

**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA Y AMBIENTAL
VALPARAÍSO-CHILE**



**“ESTUDIO SOBRE EL IMPACTO DEL ESCALAMIENTO
LABORATORIO-PLANTA AL EMPLEAR MODELACIÓN O
INTERPOLACIÓN EN LA CARACTERIZACIÓN CINÉTICA
DE FLOTACIÓN”**

FRANCISCO IGNACIO FLORES SEPULVEDA

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL QUÍMICO**

**PROFESOR GUÍA:
DR. LUIS VINNETT PERALTA**

**CO-REFERENTE:
DR. JUAN YIANATOS BERNARDINO**

JUNIO-2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título; ☐ Tesis de Postgrado;

Título del trabajo: ESTUDIO SOBRE EL IMPACTO DEL ESCALAMIENTO LABORATORIO-PLANTA AL EMPEAR MODELACIÓN O INTERPOLACIÓN EN LA CARACTERIZACIÓN CINÉTICA DE FLOTACIÓN

Nombre del candidato(a): Francisco Ignacio Flores Sepulveda

Carrera / Grado: Ingeniería Civil Química

Campus: Casa Central Valparaíso ; **Departamento:** Ingeniería Civil Química y Ambiental

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Luis Vinnett Peralta, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

☒ El trabajo **NO contiene información que amerite confidencialidad** y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

☐ 6 meses; ☐ 12 meses; ☐ 2 años; ☐ 3 años; ☐ 5 años; ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

LUIS EDUARDO VINNETT PERALTA
Digitally signed by
LUIS EDUARDO
VINNETT PERALTA
Date: 2025.06.25
13:44:34 -04'00'

Fecha: 25/06 ; **Firma:** _____

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 25/06 ; **Firma:** _____

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Agradecimientos

Este trabajo se construyó sobre horas inciertas, insomnios suaves y victorias que a veces solo yo presencié.

Este camino fue acompañado, empujado y sostenido. A quienes fueron parte de ese sostén, quiero dedicar estas palabras.

A mi madre, que ha sido casa, empuje y refugio. Su fe en mí ha sido el hilo invisible que ha mantenido todas mis piezas unidas.

A mi abuelo, por despertar en mí la curiosidad, por enseñarme que aprender es una forma de estar.

A mi abuela, por enseñarme a hacer. Que no hay cosas inaccesibles cuando la mente crea y las manos actúan.

A mi familia, por ser origen y sostén. A mis tías, por ser un segundo hogar cuando lo necesité, por la mesa compartida y el cariño constante.

A Millaray, por ser mejor amiga y hermana.

A Rojo, por estar, por cuidar, por acompañar con paciencia y ternura.

A todos mis amigos, por acompañarme en este proceso con alegría y cariño, por las risas en medio del cansancio. En especial a Jaim, por ser mi mayor acompañante en el camino universitario.

A los profesores Luis Vinnett y Juan Yianatos, por su excelencia profesional, que fue fuente de inspiración, y por su aporte generoso en mi desarrollo académico.

Finalmente, agradezco al proyecto FONDECYT de Iniciación 11240125 por apoyar el desarrollo de este estudio.

RESUMEN

El presente trabajo evalúa el uso de modelos cinéticos e interpolación para la representación de las curvas tiempo-recuperación en procesos de flotación *batch*, con el objetivo de determinar la mejor metodología para el escalamiento industrial. Se realizaron pruebas experimentales utilizando una mena de cobre a dos tamaños de partícula con valores de P_{80} de 300 μm y 212 μm . Cada ensayo incluyó 14 puntos en las respuestas cinéticas. La recuperación de cada ensayo resultó de 77.5% y 82.1%, respectivamente, cuyas diferencias se atribuyen a un mayor grado de liberación a menor tamaño de partícula.

En el análisis, se realizaron submuestreos, considerando conjuntos de 7 y 10 datos experimentales tiempo-recuperación. Se emplearon tres modelos cinéticos (Tasa Única, Rectangular y Gamma) y cuatro métodos de interpolación (Lineal, *Spline* cúbico, Polinomios de Hermite, y Stineman) para la representación de las respuestas cinéticas. La evaluación de la capacidad predictiva de cada metodología se llevó a cabo mediante dos enfoques. El primer enfoque consistió en analizar la capacidad de representar la curva cinética completa, utilizando como métrica la suma de cuadrados del error residual de predicción (PRESS), en una versión modificada. El segundo enfoque se centró en evaluar la capacidad predictiva a un tiempo específico de interés para fines de escalamiento, utilizando como indicadores la mediana de los errores y el rango inter-decil (IDR).

Los resultados indicaron que, cuando se evalúa la capacidad predictiva en todo el rango de tiempo, el modelo cinético Gamma fue el más robusto en condiciones con un número limitado de datos, siendo sólo levemente superado por PCHIP en respuestas cinéticas con un número significativo de intervalos de flotación. En escenarios de predicción orientados al escalamiento industrial, el método de interpolación PCHIP mostró consistentemente un mejor desempeño que el modelo Gamma, logrando menores errores de predicción evaluados en términos de la mediana. En cuanto a la dispersión de los errores de predicción, evaluada mediante el rango inter-decil (IDR), PCHIP llevó a una mayor precisión en todos los casos. Sin embargo, se observó una tendencia a aumentar la variabilidad de la predicción al emplear 7 datos en las respuestas cinéticas.

Como conclusión, el modelo cinético Gamma resultó ser más robusto en aplicaciones donde se busca predecir la curva tiempo-recuperación completa con una cantidad reducida de datos. El método de interpolación PCHIP por su parte, se presenta como una buena herramienta de predicción a tiempos largos, presentando un menor error para propósitos de escalamiento por tiempo.

Este estudio fue financiado por el proyecto FONDECYT de Iniciación N° 11240125, el que permitió llevar a cabo las pruebas cinéticas y los respectivos análisis de laboratorio.

ÍNDICE

Agradecimientos	ii
RESUMEN	iii
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Objetivo general	2
1.2 Objetivos específicos	2
2 ANTECEDENTES GENERALES	3
2.1 Flotación	3
2.2 Caracterización del proceso de flotación	4
2.3 Modelación cinética del proceso de flotación	5
2.3.1 Modelos cinéticos	6
2.4 Interpolación	8
2.4.1 Fenómeno de Runge	8
2.4.2 Interpolación lineal	9
2.4.3 <i>Splines</i> cúbicas	10
2.4.4 Polinomio de interpolación cúbica por tramos de Hermite	11
2.4.5 Interpolación Stineman	12
2.5 Escalamiento <i>batch</i> -planta	13
3 METODOLOGÍA	14
3.1 Desarrollo experimental	14
3.1.1 Determinación de tiempos y condiciones de molienda	14
3.1.2 Proceso de flotación estándar <i>batch</i>	16
3.1.3 Digestión y análisis químicos	18
3.2 Análisis de datos	20
3.2.1 Sub-muestreo de los datos experimentales	20
3.2.2 Ajuste de datos	21
3.2.3 Suma de cuadrados de error residual de predicción	23
3.2.4 Escalamiento industrial	24
4 ANALISIS DE RESULTADOS	26
4.1 Respuestas cinéticas obtenidas frente a cambios de tamaño de partícula	26
4.2 Ajuste modelos cinéticos de recuperación, conjunto original de 14 datos	26
4.3 Interpolación de la curva cinética, conjunto original de 14 datos	27
4.4 Sensibilidad de la respuesta cinética	28
4.5 Comparación entre modelación cinética e interpolación	31
4.6 Predicción de respuesta <i>rougher</i> industrial	34
5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	39

5.1	Conclusiones	39
5.2	Recomendaciones.....	40
Referencias		41
ANEXOS		43
Datos experimentales <i>Tests</i> N°1 y N°2.....		44

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Separación por flotación (Modificado de Yianatos & Vinnett, 2015).	3
Figura 2.2. Esquema del proceso de flotación (Modificado de Yianatos & Vinnett, 2015).....	4
Figura 2.3. Diseño conceptual del proceso de flotación (Modificado de Yianatos & Vinnett, 2015).	5
Figura 2.4. Analogía de la flotación como reacción química (Modificado de Yianatos & Vinnett, 2015).....	6
Figura 2.5. Fenómeno de Runge.	9
Figura 2.6. Ejemplo de interpolación lineal.	10
Figura 2.7. Ejemplo de interpolación con <i>splines</i> cubicas.	11
Figura 2.8. Ejemplo de interpolación PCHIP.	12
Figura 2.9. Representación del escalamiento por tiempo.....	13
Figura 3.1. Esquemático de la metodología utilizada en este trabajo.	14
Figura 3.2. Instalación del sistema de molienda.	15
Figura 3.3. Distribución acumulada de tamaño de partícula para las condiciones analizadas.....	16
Figura 3.4. Acondicionamiento de la pulpa.....	18
Figura 3.5. Muestras en digestión ácida.	20
Figura 3.6. Dos ejemplos de combinaciones de 10 puntos experimentales (2 de 715).....	21
Figura 3.7. Dos ejemplos de combinaciones de 7 puntos experimentales (2 de 1716).....	21
Figura 3.8. Esquema de aplicación del método PRESSM a partir de una combinación de 7 datos experimentales.....	24
Figura 3.9. Esquemático de escalamiento por tiempo para estimar la recuperación de un proceso continuo.	25
Figura 3.10. Dos ejemplos de combinaciones de 7 puntos experimentales, con exclusión del punto evaluado para propósitos de predicción (2 de 924).....	25
Figura 4.1. Respuestas cinéticas experimentales.	26
Figura 4.2. Ajuste de modelos: (a) <i>Test</i> N°1 ($P_{80} = 300 \mu\text{m}$), (b) <i>Test</i> N°2 ($P_{80} = 212 \mu\text{m}$).....	27
Figura 4.3. Resultados interpolación: (a) <i>Test</i> N°1 ($P_{80} = 300 \mu\text{m}$), (b) <i>Test</i> N°2 ($P_{80} = 212 \mu\text{m}$).28	
Figura 4.4. Sensibilización con 7 puntos experimentales: (a) resultados de interpolación para el mejor escenario, (b) gráfico de dispersión para el mejor escenario, (c) resultados de interpolación para el peor escenario, (d) gráfico de dispersión para el peor escenario.....	29

Figura 4.5. Sensibilización con 10 puntos experimentales: (a) resultados de interpolación para el mejor escenario, (b) gráfico de dispersión para el mejor escenario, (c) resultados de interpolación para el peor escenario, (d) gráfico de dispersión para el peor escenario.....	30
Figura 4.6. Distribuciones del PRESSM, modelación cinética: (a) <i>Test</i> N°1 - 10 datos, (b) <i>Test</i> N°2 - 10 datos, (c) <i>Test</i> N°1 - 7 datos, (d) <i>Test</i> N°2 - 7 datos.	32
Figura 4.7. Distribuciones del PRESSM interpolación: (a) <i>Test</i> N°1 - 10 datos, (b) <i>Test</i> N°2 - 10 datos, (c) <i>Test</i> N°1 - 7 datos, (d) <i>Test</i> N°2 - 7 datos.	33
Figura 4.8. Resultados de predicción a 20 min a escala industrial: (a) <i>Test</i> N°1 - 10 datos, (b) <i>Test</i> N°2 - 10 datos, (c) <i>Test</i> N°1 - 7 datos, (d) <i>Test</i> N°2 - 7 datos.	35
Figura 4.9. Resultados de predicción a 30 min a escala industrial: (a) <i>Test</i> N°1 - 10 datos, (b) <i>Test</i> N°2 - 10 datos, (c) <i>Test</i> N°1 - 7 datos, (d) <i>Test</i> N°2 - 7 datos.	37

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1. Parámetros cinéticos.....	27
Tabla 4.2. Mediana del PRESSM, modelos cinéticos.....	32
Tabla 4.3. Mediana del PRESSM, métodos de interpolación.....	33
Tabla 4.4. Mediana e IDR del error de predicción a 20 min a escala industrial.....	36
Tabla 4.5. Mediana e IDR del error de predicción a 30 min a escala industrial.....	37
Tabla A.1. Datos experimentales <i>Test</i> N°1 ($P_{80} = 300 \mu\text{m}$).....	44
Tabla A.2. Datos experimentales <i>Test</i> N°2 ($P_{80} = 212 \mu\text{m}$).....	45

Capítulo I

1 INTRODUCCIÓN

La flotación es la principal técnica de concentración de minerales sulfurados a nivel mundial. La eficiencia del proceso se ve influenciada por múltiples factores altamente aleatorios, incluyendo variables mineralógicas, físicas, químicas y operacionales, las cuales impactan tanto en la recuperación como en la calidad del concentrado. La caracterización cinética es crítica para el dimensionamiento de circuitos de flotación. Sin embargo, las estrategias de modelación actuales tienden a ser arbitrarias y encontrarse sobre-simplificadas, dada las múltiples posibles respuestas causadas por la heterogeneidad de la alimentación.

El escalamiento por tiempo ha sido ampliamente utilizado con fines de dimensionamiento. Al respecto, este trabajo considera la caracterización de respuestas tiempo-recuperación, incorporando un número significativamente mayor de puntos en comparación con los estudios cinéticos convencionales, los que generalmente emplean menos de ocho puntos. Estas respuestas son sub-muestreadas de manera de obtener un número de datos tiempo-recuperación comparable a lo utilizado en pruebas de laboratorio industriales para control de procesos y para dimensionamiento de circuitos.

La información sub-muestreada se modela usando representaciones cinéticas clásicas e interpoladas, aplicando técnicas con preservación de forma (*shape-preserving*). Se evalúa la incertidumbre en la predicción de recuperación, proyectando el error esperable a escala industrial, usando los factores de escala mayormente aceptados en flotación. El estudio contribuye en el análisis de respuestas pobremente muestreadas, evaluando su impacto en el escalamiento de la flotación.

1.1 Objetivo general

Evaluar el potencial de las técnicas de interpolación, con preservación de forma, para mejorar la precisión del escalamiento laboratorio-planta en la flotación.

1.2 Objetivos específicos

- Plantear un protocolo de flotación *batch* repetible con 14 datos tiempo-recuperación por prueba.
- Analizar, cualitativamente, la sensibilidad de las respuestas cinéticas ante condiciones sub-muestradas de los datos tiempo-recuperación.
- Comparar, a escala de laboratorio, la capacidad predictiva de las técnicas de interpolación en comparación con los modelos cinéticos clásicos.
- Proyectar los errores de predicción para propósitos de escalamiento *batch*-planta.

Capítulo II

2 ANTECEDENTES GENERALES

2.1 Flotación

La flotación es un proceso fisicoquímico que tiene como objetivo la separación selectiva de un componente valioso. El proceso se sustenta en la interacción de burbujas con partículas hidrófobas sólidas suspendidas en una pulpa. Las características hidrofóbicas del sólido permiten su adhesión a la fase gaseosa (Figura 2.1).

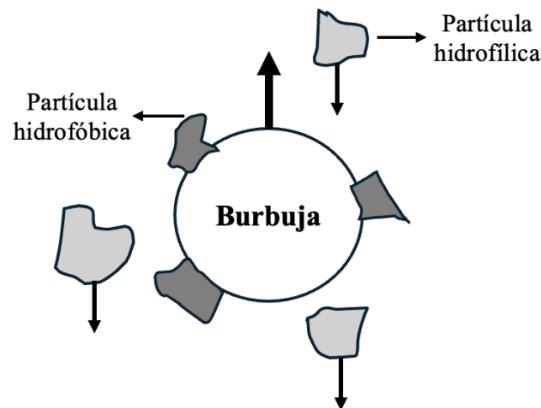


Figura 2.1. Separación por flotación (Modificado de Yianatos & Vinnett, 2015).

