

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
VALPARAÍSO - CHILE



“CONTROL PREDICTIVO DE UN SISTEMA DE LEVITACIÓN MAGNÉTICA”

ARTURO ANDRÉS CORVALÁN ROMERO

**MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
EN ELECTRÓNICA**

PROFESOR GUIA: DR. ANGEL LEONEL CEDEÑO NIETO

PROFESOR CORREFERENTE: DR. JUAN CARLOS AGÜERO VASQUEZ

OCTUBRE 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Control Predictivo de un Sistema de Levitación Magnética.

Nombre del candidato(a): Arturo Andrés Corvalán Romero.

Carrera / Grado: Ingeniería Civil Electrónica.

Campus: Casa Central Valparaíso. **Departamento:** Electrónica.

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Angel Leonel Cedeño Nieto, en mi calidad de profesor guía del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 24/10/2025

Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 24/10/2025

Firma:

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Agradecimientos

Agradezco a mi madre por su apoyo durante mi carrera universitaria, a mis amigos por hacer más ameno mi paso por la universidad y, por último, de manera especial, a mi padre por su apoyo incondicional a lo largo de toda su vida.

Agradezco al Centro Avanzado de Ingeniería Eléctrica y Electrónica (AC3E) proyecto Basal ANID AFB240002, así como a los proyectos ANID Fondecyt 3240181 del profesor Angel Cedeño y ANID Fondecyt 1211630 del profesor Juan C. Agüero.

Resumen

En este trabajo de titulación se presenta la aplicación de un método avanzado de control de procesos, el Control Predictivo por Modelo (MPC). Esta técnica consiste en implementar un control que utiliza un modelo matemático de la planta para predecir su comportamiento futuro y, en función de ello, optimizar las acciones de control que se aplicarán al sistema.

La planta bajo estudio corresponde a un sistema de levitación magnética, compuesto por un electroimán que actúa sobre un rotor suspendido. Este sistema es inherentemente inestable y no lineal, lo que lo convierte en un caso de interés para la implementación de técnicas avanzadas de control. Para facilitar el diseño, se realiza un proceso de linealización y se estudian las propiedades de controlabilidad y observabilidad de la planta.

El método de optimización seleccionado para resolver el problema de MPC es el algoritmo *Active-Set*, implementado en el solver `quadprog` de MATLAB. Se desarrollan simulaciones en MATLAB/Simulink con el fin de verificar el correcto funcionamiento del bloque de control MPC. Posteriormente, en la implementación física se evalúa el desempeño del controlador variando el horizonte de predicción, el periodo de muestreo y las restricciones de actuación, utilizando hardware de adquisición de datos y bloques de Quanser.

Palabras Clave: MPC, Levitación Magnética, Active-Set, Quadprog, MATLAB/Simulink, Observador de Estados, Quarc.

Abstract

This work presents the application of an advanced process control method, Model Predictive Control (MPC). This technique consists of implementing a control strategy that uses a mathematical model of the plant to predict its future behavior and, based on this prediction, optimize the control actions to be applied to the system.

The plant under study corresponds to a magnetic levitation system, composed of an electromagnet that acts on a suspended rotor. This system is inherently unstable and nonlinear, making it an interesting case for the implementation of advanced control techniques. To facilitate the design, a linearization process is carried out and the controllability and observability properties of the plant are analyzed.

The optimization method chosen to solve the MPC problem is the *Active-Set* algorithm, implemented in MATLAB's `quadprog` solver. Simulations are carried out in MATLAB/Simulink to verify the correct operation of the MPC control block. Afterwards, in the physical implementation, the controller's performance is evaluated by varying the prediction horizon, the sampling period, and the actuation constraints, using data acquisition hardware and Quanser blocks.

Keywords: MPC, Magnetic Levitation, Active-Set, Quadprog, MATLAB/Simulink, State Observer, Quarc.

Glosario

MPC: *Model Predictive Control* o Control Predictivo por Modelo.

DC: *Direct Current* o Corriente Continua.

LQR: *Linear Quadratic Regulator* o Regulador Cuadrático Lineal.

QP: *Quadratic Programming* o Programación Cuadrática.

KKT: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para optimalidad.

SISO: *Single-Input and Single-Output* o una entrada y una salida.

PID: *Proportional-Integral-Derivative*, controlador clásico basado en la combinación de acciones proporcional, integral y derivativa.

Active-Set: Algoritmo de optimización iterativo utilizado en problemas de Programación Cuadrática, implementado en MATLAB a través de `quadprog`.

Quadprog: Solver de MATLAB para resolver problemas de Programación Cuadrática (QP).

ZOH: Retenedor de Orden Cero (*Zero-Order Hold*), método de discretización de sistemas.

Observador de estados: Algoritmo que estima variables internas no medidas de un sistema a partir de entradas y salidas.

Observador extendido: Variante de observador que incluye la estimación de perturbaciones externas además de los estados.

CTR: Controlabilidad, propiedad que indica la capacidad de un sistema de alcanzar cualquier estado desde una condición inicial mediante entradas adecuadas.

OBS: Observabilidad, propiedad que indica la posibilidad de reconstruir los estados internos del sistema a partir de sus salidas.

MATLAB: Entorno de programación numérica utilizado para análisis y simulación de sistemas.

Simulink: Plataforma de modelado y simulación basada en diagramas de bloques, integrada en MATLAB.

NI-PCI-6221: Tarjeta de adquisición de datos de National Instruments, utilizada para la implementación física del sistema.

HIL: *Hardware-in-the-Loop*, técnica que permite conectar modelos de simulación con hardware real. Utilizado en este trabajo mediante los bloques de Quanser.

Índice general

1..	Introducción	1
1.1.	Motivaciones	2
1.2.	Estado del arte	2
1.2.1.	Control Predictivo Basado en Modelo	2
1.2.2.	Algoritmo de optimización Active-Set	3
1.3.	Objetivos del trabajo	3
2..	Fundamentos Teóricos	4
2.1.	Control Predictivo por Modelo	4
2.1.1.	Fundamentos de MPC	5
2.1.2.	Definición del Problema de Control	5
2.1.3.	Formulación Densa	8
2.1.4.	Seguimiento de Referencia	10
2.1.5.	Restricción de Desigualdad	12
2.1.6.	Planteamiento final de problema QP	13
2.1.7.	Resultado Final	14
2.2.	Método de optimización	15
2.2.1.	Método de optimización Active-Set de Quadprog	15
2.3.	Muestreo del sistema	17
2.3.1.	Fundamentos del muestreo en sistemas de control	17
2.3.2.	Muestreo utilizando Retenedor de Orden Cero	18
2.3.3.	Derivación de las matrices discretas Φ y Γ	19
2.4.	Observadores	20
2.4.1.	Planteamiento general de observadores de estados	20
2.4.2.	Observador extendido para estimación de perturbaciones	22
3..	Planta de interés	24
3.1.	Sistema de levitación magnética	24
3.2.	Modelo Matemático del Levitador Magnético	25
3.2.1.	Circuito eléctrico asociado al electroimán	25

3.2.2.	Sistema electromecánico	26
3.2.3.	Sensores y actuador	27
3.3.	Modelo linealizado de la planta	27
3.3.1.	Linealización del circuito eléctrico asociado al electroimán	28
3.3.2.	Linealización del sistema electro-mecánico	28
3.3.3.	Linealización del modelo del actuador y del sensor de posición	30
3.4.	Obtención de la función de transferencia del modelo lineal del levitador	31
3.4.1.	Sensor de posición	31
3.4.2.	Actuador	31
3.4.3.	Circuito eléctrico del electroimán	32
3.4.4.	Modelo dinámico del rotor	32
3.4.5.	Función de transferencia total del sistema	33
3.5.	Obtención del modelo en espacio de estados	34
3.5.1.	Modelo en espacio de estado en tiempo continuo	34
3.5.2.	Modelo en espacio de estado en tiempo discreto	35
3.6.	Controlabilidad y observabilidad del sistema	38
3.6.1.	Controlabilidad	38
3.6.2.	Observabilidad	39
3.6.3.	Verificación en MATLAB	39
3.7.	Pre-estabilización de la planta	40
3.7.1.	Implicancias en MPC al modificar la ley de control	43
3.8.	Modelo final: Sistema aumentado	44
3.8.1.	Derivación del sistema aumentado	45
4..	<i>Simulación del sistema de control</i>	46
4.1.	Matlab	46
4.2.	Simulink	47
4.3.	Bloques utilizados para la simulación	48
4.4.	Preparación de la simulación	50
4.5.	Pruebas de Simulación sin perturbaciones	53
4.6.	Pruebas de Simulación con perturbaciones constantes	55
4.7.	Pruebas de Simulación con observador de estados y perturbaciones constantes	60
5..	<i>Implementación física del sistema de control</i>	64
5.1.	Hardware utilizado	64
5.2.	Software de Quanser utilizado	66
5.3.	Configuración de MPC	69
5.4.	Resultados Obtenidos de la implementación	71
5.4.1.	Resultados cambiando el horizonte de predicción:	71

5.4.2. Resultados cambiando el periodo de muestreo:	84
5.4.3. Resultados cambiando las restricciones de actuación:	92
5.5. Tablas de resultados	105
6.. Conclusiones y trabajos futuros	108
6.1. Conclusiones	108
6.2. Trabajos Futuros	109
Referencias	110
Anexo . Códigos MATLAB	112
1. Calculo_Ad	112
2. Calculo_Bd	113
3. Prueba_Controlabilidad_Observabilidad	113
4. Precompilar_MagLev_Final	114
5. mat_f	117
6. ineq	118
7. solverMPC	119
8. Graficos	120

Índice de figuras

2.1. Lazo básico de control MPC. Fuente: [8].	4
2.2. Esquema general de los observadores.	22
3.1. Esquema del sistema de levitación magnética.	25
3.2. Circuito equivalente del electroimán.	26
3.3. Plano z	40
3.4. Diagrama de la ley de control con prealimentación de estados estimados. . . .	41
4.1. Entorno MATLAB.	47
4.2. Entorno Simulink.	48
4.3. Bloques utilizados en Simulink.	50
4.4. Modelo de planta aumentada.	52
4.5. Bloque de seguimiento a referencia.	52
4.6. Bloque MPC para seguimiento a referencia.	53
4.7. Esquema MPC con seguimiento a referencia.	53
4.8. Prueba sin perturbaciones: Gráfico de salida y_k	54
4.9. Prueba sin perturbaciones: Grafico de actuación u_k	54
4.10. Prueba sin perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog. . . .	54
4.11. Prueba sin perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog con mediciones detalladas.	55
4.12. Prueba sin perturbaciones: Estados del sistema planta aumentada.	55
4.13. Esquema MPC con seguimiento a referencia y perturbaciones constantes. . .	56
4.14. Prueba con perturbaciones: Gráfico de salida y_k	56
4.15. Prueba con perturbaciones: Gráfico de perturbación constante d_k	56
4.16. Prueba con perturbaciones: Grafico de actuación u_k	57
4.17. Prueba con perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog. . . .	57
4.18. Prueba con perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog con mediciones detalladas.	57
4.19. Prueba con perturbaciones: Estados del sistema planta aumentada.	58
4.20. Prueba con perturbaciones: Gráfico de salida y_k con $\Gamma = 10^{-2}$	59
4.21. Prueba con perturbaciones: Grafico de actuación u_k con $\Gamma = 10^{-2}$	59

4.22. Prueba con perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog con $\Gamma = 10^{-2}$	59
4.23. Prueba con perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog con mediciones detalladas con $\Gamma = 10^{-2}$	60
4.24. Prueba con perturbaciones: Estados del sistema planta aumentada con $\Gamma = 10^{-2}$	60
4.25. Prueba con perturbaciones y observador: Esquema MPC con seguimiento a referencia y observador de estados.	61
4.26. Prueba con perturbaciones y observador: Gráfico de salida y_k	61
4.27. Prueba con perturbaciones y observador: Gráfico de actuación u_k	61
4.28. Prueba con perturbaciones y observador: Tiempo de ejecución del solver quadprog.	62
4.29. Prueba con perturbaciones y observador: Tiempo de ejecución del solver quadprog con mediciones detalladas.	62
4.30. Prueba con perturbaciones y observador: Estados del sistema planta aumentada.	62
5.1. Sistema de Levitación Magnética y su configuración de interruptores.	65
5.2. Entradas y salidas del sistema de adquisición de datos.	66
5.3. Tarjeta de adquisición de datos NI-PCI-6221 (37-pin)	66
5.4. Software Quanser: HIL initialize	67
5.5. Software Quanser: HIL Read Analog	68
5.6. Software Quanser: HIL Write Analog	68
5.7. Software Quanser: To Host File	69
5.8. Bloques utilizados	69
5.9. Implementación física: Modelo de planta aumentada	71
5.10. Implementación física: Esquema MPC con seguimiento a referencia	71
5.11. Configuración del <i>solver</i> en Simulink con un periodo de muestreo de 1 [ms]	72
5.12. Resultados cambiando N : posición del rotor en el tiempo con $\Gamma = 10^{-2}$	72
5.13. Resultados cambiando N : actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 10^{-2}$	73
5.14. Resultados cambiando N : posición del rotor en el tiempo con $\Gamma = 1$	73
5.15. Resultados cambiando N : perturbación d_k en el tiempo con $\Gamma = 1$	74
5.16. Resultados cambiando N : actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 1$	74
5.17. Resultados cambiando N : tiempo de ejecución del solver quadprog con $\Gamma = 1$	75
5.18. Resultados cambiando N : estados observados del sistema.	75
5.19. Resultados cambiando N : estados observados del sistema en estado estacionario.	76
5.20. Resultados cambiando N : factibilidad del problema de optimización con $\Gamma = 1$	76
5.21. Resultados cambiando N : posición del rotor en el tiempo con $\Gamma = 1$	77

5.22. Resultados cambiando N : perturbación d_k en el tiempo con $\Gamma = 1$	77
5.23. Resultados cambiando N : actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 1$	78
5.24. Resultados cambiando N : tiempo de ejecución del solver quadprog con $\Gamma = 1$	78
5.25. Resultados cambiando N : estados observados del sistema.	79
5.26. Resultados cambiando N : estados observados del sistema en estado estacio- nario.	79
5.27. Resultados cambiando N : factibilidad del problema de optimización con $\Gamma = 1$	80
5.28. Resultados cambiando N : posición del rotor en el tiempo con $\Gamma = 1$	80
5.29. Resultados cambiando N : perturbación d_k en el tiempo con $\Gamma = 1$	81
5.30. Resultados cambiando N : actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 1$	81
5.31. Resultados cambiando N : tiempo de ejecución del solver quadprog con $\Gamma = 1$	82
5.32. Resultados cambiando N : estados observados del sistema.	82
5.33. Resultados cambiando N : estados observados del sistema en estado estacio- nario.	83
5.34. Resultados cambiando N : factibilidad del problema de optimización con $\Gamma = 1$	83
5.35. Error de Quarc para un período de muestreo de $0,9 [ms]$	84
5.36. Error de Quarc para un período de muestreo de $0,5 [ms]$	84
5.37. Configuración del solver en Simulink para un período de muestreo de $2 ms$	85
5.38. Resultados cambiando el período de muestreo: salida y_k en el tiempo.	85
5.39. Resultados cambiando el período de muestreo: perturbación d_k en el tiempo.	86
5.40. Resultados cambiando el período de muestreo: actuación u_k en el tiempo.	86
5.41. Resultados cambiando el período de muestreo: tiempo de ejecución del solver quadprog.	87
5.42. Resultados cambiando el período de muestreo: estados observados del sistema.	87
5.43. Resultados cambiando el período de muestreo: estados observados del siste- ma en estado estacionario.	88
5.44. Resultados cambiando el período de muestreo: factibilidad del problema de optimización.	88
5.45. Configuración del solver en Simulink para un período de muestreo de $3 [ms]$	89
5.46. Resultados cambiando el período de muestreo: salida y_k en el tiempo.	89
5.47. Resultados cambiando el período de muestreo: actuación u_k en el tiempo.	90
5.48. Resultados cambiando el período de muestreo: salida y_k en el tiempo con $\Gamma = 10$	90
5.49. Resultados cambiando el período de muestreo: actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 10$	91
5.50. Resultados cambiando el período de muestreo: salida y_k en el tiempo con $\Gamma = 100$	91

5.51. Resultados cambiando el período de muestreo: actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 100$	92
5.52. Resultados con restricciones de actuación: salida y_k en el tiempo.	93
5.53. Resultados con restricciones de actuación: perturbación d_k en el tiempo.	93
5.54. Resultados con restricciones de actuación: actuación u_k en el tiempo.	94
5.55. Resultados con restricciones de actuación: tiempo de ejecución del solver quadprog.	94
5.56. Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema.	95
5.57. Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema en estado estacionario.	95
5.58. Resultados con restricciones de actuación: factibilidad del problema de optimización.	95
5.59. Resultados con restricciones de actuación: salida y_k en el tiempo.	96
5.60. Resultados con restricciones de actuación: perturbación d_k en el tiempo.	97
5.61. Resultados con restricciones de actuación: actuación u_k en el tiempo.	97
5.62. Resultados con restricciones de actuación: tiempo de ejecución del solver quadprog.	98
5.63. Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema.	98
5.64. Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema en estado estacionario.	98
5.65. Resultados cambiando las restricciones de actuación: Factibilidad del problema de optimización.	99
5.66. Resultados con restricciones de actuación: salida y_k en el tiempo.	100
5.67. Resultados con restricciones de actuación: perturbación d_k en el tiempo.	100
5.68. Resultados con restricciones de actuación: actuación u_k en el tiempo.	101
5.69. Resultados con restricciones de actuación: tiempo de ejecución del solver quadprog.	101
5.70. Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema.	102
5.71. Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema en estado estacionario.	102
5.72. Resultados cambiando las restricciones de actuación: Factibilidad del problema de optimización.	103
5.73. Resultados con restricciones de actuación: salida y_k en el tiempo.	104
5.74. Resultados con restricciones de actuación: actuación u_k en el tiempo.	104
5.75. Resultados con restricciones de actuación: salida y_k en el tiempo.	105
5.76. Resultados con restricciones de actuación: actuación u_k en el tiempo.	105

Índice de cuadros

3.1. Parámetros del sistema	34
5.1. Efecto de variar el horizonte de predicción N (con $T_s = 1$ [ms] y restricciones de actuación $[-10, 10]$ [V]).	106
5.2. Efecto de variar el período de muestreo T_s (caso base $\Gamma = 1$, $N = 4$ salvo que se indique).	106
5.3. Efecto de variar la restricción de actuación u (con $N = 4$ y $T_s = 1$ [ms]). . .	107

1 Introducción

En el ámbito del control automático, el diseño de estrategias capaces de garantizar estabilidad y buen desempeño en sistemas no lineales e inherentemente inestables constituye un desafío de gran relevancia. Entre estos sistemas destaca el levitador magnético, cuya dinámica se caracteriza por la ausencia de un equilibrio natural estable, lo que implica que el objeto suspendido tiende a caer ante la mínima perturbación si no se aplica una acción de control adecuada. Este comportamiento lo convierte en un banco de pruebas atractivo para la validación de técnicas modernas de control.

