontsize',18);
%set(gca, 'XScale', 'log');
xlabel('$\theta$','interpreter','latex');
```

```
ylabel('$D^* = D_{max}/H_{0}$','interpreter','latex');
grid on;
hold on;
plot(Pend, Dist10, 'MarkerFaceColor','y',...
               'MarkerSize',10,'Marker','s',...
               'LineStyle','none',...
               'Color',[0 0 0]);
plot(Pend, Dist15, 'MarkerFaceColor','b',...
               'MarkerSize',10,'Marker','d',...
               'LineStyle','none',...
               'Color',[0 0 0]);
plot(Pend, Dist20, 'MarkerFaceColor','g',...
               'MarkerSize',10,'Marker','^',...
               'LineStyle','none',...
               'Color',[0 0 0]);
legend('\tau_0 = 5 Pa', '\tau_0 = 10 Pa', '\tau_0 = 15 Pa', '\tau_0 = 20
Pa','Fontsize',10)
```