Las partículas que son capaces de adherirse a las burbujas son transportadas a la fase de espuma, formando así parte del concentrado. Las partículas no flotables, principalmente ganga, permanecen en la pulpa siendo descartadas del proceso, formando la cola o relave (Figura 2.2).

La separación del mineral no es perfecta. Existen mecanismos por los cuales la concentración del componente valioso (ley) en el producto se ve reducida por la presencia de ganga. Dichas impurezas pueden encontrarse asociadas al mineral valioso, ser arrastradas hidráulicamente o presentar características hidrofóbicas que le permitan su adhesión a las burbujas.

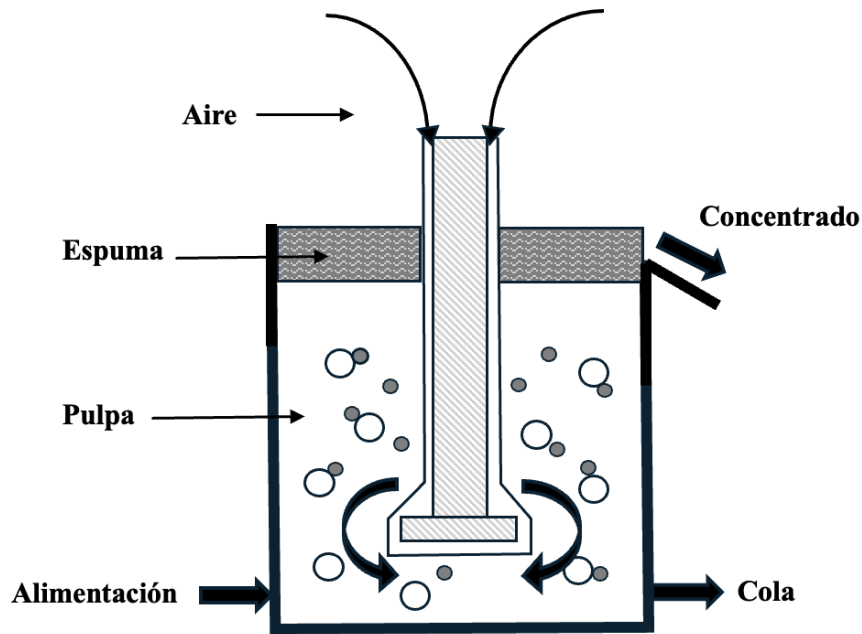


Figura 2.2. Esquema del proceso de flotación (Modificado de Yianatos & Vinnett, 2015).

Además de las propiedades superficiales de las partículas, existen otros factores que afectan la eficiencia del proceso de flotación. El tamaño de partícula establece la liberación del mineral valioso, permitiendo una mejor interacción con los reactivos colectores, y en consecuencia, una mayor flotabilidad. La concentración de reactivos, flujo de aire, porcentaje de sólidos y velocidad de rotación del rotor son parte del conjunto de variables operacionales que influyen en la eficiencia del proceso.

La flotación consiste en un sistema multifase (gas, sólido y líquido), heterogéneo en composición mineralógica, tamaño de partícula, y tamaño de burbuja. Debido a esto, se han establecido múltiples parámetros y modelos que permiten la representación cinética del proceso, para propósitos de diseño, dimensionamiento y control operacional (Yianatos & Vinnett, 2015).

2.2 Caracterización del proceso de flotación

El proceso de flotación puede ser representado como un modelo de dos etapas, formado por una etapa de reacción seguida de una de separación. La etapa de reacción ocurre en la zona de pulpa, donde se produce la colección de partículas mediante la formación del agregado partícula-burbuja. La etapa de separación corresponde a la zona de espuma, donde se favorece el retorno a la pulpa de la ganga arrastrada y del material menos liberado (Figura 2.3).



Figura 2.3. Diseño conceptual del proceso de flotación (Modificado de Yianatos & Vinnett, 2015).

La recuperación metalúrgica es la eficiencia con la cual el proceso separa el material valioso de la alimentación. Esta se calcula, Ec. (2.1), como la razón entre el mineral valioso recuperado ($x_C C$) y el mineral valioso alimentado ($x_F F$), siendo F el flujo de sólido alimentado al proceso con una fracción x_F de valioso, y C el flujo de concentrado con una fracción x_C de valioso. De igual manera, la recuperación puede expresarse como el producto entre la recuperación másica ($w = C/F$) y la razón de enriquecimiento ($ER = x_C/x_F$).

$$R = \frac{x_C C}{x_F F} = w ER \quad (2.1)$$

Para aumentar la recuperación, el flujo de valioso al concentrado debe aumentar, lo que típicamente trae consigo un incremento en la cantidad de impurezas, reduciendo la ley del producto. En consecuencia, cuando se busca obtener un concentrado de alta ley, el proceso debe ser más selectivo, sacrificando la recuperación.

2.3 Modelación cinética del proceso de flotación

Existen múltiples métodos para describir el proceso de flotación. Estos buscan representar matemática y conceptualmente el proceso de concentración. Estos modelos son fundamentales para predecir el comportamiento de la flotación, mejorar el rendimiento del proceso, y apoyar la toma de decisiones en el diseño y operación de los circuitos. La complejidad de los fenómenos microscópicos del proceso, junto con la falta o escasez de mediciones robustas, restringe el uso de modelos teóricos en la flotación. Los modelos altamente aceptados se clasifican en tres grupos:

- a) Modelos probabilísticos
- b) Modelos empíricos
- c) Modelos cinéticos

Debido al uso extensivo de modelos cinéticos en aplicaciones industriales, estos son los de mayor interés en este trabajo.

2.3.1 Modelos cinéticos

Los modelos cinéticos asumen que las partículas hidrofóbicas reaccionan con las burbujas de manera similar a una reacción química, tal como se ilustra en la Figura 2.4.

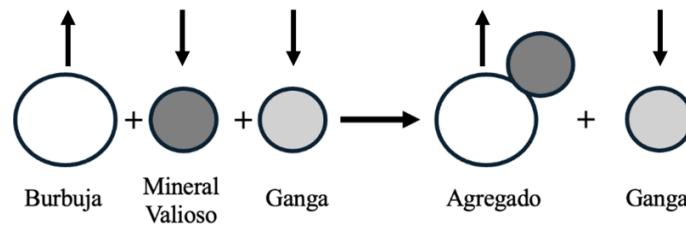


Figura 2.4. Analogía de la flotación como reacción química (Modificado de Yianatos & Vinnett, 2015).

La expresión general de la Ec. (2.2) describe la cinética de flotación, donde $C_p(t)$ y $C_b(t)$ son las concentraciones de partículas y burbujas en función del tiempo, t , respectivamente. Los exponentes m y n son los órdenes respectivos para la concentración de partículas y burbujas, y $k(t)$ es una pseudo-constante cinética que depende de múltiples factores que gobiernan el proceso de flotación, y que pueden variar en el tiempo (Polat & Chander, 2000).

$$\frac{dC_p(t)}{dt} = -k(t) C_p^n(t) C_b^m(t) \quad (2.2)$$

García-Zúñiga (1935) determinó, que la cinética de un proceso de flotación batch puede ser representado por un modelo simple de primer orden, con tasa única (k_{GZ}). De esta manera, y asumiendo volumen constante, la velocidad a la que se recupera el flotable es proporcional a la masa de flotable en la zona de colección (García-Zúñiga, 1935). La recuperación de un proceso batch está dada por la Ec. (2.3), siendo R_∞ la recuperación máxima cuando $t \rightarrow \infty$.

$$R(t) = R_\infty (1 - e^{-k_{GZ} t}) \quad (2.3)$$

Debido a las características heterogéneas del proceso de flotación, la suposición de tasa única no resulta factible. En base a esto, Imaizumi & Inoue (1963) plantearon una generalización para la Ec.

(2.3), incorporando una función de densidad de probabilidades para las tasas de flotación, tal como se presenta en la Ec. (2.4)¹

$$R(t) = R_{\infty} \int_0^{\infty} (1 - e^{-k t}) f(k) dk \quad (2.4)$$

Modelo Rectangular de $f(k)$

El modelo Rectangular considera una $f(k)$ en que las tasas de flotación se distribuyen uniformemente de 0 hasta un valor máximo $k_{\max}$ (Huber-Panu et al., 1976; Klimpel, 1980), tal como se presenta en la Ec. (2.5). El modelo mantiene el mismo número de parámetros que el de Tasa Única de la Ec. (2.3). A pesar del número reducido de parámetros, esta representación simplificada entrega una visión más realista de la heterogeneidad del proceso.

$$f(k) = \begin{cases} \frac{1}{k_{\max}} & \text{Si } 0 < k < k_{\max} \\ 0 & \text{en todo otro caso} \end{cases} \quad (2.5)$$

A partir de las Ecs. (2.4) y (2.5), se obtiene la recuperación en función del tiempo de la Ec. (2.6) para el modelo Rectangular.

$$R(t) = R_{\infty} \left[1 - \frac{1}{k_{\max} t} (1 - e^{-k_{\max} t}) \right] \quad (2.6)$$

Modelo Gamma de $f(k)$

Tanto el modelo de Tasa Única como el Rectangular tienen la característica de emplear sólo dos parámetros para representar el proceso. El modelo Gamma incorpora un parámetro adicional, el que le otorga una mayor flexibilidad para describir la heterogeneidad de la flotación (Imaizumi & Inoue, 1963).

La $f(k)$ Gamma está dada por la Ec. (2.7), siendo a_G y k_G parámetros de forma y escala, respectivamente. En la Ec. (2.7), Γ corresponde a la función Gamma definida por la Ec. (2.8).

¹ La formulación presentada por Imaizumi & Inoue (1963) considera $R_{\infty} = 100\%$.

$$f(k) = \frac{k^{a_G-1}}{k_G^{a_G} \Gamma(a_G)} e^{(-k/k_G)} \quad (2.7)$$

$$\Gamma(a_G) = (a_G - 1)! = \int_0^\infty x^{a_G-1} e^{-x} dx \quad (2.8)$$

De las Ecs. (2.4) y (2.7), la recuperación metalúrgica del modelo Gamma está dada por la Ec. (2.9).

$$R(t) = R_\infty \left(1 - \frac{1}{(1 + k_G t)^{a_G}} \right) \quad (2.9)$$

2.4 Interpolación

La modelación cinética permite representar el comportamiento de la recuperación en función del tiempo; sin embargo, requiere de una expresión específica para $R(t)$, además de presentar un buen ajuste a los datos. Cuando estas condiciones no se cumplen, surge la necesidad de explorar herramientas alternativas que permitan analizar y caracterizar la respuesta del sistema desde una perspectiva más flexible. Una de las herramientas es la interpolación.

La interpolación es un método numérico que permite estimar valores dentro de un rango de datos discretos conocidos (Burden & Faires, 2015). En cualquiera de los métodos de interpolación, se genera una función sin error en los puntos medidos, lo que facilita la estimación de valores intermedios. Existen diferentes métodos de interpolación, los que varían en su complejidad y en la forma que se conectan los datos. Dentro de los métodos de interpolación más comunes se encuentran: interpolación lineal, *splines* cúbicas, e interpolación con preservación de forma.

2.4.1 Fenómeno de Runge

Considere que se construye un polinomio único de grado n que pasa por $n + 1$ datos discretos conocidos (Burden & Faires, 2015), Figura 2.5. La interpolación mediante polinomio único resulta efectiva para un número de datos bajo. Sin embargo, al aumentar la cantidad de datos, el grado del polinomio aumenta, lo que genera mayores oscilaciones en los extremos. Este efecto es conocido como fenómeno de Runge, y fue descrito por Runge (1901) mediante datos que siguen la Ec. (2.10), tal como se ilustra en la Figura 2.5.

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25 x^2} \quad (2.10)$$

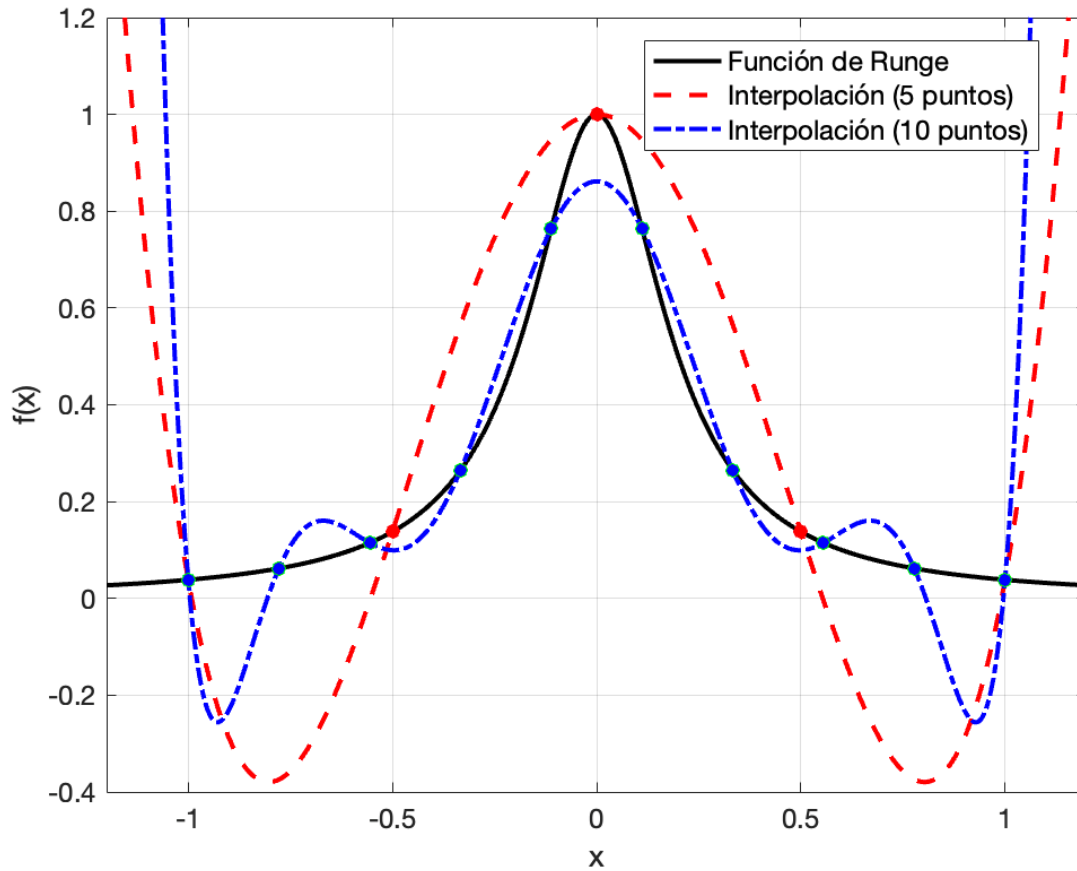


Figura 2.5. Fenómeno de Runge.

Para evitar este efecto, se recurre a la interpolación por tramos, entre cada par de puntos, resultando en un total de $(n - 1)$ ecuaciones para describir los datos experimentales.

2.4.2 Interpolación lineal

La interpolación lineal es el método más simple de interpolación. Consiste en describir el comportamiento entre dos datos discretos mediante una recta que conecta ambos puntos (Press et al., 2007). De esta manera, los valores intermedios se estiman a través de esta recta, tal como se presenta en la Ec. (2.11). Es un método adecuado para datos que no presentan cambios bruscos, y donde la variación entre puntos es aproximadamente lineal.

$$y_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) \quad (2.11)$$

Como resultado de esta interpolación se obtienen rectas que unen los puntos, tal como se presenta en la Figura 2.6.