En las últimas décadas, ha habido un creciente interés en la aplicación del Control Predictivo por Modelo (MPC, por sus siglas en inglés), considerado una de las metodologías más avanzadas para enfrentar problemas de control multivariable sujetos a restricciones. Su fundamento radica en la utilización explícita de un modelo matemático del sistema para predecir su evolución futura, y con base en dicha predicción, resolver en línea un problema de optimización que determina las acciones de control más adecuadas. Esta capacidad de anticipación, junto con el manejo explícito de restricciones de entrada y salida, lo distingue de estrategias convencionales como el control PID o el regulador cuadrático lineal (LQR).

El presente trabajo tiene por objetivo diseñar, implementar y validar un controlador predictivo aplicado a un sistema de levitación magnética. Para ello, se estudian las propiedades de controlabilidad y observabilidad del modelo linealizado de la planta, se implementa una etapa de preestabilización, se formula el problema de control en términos de programación cuadrática y se selecciona un método de optimización adecuado para su resolución en tiempo real. La validación se lleva a cabo inicialmente en un entorno de simulación mediante MATLAB/Simulink, y posteriormente en una implementación física, con el fin de evaluar el desempeño del controlador frente a diferentes horizontes de predicción, periodos de muestreo y restricciones de actuación. De esta manera, se busca demostrar la aplicabilidad y eficacia de MPC en un sistema altamente desafiante como lo es la levitación magnética.

1.1 Motivaciones

El proyecto busca aplicar la técnica de Control Predictivo a un Sistema de Levitación Magnética, con el objetivo de permitir la levitación de una pieza llamada rotor que actuará sobre el electroimán con el fin de compensar la fuerza generada por la gravedad sobre el rotor y así permitir la levitación. De esta manera, se podrá lograr controlarlo con la técnica MPC.

El Control Predictivo basado en Modelo es un método de control el cual busca a través de la optimización de una función objetivo generar acciones de control en un horizonte de tiempo finito. Este método permite la implementación de restricciones al sistema, tales como el voltaje aplicado, la distancia en la cual puede moverse el rotor obtenida de los sensores infrarrojos, además de considerar las dinámicas complejas del sistema. Lo anterior lo hace ideal para implementarse con este método de control.

Sin embargo, una de las limitaciones del método MPC es el alto costo computacional que requiere, lo cual imposibilita la implementación de este método de control en sistemas que requieran de tiempos de muestreo relativamente pequeños. En el caso particular de este trabajo, el levitador, al ser un sistema con dinámicas rápidas, requiere que la acción de control futura sea calculada con tiempos menores a periodo de muestreo utilizado en la representación discreta del modelo, con el fin de garantizar el control del sistema.

1.2 Estado del arte

1.2.1 Control Predictivo Basado en Modelo

El Control Predictivo Basado en Modelo, o MPC por sus siglas en ingles, es un método de control desarrollado a finales de los setenta. Este corresponde a un conjunto de métodos de control que hacen uso explícito del modelo del proceso para obtener la señal de control minimizando una función objetivo para predecir comportamientos futuros de la planta en un horizonte de tiempo determinado.

El método de control consta de manera general de un módulo optimizador y un módulo con el modelo de la planta que en conjunto actúan como el controlador. Es esencial obtener un modelo preciso de la planta para predecir de manera precisa la evolución de la planta. El optimizador es el encargado de obtener las acciones de control futuras, el toma en cuenta la referencia a seguir y las restricciones del sistema físico a implementar.

En los últimos años, ha habido un creciente interés en la aplicación de Control Predictivo Basado en modelos (MPC) para el control de sistemas de levitación magnética debido a su capacidad para manejar restricciones y su buen desempeño en la regulación de sistemas no lineales. Sin embargo, una de las limitaciones tradicionales del MPC ha sido la alta carga computacional, ya que en cada ciclo de control es necesario resolverse un problema de optimización cuadrática (QP), lo cual puede ser un reto en sistemas con dinámicas rápidas. Estas

limitaciones no están presentes en métodos de control más simples, como el control PID.

1.2.2 Algoritmo de optimización Active-Set

Para la resolución de problemas de programación cuadrática, *MATLAB* ofrece como solver *quadprog*, el cual tiene como uno de sus algoritmos el método *Active-Set*. Este método resuelve una secuencia de subproblemas cuadráticos de igualdad considerando en cada iteración únicamente el conjunto de restricciones activas o candidatas a estar activas en el óptimo. Gracias a esta estrategia, el *Active-Set* es especialmente útil en problemas de control predictivo (MPC), donde las restricciones tienden a variar poco entre instantes de muestreo, lo que permite aprovechar soluciones anteriores (*warm-start*) y reducir el costo computacional. Entre sus principales ventajas se encuentra la eficiencia en problemas de tamaño medio y la facilidad para manejar restricciones activas e inactivas de forma explícita, lo que resulta ideal en sistemas con dinámicas rápidas.

Este enfoque ha sido descrito en detalle en trabajos como [18], donde se presentan sus fundamentos teóricos y aplicaciones en programación cuadrática.

1.3 Objetivos del trabajo

El objetivo general del trabajo es lograr implementar el método de control predictivo en un sistema de Levitación Magnética que requiere tiempos de respuesta rápidos, con el fin de mantener un rotor levitando en una posición deseada.

Esto se logrará a través de los siguientes objetivos específicos:

- Obtener del modelo no lineal del sistema de Levitación Magnética.
- Obtener un modelo lineal del sistema y obtener su modelo en espacio de estados.
- Diseñar e implementar un controlador LQR con el fin de preestabilizar la planta.
- Aplicar la técnica de Control Predictivo Basado en Modelo (MPC) para el control del sistema de levitación magnética en el entorno de simulación *Simulink*.
- Agregar acción integral al esquema de control con el objetivo de eliminar el error en régimen estacionario.
- Implementar el controlador diseñado en la planta física del sistema de levitación magnética.

2 Fundamentos Teóricos

2.1 Control Predictivo por Modelo

El Control Predictivo por Modelo (MPC, por sus siglas en inglés) constituye una de las estrategias de control óptimo más utilizadas en aplicaciones industriales modernas debido a su capacidad para manejar de manera explícita restricciones sobre las entradas, los estados y las salidas del sistema. A diferencia de los controladores convencionales, MPC utiliza un modelo matemático del proceso para predecir su comportamiento futuro y, con base en esta predicción, determina en cada instante la acción de control que minimiza un criterio de desempeño sujeto a restricciones.

La estructura general de un lazo de control predictivo se muestra en la Fig. 2.1. En este esquema, el modelo de predicción utiliza las mediciones del sistema y las estimaciones de estado generadas por un observador, típicamente un filtro de Kalman, para predecir la evolución futura de las salidas. Estas predicciones se utilizan dentro de un problema de optimización que, en cada instante de muestreo, determina la secuencia óptima de señales de control considerando las restricciones del sistema. Finalmente, se aplica la señal de control calculada al proceso real, y en el siguiente instante de muestreo el problema de optimización se resuelve nuevamente con la información actualizada del sistema.

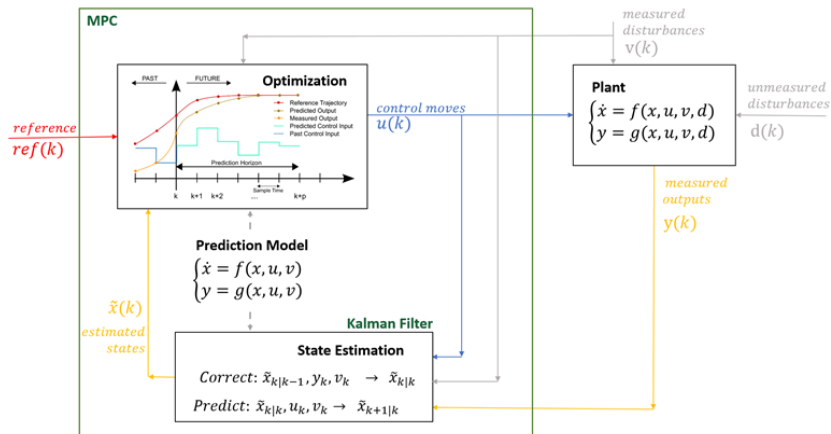


Fig. 2.1: Lazo básico de control MPC. Fuente: [8].

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A continuación se presentan los fundamentos teóricos de MPC empleados en el desarrollo de este trabajo de título. La formulación se apoya en el trabajo realizado por Cedeño, Morrison y Carvajal [2], complementado con las notas de referencia [3], donde se abordan de manera sistemática los aspectos centrales de la metodología.

Se parte de la definición del problema de control bajo el supuesto de sistemas lineales discretizados e invariantes en el tiempo, junto con la construcción de una función de costo cuadrática que equilibra el compromiso entre el seguimiento de referencia y el esfuerzo de control. Posteriormente, se describen las transformaciones necesarias para expresar el problema de control en la forma canónica de un problema cuadrático de optimización (QP), lo que permite aprovechar solvers numéricos ampliamente disponibles para su resolución en línea. Finalmente, se discute la implementación bajo el esquema de *receding horizon*, el cual asegura la retroalimentación del sistema y garantiza robustez frente a perturbaciones y modelos imperfectos.

2.1.1 Fundamentos de MPC

Si el modelo de la planta se considera lineal y la función objetivo se define de forma cuadrática, mientras que las restricciones sobre estados y entradas se expresan mediante relaciones lineales (como limitaciones superiores e inferiores), el planteamiento del problema de MPC se enmarca dentro de un problema lineal.

En este contexto, la tarea de control en cada instante de muestreo puede reformularse como un problema de optimización cuadrática (QP) con restricciones de igualdad y desigualdad. Su forma general es:

$$\min J(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + h^T x \quad \text{s.a.:} \quad \begin{cases} Ax = b, \\ Cx \leq d \end{cases} \quad (2.1)$$

La condición fundamental para que este problema posea solución global es que la matriz H sea positiva definida o, al menos, semidefinida positiva, lo que asegura la convexidad del funcional.

Reformular el problema de MPC como un problema QP tiene la ventaja de que puede resolverse con diversos solvers disponibles, tanto académicos de código abierto como de carácter comercial, los cuales ofrecen herramientas eficientes para implementar este tipo de control en aplicaciones prácticas.

2.1.2 Definición del Problema de Control

Sea un sistema lineal, discretizado e invariante en el tiempo, descrito por:

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ corresponde al vector de estados en el instante de muestreo k , $y_k \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas y $u_k \in \mathbb{R}^m$ el de entradas de control. Las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ caracterizan la dinámica: A determina la evolución de los estados, B describe la influencia de la entrada en la transición de estados, y C establece la relación entre estados y salidas. En lo que sigue se asume que los estados son medibles en cada instante de muestreo. El objetivo del controlador es llevar la salida hacia una referencia $r_k \in \mathbb{R}^p$. Para ello se define el error:

$$e_k = r_k - y_k. \tag{2.3}$$

Si se considera $r_k = 0$, el error se reduce a $e_k = -y_k$. De esta manera, penalizar las desviaciones de la salida respecto del origen puede hacerse a través de la función de costo:

$$J_k = y_k^\top y_k. \tag{2.4}$$

Al sustituir la relación de salida (2.2) en (2.4) se obtiene:

$$J_k = x_k^\top \underbrace{C^\top C}_\Omega x_k = x_k^\top \Omega x_k, \tag{2.5}$$

donde $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ actúa como una matriz de ponderación que refleja la relevancia de cada estado en la salida. Además, para contemplar aspectos prácticos como la protección de actuadores, el consumo energético o restricciones físicas, se añade un término adicional que penaliza variaciones excesivas en las entradas de control:

$$J_k = x_k^\top \Omega x_k + u_k^\top \Gamma u_k, \tag{2.6}$$

con $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ como matriz de penalización definida durante el diseño. En sistemas multivariable es común emplear una forma diagonal $\Gamma = qI$, con I la identidad y q un factor escalar de peso.

Dado que MPC considera un horizonte de predicción finito, el costo acumulado se expresa como:

$$J(x_k, u_k) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^\top \Omega x_k + u_k^\top \Gamma u_k) + x_N^\top \Omega_N x_N, \tag{2.7}$$

donde $\Omega_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa una ponderación terminal, utilizada para aproximar el comportamiento de un horizonte infinito. En la práctica, Ω_N suele escogerse como la matriz S_∞ obtenida de la ecuación de Riccati algebraica discreta asociada al problema DLQR, lo cual

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

garantiza propiedades de estabilidad y coherencia con el caso de horizonte infinito. La elección de esta matriz influye de manera directa en la estabilidad, el desempeño y la complejidad numérica del problema.

El objetivo de control es entonces determinar la secuencia de entradas óptimas

$$\vec{u}^* = [u_0^{*\top} \ u_1^{*\top} \ \cdots \ u_{N-1}^{*\top}]^\top \in \mathbb{R}^{m \cdot N},$$

que minimice el funcional de costo (2.7). Suponiendo conocido el estado inicial x_k , el problema se plantea como un QP:

$$\vec{u}^* = \arg \min_{\vec{u}} J(x_k, u_k)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_0 &= x, \\ x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ u^{\min} &\leq u_k \leq u^{\max}, \\ x^{\min} &\leq x_k \leq x^{\max}, \\ x_N^{\min} &\leq x_N \leq x_N^{\max}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Aquí $u^{\min}$ y $u^{\max} \in \mathbb{R}^m$ definen cotas para las entradas, mientras que $x^{\min}$, $x^{\max}$ y sus equivalentes en el estado terminal imponen límites sobre la evolución del sistema.

Esta formulación corresponde a un problema en lazo abierto, pues la secuencia calculada no incorpora perturbaciones que puedan surgir tras el instante inicial. En presencia de dichas perturbaciones, el desempeño puede deteriorarse e incluso volverse inestable. Para superar esta limitación se emplea la estrategia de *receding horizon*, que consiste en resolver de manera iterativa un problema de horizonte finito, aplicando únicamente la primera entrada u_0^* y replanificando en el siguiente paso de muestreo con la nueva información disponible. Esto introduce un mecanismo de retroalimentación implícita que mejora la robustez y evita la propagación de errores de predicción.

En términos prácticos, la aplicación de MPC en cada paso sigue la secuencia:

- Medir o estimar el estado actual x_k .
- Formular el problema QP correspondiente.
- Resolverlo para obtener la secuencia óptima $\vec{u}^*$.
- Aplicar en la planta únicamente la primera entrada u_0^* .
- Repetir el procedimiento en el siguiente instante de muestreo.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Finalmente, cabe señalar que la formulación del problema QP puede hacerse de distintas maneras según las variables de decisión. Si solo se consideran las entradas u_k , se obtiene la llamada *Formulación Densa*; si se incluyen también los estados x_k , el planteamiento se conoce como *Formulación Sparse*. La elección entre ambas afecta directamente la carga computacional y los tiempos de resolución.

2.1.3 Formulación Densa

Si se toma como variable de decisión únicamente a la secuencia de entradas, se definen los vectores:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

con $\vec{u} \in \mathbb{R}^{m \cdot N}$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \cdot N}$. Bajo esta notación, el sistema dinámico puede expresarse como:

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} x_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \cdots & B \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}} \vec{u}, \quad \vec{x} = \mathcal{A}x_0 + \mathcal{O}\vec{u}, \quad (2.10)$$

donde $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(nN) \times n}$ y $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{(nN) \times (mN)}$.

El funcional de costo (2.7) puede reescribirse en términos de x_0 y $\vec{u}$ como:

$$J(x_0, \vec{u}) = x_0^\top \Omega x_0 + \vec{x}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} \Omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_N \end{bmatrix}}_Q \vec{x} + \vec{u}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Gamma \end{bmatrix}}_R \vec{u}. \quad (2.11)$$

De este modo, $Q \in \mathbb{R}^{(nN) \times (nN)}$ y $R \in \mathbb{R}^{(mN) \times (mN)}$. Al sustituir (2.10) en esta expresión se obtiene:

$$J(x_0, \vec{u}) = x_0^\top \Omega x_0 + (\mathcal{A}x_0 + \mathcal{O}\vec{u})^\top Q (\mathcal{A}x_0 + \mathcal{O}\vec{u}) + \vec{u}^\top R \vec{u}. \quad (2.12)$$

Tras expandir y reagrupar los términos, resulta:

$$J(x_0, \vec{u}) = x_0^\top (\Omega + \mathcal{A}^\top Q \mathcal{A}) x_0 + \vec{u}^\top (R + \mathcal{O}^\top Q \mathcal{O}) \vec{u} + 2x_0^\top \mathcal{A}^\top Q \mathcal{O} \vec{u}. \quad (2.13)$$

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para simplificar, se introducen las definiciones:

$$\frac{1}{2}H = R + \mathcal{O}^\top Q \mathcal{O}, \quad h^\top = 2x_0^\top \mathcal{A}^\top Q \mathcal{O}, \quad (2.14)$$

con $H \in \mathbb{R}^{(mN) \times (mN)}$ y $h^\top \in \mathbb{R}^{1 \times (mN)}$. Así, la función de costo adopta la forma cuadrática estándar:

$$J(x_0, \vec{u}) = \frac{1}{2} \vec{u}^\top H \vec{u} + h^\top \vec{u}. \quad (2.15)$$

El término que depende únicamente de x_0 se omite, ya que no afecta la minimización respecto a $\vec{u}$.

En cuanto a las restricciones, estas pueden reescribirse de manera compacta en términos de $\vec{u}$ y $\vec{x}$:

a) Limitaciones en la señal de estado:

$$\begin{aligned} \vec{x}^{\min} &\leq \vec{x} \leq \vec{x}^{\max} \\ \vec{x}^{\min} &\leq \mathcal{A}x_0 + \mathcal{O}\vec{u} \leq \vec{x}^{\max} \\ (\vec{x}^{\min} - \mathcal{A}x_0) &\leq \mathcal{O}\vec{u} \leq (\vec{x}^{\max} - \mathcal{A}x_0) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\vec{u} &\leq (\vec{x}^{\max} - \mathcal{A}x_0) \\ -\mathcal{O}\vec{u} &\leq -(\vec{x}^{\min} - \mathcal{A}x_0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde:

$$\vec{x}^{\min} = \begin{bmatrix} x^{\min} \\ \vdots \\ x^{\min} \end{bmatrix} \quad \vec{x}^{\max} = \begin{bmatrix} x^{\max} \\ \vdots \\ x^{\max} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

tal que $\vec{x}^{\min}$ y $\vec{x}^{\max} \in \mathbb{R}^{(n \cdot N)}$.

b) Región Final:

$$\begin{aligned} x_N^{\min} &\leq x_N \leq x_N^{\max} \\ x_N^{\min} &\leq (\mathcal{A}_N x_0 + \mathcal{O}_N \vec{u}) \leq x_N^{\max} \\ (x_N^{\min} - \mathcal{A}_N x_0) &\leq \mathcal{O}_N \vec{u} \leq (x_N^{\max} - \mathcal{A}_N x_0) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_N \vec{u} &\leq (x_N^{\max} - \mathcal{A}_N x_0) \\ -\mathcal{O}_N \vec{u} &\leq -(x_N^{\min} - \mathcal{A}_N x_0) \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde:

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

$$\mathcal{O}_N = [A^{N-1}B \quad A^{N-2}B \quad \dots \quad AB \quad B], \quad \mathcal{A}_N = A^N \quad (2.21)$$

tal que $\mathcal{O}_N \in \mathbb{R}^{n \times (m \cdot N)}$ y $\mathcal{A}_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

c) Limitaciones en la señal de entrada:

$$\begin{aligned} u^{\min} &\leq u_k \leq u^{\max} \\ \vec{u}^{\min} &\leq \vec{u} \leq \vec{u}^{\max} \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde:

$$\vec{u}^{\min} = \begin{bmatrix} u^{\min} \\ \vdots \\ u^{\min} \end{bmatrix} \quad \vec{u}^{\max} = \begin{bmatrix} u^{\max} \\ \vdots \\ u^{\max} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

tal que $\vec{u}^{\min}$ y $\vec{u}^{\max} \in \mathbb{R}^{m \cdot N}$.

y en forma matricial, todas las restricciones se pueden escribir como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{O}_N \\ -\mathcal{O}_N \\ \mathcal{O} \\ -\mathcal{O} \end{bmatrix}}_M \vec{u} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{x}_N^{\max} - \mathcal{A}_N x_0 \\ -\vec{x}_N^{\min} + \mathcal{A}_N x_0 \\ \vec{x}^{\max} - \mathcal{A} x_0 \\ -\vec{x}^{\min} + \mathcal{A} x_0 \end{bmatrix}}_c, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} u^{\min} \\ \vdots \\ u^{\min} \end{bmatrix}}_a \leq \vec{u} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} u^{\max} \\ \vdots \\ u^{\max} \end{bmatrix}}_b. \quad (2.24)$$

donde $M \in \mathbb{R}^{(2 \cdot n + 2 \cdot n \cdot N) \times (m \cdot N)}$, $c \in \mathbb{R}^{(2 \cdot n + 2 \cdot n \cdot N)}$, $a \in \mathbb{R}^{(m \cdot N)}$ y $b \in \mathbb{R}^{(m \cdot N)}$.

Nótese que las restricciones en (2.8) se transforman en restricciones lineales en $\vec{u}$, con lo cual se define el problema de optimización QP como:

$$\vec{u}^* = \min_{\vec{u}} J(x_0, \vec{u}) \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} M\vec{u} \leq c, \\ a \leq \vec{u} \leq b. \end{cases} \quad (2.25)$$

2.1.4 Seguimiento de Referencia

Cuando se desea que la salida del sistema siga una referencia distinta de cero ($r \neq 0$), es necesario garantizar que en régimen estacionario se cumpla:

$$y_\infty \rightarrow r,$$

donde y_∞ representa el valor de la salida en equilibrio. Para encontrar los valores de estados y entradas que permiten alcanzar esta condición, se considera el sistema en estado estacionario:

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

$$\begin{aligned} x_\infty &= Ax_\infty + Bu_\infty, \\ y_\infty &= Cx_\infty. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Este conjunto de ecuaciones puede organizarse en una forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

cuyo sistema se resuelve como:

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = L^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

donde $L \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+m)}$. De este modo, (x_∞, u_∞) corresponden al punto de equilibrio asociado a la referencia r .

Para simplificar la formulación del problema se introducen las variables de desviación:

$$\tilde{x} = x - x_\infty, \quad \tilde{u} = u - u_\infty, \quad (2.29)$$

de manera que $\tilde{x}$ y $\tilde{u}$ cuantifican la diferencia respecto al equilibrio estacionario. Estas variables cumplen el mismo modelo dinámico que las originales, por lo que es posible reescribir el funcional de costo en términos de ellas:

$$J_N(\tilde{x}_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2} \tilde{u}^\top H \tilde{u} + \tilde{h}^\top \tilde{u}, \quad (2.30)$$

con

$$\frac{1}{2} H = R + \mathcal{O}^\top Q \mathcal{O}, \quad \tilde{h}^\top = 2\tilde{x}_0^\top \mathcal{A}^\top Q \mathcal{O}. \quad (2.31)$$

Al aplicar el cambio de variables (2.29) en las restricciones, se obtiene la nueva formulación en función de las desviaciones:

a) Limitaciones en las entradas;

$$\begin{aligned} \vec{u}^{\min} &\leq \vec{u} \leq \vec{u}^{\max} \\ \vec{u}^{\min} &\leq \vec{u} + \vec{u}_\infty \leq \vec{u}^{\max} \\ \vec{u}^{\min} - \vec{u}_\infty &\leq \vec{u} \leq \vec{u}^{\max} - \vec{u}_\infty \end{aligned} \quad (2.32)$$

b) Limitaciones en los estados:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}^{\min} &\leq \bar{x} \leq \bar{x}^{\max} \\
 \bar{x}^{\min} &\leq \bar{x} + \bar{x}_\infty \leq \bar{x}^{\max} \\
 \bar{x}^{\min} - \bar{x}_\infty &\leq \bar{x} \leq \bar{x}^{\max} - \bar{x}_\infty \\
 \bar{x}^{\min} - \bar{x}_\infty &\leq \mathcal{A}\tilde{x}_0 + \mathcal{O}\vec{u} \leq \bar{x}^{\max} - \bar{x}_\infty \\
 \bar{x}^{\min} - \bar{x}_\infty - \mathcal{A}\tilde{x}_0 &\leq \mathcal{O}\vec{u} \leq \bar{x}^{\max} - \bar{x}_\infty - \mathcal{A}\tilde{x}_0
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}\vec{u} &\leq \bar{x}^{\max} - \bar{x}_\infty - \mathcal{A}\tilde{x}_0 \\
 -\mathcal{O}\vec{u} &\leq -(\bar{x}^{\min} - \bar{x}_\infty - \mathcal{A}\tilde{x}_0)
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

La extensión a la región final es análoga, y finalmente se pueden representar las restricciones en estado estacionario:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{O}_N \\ -\mathcal{O}_N \\ \mathcal{O} \\ -\mathcal{O} \end{bmatrix}}_{\tilde{M}} \vec{u} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_N^{\max} - x_\infty - \mathcal{A}_N \tilde{x}_0 \\ -\bar{x}_N^{\min} + x_\infty + \mathcal{A}_N \tilde{x}_0 \\ \bar{x}^{\max} - x_\infty - \mathcal{A}\tilde{x}_0 \\ -\bar{x}^{\min} + x_\infty + \mathcal{A}\tilde{x}_0 \end{bmatrix}}_{\tilde{c}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} u^{\min} - u_\infty \\ \vdots \\ u^{\min} - u_\infty \end{bmatrix}}_{\tilde{a}} \leq \vec{u} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} u^{\max} - u_\infty \\ \vdots \\ u^{\max} - u_\infty \end{bmatrix}}_{\tilde{b}} \tag{2.35}$$

donde $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{(2 \cdot n + 2 \cdot n \cdot N) \times (m \cdot N)}$, $\tilde{c} \in \mathbb{R}^{(2 \cdot n + 2 \cdot n \cdot N)}$, $\tilde{a} \in \mathbb{R}^{(m \cdot N)}$ y $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{(m \cdot N)}$.

Agrupando todas estas expresiones se obtiene la forma matricial:

$$\tilde{M}\vec{u} \leq \tilde{c}, \quad \tilde{a} \leq \vec{u} \leq \tilde{b}, \tag{2.36}$$

En esta formulación, el control se plantea directamente sobre las desviaciones respecto a (x_∞, u_∞) , lo cual permite que la salida siga referencias arbitrarias sin alterar la estructura del problema QP.

2.1.5 Restricción de Desigualdad

Las restricciones de caja expresadas en (2.35) pueden transformarse en desigualdades lineales equivalentes, de manera que todo el conjunto de condiciones quede unificado bajo una misma estructura matricial.

En primer lugar, la restricción

$$\tilde{a} \leq \vec{u} \leq \tilde{b},$$

puede descomponerse en dos desigualdades:

$$\begin{aligned}\vec{u} &\leq \vec{b}, \\ -\vec{u} &\leq -\vec{a}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Esto equivale a expresar el intervalo como la intersección de dos semiespacios lineales.

Al combinar estas restricciones con las ya obtenidas en (2.35), se obtiene la siguiente formulación ampliada:

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \vec{u} \leq \begin{bmatrix} \vec{b} \\ -\vec{a} \end{bmatrix}.\tag{2.38}$$

De esta forma, el conjunto completo de restricciones puede escribirse en la forma:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{M} \\ I \\ -I \end{bmatrix}, \quad \hat{c} = \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{b} \\ -\tilde{a} \end{bmatrix}.\tag{2.39}$$

Finalmente, la condición sobre las variables de control en desviación queda unificada como:

$$\hat{M}\vec{u} \leq \hat{c},\tag{2.40}$$

donde $\hat{M} \in \mathbb{R}^{(2n+2nN+2mN) \times (mN)}$, $\hat{c} \in \mathbb{R}^{(2n+2nN+2mN)}$.

Esta transformación es conveniente porque permite expresar todas las restricciones —tanto de estado como de entrada y terminales— bajo una única matriz de desigualdad lineal. Esto simplifica la formulación final del problema QP, facilitando su resolución mediante solvers estándar.

2.1.6 Planteamiento final de problema QP

Una vez incorporado el seguimiento de referencia y transformadas todas las restricciones en desigualdades lineales, el problema de control predictivo se formula finalmente como un problema de optimización cuadrática (QP) en su forma densa.

El objetivo es encontrar la secuencia de entradas en desviación $\vec{u}^*$ que minimice la función de costo:

$$J_N(\tilde{x}_0, \vec{u}) = \frac{1}{2} \vec{u}^\top H \vec{u} + \tilde{h}^\top \vec{u},\tag{2.41}$$

donde $H \in \mathbb{R}^{(mN) \times (mN)}$ es una matriz simétrica semidefinida positiva que asegura convexidad, y $\tilde{h}^\top \in \mathbb{R}^{1 \times (mN)}$ es un vector lineal dependiente del estado inicial.

Los parámetros de la función de costo quedan definidos como:

$$\frac{1}{2}H = R + \mathcal{O}^\top Q \mathcal{O}, \quad \tilde{h}^\top = 2\tilde{x}_0^\top \mathcal{A}^\top Q \mathcal{O}.\tag{2.42}$$

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El conjunto de restricciones, expresado en función de las variables de decisión $\vec{u}$, adopta la forma compacta:

$$\hat{M}\vec{u} \leq \hat{c}, \quad (2.43)$$

donde $\hat{M}$ y $\hat{c}$ reúnen todas las limitaciones de estados, entradas y región terminal bajo una única desigualdad matricial.

En consecuencia, el problema de control predictivo se resume como:

$$\vec{u}^* = \arg \min_{\vec{u}} \left(\frac{1}{2} \vec{u}^\top H \vec{u} + \tilde{h}^\top \vec{u} \right) \quad \text{sujeto a: } \hat{M}\vec{u} \leq \hat{c}. \quad (2.44)$$

Este planteamiento corresponde a la **formulación densa de MPC**, donde la variable de decisión es exclusivamente la secuencia de entradas futuras. La ventaja de esta representación es que el problema se reduce a una única forma cuadrática sujeta a restricciones lineales, lo que permite su resolución eficiente mediante solvers de QP estándar.

2.1.7 Resultado Final

Resuelto el problema de optimización, se obtiene la secuencia de control en desviación $\vec{u}^*$. Sin embargo, esta corresponde a las variables redefinidas en torno al punto de equilibrio (x_∞, u_∞) introducido en (2.29). Por lo tanto, para recuperar las entradas reales del sistema es necesario revertir dicho cambio de variables.

La relación entre ambas variables está dada por:

$$\vec{u}^* = \vec{u}^* + \vec{u}_\infty, \quad (2.45)$$

donde $\vec{u}^* \in \mathbb{R}^{mN}$ representa la secuencia de entradas óptimas que deben aplicarse a la planta y $\vec{u}_\infty$ es el vector asociado al equilibrio en referencia.

El resultado final del procedimiento es, por tanto, el vector $\vec{u}^*$ que contiene las acciones de control para los N instantes de tiempo dentro del horizonte de predicción. En la práctica, solo se aplica al sistema el primer elemento de la secuencia, u_0^* , descartando los restantes. En el siguiente paso de muestreo se mide o estima nuevamente el estado del sistema y se replantea el problema QP con el nuevo valor inicial, lo que implementa la estrategia de *receding horizon*.

De esta manera, el algoritmo de MPC asegura que la salida siga la referencia deseada, respetando las restricciones físicas y de operación, mientras actualiza continuamente las decisiones de control a partir del estado más reciente del sistema.

2.2 Método de optimización

Los problemas de Control Predictivo Basado en Modelo (MPC) se resuelven mediante métodos de optimización no lineal, típicamente formulados como problemas de programación cuadrática. En este tipo de problemas, la función objetivo contiene términos cuadráticos, mientras que el conjunto de factibilidad se define mediante restricciones lineales de igualdad e inecuación.

A continuación, se presenta el método de optimización utilizado en este trabajo de memoria de titulación, el cual corresponde al método *Active-Set* implementado en la función *quadprog* de *MATLAB*.

2.2.1 Método de optimización Active-Set de Quadprog

Sea un problema de optimización cuadrática de la forma:

$$\min_x \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \quad (2.46)$$

sueto a las restricciones:

$$Ax = b, \quad (2.47)$$

$$Dx \leq e, \quad (2.48)$$

donde la matriz Q corresponde al Hessiano y es definida semipositiva. En consecuencia, la función objetivo es convexa y las restricciones están definidas por ecuaciones e inecuaciones lineales.

El método *Active-Set* genera una secuencia de puntos factibles resolviendo, en cada iteración, un subproblema reducido que considera:

1. Todas las restricciones de igualdad.
2. Únicamente aquellas restricciones de desigualdad que se asumen activas (es decir, que se cumplen con igualdad).

El procedimiento se desarrolla de acuerdo con los siguientes pasos:

■ Paso 1: Inicialización

Se determina un punto factible inicial x_0 que satisfaga todas las restricciones de igualdad y que se encuentre dentro de los límites impuestos por las inecuaciones. Se define el conjunto activo inicial como:

$$A_0 = \{i \mid D_i x_0 = e_i\}, \quad (2.49)$$

el cual contiene los índices de las restricciones de desigualdad que están activas en x_0 .

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

■ Paso 2: Resolución del subproblema cuadrático

En cada iteración se plantea un subproblema en la variable de búsqueda d , de la forma:

$$\min_d \frac{1}{2} d^T Q d + c^T d \quad \text{sueto a} \quad A_{eq} d = 0, \quad (2.50)$$

donde d representa la dirección de búsqueda.