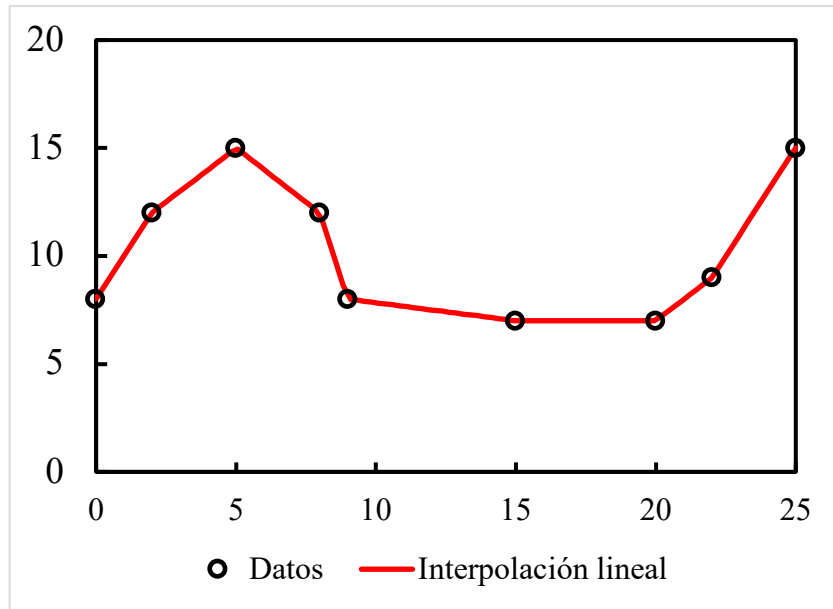


Figura 2.6. Ejemplo de interpolación lineal.

2.4.3 *Splines* cúbicas

La interpolación mediante *splines* cúbicas emplea polinomios de tercer grado entre puntos, los que tienen la forma de la Ec. (2.12). A diferencia de la interpolación lineal, las *splines* cúbicas aseguran una serie de condiciones relacionadas a la suavidad de la curva (Press et al., 2007). Estas condiciones son:

$$S_i(x) = a_i + b_i (x - x_i) + c_i (x - x_i)^2 + d_i (x - x_i)^3 \quad (2.12)$$

- Los polinomios deben pasar exactamente por los puntos de la muestra (condición de interpolación).
- La primera derivada en un punto debe coincidir para ambos polinomios sucesivos.
- La segunda derivada en un punto debe coincidir para ambos polinomios sucesivos, salvo para los extremos.

Por otro lado, para los puntos extremos, se debe cumplir una de las siguientes condiciones:

- La segunda derivada debe ser cero (*spline* natural).
- La segunda derivada debe ser igual a la del polinomio adyacente (extremo constante).
- La segunda derivada debe ser igual a un valor fijo.
- La primera derivada debe ser igual a un valor conocido.

La Figura 2.7 ejemplifica un resultado de este método, el que corresponde a una curva suave que típicamente mantiene la tendencia de los datos.

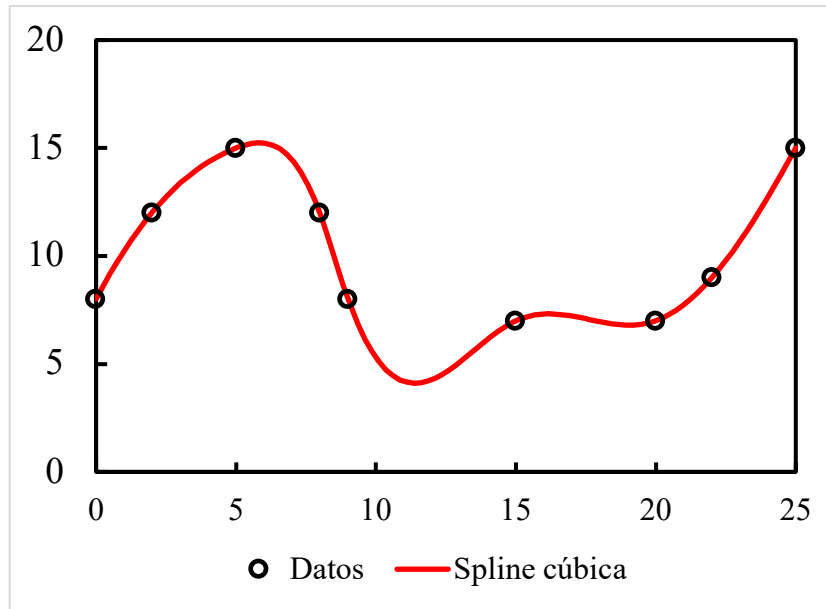


Figura 2.7. Ejemplo de interpolación con *splines* cúbicas.

2.4.4 Polinomio de interpolación cúbica por tramos de Hermite

La interpolación de Hermite por tramos, o PCHIP (*Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial*), es una técnica que utiliza polinomios cúbicos por tramos, similar a la *spline* cúbica, pero que garantiza que la curva entre los puntos no presente oscilaciones, preservando la monotonía entre datos sucesivos. Esto es particularmente importante en aplicaciones donde los datos presentan un comportamiento específico (por ejemplo, que los valores no disminuyen), y donde se requiere que la interpolación mantenga esa tendencia. Las *splines* cúbicas, por el contrario, pueden introducir picos o valles (Foley et al., 1990).

El método PCHIP exige ciertas condiciones:

- La primera derivada de los polinomios es continua. Al igual que las *splines*, las derivadas en un punto deben coincidir para los polinomios adyacentes.
- La primera derivada del polinomio interpolante debe coincidir, en el punto intermedio, con la pendiente que existe entre los dos datos que se interpolan.
- La función estará acotada por el par de puntos interpolados, por lo cual se obtiene una función localmente monótona.

La última condición (Moler, 2024) se logra:

- Para un punto intermedio entre dos valores conocidos, si las pendientes en estos últimos tienen signos opuestos, entonces la derivada en el valor intermedio es cero.

- Para un punto intermedio entre dos valores conocidos, si las pendientes en estos valores poseen los mismos signos, entonces la derivada del valor intermedio se calcula como la media armónica entre las pendientes adyacentes.

Como resultado, los polinomios de interpolación mantienen tanto la suavidad, como la forma y la monotonía local de los datos, tal como se presenta en la Figura 2.8. En base a esto, el método PCHIP presenta ventajas respecto de la interpolación lineal y *splines* para la caracterización cinética.

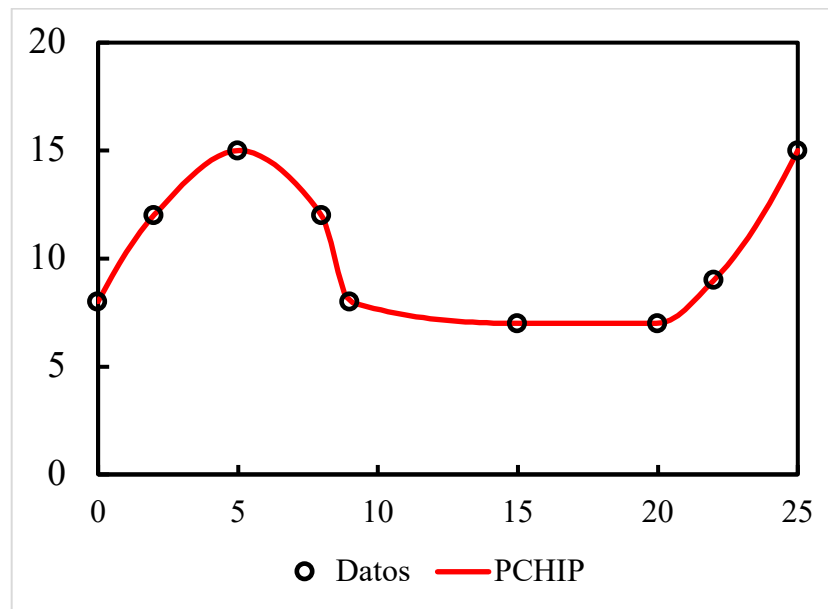


Figura 2.8. Ejemplo de interpolación PCHIP.

2.4.5 Interpolación Stineman

La interpolación Stineman se caracteriza por no introducir puntos de inflexión adicionales más allá de los observados en los datos originales, manteniendo suavidad en la primera derivada. Como resultado, la curva interpolada sigue de manera precisa y continua el comportamiento de los datos. En particular, el método satisface las siguientes condiciones (Stineman, 1980):

- Si los valores de la muestra y las derivadas que unen dichos puntos cambian monótonamente, entonces la curva y la derivada del polinomio resultante cambiarán monótonamente.
- Si las derivadas de los segmentos que unen los puntos de la muestra cambian monótonamente, entonces la derivada de la curva interpolada también lo hará.

- Si los valores de la muestra y sus derivadas experimentan un pequeño cambio, el cambio de la curva interpolada será proporcionalmente pequeño, manteniendo la suavidad de la interpolación.

2.5 Escalamiento *batch*-planta

Las curvas de tiempo-recuperación obtenidas en pruebas *batch* permiten proyectar el comportamiento del proceso industrial mediante distintos enfoques de escalamiento. Uno de los métodos altamente utilizados es el escalamiento por tiempo. Este consiste en el uso de un factor que relaciona el tiempo transcurrido en las pruebas *batch* para alcanzar una recuperación, proyectando el resultado a un tiempo de residencia en el sistema continuo o industrial, tal como se esquematiza en la Figura 2.9. Este factor permite estimar el rendimiento esperado a gran escala, bajo el supuesto que se mantienen condiciones comparables de acondicionamiento del mineral y de operación (Yianatos et al., 2022). En el presente trabajo se utilizará el escalamiento por tiempo, tanto por su amplio uso en el dimensionamiento de circuitos, como por su adecuación a los métodos de interpolación utilizados en este trabajo. En particular, la interpolación no involucra la determinación de parámetros cinéticos explícitos, por lo que requiere de una estrategia de escalamiento que no dependa del ajuste de modelos teóricos.

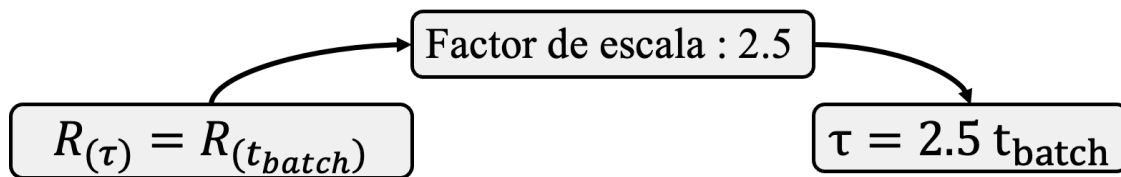


Figura 2.9. Representación del escalamiento por tiempo.

En este Capítulo se presentaron los antecedentes necesarios para el análisis de respuestas cinéticas en un proceso de flotación, y para propósitos de escalamiento. En el Capítulo III se detallará la metodología empleada en este trabajo, incluyendo el diseño experimental, el procesamiento de datos, y los procedimientos utilizados para comparar las distintas herramientas de modelación y predicción.

Capítulo III

3 METODOLOGÍA

En este Capítulo se describe el procedimiento experimental utilizado para la obtención de las respuestas cinéticas de un proceso de flotación *batch*. Estos datos se emplean para la caracterización cinética a través de modelación clásica y mediante interpolación, para la posterior evaluación del error para propósitos de escalamiento. La metodología puede ser resumida en dos etapas: una etapa experimental y una etapa de análisis. La Figura 3.1 presenta de forma esquemática las respectivas sub-etapas.

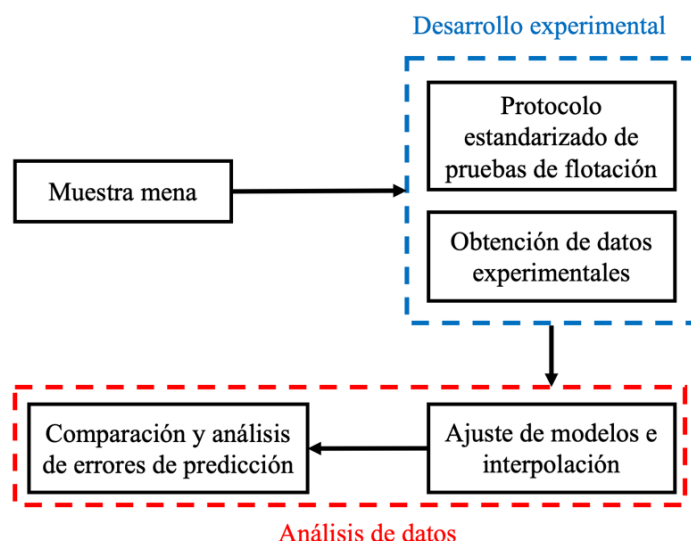


Figura 3.1. Esquemático de la metodología utilizada en este trabajo.

3.1 Desarrollo experimental

Se trabajó con una mena sulfurada de cobre, proveniente de la Compañía Minera Doña Inés de Collahuasi (CMDIC). El sólido fue previamente chancado y cuarteado con el fin de obtener submuestras de 1 kg.

3.1.1 Determinación de tiempos y condiciones de molienda

Se determinaron los tiempo y condiciones de molienda para obtener los valores de P_{80} de 300 μm y 212 μm utilizados en este trabajo. Los equipos y materiales fueron:

- Equipos
 - Molinos de cerámica de 5000 cm³.
 - Bolas de acero.
 - Juego de tamices ASTM® de 355, 300, 212, 150, 75, 45 y 20 µm.
 - Balanza electrónica.
 - Estufa.
 - Filtro de presión EDEMET® (Chile).
 - W.S. Tyler® Ro-Tap ® (Ohio, EE. UU.).
- Materiales
 - Agua.
 - Filtros de papel Whatman® 1.
 - Papel Kraft.
 - Bandejas de aluminio.
 - Balde de 20 L.

Se determinó la distribución granulométrica y los valores de P_{80} en función del tiempo de molienda, siguiendo el siguiente procedimiento:

- Se verificó la carga del molino y se agregó la carga de bolas en un lecho horizontal.
- Se agregaron muestras de 1 kg al interior del molino, para iniciar la molienda por un tiempo predefinido. La instalación del molino se muestra en la Figura 3.2

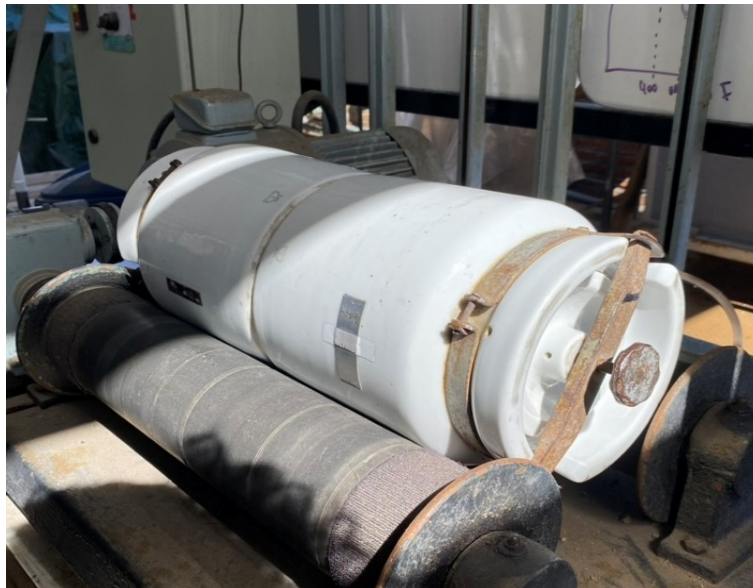


Figura 3.2. Instalación del sistema de molienda.

- De la muestra total molida, se tomó una submuestra representativa de 100 g. Se realizó tamizaje húmedo a un tamaño de 20 μm . Los bajo- y sobre-tamaños ($-20 \mu\text{m}$ y $+20 \mu\text{m}$) fueron filtrados y secados a una temperatura de 90°C .
- El sobre-tamaño fue tamizado mediante el equipo Ro-Tap®, utilizando desde el tamiz N°45 (355 μm) hasta el N°635 (20 μm). Se pesó el material retenido en cada tamiz, para así obtener el acumulado pasante y retenido, junto con el P_{80} .
- El procedimiento se aplicó para tiempos de molienda de 20, 30, 35 y 40 min.