■ Paso 3: Determinación de la dirección y el tamaño de paso

A partir de la solución del subproblema, se obtiene la dirección d_k asociada a los multiplicadores de Lagrange. Posteriormente, se calcula el tamaño de paso como:

$$\alpha_k = \min \left(1, \min_{i \notin W_k, D_i d_k > 0} \frac{f_i - D_i x_k}{D_i d_k} \right), \quad (2.51)$$

donde:

- α_k es el tamaño de paso en la iteración k ,
- W_k es el conjunto activo en la iteración k y contiene los índices de las restricciones candidatas a estar activas,
- D_i es la fila i -ésima de la matriz D ,
- d_k corresponde a la dirección de búsqueda en la iteración k ,
- x_k es el punto actual en la iteración k ,
- f_i es el elemento i -ésimo del vector f , asociado a las restricciones de desigualdad.

■ Paso 4: Verificación de las condiciones KKT

Se comprueba el cumplimiento de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

- Factibilidad primal,
- Estacionariedad: $\nabla f(x^*) = 0$,
- Factibilidad dual: $\lambda_i \geq 0$,
- Holgura complementaria: $\lambda_i \cdot (D_i x - f_i) = 0 \quad \forall i$.

■ Paso 5: Actualización del conjunto activo

En función de los resultados de las condiciones KKT, se añaden o eliminan restricciones del conjunto activo.

■ Paso 6: Actualización de la solución

Finalmente, se actualiza el punto de solución como:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k.$$

Este procedimiento se repite hasta que se cumplan las condiciones de optimalidad.

2.3 Muestreo del sistema

2.3.1 Fundamentos del muestreo en sistemas de control

En la actualidad, la mayoría de los sistemas de control modernos son implementados mediante controladores digitales. Estos se ejecutan en computadores, frecuentemente integrados en sistemas embebidos presentes en una amplia gama de dispositivos físicos, tales como teléfonos móviles, vehículos y electrodomésticos. El uso de computadores digitales ofrece diversas ventajas frente a las implementaciones analógicas tradicionales. Entre ellas, se encuentra la posibilidad de implementar con alta precisión tanto operaciones lineales (como filtrado digital, integración o diferenciación numérica) como no lineales (por ejemplo, saturaciones, funciones polinómicas o algoritmos de control avanzado), la facilidad de reconfiguración mediante software y la ausencia de problemas asociados al desgaste o desplazamiento de componentes físicos. En contraste, los sistemas analógicos suelen presentar errores estructurales, de ajuste o de implementación [17].

No obstante, dado que los computadores operan en tiempo discreto mientras que las plantas físicas lo hacen en tiempo continuo, es necesario establecer una interfaz que permita la comunicación entre ambos dominios. Para ello, se requiere convertir las señales analógicas provenientes del sistema físico en señales discretas que puedan ser procesadas por el controlador, y viceversa.

Esta conversión se lleva a cabo mediante dos etapas fundamentales:

- Un **convertidor análogo-digital (A/D)**, encargado de muestrear las señales continuas provenientes del sistema y transformarlas en secuencias discretas para su procesamiento digital.
- Un **convertidor digital-análogo (D/A)**, que transforma las señales de control digitales generadas por el computador en señales analógicas que pueden ser aplicadas a la planta.

Para aplicar estas señales reconstruidas al sistema físico se utiliza un **retenedor de orden cero** (ZOH, por sus siglas en inglés). Este dispositivo mantiene constante el valor de la señal de salida entre dos instantes consecutivos de muestreo, generando una señal de tipo escalera a partir de los datos discretos. Matemáticamente, el retentor se describe mediante la función de transferencia

$$R(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s}, \quad (2.52)$$

donde T_s corresponde al período de muestreo. El ZOH resulta esencial en la implementación práctica de control digital, ya que permite convertir señales discretas en señales continuas para accionar directamente sobre el sistema físico. A pesar de que existen otros métodos de

reconstrucción, como el retenedor de orden uno (FOH), el ZOH es ampliamente utilizado por su simplicidad y efectividad cuando T_s es suficientemente pequeño [16].

2.3.2 Muestreo utilizando Retenedor de Orden Cero

El retenedor de orden cero es un dispositivo que permite reconstruir una señal continua a partir de una secuencia de muestras discretas. Su funcionamiento se basa en mantener constante el valor de cada muestra durante un período de muestreo T_s , generando una señal continua por tramos.

Dado un conjunto de muestras $u[k]$ generadas por un controlador digital en los instantes $t = kT_s$, la señal continua resultante $u(t)$ se define como:

$$u(t) = u[k], \quad \text{para } t \in [kT_s, (k+1)T_s) \quad (2.53)$$

Este proceso da lugar a una señal con forma de escalera, la cual es utilizada como entrada por el sistema continuo. El ZOH es indispensable para la implementación física de controladores digitales, ya que asegura la entrega adecuada de señales al sistema controlado.

Además de su rol práctico, el ZOH es de gran importancia teórica en el análisis y modelado de sistemas digitales. En particular, su presencia afecta la forma en que se discretizan los sistemas continuos representados en variables de estado. Cuando se parte de un modelo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.54)$$

y se aplica un retentor de orden cero, la dinámica en tiempo discreto del sistema puede expresarse como:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k] \quad (2.55)$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k] \quad (2.56)$$

donde las matrices Φ y Γ están dadas por:

$$\Phi = e^{AT_s}, \quad \Gamma = \int_0^{T_s} e^{A\tau} B d\tau \quad (2.57)$$

Estas expresiones reflejan explícitamente la influencia del ZOH sobre la evolución del estado y permiten obtener una representación precisa en tiempo discreto, indispensable para el diseño de controladores digitales como LQR o MPC.

2.3.3 Derivación de las matrices discretas Φ y Γ

Considérese un sistema lineal continuo en variables de estado de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.58)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la entrada, y A, B son matrices constantes.

Para implementar un controlador digital, se requiere una representación en tiempo discreto. Suponiendo que el sistema se muestrea con un período T_s , y que el control $u(t)$ es constante entre muestras (como ocurre con un retentor de orden cero), es decir:

$$u(t) = u[k], \quad \text{para } t \in [kT_s, (k+1)T_s) \quad (2.59)$$

El objetivo es obtener una ecuación de la forma:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k]$$

Considerando la matriz exponencial:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots \quad (2.60)$$

La matriz exponencial satisface las siguientes propiedades:

- $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A,$
- $\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{e^{AT_s} - I}{T_s} = A,$
- En general, e^{-A} es la inversa de e^A .

Multiplicando la ecuación (2.58) por e^{-At} , que corresponde a la solución homogénea del sistema, se obtiene:

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t) = \frac{d}{dt} (e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t) \quad (2.61)$$

Integrando ambos lados desde t_k hasta t_{k+1} :

$$e^{-At_{k+1}}x(t_{k+1}) - e^{-At_k}x(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (2.62)$$

Multiplicando por $e^{At_{k+1}}$ a ambos lados:

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} B d\tau \cdot u(t_k) \quad (2.63)$$

De esta expresión se deduce que:

$$\Phi = e^{AT_s}, \quad \Gamma = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} B d\tau \quad (2.64)$$

Definiendo el cambio de variable $\eta = t_{k+1} - \tau$, se obtiene:

$$\Gamma = \int_{T_s}^0 e^{A\eta} B d(-\eta) = \int_0^{T_s} e^{A\eta} B d\eta \quad (2.65)$$

Si A es invertible, la integral admite una forma cerrada:

$$\Gamma = \int_0^{T_s} e^{A\eta} B d\eta = A^{-1}(e^{AT_s} - I)B \quad (2.66)$$

2.4 Observadores

En los sistemas de control modernos, no siempre es posible medir de manera directa todos los estados que describen la dinámica de una planta. En tales casos, resulta necesario recurrir a algoritmos capaces de reconstruir o estimar estas variables internas a partir de las entradas aplicadas y las salidas disponibles. Dichos algoritmos reciben el nombre de *observadores de estados*.

El diseño de observadores cumple un rol fundamental en la implementación de controladores avanzados como el MPC, ya que permiten disponer de información completa del sistema incluso en presencia de restricciones de sensado. Además, los observadores pueden ser extendidos para incluir la estimación de perturbaciones externas, aumentando la robustez del esquema de control.

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos de los observadores de estados, junto con el planteamiento de un observador extendido aplicado al sistema de levitación magnética. Este observador no solo reconstruye los estados no medidos, sino que también permite estimar perturbaciones que afectan al sistema.

2.4.1 Planteamiento general de observadores de estados

En muchos sistemas físicos, no todas las variables de estado necesarias para el control o la supervisión están disponibles mediante mediciones directas. Para abordar esta limitación, se introduce el concepto de *observador de estados*, una estructura dinámica diseñada para

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

estimar en tiempo real el vector de estado del sistema a partir de las entradas aplicadas y las salidas medidas.

Formalmente, un observador de estados es un sistema que, basado en un modelo matemático del proceso, reconstruye una estimación $\hat{x}(t)$ del vector de estado $x(t)$, de modo que el error de estimación $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tienda a cero con el tiempo bajo condiciones apropiadas.

Considérese un sistema lineal e invariante en el tiempo descrito por las siguientes ecuaciones en espacio de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.67}$$

El observador asociado a este sistema se define como:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{2.68}$$

donde K es la matriz de ganancia del observador, cuyo diseño tiene como objetivo forzar la convergencia del error de estimación hacia cero. Reemplazando $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$, la ecuación del observador puede reescribirse como:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t)\tag{2.69}$$

La estabilidad del observador se garantiza si la matriz $A - KC$ es asintóticamente estable, es decir, si todos sus autovalores tienen parte real negativa.

Una condición fundamental para la existencia de un observador de estados es que el sistema sea completamente observable. Bajo esta condición, es posible ubicar arbitrariamente los polos del observador mediante una elección adecuada de la matriz K .

Alternativamente, la ganancia del observador K también puede obtenerse de forma óptima resolviendo la ecuación de Riccati asociada al estimador lineal cuadrático (LQE). En sistemas discretos, esta formulación busca minimizar el error cuadrático medio en presencia de ruido, conduciendo a un diseño equivalente al filtro de Kalman.

El funcionamiento general de un observador y su interacción con la planta se muestra en la Figura 2.2, donde se aprecia cómo el observador utiliza la señal de entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ de la planta para generar una estimación del vector de estados $\hat{x}(t)$, la cual puede ser utilizada por el controlador.

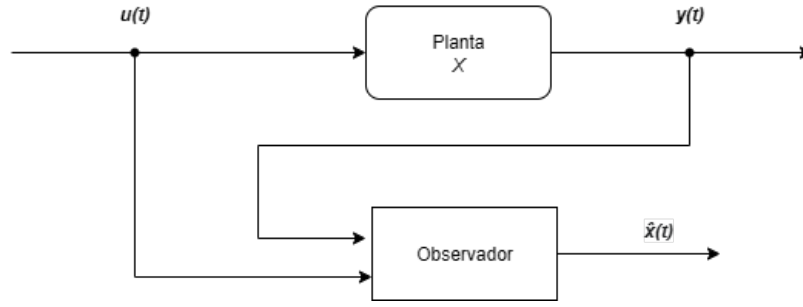


Fig. 2.2: Esquema general de los observadores.

Cabe destacar que la formulación presentada para sistemas en tiempo continuo es igualmente válida para sistemas en tiempo discreto. En dicho caso, la expresión del observador se adapta a la forma:

$$\hat{x}_{k+1} = (A - KC)\hat{x}_k + Bu_k + Ky_k \quad (2.70)$$

y la condición de estabilidad del observador requiere que todos los autovalores de la matriz $A - KC$ se encuentren estrictamente dentro del círculo unitario en el plano complejo. Esta propiedad asegura que el error de estimación converge a cero conforme avanza el tiempo discreto.

2.4.2 Observador extendido para estimación de perturbaciones

En muchas aplicaciones prácticas, los sistemas están sujetos a perturbaciones externas que no pueden ser medidas directamente. Para mejorar el desempeño del control en estos casos, es posible diseñar un observador que no solo estime los estados del sistema, sino también dichas perturbaciones. Este tipo de estructura se conoce como *observador extendido*.

Se considera un sistema en tiempo discreto afectado por una perturbación aditiva d_t , modelado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t + B_d d_t \\ d_{t+1} &= d_t \\ y_t &= Cx_t + C_d d_t \end{aligned} \quad (2.71)$$

En este modelo, la perturbación d_t es considerada como una entrada desconocida pero constante, lo cual se refleja en su dinámica $d_{t+1} = d_t$. Esto permite incluir d_t como una componente adicional del vector de estado, extendiendo así el modelo original.

Se define el *estado extendido* como:

$$z_t = \begin{bmatrix} x_t \\ d_t \end{bmatrix}$$

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Con esta nueva definición, el sistema puede escribirse como:

$$z_{t+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\bar{A}} z_t + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u_t \quad (2.72)$$

$$y_t = \underbrace{\begin{bmatrix} C & C_d \end{bmatrix}}_{\bar{C}} z_t \quad (2.73)$$

A partir de este modelo extendido, se diseña un observador de orden completo en la forma clásica:

$$\hat{z}_{t+1} = \bar{A}\hat{z}_t + \bar{B}u_t + K(y_t - \bar{C}\hat{z}_t) \quad (2.74)$$

donde $\hat{z}_t = \begin{bmatrix} \hat{x}_t^\top & \hat{d}_t^\top \end{bmatrix}^\top$ representa la estimación del estado y la perturbación, y K es la ganancia del observador extendido. El diseño de K debe asegurar que los autovalores de la matriz $(\bar{A} - K\bar{C})$ se encuentren dentro del círculo unitario (en el caso discreto) para garantizar la convergencia asintótica del error de estimación.

3 Planta de interés

El presente capítulo se centra en la descripción de la planta utilizada como caso de estudio: un sistema de levitación magnética. Este dispositivo consiste en un electroimán encargado de generar un campo magnético capaz de sostener en suspensión un rotor ferromagnético. La levitación magnética presenta un comportamiento inherentemente inestable, dado que, en ausencia de control, el rotor tiende a caer por efecto de la gravedad o a colapsar contra el electroimán debido a la atracción magnética.

El interés en esta planta radica en que constituye un sistema no lineal y sensible a perturbaciones. Estas características la convierten en un escenario ideal para la validación de técnicas avanzadas de control, ya que permite analizar el desempeño de algoritmos capaces de anticipar la dinámica del sistema y actuar en tiempo real para estabilizarlo.

En lo que sigue, se presenta la descripción física de la planta, el modelo matemático que la representa y el proceso de linealización, la función de transferencia de la planta, su modelo en espacio de estados, tanto continuo como discreto, la controlabilidad y observabilidad del sistema, la pre-estabilización realizada y el modelo final extendido de la planta.

3.1 Sistema de levitación magnética

La planta de estudio corresponde a un sistema de levitación magnética, mostrado en la Figura 3.1, el cual emplea el fenómeno de la levitación magnética para suspender un rotor. El sistema está compuesto por un electroimán encargado de generar un campo magnético variable y dos imanes permanentes que aportan un campo magnético fijo. Adicionalmente, dispone de sensores infrarrojos que permiten medir la posición del rotor. La intensidad de la luz infrarroja recibida por los sensores se traduce en un voltaje de medición $v_x(t)$, el cual se utiliza para determinar la posición del rotor.

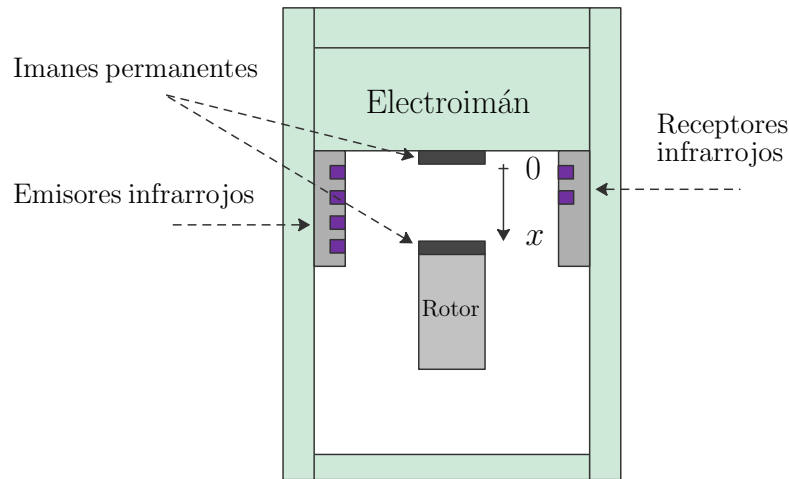


Fig. 3.1: Esquema del sistema de levitación magnética.

El control del levitador se realiza mediante la aplicación de un voltaje de entrada a un circuito RL , lo que permite regular la corriente que circula por el electroimán y, en consecuencia, la fuerza ejercida sobre el rotor. Considerando como variables de entrada el voltaje aplicado y como variable de salida el voltaje entregado por los sensores infrarrojos, el sistema puede modelarse como un sistema de entrada única y salida única (*Single Input Single Output*, SISO).

3.2 Modelo Matemático del Levitador Magnético

El levitador magnético es un sistema complejo constituido por múltiples subsistemas, por lo que para obtener su modelo matemático completo es necesario derivar primero las ecuaciones que describen el comportamiento de cada uno de sus componentes. A continuación, se presenta el desarrollo del modelo matemático de cada parte del sistema.