Se determinó el P_{80} para cada tiempo de molienda, obteniéndose valores de 300 μm en aproximadamente 32 min, y de 212 μm en aproximadamente 36.5 min. En la Figura 3.3 se presentan las distribuciones de tamaño de partícula para las dos condiciones analizadas.

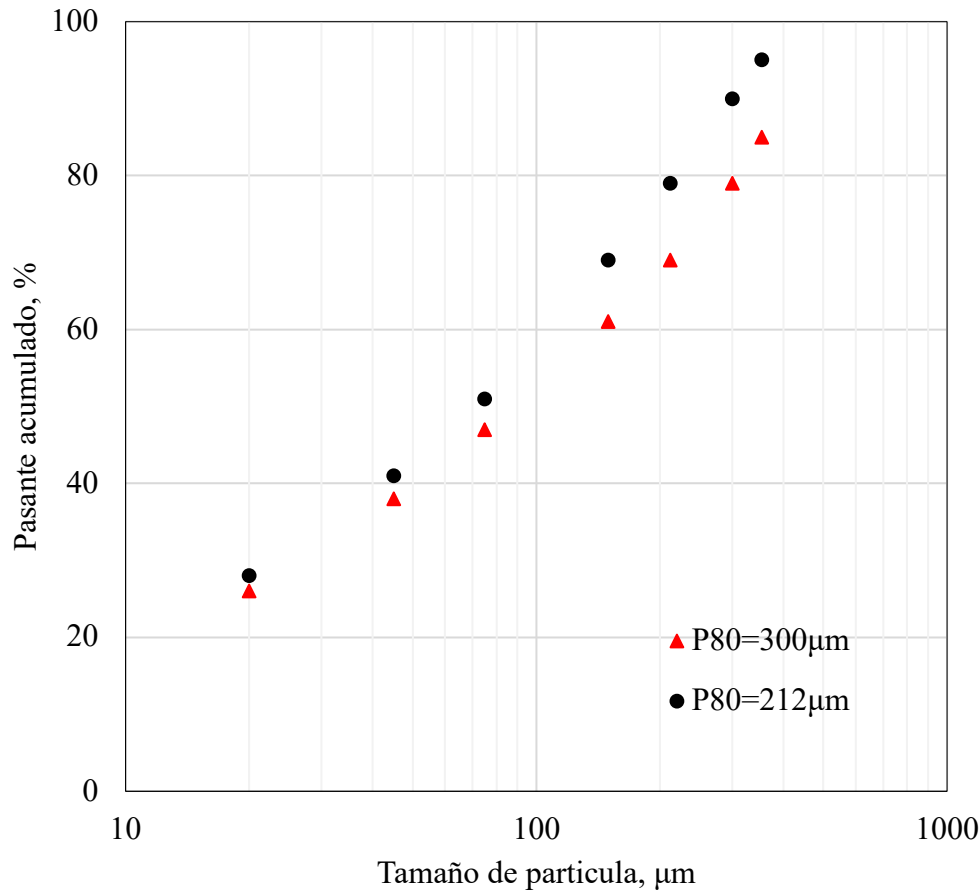


Figura 3.3. Distribución acumulada de tamaño de partícula para las condiciones analizadas.

3.1.2 Proceso de flotación estándar *batch*

El proceso de flotación estándar *batch* se basó en el protocolo del Laboratorio Metalúrgico de Minera Los Pelambres (Minera Los Pelambres, 2022).

- Equipos
 - Celda de Flotación EDEMET® (Chile).
 - Filtro de presión EDEMET® (Chile).
 - Sensor de pH.
 - Balanza electrónica.
 - Estufa.
- Materiales
 - Agua acondicionada con espumante.
 - Filtros.
 - Bandejas de silicona.
- Condición de operación
 - P₈₀ de alimentación: 300 μ m y 212 μ m.
 - % sólido pulpa: 33%.
 - Volumen celda: 2.7 L.
 - Flujo de aire: 8 L/min.
 - RPM: 700.
 - Tiempos de flotación: 0.17; 0.33; 0.67; 1; 1.5; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 16, 24, 32 min.
 - pH flotación: 9.5.
 - Colector: Hostaflot 18275® 22.5 g/ton.
 - Espumante: Aerofroth 70 Frother ®; 24 mg/L.

Procedimiento:

- Se alimentó la muestra molida a la celda de flotación para luego agregar 2 L de agua. Se agitó la pulpa por un tiempo de 10 minutos.
- Se ajustó el pH de la pulpa en 9.5 mediante la dosificación de lechada de cal. Se adicionó el colector, con un tiempo de acondicionamiento de 5 minutos. A los 2.5 min del acondicionamiento del colector, se agregó espumante. La Figura 3.4 muestra la pulpa en la etapa de acondicionamiento.
- Luego del tiempo de acondicionamiento, se procedió a la inyección del aire. La flotación se realizó como respuesta cinética de 32 minutos, con paleteos cada 1 segundo en los primeros 4 intervalos, cada 3 segundos en los siguientes 5 intervalos, y finalmente cada 6 segundos en los intervalos restantes. El inicio del paleteo se definió como el momento en

el cual la espuma rebosó el “labio” de la celda por primera vez, marcándose así el tiempo inicial ($t = 0$). Se mantuvo continuamente el nivel de la pulpa, agregando agua acondicionada con espumante y regulando el pH en 9.5.

- Finalizado el proceso de flotación, los concentrados y el relave fueron pesados, filtrados y secados. Las muestras secas fueron nuevamente pesadas, para proceder con los análisis químicos.

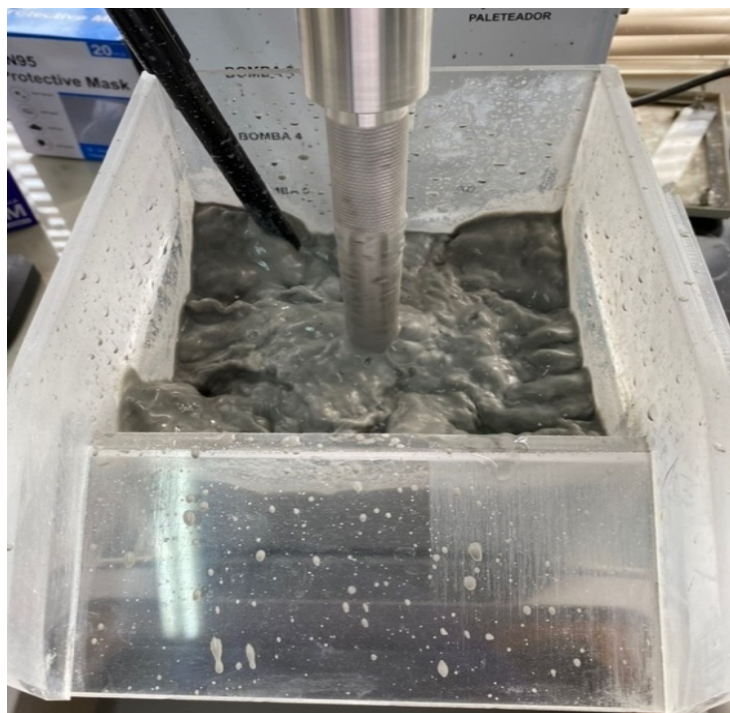


Figura 3.4. Acondicionamiento de la pulpa.

El procedimiento se repitió para cada una de las condiciones de molienda (6 repeticiones para un P_{80} de 212 μm y 4 repeticiones para un P_{80} de 300 μm , respectivamente).

3.1.3 Digestión y análisis químicos

A partir de las muestras de alimentación, concentrados y relave, se tomó una sub-muestra representativa para digestión y análisis químicos. Estas muestras fueron pulverizadas previo a la digestión. Finalmente, el análisis por espectroscopia de absorción atómica permitió obtener las leyes de cobre en cada producto.

- Equipos
 - Placa calefactora.
 - Bomba de vacío.
 - Balanza analítica.
 - Equipo de absorción atómica.
- Materiales
 - Vasos de precipitados de 100 mL.
 - Matraces aforados de 100 mL.
 - Matraz Kitasato.
 - Embudo Buchner.
 - Papel filtro.
- Reactivos
 - Ácido nítrico.
 - Ácido perclórico.
 - Ácido clorhídrico.
 - Agua destilada.

Procedimiento:

- Se transfirieron a un vaso de precipitados de 100 mL aproximadamente 0.1 g de muestra representativa.
- Se adicionaron 10 mL de ácido nítrico y 5 mL de ácido perclórico.
- Se digirió en plancha calefactora a temperatura constante (150°C) hasta completar la fase oxidativa inicial.
- Se disolvieron las sales con 30 mL de agua destilada y 10 mL de ácido clorhídrico.
- Se calentó la solución a ebullición (200 °C) hasta disolución de sales, tal como se presenta en la Figura 3.5.
- Se enfrió la solución y se filtró en matraz de 100 mL.
- Se aforó el matraz hasta 100 mL con agua destilada y se agitó la solución.
- Se diluyeron las muestras y se analizaron por espectrofotometría de absorción atómica.



Figura 3.5. Muestras en digestión ácida.

A partir de los resultados del análisis por espectrofotometría de absorción atómica, se calculó la ley de cada una de las muestras a partir de la Ec. (3.1):

$$\text{Ley Cu, \%} = \frac{(\text{Resultados análisis, ppm}) (\text{Volumen de aforo, L})}{\text{Masa de submuestra, mg}} 100 \quad (3.1)$$

3.2 Análisis de datos

Se utilizó la Ec. (3.1) para calcular las leyes, las que luego se emplearon en la reconciliación de datos. Con los datos reconciliados, se calcularon las 14 recuperaciones incrementales. Las recuperaciones incrementales se obtuvieron a partir de las masas secas de sólido y las leyes obtenidas a partir de los análisis químicos (leyes reconciliadas). Además, se calcularon las recuperaciones acumuladas en función del tiempo. Las curvas tiempo-recuperación para cada condición experimental resultaron del promedio de todas las réplicas. Todos los datos de tiempo-recuperación se presentan en el Anexo A.

La comparación entre los modelos y los métodos de interpolación se realizó en base a su capacidad predictiva. No se realizaron comparaciones en base a la calidad de ajuste, debido a que la interpolación no tiene error en los datos medidos.

3.2.1 Sub-muestreo de los datos experimentales

Para evaluar la capacidad predictiva de los modelos cinéticos y de métodos de interpolación, se emularon respuestas cinéticas con 7 y 10 datos, sub-muestreando los 14 datos originales. En el análisis, se mantuvieron el punto de origen (a $t = 0$ min) y el valor final de recuperación (a $t = 32$ min). Se generaron todas las combinaciones posibles de 7 y 10 puntos experimentales desde los 14 datos originales (*i.e.*, sin considerar el punto $t = 0$ como dato). El valor final de recuperación se

mantuvo en todas las respuestas cinéticas con el fin de acotar la estimación de R_{∞} , y garantizar la aplicabilidad del escalamiento por tiempo para todas las combinaciones. Los sub-muestreos permitieron evaluar la variabilidad en el ajuste y en la predicción de cada método bajo diferentes intervalos de flotación en las pruebas *batch*.

La Figura 3.6 presenta dos posibles ejemplos de combinaciones de 10 puntos experimentales (2 de 715), donde las cruces indican que los respectivos datos no fueron incluidos en la caracterización cinética. A estos 10 puntos se le agrega la condición $i = 0$, $(t, R) = (0, 0)$. La selección de 10 datos considera cinéticas *batch* con un número significativo de concentrados por prueba. De la misma forma, la Figura 3.7 presenta dos ejemplos de combinaciones de 7 puntos experimentales (2 de 1716). La elección de 7 datos emula respuestas cinéticas típicas en aplicaciones industriales.

$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$	$i = 10$	$i = 11$	$i = 12$	$i = 13$	$i = 14$
Combinación 1														
●	×	×	×	×	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Combinación 2														
●	●	×	×	●	●	●	●	●	●	●	●	×	×	●

● Punto experimental × Punto omitido

Figura 3.6. Dos ejemplos de combinaciones de 10 puntos experimentales (2 de 715).

$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$	$i = 10$	$i = 11$	$i = 12$	$i = 13$	$i = 14$
Combinación 1														
●	×	×	×	×	●	●	×	●	×	●	●	×	●	●
Combinación 2														
●	●	×	×	×	×	×	×	×	●	●	●	●	●	●

● Punto experimental × Punto omitido

Figura 3.7. Dos ejemplos de combinaciones de 7 puntos experimentales (2 de 1716).

3.2.2 Ajuste de datos

3.2.2.1 Regresión

La estimación de los parámetros asociados a los modelos cinéticos se realiza típicamente con herramientas de regresión. Los métodos de regresión no lineal son los más utilizados para estimar

los parámetros asociados a cada modelo. Este método no requiere de transformaciones matemáticas, y puede ser resuelto con la aplicación de mínimos cuadrados [Ec. (3.2)]. La función objetivo de la Ec. (3.2) considera tanto las n recuperaciones experimentales $R_{\text{dato}}(t_i)$ como las n recuperaciones calculadas a partir del modelo $R_{\text{modelo}}(t_i)$ (Vinnett et al., 2019).

$$\min \sum_{i=1}^n (R_{\text{dato}}(t_i) - R_{\text{modelo}}(t_i))^2 \quad (3.2)$$

A pesar de la existencia de otros métodos de estimación, este trabajo se centrará en el uso de regresión no lineal para los modelos cinéticos. Esto se debe a su amplia aplicación tanto a escala de laboratorio como industrial.

3.2.2.2 Modelos cinéticos

Para el caso del ajuste de los modelos cinéticos, se desarrolló un código en MATLAB que resuelve regresiones no lineales mediante el comando `fitnlm` de la *Toolbox de Statistics and Machine Learning*, versión 12.3. Esta función requiere como datos de entrada los pares experimentales (t, R_{dato}) , la estructura del modelo, y una aproximación inicial para los parámetros del modelo. La función itera hasta encontrar los parámetros que lleven a un mínimo local para la Ec. (3.2), de ahí la importancia de elegir adecuadamente el punto de partida. Como criterio de ajuste, se utilizó el error cuadrático medio (ECM) para cada respuesta cinética, definido por la Ec. (3.3). Este indicador corresponde a la suma de los cuadrados de los residuos dividida por los grados de libertad ($n - p$, con p el número de parámetros del modelo).

$$\text{ECM} = \frac{1}{(n - p)} \sum_{i=1}^n (R_{\text{dato}}(t_i) - R_{\text{modelo}}(t_i))^2 \quad (3.3)$$

3.2.2.3 Métodos de interpolación

Para la caracterización cinética mediante métodos de interpolación, se utilizaron métodos de interpolación lineal, *spline* cúbica y PCHIP mediante MATLAB, usando el comando `interp`. Se requiere, como datos de entrada, la muestra a analizar, los puntos a interpolar y el método de interpolación. En el caso del método de Stineman, se utilizó una función personalizada desarrollada externamente en MATLAB, basada en el archivo disponible públicamente en MATLAB Central (*Smooth Operator – Stineman 1D interpolation*) desarrollado por Noah (2022).

Se desarrolló un código que, a través de un método iterativo, calcula un PRESS (*Predicted Residual Sum of Squares* o Suma de Cuadrados del Error Residual de Predicción) modificado (PRESSM)

para cada combinación. Al igual que para la generación de las combinaciones de 7 y 10 datos, el cálculo del PRESSM no consideró la omisión del punto en el origen a $t = 0$, ni del último punto experimental a $t = 32$ min. Con esto se evitó la extrapolación de datos.

3.2.3 Suma de cuadrados de error residual de predicción

El PRESS es una métrica para validar modelos y evaluar su capacidad predictiva, a través de la validación cruzada. PRESS es normalmente utilizado para comparar modelos, ya que cuantifica el error en la predicción como indicador de sobreajuste, el cual se verá reflejado en un valor elevado de la métrica (Kutner et al., 2004). En este estudio se implementó una versión modificada de esta métrica, basada en múltiples combinaciones de datos experimentales, las que consideran la eliminación de varios puntos a la vez. Esto difiere del enfoque tradicional donde se omite un dato a la vez para evaluar su predicción individual. En lugar de ello, el PRESS modificado (PRESSM) estudiado acá evalúa el error de predicción asociado a todos los puntos que fueron omitidos dentro de una combinación. En este contexto, la generación de múltiples combinaciones emula la selección arbitraria de los tiempos de flotación en una prueba *batch*. El procedimiento para el cálculo del PRESSM se resume en los siguientes pasos:

- Se generan todas las combinaciones posibles de 10 o 7 datos experimentales, seleccionadas a partir del total de 14 datos tiempo-recuperación, manteniendo siempre fijos el punto en el origen (a $t = 0$ min) y el valor final de recuperación (a $t = 32$ min). Nuevamente, se mantienen los valores extremos para evitar extrapolaciones.
- Para cada combinación, se ajusta el modelo cinético o se aplica la interpolación, utilizando únicamente los puntos incluidos (no omitidos) en dicha combinación.
- Se predicen los valores correspondientes a los puntos omitidos utilizando los resultados del modelo cinético o del método de interpolación.
- Se calcula la diferencia entre las predicciones y los valores medidos en los puntos omitidos.
- El PRESSM se obtiene como la suma de los cuadrados de los errores de predicción, como se detalla en la Ec. (3.4), donde $\hat{R}_i(t_i)$ es el valor estimado por modelación cinética o interpolación en el tiempo t_i , donde el subíndice i denota los valores omitidos en cada combinación.

$$\text{PRESSM} = \sum_{i=1}^{7 \text{ ó } 4} \left(R_{\text{dato}}(t_i) - \hat{R}_i(t_i) \right)^2, \text{ aplicada solo a los datos omitidos} \quad (3.4)$$

A modo de ejemplo, la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** representa esquemáticamente el procedimiento aplicado a un caso para las combinaciones con 7 puntos experimentales. Este procedimiento se repite para cada combinación, obteniéndose así un conjunto de valores de PRESSM, uno por condición de sub-muestreo. Este conjunto permite analizar la capacidad predictiva de cada método de caracterización cinética frente a distintos (y arbitrarios) intervalos de flotación en las pruebas *batch*.

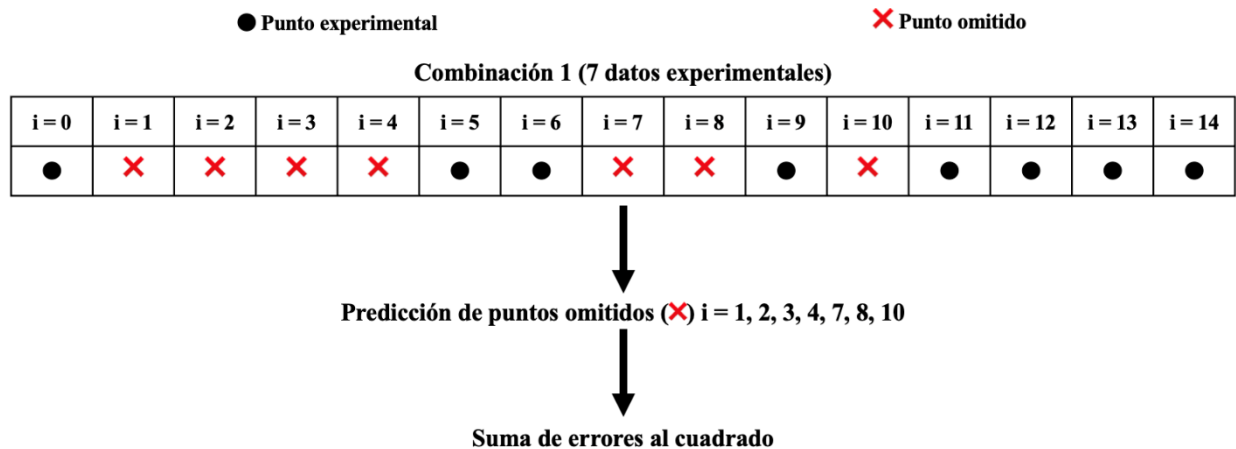


Figura 3.8. Esquema de aplicación del método PRESSM a partir de una combinación de 7 datos experimentales.

3.2.4 Escalamiento industrial

Se realizó un ejercicio de escalamiento para evaluar la sensibilidad de los resultados al emplear modelación o simulación bajo condiciones sub-muestreadas. Se incorporó una restricción adicional a los sub-muestreos: el dato asociado al tiempo en el que se desea realizar la predicción fue excluido de todas las combinaciones. Esto evita que las técnicas de interpolación se vean favorecidas debido a su condición de error cero.

Se definieron tiempos de residencia representativos de la operación industrial (τ), específicamente de 20 o 30 minutos, los cuales fueron ajustados mediante un factor de escala para obtener tiempos *batch* equivalentes de 8 o 12 minutos. Dado que ambos tiempos se encuentran dentro de la prueba de flotación, para cada τ (20 o 30 minutos) se eliminaron estos datos *batch* (8 o 12 minutos) y se utilizaron como valores de referencia para evaluar la calidad de la predicción de recuperación. Este procedimiento se esquematiza en la Figura 3.9.

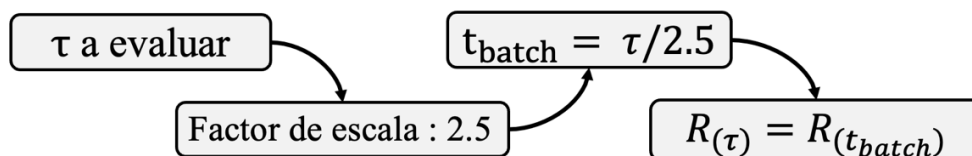


Figura 3.9. Esquemático de escalamiento por tiempo para estimar la recuperación de un proceso continuo.

A modo de ejemplo, la Figura 3.10 presenta dos combinaciones de 7 puntos experimentales (2 de 924) en las que se aplica la restricción de exclusión del punto asociado al tiempo de interés ($i = 9$, $t_{batch} = 8$ minutos), prediciendo la recuperación en base a los datos restantes. De manera análoga, en el caso de las combinaciones con 10 puntos experimentales, se generaron 220 combinaciones bajo estas mismas restricciones.

i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8	i = 9	i = 10	i = 11	i = 12	i = 13	i = 14
Combinación 1														
●	×	×	×	×	●	●	×	●	×	●	●	×	●	●
Combinación 2														
●	●	×	×	×	×	×	×	●	×	●	●	●	●	●

● Punto experimental × Punto omitido

Figura 3.10. Dos ejemplos de combinaciones de 7 puntos experimentales, con exclusión del punto evaluado para propósitos de predicción (2 de 924).

El presente Capítulo resumió la metodología utilizada para la obtención y procesamiento de los datos de flotación *batch*. En el Capítulo IV se presentan los resultados obtenidos a partir de las metodologías detalladas acá, discutiendo el desempeño de las diferentes estrategias de caracterización cinética.

Capítulo IV

4 ANALISIS DE RESULTADOS

4.1 Respuestas cinéticas obtenidas frente a cambios de tamaño de partícula

Se obtuvieron los datos tiempo-recuperación para las condiciones con $P_{80} = 300 \mu\text{m}$ y $P_{80} = 212 \mu\text{m}$. Las respuestas cinéticas experimentales se ilustran en la Figura 4.1. Se observa que a un mayor P_{80} , la recuperación Cu es menor, lo que se atribuye a un menor grado de liberación.

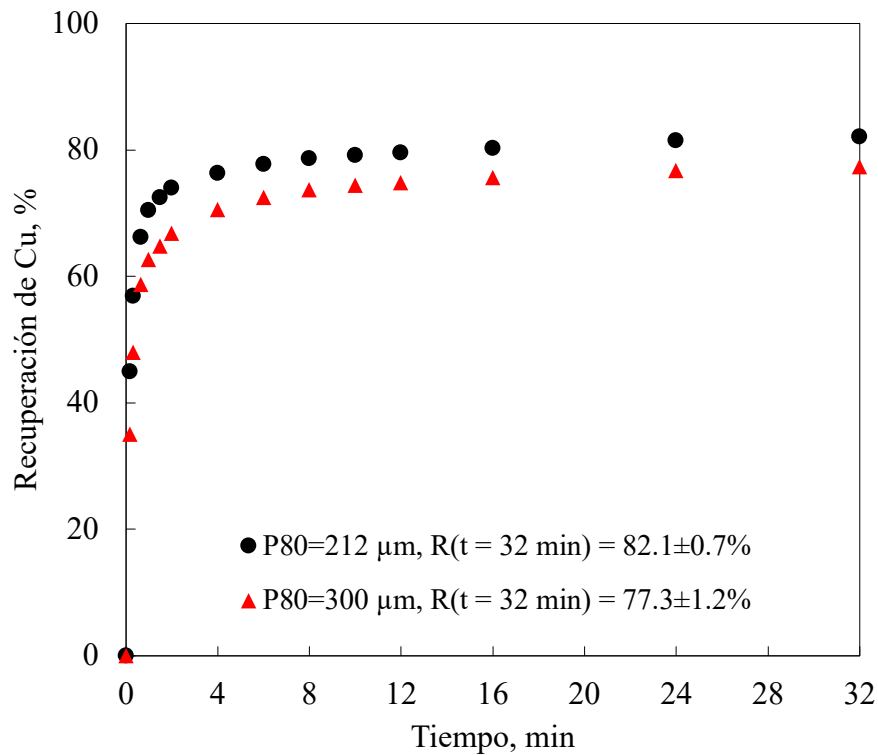


Figura 4.1. Respuestas cinéticas experimentales.

4.2 Ajuste modelos cinéticos de recuperación, conjunto original de 14 datos

Primero, se realizó el ajuste de modelos para el conjunto completo de datos experimentales. La Figura 4.2 presenta el ajuste asumiendo los modelos de Tasa Única, Rectangular y Gamma. En la Tabla 4.1, se muestran los parámetros de cada modelo, junto con los ECMs. Estos últimos fueron

más bajos en el caso del modelo Gamma. El mayor ECM lo presentó consistentemente el modelo de Tasa Única. El buen desempeño del modelo Gamma se atribuye al parámetro adicional que le otorga mayor flexibilidad.

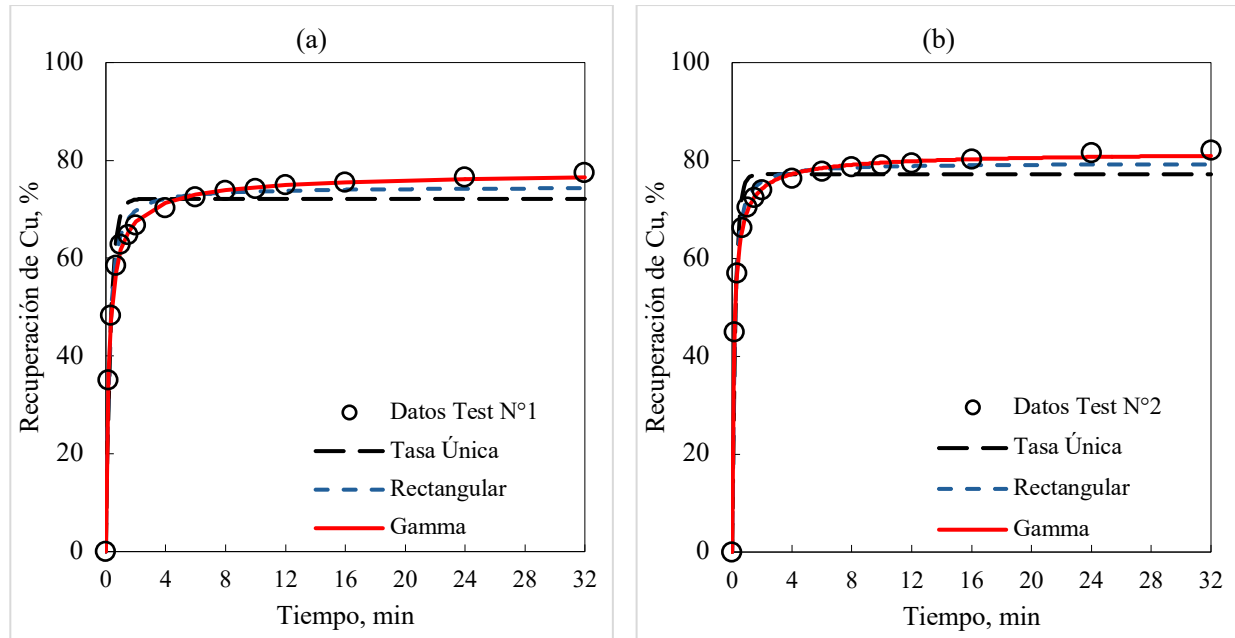


Figura 4.2. Ajuste de modelos: (a) *Test* N°1 ($P_{80} = 300 \mu\text{m}$), (b) *Test* N°2 ($P_{80} = 212 \mu\text{m}$).

Tabla 4.1. Parámetros cinéticos.

TEST	Tasa Única		Rectangular		Gamma	
Test N°1	$R_{\infty}, \%$	72.12	$R_{\infty}, \%$	74.60	$R_{\infty}, \%$	78.26
	$k, 1/\text{min}$	3.12	$k_{\text{max}}, 1/\text{min}$	7.57	$k_{\text{mean}}, 1/\text{min}$	6.13
					a_G	0.67
	ECM	20.52	ECM	4.79	ECM	0.74
Test N°2	$R_{\infty}, \%$	77.18	$R_{\infty}, \%$	79.48	$R_{\infty}, \%$	82.03
	$k, 1/\text{min}$	4.25	$k_{\text{max}}, 1/\text{min}$	10.60	$k_{\text{mean}}, 1/\text{min}$	8.94
					a_G	0.73
	ECM	17.06	ECM	3.30	ECM	0.51

4.3 Interpolación de la curva cinética, conjunto original de 14 datos

Se realizó también la interpolación a los conjuntos de datos originales. La Figura 4.3 presenta el resultado de la interpolación, con los métodos de interpolación Lineal, *Splines* cúbicas, PCHIP y Stineman. Debido a la cantidad significativa de datos experimentales, los distintos métodos de interpolación llevaron a resultados similares, ya que el número de puntos es suficiente para describir adecuadamente la tendencia de la recuperación versus tiempo.