3.2.1 Circuito eléctrico asociado al electroimán

El primer subsistema corresponde al circuito eléctrico del electroimán, el cual genera un campo magnético variable proporcional a la corriente continua $i_e(t)$ que circula por su bobina. Esta corriente $i_e(t)$, responsable de modificar la fuerza electromagnética sobre el rotor, es suministrada por un amplificador inversor transistorizado cuya carga está constituida por el propio electroimán. La carga puede modelarse mediante un circuito RL , tal como se ilustra

3. PLANTA DE INTERÉS

en la Figura 3.2. De esta forma, el comportamiento eléctrico del electroimán se describe mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$L \frac{di_e(t)}{dt} = v_e(t) - R i_e(t) \quad (3.1)$$

donde $v_e(t)$ es el voltaje de entrada al circuito e $i_e(t)$ la corriente que circula por la bobina, la cual opera en el rango de $\pm 1,5$ [A].

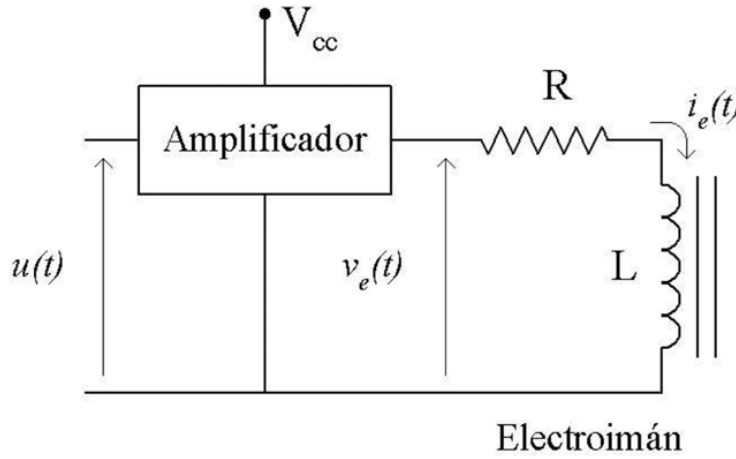


Fig. 3.2: Circuito equivalente del electroimán.

3.2.2 Sistema electromecánico

El sistema electromecánico tiene como entrada la corriente $i_e(t)$ que alimenta la bobina del electroimán, mientras que la salida corresponde a la posición $x(t)$ del rotor. Aplicando las leyes fundamentales de la física se obtiene la ecuación que relaciona la fuerza magnética neta con la posición del rotor:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = mg - F(t) \quad (3.2)$$

donde m representa la masa del rotor y g la aceleración de la gravedad. La fuerza magnética total $F(t)$, producida de manera conjunta por el electroimán y el imán permanente, puede expresarse como:

$$F(t) = k_1 \frac{i_e(t)}{x^2(t)} + k_2 \frac{1}{x^2(t)} \quad (3.3)$$

La primera componente está asociada al electroimán y depende tanto de la corriente $i_e(t)$ como de la posición $x(t)$ del rotor. La segunda componente corresponde a la fuerza generada

por el imán permanente, la cual es atractiva y se dirige hacia la posición $x(t) = 0$ (ver Figura 3.1); por ello, el parámetro k_2 es estrictamente positivo. Por su parte, la fuerza ejercida por el electroimán puede ser atractiva o repulsiva dependiendo del signo de la corriente $i_e(t)$.

3.2.3 Sensores y actuador

ACTUADOR. El voltaje de entrada aplicado al circuito RL , $v_e(t)$, permite regular la corriente del electroimán y, en consecuencia, la fuerza ejercida sobre el rotor. Este voltaje se controla mediante la señal de actuación $u(t)$, definida por:

$$v_e(t) = -K_a u(t) + \delta_a, \quad (3.4)$$

donde K_a es una constante de ganancia y δ_a un parámetro constante. El voltaje de control $u(t)$ opera dentro del rango de ± 10 [V].

SENSORES. La posición del rotor se mide electrónicamente mediante un conjunto de emisores y receptores de luz infrarroja dispuestos en línea. A medida que el rotor se desplaza verticalmente, los haces de luz se interrumpen, disminuyendo la intensidad recibida por los receptores. La intensidad de la luz detectada se convierte en un voltaje de medición $v_x(t)$, cuyo rango es de -10 [V] a 0 [V], y está relacionado con la posición del rotor mediante la siguiente expresión:

$$v_x(t) = K_m x(t) - \delta_m, \quad (3.5)$$

donde K_m y δ_m son parámetros constantes.

Adicionalmente, la corriente del electroimán puede medirse mediante un sensor que entrega un voltaje de medición $v_{ie}(t)$, descrito por:

$$v_{ie}(t) = K_L i_e(t) + \delta_L, \quad (3.6)$$

donde K_L y δ_L corresponden a parámetros constantes del sensor. Cabe señalar que este sensor no es indispensable para el diseño del control, por lo que no será considerado en el desarrollo posterior.

3.3 Modelo linealizado de la planta

Como se describió en la sección anterior, la planta presenta una dinámica no lineal, por lo que resulta conveniente derivar un modelo linealizado en torno a un punto de equilibrio adecuado. La linealización permite aplicar técnicas de control basadas en modelos lineales, como el control óptimo o el predictivo.

Se asume que el sistema opera en una condición de equilibrio, es decir, sin movimiento del rotor y sin variaciones en la corriente. Bajo estas condiciones, las fuerzas que actúan sobre el sistema se encuentran balanceadas para una posición x_Q determinada, la cual depende del valor de la corriente de equilibrio i_{eQ} . Cabe destacar que dicho punto de equilibrio es inherentemente inestable: ante cualquier perturbación o desviación, el sistema tiende a alejarse del equilibrio, provocando que el rotor caiga o se adhiera permanentemente al electroimán.

3.3.1 Linealización del circuito eléctrico asociado al electroimán

Para obtener el modelo lineal que describa el sistema, primero se parte de la ecuación diferencial que describe la dinámica del circuito eléctrico asociado al electroimán:

$$L \frac{di_e(t)}{dt} = v_e(t) - Ri_e(t) \quad (3.7)$$

Reescribiéndola como función de dos variables:

$$\frac{di_e(t)}{dt} = f(i_e(t), v_e(t)) = \frac{1}{L}(v_e(t) - Ri_e(t)) \quad (3.8)$$

Para su linealización en torno al punto de operación (i_{eQ}, v_{eQ}) , se considera una expansión de Taylor de primer orden. Se definen las variables de desviación:

$$\Delta i_e(t) = i_e(t) - i_{eQ}, \quad \Delta v_e(t) = v_e(t) - v_{eQ}, \quad \Delta \dot{i}_e(t) = \left. \frac{di_e(t)}{dt} - \frac{di_e(t)}{dt} \right|_Q \quad (3.9)$$

En el punto de equilibrio se cumple:

$$\left. \frac{di_e(t)}{dt} \right|_Q = \frac{1}{L}(v_{eQ} - Ri_{eQ}) \quad (3.10)$$

Las derivadas parciales de f son:

$$\frac{\partial f}{\partial i_e} = -\frac{R}{L}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_e} = \frac{1}{L} \quad (3.11)$$

La ecuación linealizada resultante es:

$$\Delta \dot{i}_e(t) \approx -\frac{R}{L}\Delta i_e(t) + \frac{1}{L}\Delta v_e(t) \quad (3.12)$$

3.3.2 Linealización del sistema electro-mecánico

La fuerza electromagnética total que actúa sobre el roto está modelada mediante la siguiente expresión no lineal:

3. PLANTA DE INTERÉS

$$F(t) = k_1 \frac{i_e(t)}{x_2^2(t)} + k_2 \frac{1}{x_2^2(t)} \quad (3.13)$$

La ecuación que relaciona la fuerza magnética neta con la posición del rotor es:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = mg - F(t) \quad (3.14)$$

Combinando ambas ecuaciones se obtiene:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = mg - \left(k_1 \frac{i_e(t)}{x^2(t)} + k_2 \frac{1}{x^2(t)} \right) \quad (3.15)$$

Reescribiendo como función, se define:

$$f(x(t), i_e(t)) = g - \frac{1}{m} \left(k_1 \frac{i_e(t)}{x^2(t)} + k_2 \frac{1}{x^2(t)} \right) \quad (3.16)$$

De modo que la dinámica se expresa como:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(x(t), i_e(t)) \quad (3.17)$$

Para linealizar esta expresión, se considera un punto de equilibrio (x_Q, i_{eQ}) que cumple con:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = k_1 \frac{i_{eQ}}{x_Q^2} + k_2 \frac{1}{x_Q^2} \quad (3.18)$$

Se introducen las siguientes variables de desviación:

$$\Delta x(t) = x(t) - x_Q, \quad \Delta i_e(t) = i_e(t) - i_{eQ}, \quad \Delta \ddot{x}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - \ddot{x}_Q \quad (3.19)$$

A continuación, se calculan las derivadas parciales de la función $f(x, i_e)$:

- Derivada parcial respecto a la corriente:

$$\frac{\partial f}{\partial i_e} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{k_1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial f}{\partial i_e} \right|_{(x_Q, i_{eQ})} = -\frac{k_1}{m x_Q^2}$$

- Derivada parcial respecto a la posición:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{k_1 i_e + k_2}{x^2} \right) = \frac{2(k_1 i_e + k_2)}{m x^3} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_Q, i_{eQ})} = \frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{m x_Q^3}$$

Aplicando una expansión de Taylor de primer orden alrededor del punto de equilibrio, se obtiene la ecuación linealizada:

$$\Delta \ddot{x}(t) \approx -\frac{k_1}{mx_Q^2} \Delta i_e(t) + \frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3} \Delta x(t) \quad (3.20)$$

3.3.3 Linealización del modelo del actuador y del sensor de posición

El sistema cuenta con un actuador cuya función es aplicar una tensión $v_e(t)$ al circuito del electroimán a partir de una señal de control $u(t)$. El modelo del actuador es de tipo afín e incorpora un parámetro contante δ_a , según la siguiente relación:

$$v_e(t) = -K_a u(t) + \delta_a \quad (3.21)$$

Por otro lado, el sistema dispone de un sensor de posición que entrega una medida proporcional a la posición del rotor $x(t)$, también con un parametro constante δ_m , modelado como:

$$v_x(t) = K_m x(t) - \delta_m \quad (3.22)$$

Dado que ambas expresiones son funciones afines, es posible obtener su linealización de forma directa mediante la definición de las correspondientes variables de desviación respecto de un punto de operación de equilibrio:

$$\Delta v_e(t) = v_e(t) - v_{eQ}, \quad \Delta u(t) = u(t) - u_Q \quad (3.23)$$

$$\Delta v_x(t) = v_x(t) - v_{xQ}, \quad \Delta x(t) = x(t) - x_Q \quad (3.24)$$

Al evaluar el modelo del actuador en equilibrio, se obtiene:

$$v_{eQ} = -K_a u_Q + \delta_a \quad \Rightarrow \quad \Delta v_e(t) = -K_a \Delta u(t) \quad (3.25)$$

Análogamente, para el sensor de posición:

$$v_{xQ} = K_m x_Q - \delta_m \quad \Rightarrow \quad \Delta v_x(t) = K_m \Delta x(t) \quad (3.26)$$

Por lo tanto, los modelos lineales resultantes son:

- **Actuador (modelo linealizado):**

$$\Delta v_e(t) = -K_a \Delta u(t) \quad (3.27)$$

- **Sensor de posición (modelo linealizado):**

$$\Delta v_x(t) = K_m \Delta x(t) \quad (3.28)$$

3.4 Obtención de la función de transferencia del modelo lineal del levitador

A partir de las ecuaciones dinámicas previamente linealizadas, es posible derivar las funciones de transferencia asociadas a cada uno de los subsistemas que conforman la planta: el sensor de posición, el actuador, el circuito eléctrico del electroimán y el modelo dinámico del rotor. En lo que sigue, se presenta el desarrollo de cada una de ellas en el dominio de Laplace, bajo condiciones iniciales nulas.

3.4.1 Sensor de posición

El modelo linealizado del sensor de posición es:

$$\Delta v_x(t) = K_m \Delta x(t) \quad (3.29)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\Delta v_x(t)\} = K_m \mathcal{L}\{\Delta x(t)\} \Rightarrow \Delta V_x(s) = K_m \Delta X(s) \quad (3.30)$$

La función de transferencia resultante es:

$$\frac{\Delta V_x(s)}{\Delta X(s)} = K_m \quad (3.31)$$

3.4.2 Actuador

El modelo lineal del actuador está dado por:

$$\Delta v_e(t) = -K_a \Delta u(t) \quad (3.32)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\Delta v_e(t)\} = -K_a \mathcal{L}\{\Delta u(t)\} \Rightarrow \Delta V_e(s) = -K_a \Delta U(s) \quad (3.33)$$

Por lo tanto, la función de transferencia es:

$$\frac{\Delta V_e(s)}{\Delta U(s)} = -K_a \quad (3.34)$$

3.4.3 Circuito eléctrico del electroimán

La ecuación diferencial linealizada que describe el comportamiento eléctrico es:

$$\Delta \dot{i}_e(t) = -\frac{R}{L}\Delta i_e(t) + \frac{1}{L}\Delta v_e(t) \quad (3.35)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$s\Delta I_e(s) = -\frac{R}{L}\Delta I_e(s) + \frac{1}{L}\Delta V_e(s) \quad (3.36)$$

Agrupando términos:

$$\left(s + \frac{R}{L}\right)\Delta I_e(s) = \frac{1}{L}\Delta V_e(s) \quad (3.37)$$

La función de transferencia resultante es:

$$\frac{\Delta I_e(s)}{\Delta V_e(s)} = \frac{1}{L(s + R/L)} \quad (3.38)$$

3.4.4 Modelo dinámico del rotor

La ecuación de movimiento del rotor, ya linealizada, es:

$$\Delta \ddot{x}(t) \approx -\frac{k_1}{mx_Q^2}\Delta i_e(t) + \frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}\Delta x(t) \quad (3.39)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$s^2\Delta X(s) = -\frac{k_1}{mx_Q^2}\Delta I_e(s) + \frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}\Delta X(s) \quad (3.40)$$

Agrupando:

$$\left(s^2 - \frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}\right)\Delta X(s) = -\frac{k_1}{mx_Q^2}\Delta I_e(s) \quad (3.41)$$

Despejando:

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta I_e(s)} = \frac{-\frac{k_1}{mx_Q^2}}{s^2 - \frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}} \quad (3.42)$$

Factorizando el denominador:

$$s^2 - \frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3} = \left(s - \sqrt{\frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}} \right) \left(s + \sqrt{\frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}} \right) \quad (3.43)$$

3.4.5 Función de transferencia total del sistema

La función de transferencia global desde la entrada de control $\Delta U(s)$ hasta la salida medida $\Delta V_x(s)$ se obtiene como el producto de las funciones de transferencia intermedias previamente derivadas:

$$G(s) = \frac{\Delta V_x(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\Delta V_x(s)}{\Delta X(s)} \cdot \frac{\Delta X(s)}{\Delta I_e(s)} \cdot \frac{\Delta I_e(s)}{\Delta V_e(s)} \cdot \frac{\Delta V_e(s)}{\Delta U(s)} \quad (3.44)$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas:

$$G(s) = K_m \cdot \left(\frac{-\frac{k_1}{mx_Q^2}}{s^2 - \frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}} \right) \cdot \frac{1}{L(s + R/L)} \cdot (-K_a) \quad (3.45)$$

Reordenando los términos, se obtiene una forma más clara y factorizada:

$$G(s) = \frac{K_a K_m k_1}{L m x_Q^2} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L} \right) \left(s + \sqrt{\frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}} \right) \left(s - \sqrt{\frac{2(k_1 i_{eQ} + k_2)}{mx_Q^3}} \right)} \quad (3.46)$$

Con esta expresión, se puede obtener el valor numérico de la función de transferencia. Para ello, primero es necesario calcular la posición de equilibrio x_Q , utilizando la ecuación 3.18 y considerando que, en equilibrio, no deben producirse variaciones de corriente, se tiene:

$$mg = k_2 \frac{1}{x_Q^2} \quad (3.47)$$

Despejando x_Q :

$$x_Q = \sqrt{\frac{k_1 i_{eQ}^2 + k_2}{mg}} \quad (3.48)$$

De la planta se cuenta con los siguientes parámetros:

Tab. 3.1: Parámetros del sistema

Parámetro	Valor
δ_a	0
δ_L	0
δ_m	10
K_a	3
K_L	20/3
K_m	1
L	0.2
R	20
m	0.15
g	1000
k_1	5888
k_2	1536

Sustituyendo:

$$x_Q = \sqrt{\frac{1536}{0,15 \cdot 1000}} = \sqrt{\frac{1536}{150}} = \sqrt{10,24} \approx 3,2 \text{ m} \quad (3.49)$$

Finalmente, la función de transferencia total del sistema queda expresada como:

$$G(s) = \frac{57500}{(s + 100)(s + 25)(s - 25)} \quad (3.50)$$

3.5 Obtención del modelo en espacio de estados

En esta sección se desarrolla una representación del sistema en términos de variables de estado, a partir de su descripción mediante una función de transferencia. La formulación en espacio de estados permite una representación más estructurada y flexible de sistemas dinámicos, lo cual resulta fundamental para el análisis de propiedades internas como la controlabilidad y observabilidad, así como para el diseño de controladores avanzados. A continuación, se presenta el modelo continuo y posteriormente se deriva su contraparte discreta para su implementación digital.