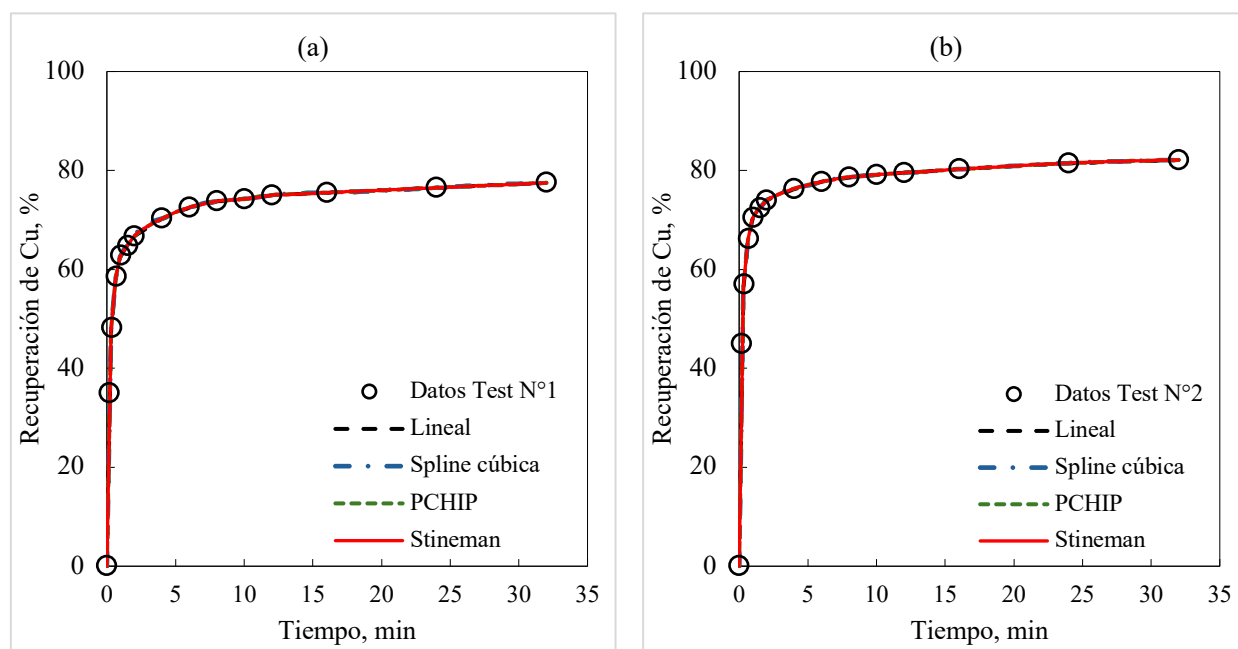


Figura 4.3. Resultados interpolación:
(a) *Test N°1* ($P_{80} = 300 \mu\text{m}$), (b) *Test N°2* ($P_{80} = 212 \mu\text{m}$).

4.4 Sensibilidad de la respuesta cinética

Se aplicaron los sub-muestreos considerando combinaciones de 7 y 10 puntos experimentales del total de 14 datos cinéticos. Esto con el fin de analizar el efecto del número de puntos y de los tiempos de muestreo en la respuesta cinética observada. Para efectos de ilustración, se presenta la sensibilidad de la interpolación PCHIP al aplicar sub-muestreos a los datos experimentales del *Test N°1* ($P_{80} = 300 \mu\text{m}$). Las Figuras 4.4 y 4.5 presentan los resultados de interpolación al usar 7 y 10 puntos experimentales, respectivamente. Se presentan como ejemplo dos combinaciones en cada caso. La selección de estas combinaciones se realizó en base a la métrica PRESSM, identificándose la mejor y peor combinación según el desempeño predictivo. En la Figura 4.4(a) se presentan los resultados para la mejor combinación de 7 puntos, mientras que la Figura 4.4(b) muestra su correspondiente gráfico de dispersión entre la recuperación experimental y de predicción. De forma análoga, la Figura 4.4(c) presenta la peor combinación usando 7 puntos cinéticos, y la Figura 4.4(d) su respectivo gráfico de dispersión. La Figura 4.5 repite esta estructura, pero considerando combinaciones con 10 puntos experimentales.

Los resultados revelan una marcada influencia de la selección de los intervalos de flotación en la tendencia observada mediante la caracterización cinética. Esto se refleja más claramente en los gráficos de dispersión [Figuras 4.4(b), 4.4(d), 4.5(b), y 4.5(d)], donde la proximidad de los puntos a la recta $y = x$ varía significativamente. Las peores representaciones cinéticas se deben a la omisión puntos experimentales claves los que determinan el inicio del proceso.

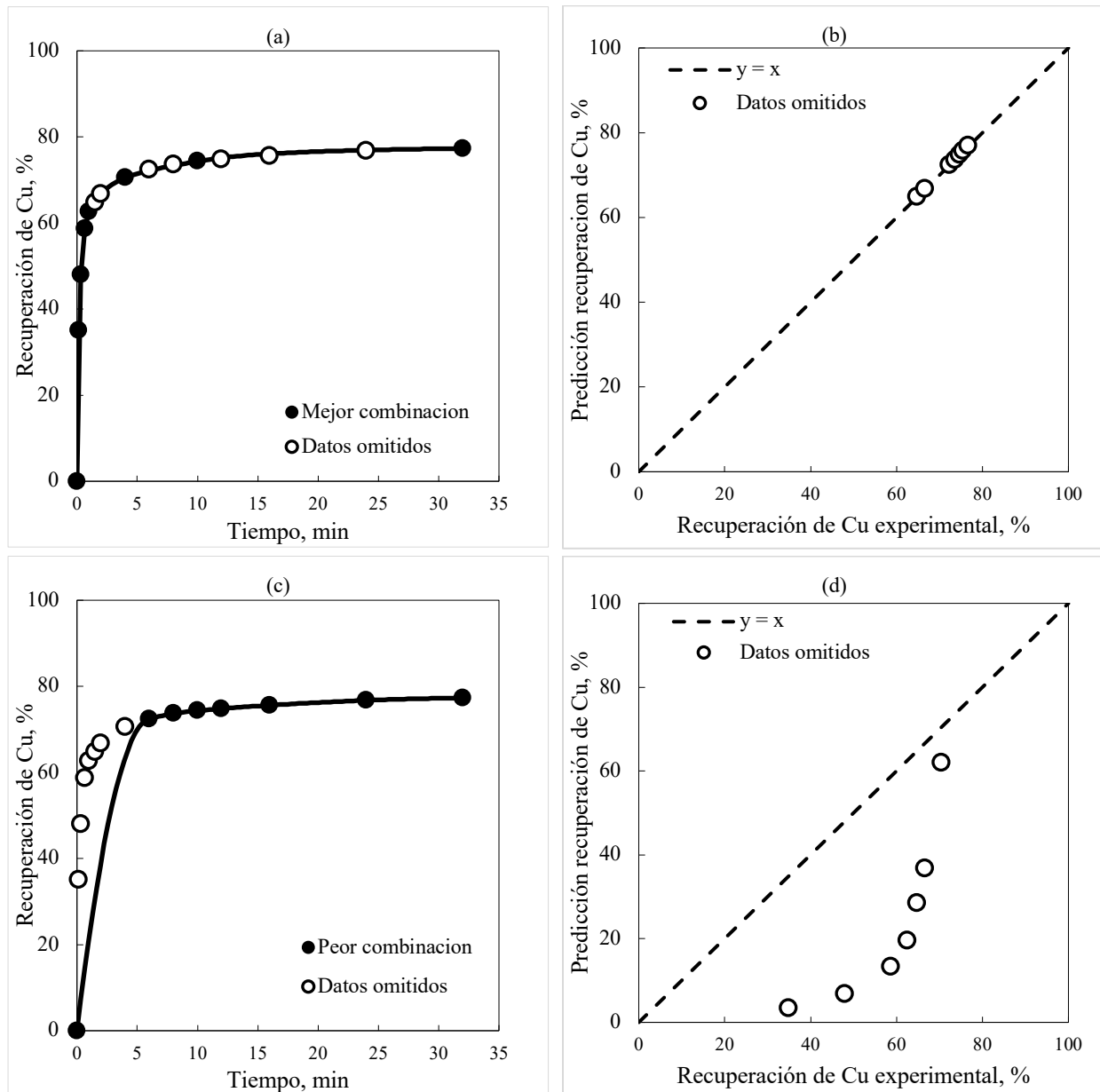


Figura 4.4. Sensibilización con 7 puntos experimentales: (a) resultados de interpolación para el mejor escenario, (b) gráfico de dispersión para el mejor escenario, (c) resultados de interpolación para el peor escenario, (d) gráfico de dispersión para el peor escenario.

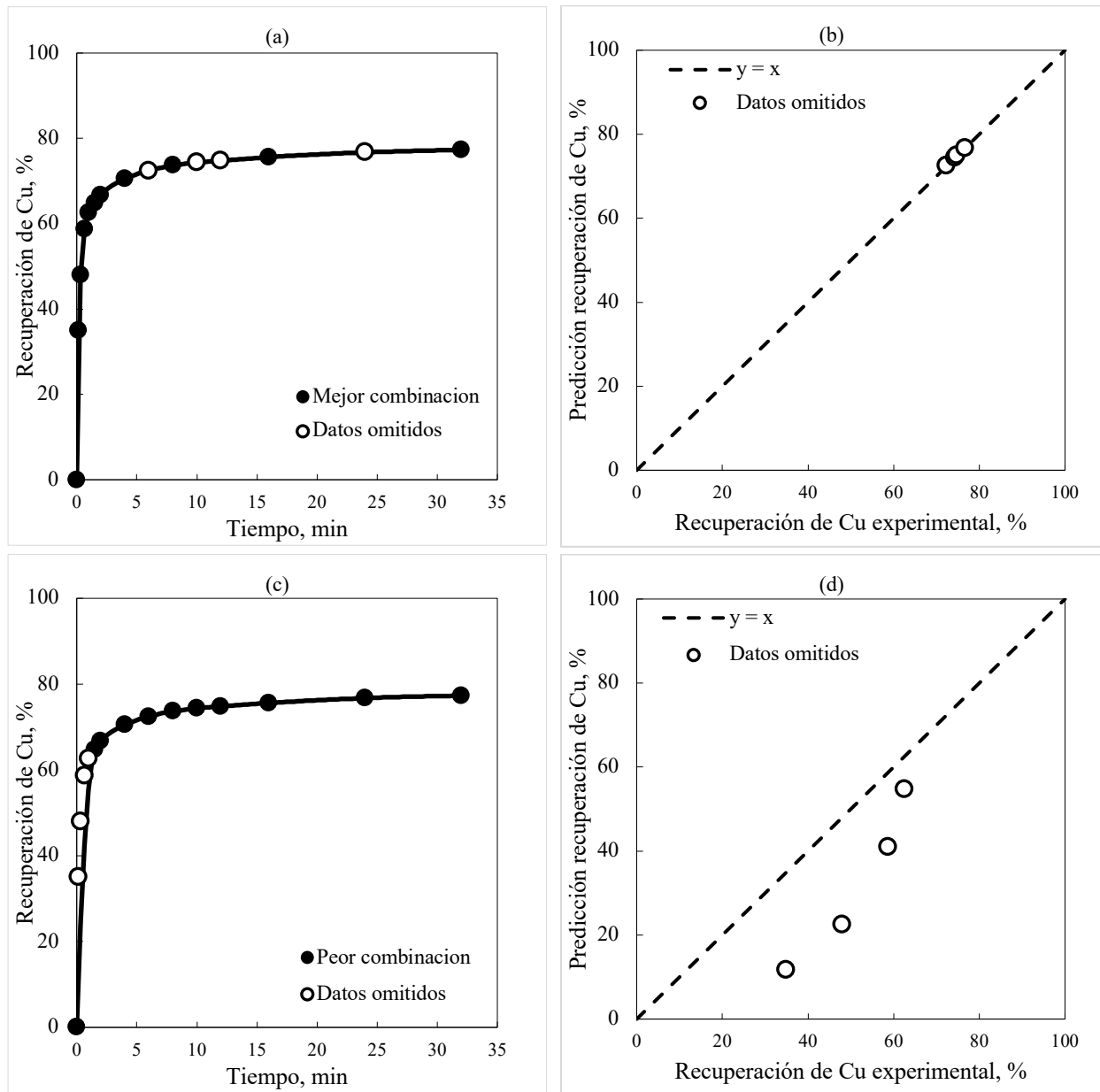


Figura 4.5. Sensibilización con 10 puntos experimentales: (a) resultados de interpolación para el mejor escenario, (b) gráfico de dispersión para el mejor escenario, (c) resultados de interpolación para el peor escenario, (d) gráfico de dispersión para el peor escenario.

Al comparar los resultados obtenidos con 10 puntos experimentales respecto a los obtenidos con 7 puntos experimentales, se observa que el primer caso genera predicciones con menos sensibilidad respecto de los intervalos de muestreo.

4.5 Comparación entre modelación cinética e interpolación

Para comparar los distintos métodos para representar las curvas tiempo-recuperación, se empleó el PRESSM como indicador de la capacidad predictiva. El análisis consideró las dos condiciones de molienda: *Test 1* ($P_{80} = 300 \mu\text{m}$) y *Test 2* ($P_{80} = 212 \mu\text{m}$), con subconjuntos de 10 y 7 datos experimentales.

En la Figura 4.6 se presentan las distribuciones acumulativas del PRESSM para los modelos cinéticos evaluados considerando todas las combinaciones con 10 y 7 datos experimentales. Las Figuras 4.6(a) y 4.6(b) corresponden a las combinaciones de 10 datos experimentales, mientras que las Figuras 4.6(c) y 4.6(d) a las combinaciones con 7 datos experimentales. Las fracciones acumuladas revelan diferencias claras entre los modelos. El modelo Gamma presentó los valores más bajos de PRESSM, lo que indica su mayor capacidad predictiva. En contraste, el modelo de Tasa Única tuvo el peor desempeño en todos los casos. Estos resultados se respaldan en la Tabla 4.2, donde se resume la raíz cuadrada de la mediana del PRESSM para cada condición experimental y número de intervalos de flotación. De esta forma, Gamma mantiene su mejor capacidad predictiva para las condiciones estudiadas.

Por otra parte, la Figura 4.7 presenta los mismos resultados para los métodos de interpolación. Las fracciones acumulativas muestran que los métodos con preservación de forma, como PCHIP y Stineman, ofrecen un mejor desempeño en los cuatro escenarios estudiados. La Tabla 4.3 complementa este análisis, mostrando los valores de la raíz cuadrada de la mediana del PRESSM obtenidos con cada método de interpolación. En base a estos resultados, PCHIP se destaca como el método más efectivo, superando a Stineman en tres de las cuatro condiciones evaluadas.

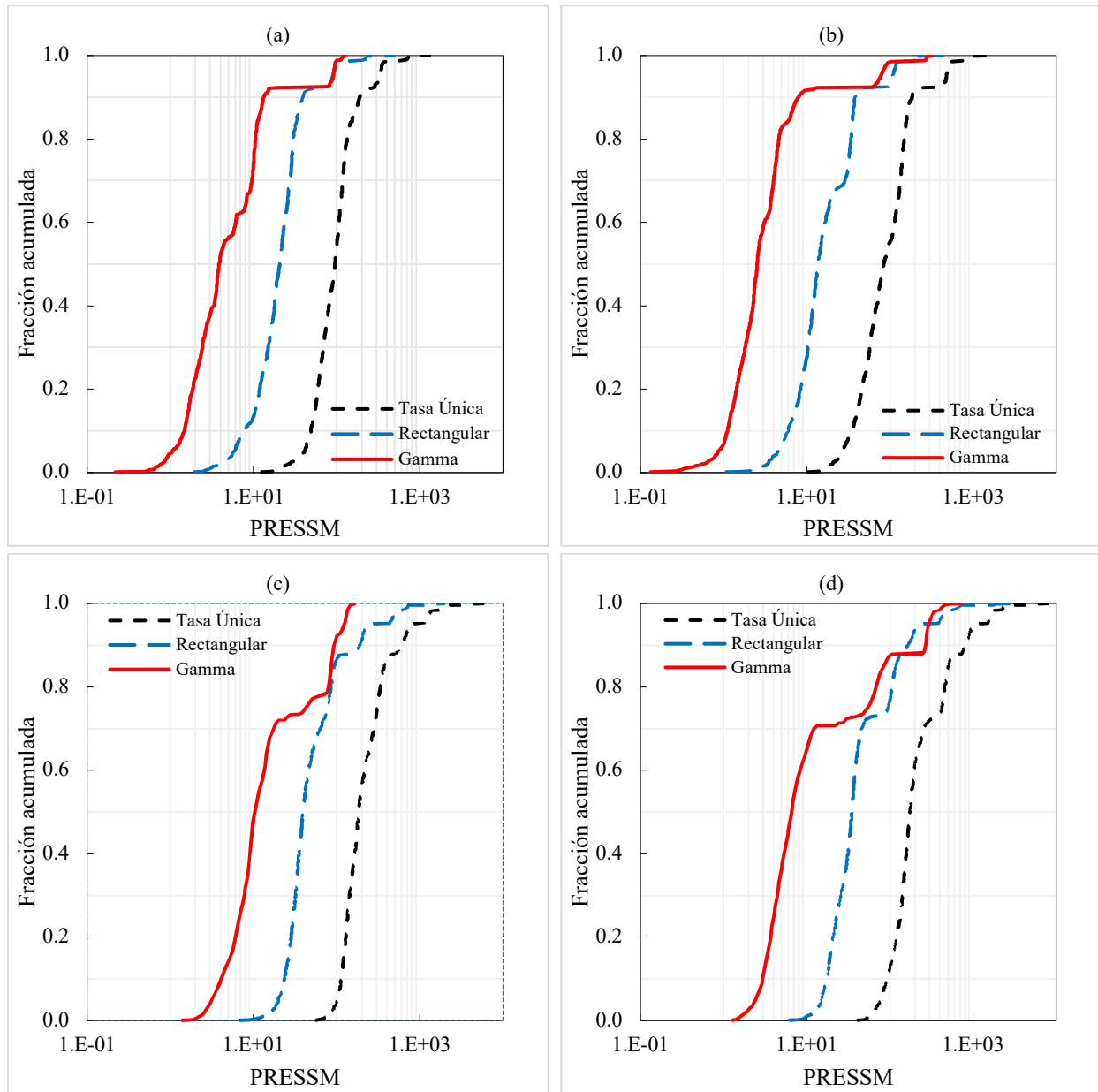


Figura 4.6. Distribuciones del PRESSM, modelación cinética:

(a) *Test* N°1 - 10 datos, (b) *Test* N°2 - 10 datos, (c) *Test* N°1 - 7 datos, (d) *Test* N°2 - 7 datos.

Tabla 4.2. Mediana del PRESSM, modelos cinéticos.

<i>TEST</i>	N° de datos	Tasa Única	Rectangular	Gamma
<i>Test</i> N°1	10	95.49	20.75	3.87
	7	184.21	39.43	10.29
<i>Test</i> N°2	10	84.07	13.70	2.55
	7	174.70	34.88	6.59

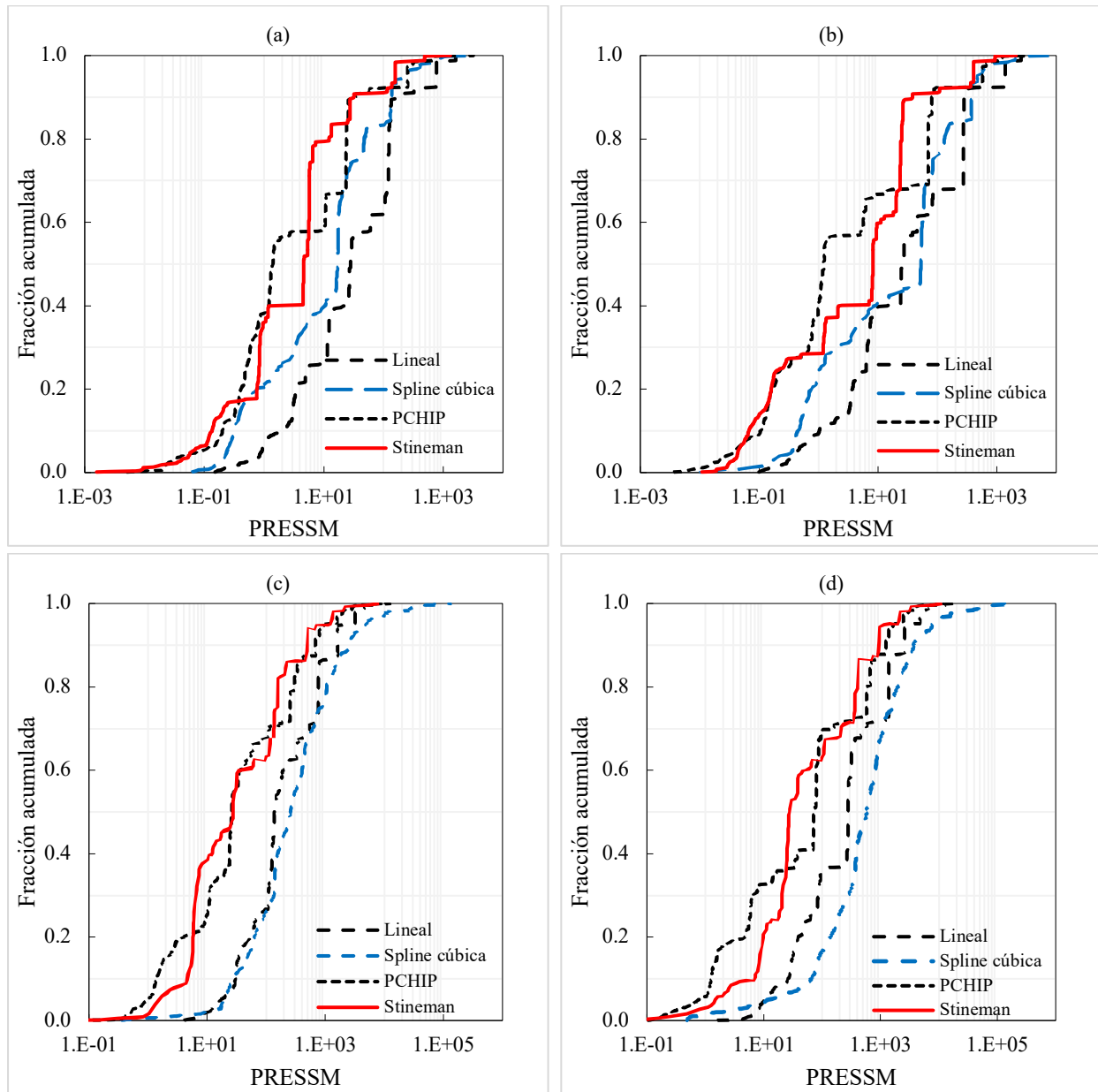


Figura 4.7. Distribuciones del PRESSM interpolación:
(a) *Test* N°1 - 10 datos, (b) *Test* N°2 - 10 datos, (c) *Test* N°1 - 7 datos, (d) *Test* N°2 - 7 datos.

Tabla 4.3. Mediana del PRESSM, métodos de interpolación.

TEST	N° de datos	Lineal	Spline cúbica	PCHIP	Stineman
<i>Test</i> N°1	10	28.37	17.02	1.41	4.63
	7	137.98	257.05	26.00	27.40
<i>Test</i> N°2	10	25.83	53.01	1.23	8.17
	7	279.19	578.14	71.58	27.74

En base a los resultados de las Tablas 4.2 y 4.3, el modelo Gamma resultó el más adecuado para representar las curvas cinéticas en casos con una menor cantidad de puntos experimentales (combinaciones de 7 datos), mientras que el método de interpolación PCHIP mostró un desempeño levemente superior en escenarios con mayor cantidad de datos (combinaciones de 10 datos). El modelo cinético Gamma mostró mayor capacidad predictiva cuando se redujo el tamaño de las sub-muestras, lo que se atribuye a su base teórica, que le permite mantener robustez frente a la omisión de puntos críticos. En contraste, la interpolación PCHIP, al depender directamente de la distribución temporal de los datos, mostró mejores resultados cuando se dispuso de más información experimental.

4.6 Predicción de respuesta *rougher* industrial

Se llevó a cabo un análisis de las proyecciones de recuperación a escala industrial. Las proyecciones se realizaron utilizando la modelación cinética mediante el modelo Gamma y la interpolación a través del método PCHIP. Esto debido al mejor desempeño de ambos métodos en términos de su capacidad predictiva. El análisis se realizó aplicando un escalamiento simplificado por tiempo. Se utilizó un factor de escala de 2.5 *batch*/planta (Yianatos et al., 2022). Se seleccionaron tiempos a escala industrial de 20 min (equivalente a 8 min en la prueba *batch*) y 30 min (equivalente a 12 min en la prueba *batch*). Tanto los tiempos de 8 min como 12 min fueron incluidos originalmente en el protocolo de flotación, por lo que los valores de recuperación eran conocidos. Estos resultados se utilizaron como patrones de referencia, con recuperaciones de 73.68% y 74.82% para el *Test* N°1, y de 78.64% y 79.51% para el *Test* N°2. Buscando evaluar el efecto del número de intervalos en las pruebas cinéticas, nuevamente se analizaron las combinaciones con 7 y 10 puntos experimentales. Se añadió una restricción adicional en la generación de las combinaciones de forma que no se incluya el tiempo que se desea predecir en las respuestas sub-muestreadas.

Las Figuras 4.8 y 4.9 presentan el desempeño predictivo de los modelos Gamma e interpolación PCHIP para la recuperación de Cu a escala industrial a 20 y 30 minutos, respectivamente. En ambas gráficas, las Figuras (a) y (b) corresponden a los resultados de las combinaciones con 10 datos para los *Tests* N°1 y N°2, mientras que las Figuras (c) y (d) muestran los resultados con 7 datos. Se presenta como línea vertical discontinua la recuperación en la prueba *batch* para cada condición y tiempo de flotación. En la predicción a 20 minutos (Figura 4.8), se observa que el método PCHIP logra una mayor exactitud y precisión que el modelo Gamma.

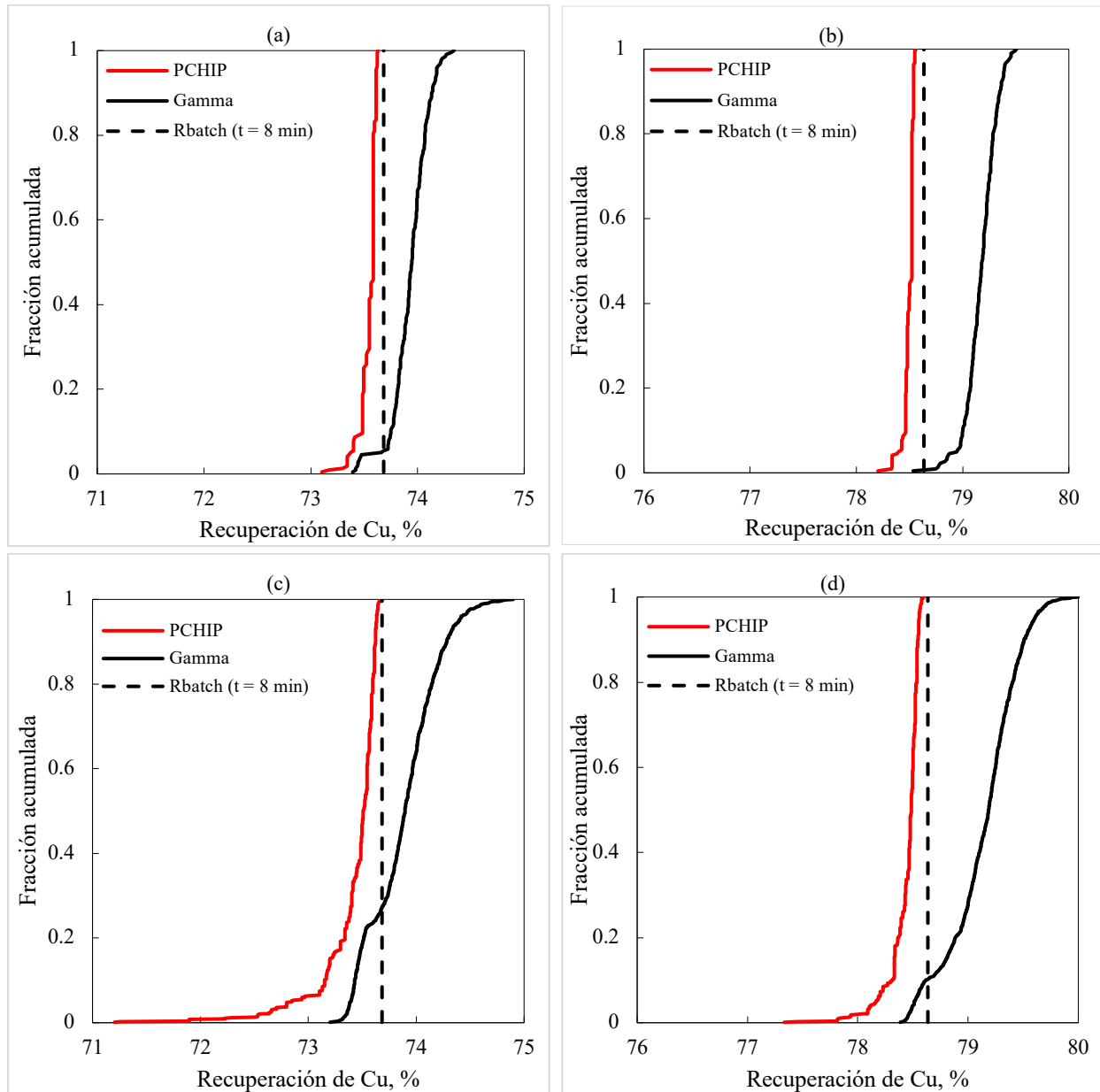


Figura 4.8. Resultados de predicción a 20 min a escala industrial:
 (a) *Test* N°1 - 10 datos, (b) *Test* N°2 - 10 datos, (c) *Test* N°1 - 7 datos, (d) *Test* N°2 - 7 datos.

Las tendencias de la Figura 4.8 se confirman en la Tabla 4.4, donde las medianas del error son consistentemente menores con interpolación PCHIP en todos los casos. Se destacan especialmente las combinaciones con 10 puntos experimentales, donde PCHIP alcanza medianas del error de 0.0093 y 0.013 para los *Test* N°1 y N°2, respectivamente, frente a 0.071 y 0.30 obtenidos mediante el modelo Gamma. En escenarios con 7 datos, el método PCHIP presenta una mediana menor que

Gamma en ambas pruebas, con un valor de 0.031 frente a 0.070 en el *Test* N°1, y de 0.022 frente a 0.30 en el *Test* N°2. Al analizar el rango inter-decil (IDR) como medida de dispersión, se observa que PCHIP presenta consistentemente valores más bajos en comparación con el modelo Gamma, indicando mayor estabilidad en las predicciones. Esta diferencia es especialmente marcada en condiciones con mayor número de datos, donde PCHIP alcanza IDRs de 0.033 y 0.020, frente a 0.19 y 0.38 del modelo Gamma. En escenarios con 7 datos cinéticos, PCHIP mantiene un desempeño superior, aunque las diferencias resultan menos significativas, especialmente en el *Test* N°1.

Tabla 4.4. Mediana e IDR del error de predicción a 20 min a escala industrial.