3.5.1 Modelo en espacio de estado en tiempo continuo

Se busca representar el sistema de levitación magnética mediante un modelo lineal en espacio de estados en tiempo continuo equivalente a la función de transferencia previamente definida en la ecuación (3.50). Esta transformación permite describir la dinámica del sistema en una forma matricial que resulta más conveniente para el análisis, diseño e implementación de estrategias de control modernas como el control óptimo o predictivo.

3. PLANTA DE INTERÉS

La función de transferencia de interés es la siguiente:

$$G(s) = \frac{57500}{(s+100)(s+25)(s-25)} = \frac{57500}{s^3 + 100s^2 - 625s - 62500} \quad (3.51)$$

Esta expresión corresponde a un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) de tercer orden. Para construir su representación en espacio de estados, se utilizará la forma canónica controlable.

Sea una función de transferencia genérica de la forma:

$$G(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

La forma canónica controlable asociada a dicha función se define mediante las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [b_0 \ 0 \ 0], \quad D = 0 \quad (3.52)$$

Aplicando esta estructura a la ecuación (3.50), se identifican los coeficientes del polinomio denominador:

$$a_2 = 100, \quad a_1 = -625, \quad a_0 = -62500, \quad b_0 = 57500$$

Por lo tanto, el modelo en espacio de estados resultante es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (3.53)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 62500 & 625 & -100 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [57500 \ 0 \ 0], \quad D = 0 \quad (3.54)$$

Este modelo constituye una descripción de la dinámica del sistema basada en variables de estado, donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ representa el vector de estados, $u(t)$ es la señal de entrada, y $y(t)$ es la salida del sistema, la cual corresponde a la posición del rotor.

3.5.2 Modelo en espacio de estado en tiempo discreto

La representación en variables de estado de un sistema de tiempo discreto es la siguiente:

3. PLANTA DE INTERÉS

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_d \mathbf{x}_k + B_d u_k \quad (3.55)$$

$$y_k = C \mathbf{x}_k \quad (3.56)$$

Para obtener la representación en variables de estado en tiempo discreto para un período de muestreo T_s , primero hay que determinar la matriz A_d , la cual se define como:

$$A_d = e^{AT_s} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} \Big|_{t=T_s} \quad (3.57)$$

Según lo obtenido anteriormente, la matriz A está dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 62500 & 625 & -100 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Para aplicar la transformada de Laplace, se calcula la matriz $(sI - A)^{-1}$, que requiere determinar el determinante y la adjunta de $sI - A$.

Primero se calcula:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 62500 & 625 & -100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -62500 & -625 & s + 100 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Determinante:

El determinante se obtiene por cofactores:

$$\det(sI - A) = s[s(s + 100) + 625] + 62500 \quad (3.60)$$

$$= s^3 + 100s^2 + 625s + 62500 \quad (3.61)$$

Adjunta:

La matriz adjunta $\text{Adj}(sI - A)$ se obtiene mediante los determinantes de los menores:

$$\text{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + 100s - 625 & 62500 & 62500s \\ 1 & s & 625 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Una vez obtenida $\text{Adj}(sI - A)$, se construye:

3. PLANTA DE INTERÉS

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)^{-1}}{\det(sI - A)} \quad (3.63)$$

Reemplazando:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^3 + 100s^2 - 625s - 62500} \begin{bmatrix} s^2 + 100s - 625 & 1 & 1 \\ 62500 & s & s \\ 62500s & 625 & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

O equivalentemente:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 100s - 625}{s^3 + 100s^2 - 625s - 62500} & \frac{1}{s^2 - 625} & \frac{1}{s^3 + 100s^2 - 625s - 62500} \\ \frac{62500}{s^3 + 100s^2 - 625s - 62500} & \frac{s}{s^2 - 625} & \frac{s}{s^3 + 100s^2 - 625s - 62500} \\ \frac{62500s}{s^3 + 100s^2 - 625s - 62500} & \frac{625}{s^2 - 625} & \frac{s^2}{s^3 + 100s^2 - 625s - 62500} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Ahora se puede calcular la transformada inversa de Laplace de la ecuación (3.57). Al evaluarla simbólicamente en `Matlab`, se obtiene:

$$A_d = \begin{bmatrix} \frac{2e^{-25T_s}}{3} + \frac{2e^{25T_s}}{5} - \frac{e^{-100T_s}}{15} & \frac{e^{25T_s}}{50} - \frac{e^{-25T_s}}{50} & \frac{e^{25T_s}}{6250} - \frac{e^{-25T_s}}{3750} + \frac{e^{-100T_s}}{9375} \\ 10e^{25T_s} - \frac{50e^{-25T_s}}{3} + \frac{20e^{-100T_s}}{3} & \frac{e^{-25T_s}}{2} + \frac{e^{25T_s}}{2} & \frac{e^{-25T_s}}{150} + \frac{e^{25T_s}}{250} - \frac{4e^{-100T_s}}{375} \\ \frac{1250e^{-25T_s}}{3} + 250e^{25T_s} - \frac{2000e^{-100T_s}}{3} & \frac{25e^{25T_s}}{2} - \frac{25e^{-25T_s}}{2} & \frac{e^{25T_s}}{10} - \frac{e^{-25T_s}}{6} + \frac{16e^{-100T_s}}{15} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Para obtener la matriz B_d , correspondiente al modelo discreto, se parte de la expresión general:

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A\tau} B d\tau \quad (3.67)$$

Esta integral se resuelve simbólicamente en `Matlab`, aprovechando que la matriz A ya fue determinada previamente. El resultado obtenido es:

$$B_d = \begin{bmatrix} \frac{e^{-100T_s} (e^{25T_s} - 1)^3 (3e^{25T_s} + 6e^{50T_s} + 1)}{937500} \\ \frac{e^{25T_s}}{6250} - \frac{e^{-25T_s}}{3750} + \frac{e^{-100T_s}}{9375} \\ \frac{e^{-100T_s} (5e^{75T_s} + 3e^{125T_s} - 8)}{750} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Al reemplazar $T_s = 1$ [ms] en las matrices A_d y B_d , como se muestra en los adjuntos *Calculo_Bd* y *Calculo_Ad*, se obtienen los siguientes resultados:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0010 & 0,0000 \\ 0,0302 & 1,0003 & 0,0010 \\ 59,4830 & 0,6251 & 0,9051 \end{bmatrix}, \quad B_d = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0005 \\ 0,9517 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Estos resultados son iguales a los obtenidos utilizando el comando `c2d` de *MATLAB*, verificados en el anexo *Precompilar_MagLev_Final*.

3.6 Controlabilidad y observabilidad del sistema

A partir de las matrices que describen el modelo en espacio de estados, es posible analizar las propiedades estructurales del sistema, en particular la *controlabilidad* y la *observabilidad*. Estas propiedades son fundamentales, ya que determinan si es posible diseñar una ley de control por realimentación de estados y construir un observador que permita estimar las variables no medidas.

3.6.1 Controlabilidad

Un sistema lineal en tiempo discreto de la forma:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (3.70)$$

se dice *completamente controlable* si es posible llevar al sistema desde cualquier estado inicial x_0 hasta cualquier estado final x_f en un número finito de pasos mediante una secuencia adecuada de entradas u_k .

La condición matemática para que el sistema sea controlable es que la matriz de controlabilidad:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (3.71)$$

tenga rango completo, es decir:

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = n \quad (3.72)$$

donde n es el número de estados del sistema.

Esta propiedad es esencial para el diseño de la ley de control por realimentación de estados $u_k = -Lx_k$, ya que garantiza que los polos del sistema en lazo cerrado pueden ser ubicados arbitrariamente mediante una elección adecuada de L .

3.6.2 Observabilidad

El sistema descrito por:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (3.73)$$

$$y_k = Cx_k \quad (3.74)$$

se considera *completamente observable* si, a partir de la secuencia de salidas y_k , es posible reconstruir el estado inicial x_0 en un número finito de pasos.

La condición matemática para que el sistema sea observable es que la matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

tenga rango completo:

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = n \quad (3.76)$$

La observabilidad garantiza que es posible estimar el vector de estados x_k mediante la implementación de un observador de estados. Además, asegura que los polos del estimador puedan ser asignados arbitrariamente mediante la ganancia K .

3.6.3 Verificación en MATLAB

La verificación práctica de estas propiedades se realizó en MATLAB utilizando los comandos escritos en el anexo *Prueba_Controlabilidad_Observabilidad* para el sistema en tiempo discreto, en donde se obtuvo la siguiente matriz de controlabilidad:

$$\mathcal{C} = 10^{-03} \times \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0005 & 0,0014 & 0,0022 \\ 0,9517 & 0,8618 & 0,7809 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

La cual es de rango 3. Como es de rango completo el sistema es completamente controlable. Para la matriz de observabilidad se obtuvo:

$$\mathcal{O} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 5,7500 & 0,0000 & 0,0000 \\ 5,7500 & 0,0058 & 0,0000 \\ 5,7500 & 0,0115 & 0,0000 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

La cual también es de rango 3. Al ser de rango completo el sistema es completamente observable.

3.7 Pre-estabilización de la planta

Una vez obtenida la representación en espacio de estados en tiempo discreto, se procede al análisis de la estabilidad del sistema. En el dominio z , la condición de estabilidad requiere que todos los polos del sistema se encuentren dentro del círculo unitario en el plano complejo. Plano el cual se ilustra en la Figura 3.3.

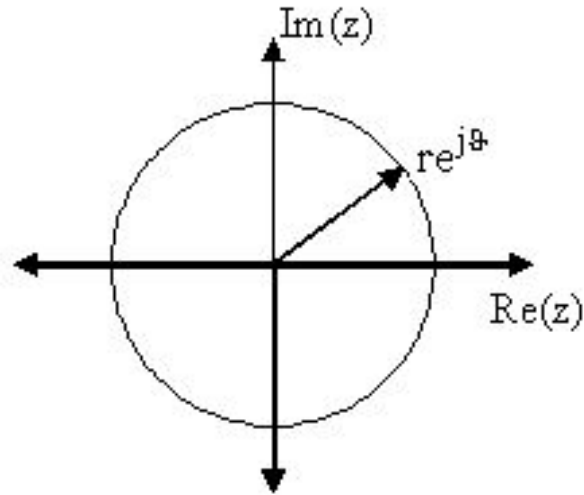


Fig. 3.3: Plano z .

Si alguno de los polos se encuentra sobre el borde o fuera del círculo unitario, el sistema se considera inestable.

Los polos del sistema discreto corresponden a los autovalores de la matriz A_d , los cuales se obtienen resolviendo la siguiente ecuación característica:

3. PLANTA DE INTERÉS

$$\det(\lambda I - A_d) = 0 \quad (3.79)$$

Para llevar a cabo este análisis, se evalúa numéricamente la matriz A_d utilizando el valor de tiempo de muestreo que se empleará en el sistema. En este caso, se considera un tiempo de muestreo de $T_s = 1$ ms. Sustituyendo dicho valor en la ecuación correspondiente (ver ecuación 3.66), se obtiene la siguiente matriz:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0010 & 0,0000 \\ 0,0302 & 1,0003 & 0,0010 \\ 59,4830 & 0,6251 & 0,9051 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Al reemplazar esta matriz en la ecuación (3.79), se obtienen los siguientes autovalores:

$$\lambda_1 = 0,9048, \quad \lambda_2 = 0,9753, \quad \lambda_3 = 1,0253 \quad (3.81)$$

Dado que uno de los autovalores ($\lambda_3 = 1,0253$) se encuentra fuera del círculo unitario, se concluye que el sistema es inestable en su forma actual y requiere ser pre-estabilizado. Esta estabilización se implementa mediante una ley de control por realimentación de estados observados:

$$u_k = -L\hat{x}_k + r_k \quad (3.82)$$

La estructura de esta ley de control se muestra en la Figura 3.4.

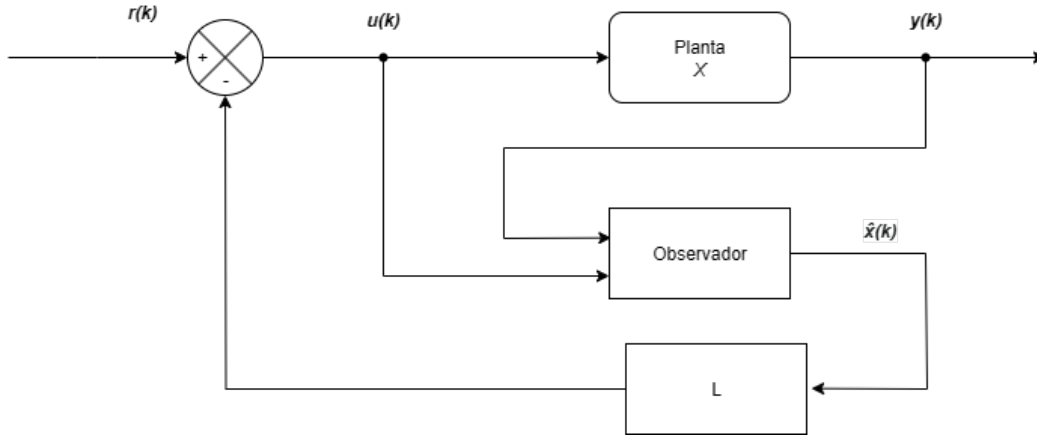


Fig. 3.4: Diagrama de la ley de control con prealimentación de estados estimados.

Considerando únicamente esta parte de la ley de control:

$$u_k = -L\hat{x}_k \quad (3.83)$$

3. PLANTA DE INTERÉS

la ganancia L puede determinarse mediante un enfoque de control óptimo discreto, que busca minimizar el siguiente funcional de costo infinito:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \quad (3.84)$$

La solución óptima de este problema conduce a una ley de control de la forma $u_k = -L\hat{x}_k$, donde la matriz de ganancia L se obtiene como:

$$L = (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P A_d \quad (3.85)$$

siendo P la solución de la ecuación de Riccati discreta:

$$P = A_d^T P A_d - A_d^T P B_d (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P A_d + Q \quad (3.86)$$

Alternativamente, esta ganancia puede calcularse numéricamente utilizando el comando `dlqr` de MATLAB [7]:

$$[L, S, P] = \text{dlqr}(A, B, Q, R) \quad (3.87)$$

donde:

- A y B corresponden a las matrices del sistema discreto A_d y B_d ,
- Q es la matriz de ponderación de los estados,
- R es la matriz de ponderación del esfuerzo de control,
- S representa la solución de la ecuación de Riccati,
- P contiene los polos del sistema en lazo cerrado.

Una vez obtenida la ganancia L , se sustituye la ley de control de la ecuación (3.82) en el modelo del sistema:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (3.88)$$

lo que da lugar a un nuevo sistema en espacio de estados discreto:

$$x_{k+1} = (A_d - B_d L) x_k + B_d r_k \quad (3.89)$$

Los autovalores del sistema en lazo cerrado, es decir, de la matriz $\bar{A} = A_d - B_d L$, son:

$$\lambda_1 = 0,9753 + 0,0008i, \quad \lambda_2 = 0,9753 - 0,0008i, \quad \lambda_3 = 0,9048 + 0,0000i \quad (3.90)$$

Dado que todos los polos se encuentran estrictamente dentro del círculo unitario, se concluye que el sistema ha sido correctamente estabilizado.

Finalmente, el sistema estabilizado se representa como:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \bar{A}x_k + B_d\bar{u}_k \\y_k &= Cx_k\end{aligned}\tag{3.91}$$

3.7.1 Implicancias en MPC al modificar la ley de control

La introducción de una ley de control por realimentación de estados antes de aplicar el esquema predictivo modifica la formulación original de MPC en varios aspectos relevantes.

1. Dinámica del sistema

Al introducir la realimentación de la forma

$$u_k = -L\hat{x}_k + r_k,\tag{3.92}$$

la matriz de dinámica en lazo cerrado pasa a ser:

$$\bar{A} = A_d - B_dL,\tag{3.93}$$

por lo que el modelo utilizado dentro de MPC debe actualizarse para reflejar estas nuevas dinámicas.

2. Variable de decisión

En la formulación estándar, la variable de decisión es la secuencia de entradas $\vec{u}$. Con pre-estabilización, la entrada se descompone como:

$$u_k = -Lx_k + u_{MPC},\tag{3.94}$$

donde u_{MPC} representa la acción adicional calculada por MPC. De esta forma, las variables de decisión dejan de ser las entradas absolutas y pasan a ser las correcciones u_{MPC} que ajustan la acción de control nominal $-Lx_k$.

3. Restricciones

Las restricciones de entrada deben adaptarse, ya que la acción de control ahora es la combinación de la realimentación y la corrección predictiva. En particular:

$$u^{\min} \leq -Lx_k + u_{MPC} \leq u^{\max}. \quad (3.95)$$

Esto implica que las restricciones ya no dependen únicamente de u_{MPC} , sino que están acopladas al estado x_k . En particular, el término $-Lx_k$ representa la realimentación estabilizante, mientras que u_{MPC} actúa como el factor de ajuste que se optimiza en cada instante para que la acción de control total $u_k = -Lx_k + u_{MPC}$ cumpla con las restricciones dadas por $u^{\min}$ y $u^{\max}$.

4. Estabilidad y desempeño

En teoría, la ganancia de pre-estabilización L debería garantizar que el sistema se mantenga estable en lazo cerrado. Sin embargo, en aplicaciones como el levitador magnético, esta condición no siempre se cumple en la práctica debido a no linealidades, incertidumbres en el modelo o saturaciones de los actuadores. Por esta razón, MPC no solo actúa como optimizador, sino que además contribuye a reforzar la estabilidad efectiva del sistema al manejar explícitamente restricciones y objetivos de desempeño.

En resumen, al introducir la realimentación $-Lx_k$, el MPC deja de operar sobre las entradas absolutas y pasa a optimizar las correcciones u_{MPC} . Este cambio modifica el modelo predictivo, la formulación del funcional de costo y las restricciones. Aunque la pre-estabilización debería garantizar estabilidad en teoría, en sistemas reales como el levitador no es suficiente por sí sola, y MPC se convierte en la herramienta clave para asegurar desempeño y robustez.

3.8 Modelo final: Sistema aumentado

Una vez diseñadas la ley de control $u_k = r_k - L\hat{x}_k$ y el observador de estados $\hat{x}_k$, es posible construir un modelo aumentado del sistema completo en espacio de estados, que represente tanto la dinámica de la planta como la del estimador.

El sistema original en tiempo discreto está dado por:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (3.96)$$

y el observador de estados se define como:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + K(y_k - C\hat{x}_k - Du_k) \quad (3.97)$$

Suponiendo $D = 0$, y considerando la ley de control con referencia:

$$u_k = r_k - L\hat{x}_k \quad (3.98)$$

con lo anterior, se puede construir un modelo ampliado del sistema, como se desarrolla a continuación.

3.8.1 Derivación del sistema aumentado

Sustituyendo $u_k = r_k - L\hat{x}_k$ en la dinámica del sistema:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B(r_k - L\hat{x}_k) \\ &= Ax_k - BL\hat{x}_k + Br_k \end{aligned} \quad (3.99)$$

Sustituyendo en la ecuación del observador:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + B(r_k - L\hat{x}_k) + K(y_k - C\hat{x}_k) \\ &= A\hat{x}_k - BL\hat{x}_k + Br_k + K(Cx_k - C\hat{x}_k) \\ &= (A - BL - KC)\hat{x}_k + KCx_k + Br_k \end{aligned} \quad (3.100)$$

Agrupando los términos, se obtiene el sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BL \\ KC & A - KC - BL \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} r_k \quad (3.101)$$

De este modo, el modelo completo del sistema en lazo cerrado, incluyendo la referencia r_k , queda representado por el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Esta estructura se utilizará posteriormente en la implementación del método de control predictivo (MPC).

4 Simulación del sistema de control

En este capítulo se presenta la simulación del sistema de levitación magnética con el objetivo de validar el correcto funcionamiento del controlador predictivo por modelo (MPC) antes de su implementación física. Para ello, se desarrolló un esquema en MATLAB/Simulink que integra el modelo de la planta junto con el bloque de control predictivo y el de seguimiento a referencia.

4.1 Matlab

MATLAB es una plataforma de programación y computación numérica ampliamente utilizada en el ámbito académico, industrial y de investigación. Su entorno integra un lenguaje de alto nivel con potentes herramientas de cálculo matricial, lo que facilita el desarrollo de algoritmos, la visualización de datos y la implementación de modelos matemáticos.

Además de su capacidad para realizar análisis numéricos y simbólicos, MATLAB proporciona aplicaciones interactivas (apps) que permiten configurar flujos de trabajo sin necesidad de programar desde cero, así como bibliotecas especializadas en áreas como control automático, procesamiento digital de señales, visión por computadora, aprendizaje automático, comunicaciones y robótica [15].

Su compatibilidad con hardware y software externos, junto con las herramientas de generación automática de código embebido, lo convierten en una solución completa para el diseño, simulación y despliegue de sistemas en entornos reales.

Algunos de los componentes principales del entorno de MATLAB, ilustrados en la figura 4.1, son:

- **Current Folder:** Panel que permite explorar el sistema de archivos, establecer el directorio de trabajo actual y acceder rápidamente a los archivos y carpetas disponibles.
- **Command Window:** Interfaz principal para ingresar comandos, ejecutar código en tiempo real y visualizar los resultados de forma inmediata.
- **Editor:** Entorno integrado para la creación, edición y depuración de scripts, funciones y archivos MATLAB.

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

- **Workspace:** Panel que muestra las variables definidas en la sesión actual, junto con sus valores, dimensiones y tipo de datos.
- **Command History:** Panel que registra y muestra el historial de comandos ejecutados, permitiendo reutilizarlos fácilmente.

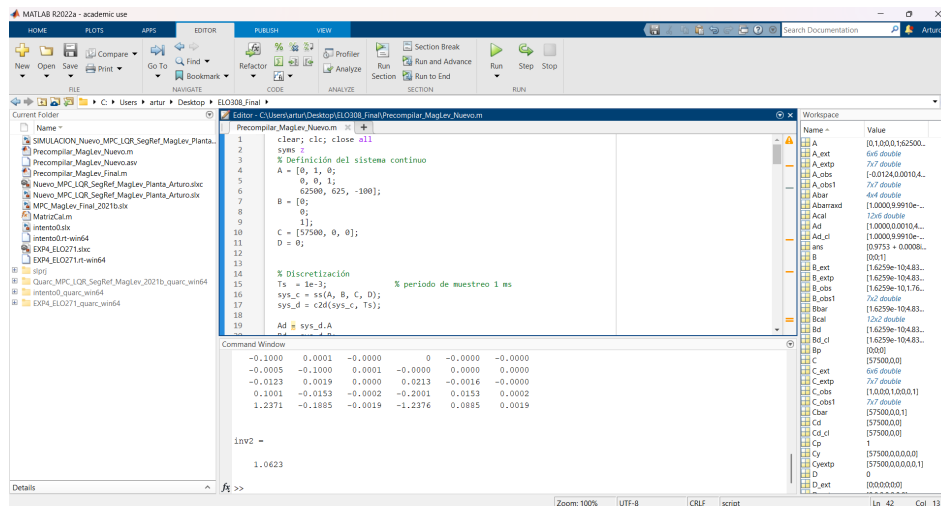


Fig. 4.1: Entorno MATLAB.

4.2 Simulink

Simulink es un entorno de modelado y simulación basado en diagramas de bloques, diseñado para representar y analizar sistemas dinámicos de diversa índole. Forma parte del ecosistema de MATLAB y se emplea ampliamente en ingeniería para el diseño, simulación, verificación e implementación de sistemas en tiempo continuo, discreto o mixto. Permite integrar fácilmente modelos matemáticos, algoritmos de control, procesamiento de señales y sistemas físicos mediante una interfaz gráfica interactiva, facilitando tanto la validación de conceptos como el desarrollo de prototipos de implementación automática [13].

Algunos componentes principales del entorno de Simulink, como el que se ilustra en la figura 4.2, son:

- **Barra de herramientas principal:** Ubicada en la parte superior, contiene pestañas como *Simulation*, *Debug*, *Modeling*, *Format* y *Apps*, que permiten acceder a comandos de ejecución, depuración, configuración del tiempo de simulación y análisis de resultados.
- **Panel de modelado (Canvas):** Área central donde se colocan y conectan los bloques para crear el diagrama de simulación, soportando múltiples pestañas de modelos abiertos.

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

- **Model Browser:** Barra lateral izquierda que permite navegar jerárquicamente por subsistemas y organizar componentes dentro del modelo.
- **Library Browser:** Accesible desde la barra superior o el icono lateral, contiene bibliotecas de bloques predefinidos organizadas por categorías como funciones matemáticas, toolbox para sistemas de control y señales.
- **Property Inspector:** Barra lateral derecha utilizada para visualizar y modificar las propiedades del bloque o subsistema seleccionado.
- **Controles de simulación:** Incluyen botones para ejecutar, detener o avanzar paso a paso la simulación, así como opciones para configurar el *solver* y el tiempo total de simulación.
- **Herramientas de análisis de resultados:** Integradas en la pestaña *Review Results*, permiten utilizar *Data Inspector*, *Logic Analyzer* y *Simulation Manager* para examinar y validar la simulación.

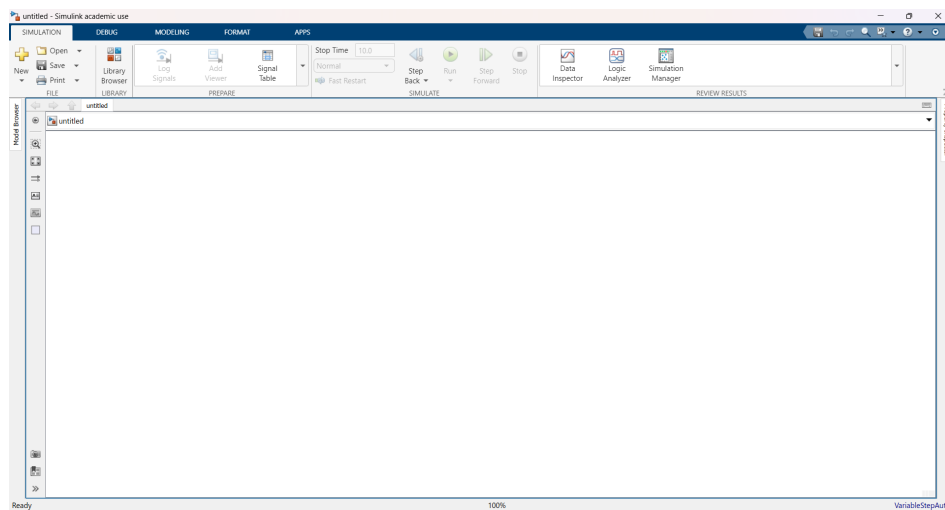


Fig. 4.2: Entorno Simulink.

4.3 Bloques utilizados para la simulación

Simulink, a través de su amplia librería, ofrece una gran variedad de bloques que permiten implementar la simulación del método de control predictivo por modelo (MPC). A continuación, se presenta una lista de los bloques utilizados, los cuales también se ilustran en la figura 4.3.

- **Constant:** Genera una señal constante definida por el usuario.

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

- **MATLAB Function:** Permite incorporar código en MATLAB directamente dentro de un modelo de *Simulink* para crear funciones personalizadas.
- **Scope:** Facilita la visualización y captura de datos para su posterior análisis. Se utiliza para mostrar variables de interés, como la posición del rotor, y para exportar datos al *workspace*.
- **Goto:** Envía su señal de entrada a un bloque **From** correspondiente. La señal puede ser un valor real, complejo o un vector de cualquier tipo de dato.
- **From:** Recibe la señal de un bloque **Goto** correspondiente y la entrega como salida, manteniendo el mismo tipo de dato.
- **Sum:** Realiza la suma o resta de sus entradas.
- **Inport:** Permite la entrada de una señal externa a un sistema.
- **Outport:** Envía una señal desde un sistema hacia un bloque ubicado fuera de este.
- **Discrete State-Space:** Implementa un sistema en espacio de estados en tiempo discreto. Recibe como parámetros las matrices A , B , C , D , las condiciones iniciales y el tiempo de muestreo.
- **Demux:** Extrae los componentes de un vector de entrada y los separa en distintas salidas.
- **Mux:** Combina entradas del mismo tipo de dato en un único vector virtual.
- **Gain:** Multiplica la señal de entrada por un valor o ganancia constante. Tanto la entrada como la ganancia pueden ser escalares, vectores o matrices.
- **Saturation:** Limita la señal de salida dentro de un rango definido por un valor de saturación superior e inferior.
- **Step:** Genera una señal escalón, donde la salida cambia de un valor inicial a un valor final en un tiempo específico

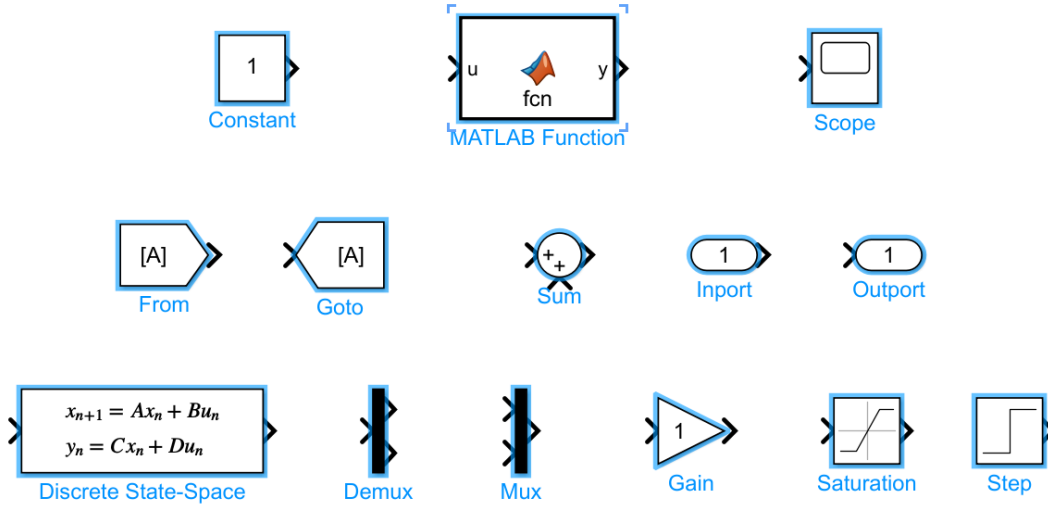


Fig. 4.3: Bloques utilizados en Simulink.

4.4 Preparación de la simulación

Para el desarrollo de la simulación, se emplean las matrices en espacio de estados del sistema en tiempo continuo obtenidas en el capítulo 6:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 62500 & 625 & -100 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [57500 \quad 0 \quad 0], \quad D = 0 \quad (4.1)$$

Estas matrices se discretizan en *MATLAB* mediante el comando `c2d`, considerando un periodo de muestreo $T_s = 0,001$ [s]. El procedimiento se detalla en el anexo *Precompilar_MagLev_Final*. Las matrices discretas resultantes son:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0010 & 0,0000 \\ 0,0302 & 1,0003 & 0,0010 \\ 59,4830 & 0,6251 & 0,9051 \end{bmatrix}, \quad B_d = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0005 \\ 0,9517 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$C_d = [57500 \quad 0 \quad 0], \quad D_d = 0$$

Para las primeras pruebas con MPC, se establece un horizonte de predicción $N = 2$, con $\Gamma = 10^{-4}$ y $\Omega = C_y^\top C_y$ como matrices de peso.

El vector de condiciones iniciales x_0 se define de la siguiente forma:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Las restricciones de estado y de control se configuran de la siguiente forma:

$$x_{\min} = \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \\ -100 \\ -15 \\ -10 \\ -100 \end{bmatrix}, \quad x_{\max} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 100 \\ 15 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$u_{\min} = -10, \quad u_{\max} = 10$$

Aunque el sistema original tiene tres estados, el vector de restricciones considera seis debido a que MPC actúa sobre la planta aumentada. Por simplicidad, se aplican las mismas restricciones a los estados añadidos.

Las ganancias de los observadores y de la realimentación, calculadas en *MATLAB* (anexo *Precompilar_MagLev_Final*), son:

$$L = 1,0 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1,2358 & 0,0618 & 0,0005 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0002 \\ 0,0024 \end{bmatrix}, \quad K_{ep} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0001 \\ 0,0005 \\ 0,0000 \\ 0,0001 \\ 0,0004 \\ 0,8641 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

El modelo de planta aumentada utilizado en las simulaciones iniciales se muestra en la figura 4.4. El bloque de espacio de estados discreto superior se emplea para medir la salida del sistema, mientras que el bloque inferior mide los estados para su uso en la realimentación junto con la ganancia L . El observador estima los estados de la planta para su uso en el bloque MPC, el cual opera sobre el modelo ampliado. El bloque de saturación limita la señal de control, asegurando el cumplimiento de las restricciones.

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

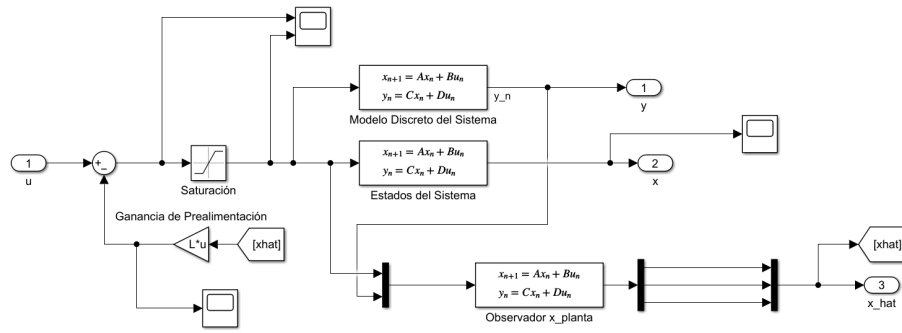


Fig. 4.4: Modelo de planta aumentada.

El seguimiento de referencia se implementa como en la figura 4.5 y el código adjunto, con ganancias precalculadas en *MATLAB*. La ganancia $K * u$ corresponde a la matriz B_{ext} , que incluye los seis estados de la planta aumentada.

```
%% Seguimiento a referencia
inv1 = inv(eye(size(A_ext))-A_ext);
inv2 = inv(Cy*inv1*B_ext);
```

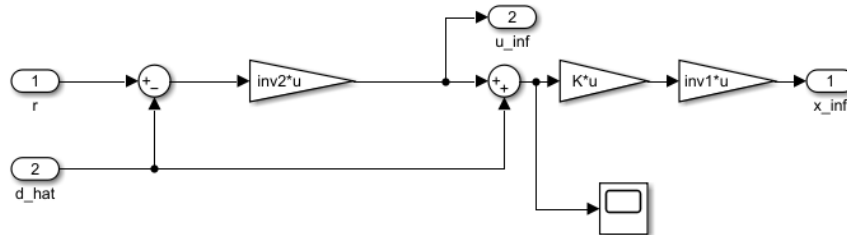


Fig. 4.5: Bloque de seguimiento a referencia.