<i>TEST</i>	N° de datos	Gamma		PCHIP	
		Mediana	IDR	Mediana	IDR
<i>Test</i> N°1	10	0.071	0.19	0.0093	0.033
	7	0.070	0.35	0.031	0.28
<i>Test</i> N°2	10	0.30	0.38	0.013	0.020
	7	0.30	0.74	0.022	0.094

En la predicción a 30 minutos (Figura 4.9), se refuerza la superioridad de PCHIP. En los cuatro escenarios analizados, las curvas de predicción obtenidas con PCHIP se concentran más cerca del valor experimental, con menor dispersión que las generadas por el modelo Gamma. La Tabla 4.5 respalda estos resultados, mostrando que PCHIP presenta consistentemente los menores valores de las medianas del error en todos los escenarios evaluados, con valores de 0.00073 y 0.00043 para los *Test* N°1 y N°2 con 10 datos, en comparación con 0.037 y 0.22 del modelo Gamma. Con 7 datos cinéticos, PCHIP mantiene un mejor rendimiento predictivo, con medianas de 0.0024 y 0.0042 para los *Test* N°1 y N°2, frente a 0.04 y 0.24 con el modelo Gamma. PCHIP llevó nuevamente a menores valores de IDR. En el caso de 10 datos cinéticos, la diferencia más baja entre ambos métodos se observa en el *Test* N°1, donde el IDR de PCHIP resultó de 0.0033 frente a 0.081 a partir del modelo Gamma. Para las combinaciones con 7 datos, la menor diferencia ocurre en el *Test* N°1, con un IDR de 0.032 para PCHIP y 0.18 para Gamma. Estos resultados evidencian que, incluso en condiciones donde la diferencia del valor de IDR con Gamma es más estrecha, PCHIP sigue mostrando una dispersión de los errores significativamente menor, lo que refleja una mayor consistencia en las predicciones.

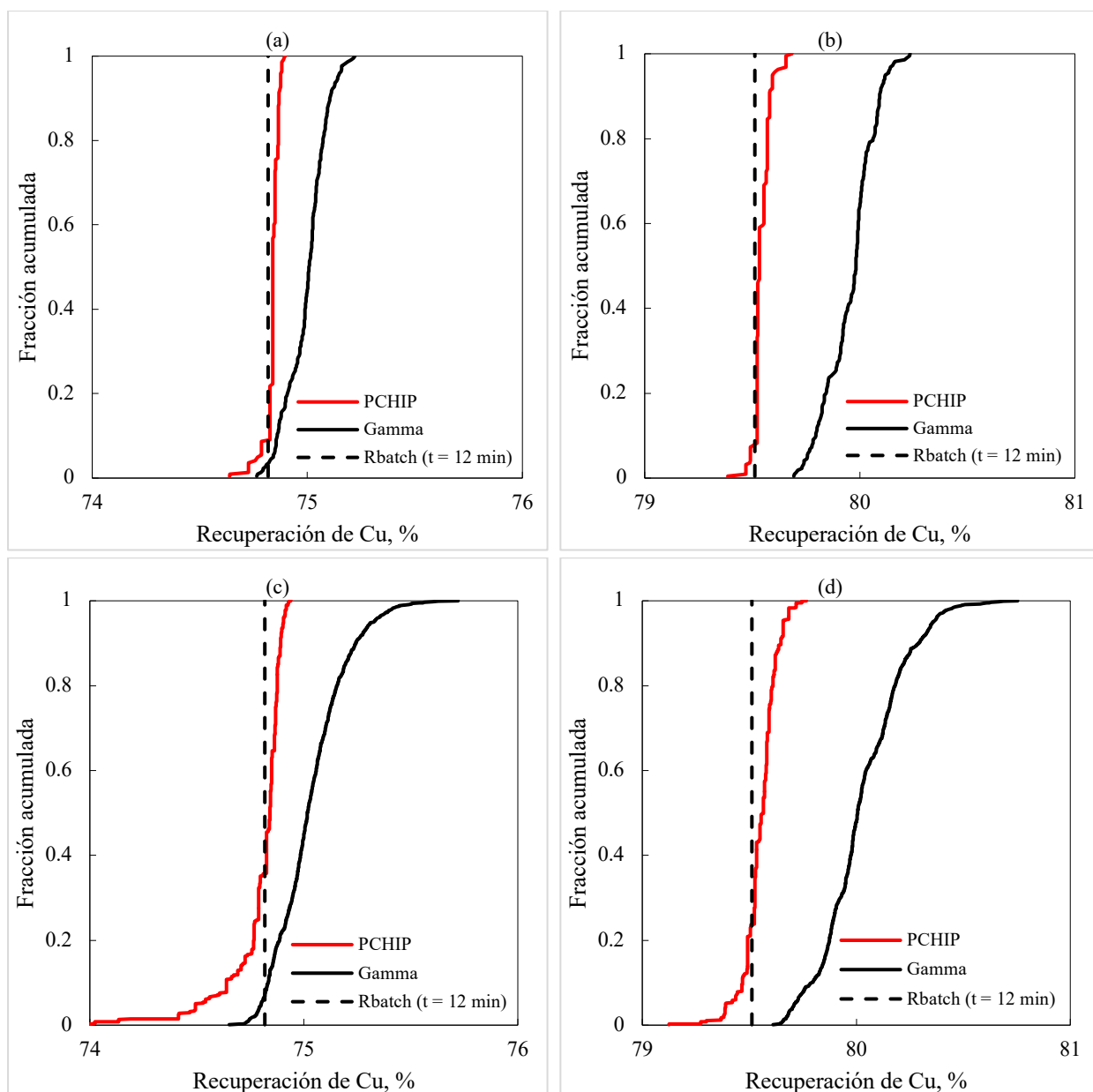


Figura 4.9. Resultados de predicción a 30 min a escala industrial:
(a) *Test* N°1 - 10 datos, (b) *Test* N°2 - 10 datos, (c) *Test* N°1 - 7 datos, (d) *Test* N°2 - 7 datos.

Tabla 4.5. Mediana e IDR del error de predicción a 30 min a escala industrial.

TEST	N° de datos	Gamma		PCHIP	
		Mediana	IDR	Mediana	IDR
<i>Test</i> N°1	10	0.037	0.081	0.00073	0.0033
	7	0.040	0.18	0.0024	0.032
<i>Test</i> N°2	10	0.22	0.26	0.00043	0.0046
	7	0.24	0.53	0.0042	0.020

Los resultados de escalamiento por tiempo indican que el método de interpolación PCHIP supera en capacidad predictiva al modelo Gamma, especialmente cuando se consideran tiempos de flotación suficientemente largos. Esta ventaja de PCHIP muestra su potencial para predecir con mayor precisión y exactitud valores de recuperación a gran escala en contextos industriales, especialmente para el dimensionamiento de circuitos.

En este Capítulo se presentaron y analizaron los resultados de la aplicación de modelos cinéticos e interpolaciones para caracterizar curvas tiempo-recuperación. Se observó que el modelo Gamma lleva a un mejor ajuste en escenarios con un número limitado de datos (pero suficientemente grande para evitar el sobre-ajuste), mientras que el método de interpolación PCHIP se destacó por su capacidad predictiva para propósitos de escalamiento por tiempo. Estos resultados permiten definir criterios para la selección de las herramientas de análisis en las caracterizaciones cinéticas, considerando la disponibilidad de datos y su aplicación.

Capítulo V

5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

Se evaluó la aplicabilidad de las técnicas de interpolación con preservación de forma en la predicción de curvas tiempo-recuperación en flotación, considerando tanto condiciones de laboratorio como proyecciones a escala industrial. A partir del análisis, se obtuvieron los siguientes resultados:

- El tamaño de partícula tuvo un efecto claro en la recuperación de cobre. Se obtuvo un 77.5% de recuperación para un $P_{80} = 300 \mu\text{m}$ (*Test* N°1) y un 82.1% para un $P_{80} = 212 \mu\text{m}$ (*Test* N°2), diferencia atribuida a un mayor grado de liberación del mineral en partículas más finas.
- De los modelos cinéticos, Gamma llevó al mejor desempeño en ajuste y predicción para las condiciones evaluadas, mientras que el método PCHIP fue el más robusto dentro de las técnicas de interpolación estudiadas.
- Del análisis de la capacidad para representar la curva cinética completa, se obtuvo que el modelo cinético Gamma presentó el mejor desempeño en respuestas cinéticas con 7 datos, alcanzando valores de PRESS modificado de 3.21 y 2.57 en los *Tests* N°1 y N°2, respectivamente, frente a los valores 5.10 y 8.46 obtenidos con PCHIP. En contraste, con 10 datos cinéticos, PCHIP mostró una mayor capacidad predictiva, con valores de PRESS modificado de 1.19 y 1.11, frente a 1.97 y 1.60 obtenidos con Gamma.
- El método de interpolación de PCHIP fue más sensible a la omisión de puntos críticos, especialmente a la omisión de aquellos que definen el inicio de la prueba cinética, lo que impactó negativamente en su rendimiento en condiciones de sub-muestreo.
- En el escalamiento industrial, el método de interpolación PCHIP superó consistentemente al modelo Gamma en todos los casos, logrando menores errores de predicción, los cuales fueron evaluados en términos de la mediana.

- Respecto a la precisión en las predicciones industriales, PCHIP también presentó la menor dispersión del error en términos del rango inter-decil (IDR).
- En general se observa una mayor exactitud del método de interpolación PCHIP a medida que se avanza hacia la etapa final del proceso de flotación. No obstante, la precisión se ve afectada por la disminución del número de datos cinéticos, siendo PCHIP el más sensible a esta reducción.

En resumen, aunque el modelo Gamma resultó ser la mejor opción para representar las curvas tiempo-recuperación en condiciones de laboratorio y con datos limitados, el método de interpolación PCHIP se presenta como la mejor alternativa para realizar predicciones de recuperación en un contexto de escalamiento industrial por tiempo. Esta superioridad se justifica por su mayor exactitud y precisión a tiempos largos.

5.2 Recomendaciones

Se recomienda ampliar el estudio a otras condiciones de P_{80} y distintos tipos de menas, esto con el fin de identificar otros comportamientos en los patrones cinéticos. A nivel experimental, también se sugiere ampliar el análisis considerando otro tipo de variables de control, como el pH, porcentaje de sólido, la concentración de reactivos y el flujo de aire.

Referencias

- Burden, R., & Faires, D. (2015). *Numerical Analysis* (10th ed.). Boston: Cengage Learning.
- Foley, J., Van Dam, A., Feiner, S., & Hughes, J. (1990). *Computer graphics: Principles and practice* (2nd ed.). Reading: Addison-Wesley.
- García-Zúñiga, H. (1935). La recuperación por flotación es una función exponencial del tiempo. *Boletín Minero*, 47(418), 83-86.
- Huber-Panu, I., Ene-Danalache, M., & Cojocariu, D. G (1976). Mathematical models of batch and continuous flotation. En M. C. Fuerstenau (Ed.), *Flotation: A.M. Gaudin Memorial Volume* (Vol. 2, pp. 675–724). Nueva York: American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers.
- Imaizumi, T., & Inoue, T. (1963). Kinetic consideration of froth flotation. En A. Roberts (Ed.), *Proceedings of the sixth international mineral processing congress* (pp. 581–593). Oxford: Pergamon Press.
- Klimpel, R. (1980). Selection of chemical reagents for flotation. En A. L. Mular, & R. B. Bhappu (Eds.), *Mineral Processing Plant Design* (pp. 907–934). New York: Society of Mining Engineers of the American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers.
- Kutner, M., Nachtsheim, C., & Neter, J. (2004). *Applied linear regression models* (4th ed.). Boston: McGraw-Hill.
- Minera Los Pelambres. (2022). *Procedimiento de flotación, laboratorio metalúrgico en Minera Los Pelambres*.
- Moler, C. (2024). *Numerical Computing with MATLAB*. Obtenido de MATLAB Central File Exchange: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37976-numerical-computing-with-matlab>
- Noah, M. (2022). *Smooth Operator (Stineman 1D Interpolation)*. MATLAB Central File Exchange. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/104195-smooth-operator-stineman-1d-interpolation>
- Polat, M., & Chander, S. (2000). First-order flotation kinetics models and methods for estimation of the true distribution of flotation rate constants. *International journal of mineral processing*, 58(1–4), 145–166. [https://doi.org/10.1016/S0301-7516\(99\)00069-1](https://doi.org/10.1016/S0301-7516(99)00069-1)
- Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., & Flannery, B. (2007). *Numerical recipes: The art of scientific computing* (3rd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

- Runge, C. D. (1901). Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 46, 224–243.
- Stineman, R. (1980). A consistently well-behaved method of interpolation. *Creative Computing*, 6(7), 54–57.
- Vinnett, L., Navarra, A., & Waters, K. (2019). Comparison of different methodologies to estimate the flotation rate distribution. *Minerals Engineering*, 130, 67–75. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2018.10.011>
- Yianatos, J., & Vinnett, L. (2015). *Flotación de minerales*. Valparaíso: Universidad Técnica Federico Santa María.
- Yianatos, J., Vallejos, P., Rodríguez, M., & Cortínez, J. (2022). A scale-up approach for industrial flotation cells based on particle size and liberation data. *Minerals Engineering*, 184, 107635. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2022.107635>

ANEXOS

Anexo A

Datos experimentales *Tests* N°1 y N°2

Tabla A.1. Datos experimentales *Test* N°1 ($P_{80} = 300 \mu\text{m}$).

Tiempo, min	Recuperación Cu, %				Promedio	Desviación estándar
	Rep 1	Rep 2	Rep 3	Rep 4		
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.17	29.7797	36.2525	32.2368	41.8579	35.0317	5.2752
0.33	45.6214	48.8717	42.9683	54.6601	48.0304	5.0361
0.67	59.3768	59.4422	54.9094	61.1316	58.7150	2.6639
1.00	64.1275	62.8678	59.5486	64.0318	62.6439	2.1415
1.50	65.3300	65.0415	63.2231	65.6375	64.8080	1.0842
2.00	67.3110	66.8990	65.5623	67.2646	66.7592	0.8189
4.00	71.2924	70.3987	70.0194	70.3972	70.5269	0.5406
6.00	73.5969	72.1091	71.8485	72.2599	72.4536	0.7809
8.00	74.7866	72.9656	73.2372	73.7444	73.6835	0.8032
10.00	75.8376	73.4641	73.9346	74.1914	74.3569	1.0321
12.00	76.1656	73.7605	74.5789	74.7660	74.8177	0.9991
16.00	77.0659	74.3617	75.2993	75.6675	75.5986	1.1221
24.00	78.0595	75.3624	76.4982	77.0415	76.7404	1.1237
32.00	78.4250	75.6047	77.6609	77.6212	77.3279	1.2069

Tabla A.2. Datos experimentales *Test* N°2 ($P_{80} = 212 \mu\text{m}$).

Tiempo, min	Recuperación Cu, %						Promedio	Desviación estándar
	Rep 1	Rep 2	Rep 3	Rep 4	Rep 5	Rep 6		
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.17	47.8350	47.8350	45.5355	40.5080	43.1889	44.7584	44.9435	2.8234
0.33	59.7745	59.9919	58.1848	52.0364	52.6800	58.9030	56.9284	3.6040
0.67	65.9926	69.9830	66.9841	65.0102	63.5699	65.6779	66.2030	2.1714
1.00	69.9853	73.8138	71.0597	70.6620	68.3906	68.9205	70.4720	1.9248
1.50	71.6660	74.9946	72.9421	72.7375	71.0333	71.2057	72.4299	1.4811
2.00	72.8980	76.8899	75.5850	73.7469	72.1214	72.5591	73.9667	1.8837
4.00	76.4904	79.0138	76.9841	75.5391	74.3186	75.5465	76.3154	1.6087
6.00	77.8925	80.2537	77.6666	77.0225	76.0419	77.2839	77.6935	1.4100
8.00	78.5982	80.9931	79.1871	77.5449	77.2126	78.2789	78.6358	1.3568
10.00	79.0159	81.2488	79.5932	77.9740	77.9625	78.9021	79.1161	1.2220
12.00	79.2144	81.5171	80.0783	78.3661	78.4405	79.4566	79.5121	1.1742
16.00	79.7655	82.2392	80.7304	79.3621	79.1718	80.1894	80.2431	1.1293
24.00	80.8420	82.8663	81.7819	81.8667	80.4569	81.0539	81.4780	0.8715
32.00	81.5818	83.2779	82.5386	82.5437	81.1317	81.6864	82.1267	0.7937