En la figura 4.6 se muestran los bloques que conforman la implementación del MPC. Dentro del bloque principal se encuentra el solver *quadprog*, configurado con el método *Active-Set* (anexo *solverMPC*). El bloque *mat_f* calcula el término objetivo lineal (anexo *mat_f*), y el bloque *ineq* genera las restricciones A y b de desigualdad (anexo *ineq*).

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

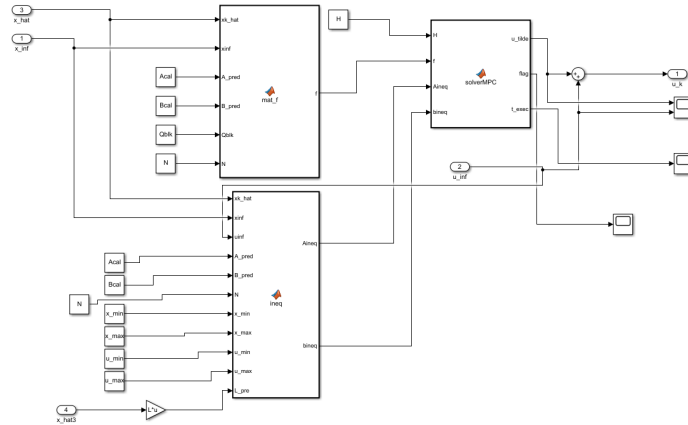


Fig. 4.6: Bloque MPC para seguimiento a referencia.

Finalmente, el esquema completo de control utilizado en las pruebas iniciales se muestra en la figura 4.7.

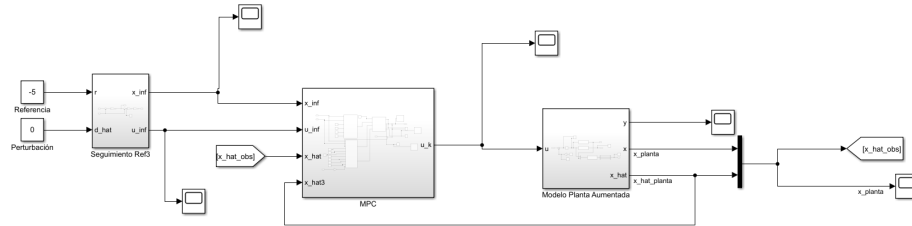


Fig. 4.7: Esquema MPC con seguimiento a referencia.

4.5 Pruebas de Simulación sin perturbaciones

Para esta prueba se define como referencia $R = -5 [cm]$. El sistema a simular corresponde al mostrado en la figura 4.7. Tanto esta como las pruebas posteriores se realizan con un tiempo de simulación de 1 [s]. Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes figuras:

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

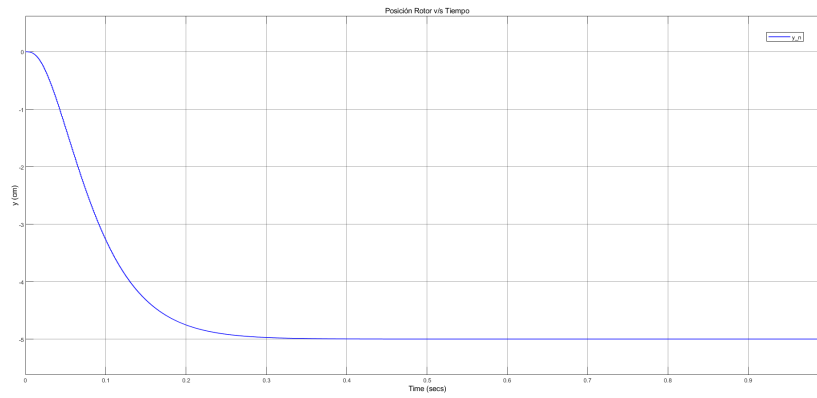


Fig. 4.8: Prueba sin perturbaciones: Gráfico de salida y_k .

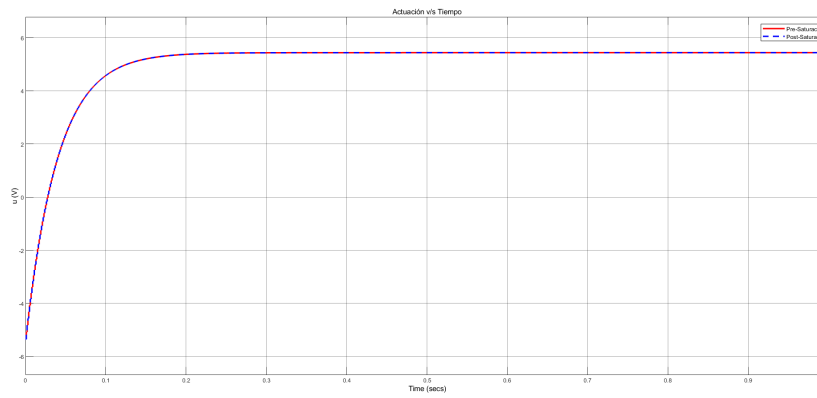


Fig. 4.9: Prueba sin perturbaciones: Grafico de actuación u_k .

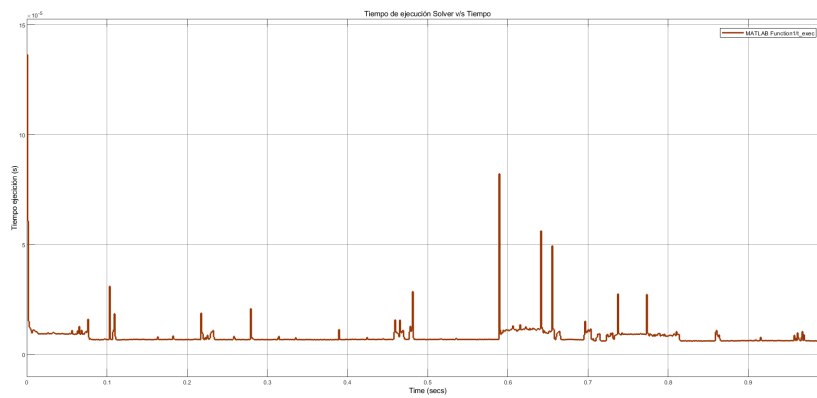


Fig. 4.10: Prueba sin perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog.

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

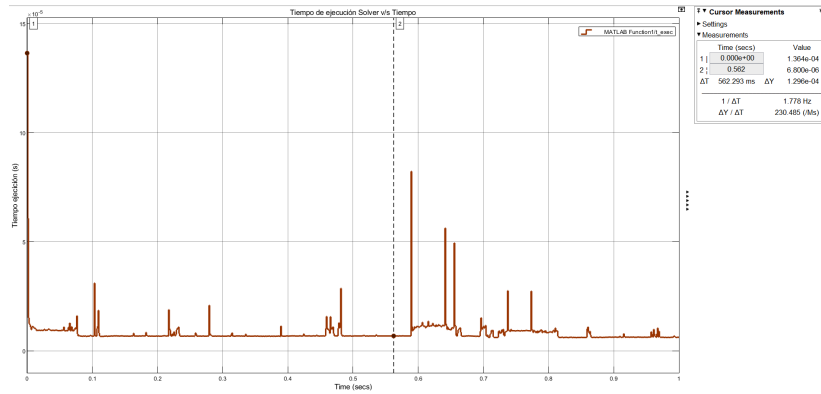


Fig. 4.11: Prueba sin perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog con mediciones detalladas.

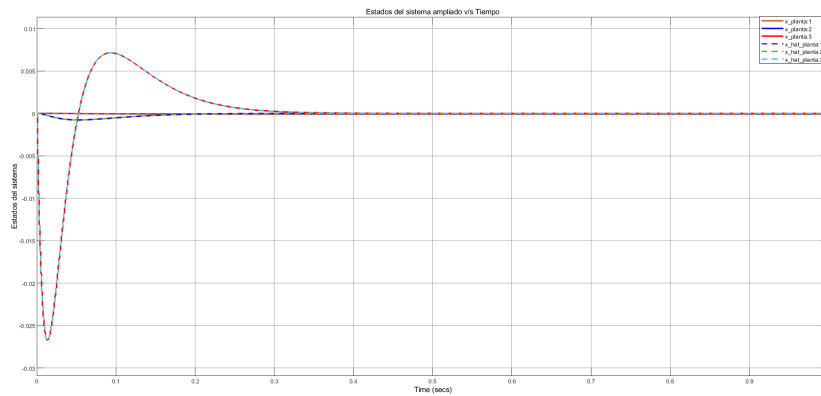


Fig. 4.12: Prueba sin perturbaciones: Estados del sistema planta aumentada.

En la figura 4.8 se aprecia que el sistema logra alcanzar la referencia establecida. La figura 4.9 muestra que la señal de control se mantiene dentro de los límites definidos, lo que indica que la restricción de actuación se respeta en todo momento.

En las figuras 4.10 y 4.11 se observa que los tiempos de ejecución del solver alcanzan, en el peor caso, $1,364 \times 10^{-4}$ segundos, mientras que en el mejor caso se reducen a $6,8 [\mu s]$. Esto implica que el cálculo se realiza con, a lo más, una diferencia de un orden de magnitud respecto al tiempo de muestreo.

Finalmente, la figura 4.12 evidencia que todos los estados de la planta aumentada convergen a cero, confirmando el correcto desempeño del controlador bajo estas condiciones.

4.6 Pruebas de Simulación con perturbaciones constantes

En esta prueba, primero se cambia el tiempo de simulación a $10 [s]$, luego se incorporan dos bloques *Step*, los cuales simulan perturbaciones constantes. El primer bloque *Step*, con un

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

valor final de 1 [cm] , se activa en el segundo 5. El segundo bloque *Step*, con un valor final de $0,5 \text{ [cm]}$, se activa en el segundo 8. Para esta simulación se mantiene la misma referencia utilizada en la sección anterior.

El esquema empleado se muestra en la figura 4.13.

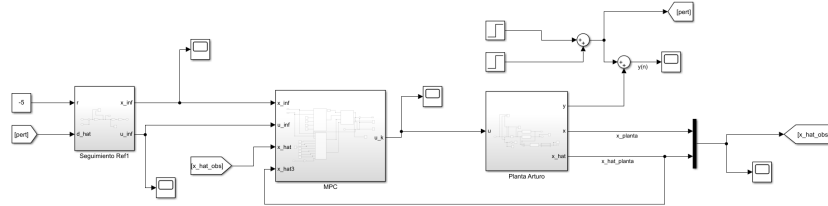


Fig. 4.13: Esquema MPC con seguimiento a referencia y perturbaciones constantes.

Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes figuras:

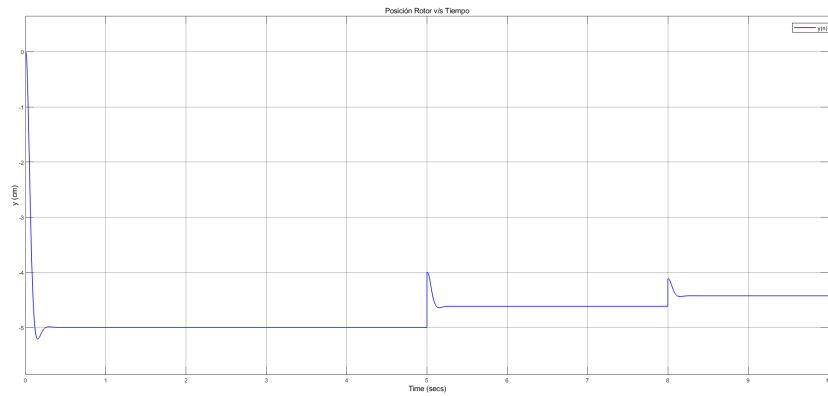


Fig. 4.14: Prueba con perturbaciones: Gráfico de salida y_k .

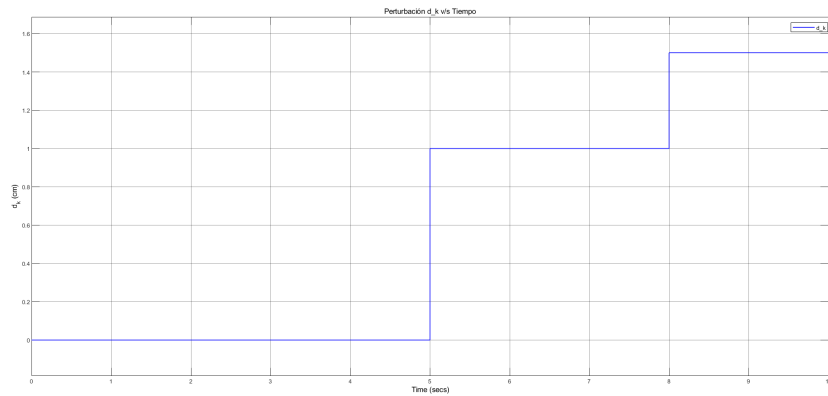


Fig. 4.15: Prueba con perturbaciones: Gráfico de perturbación constante d_k .

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

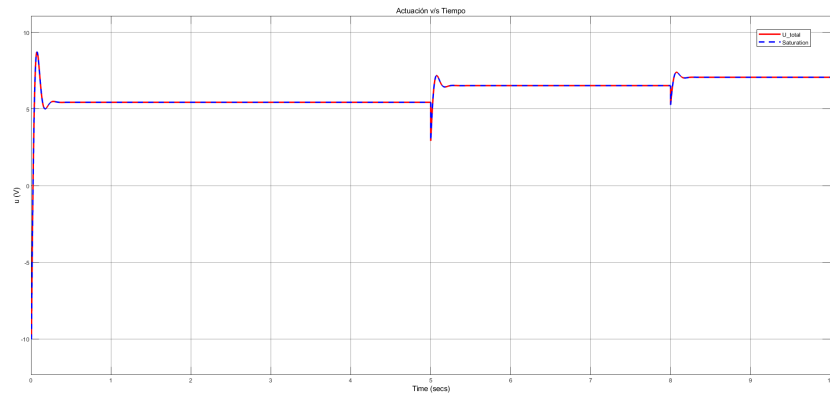


Fig. 4.16: Prueba con perturbaciones: Grafico de actuación u_k .

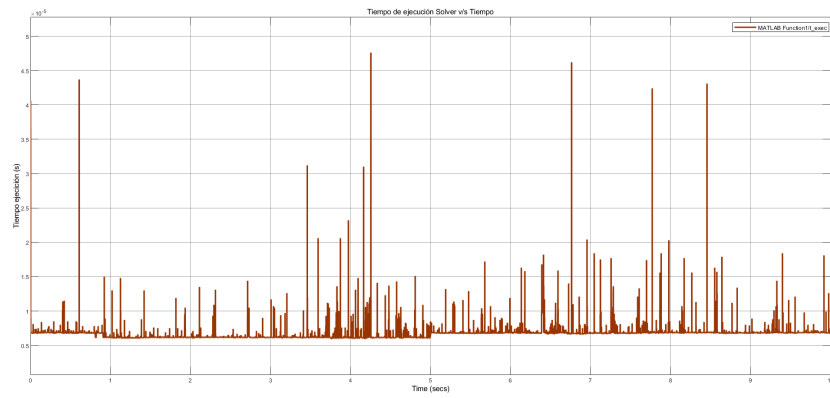


Fig. 4.17: Prueba con perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog.

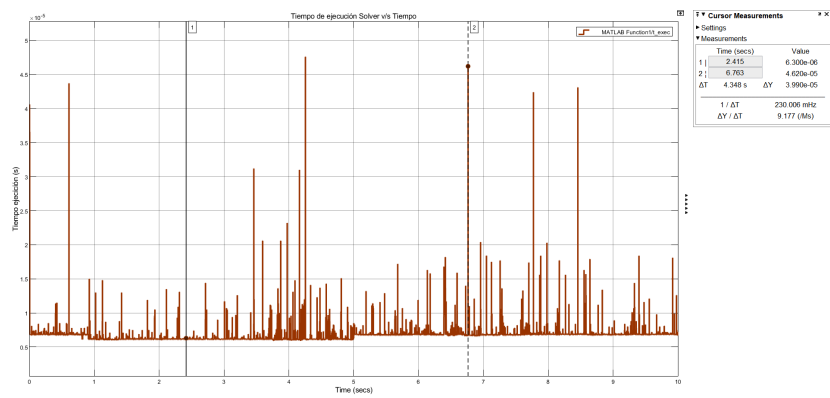


Fig. 4.18: Prueba con perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog con mediciones detalladas.

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

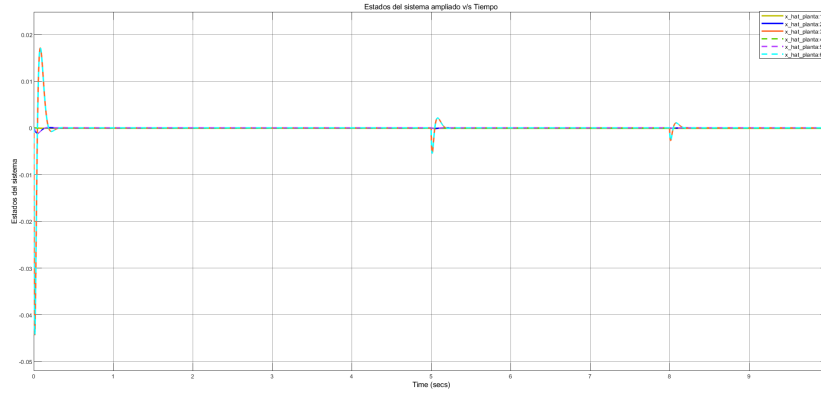


Fig. 4.19: Prueba con perturbaciones: Estados del sistema planta aumentada.

De la figura 4.14 se aprecia que el sistema no logra alcanzar completamente la referencia, debido a que no mitiga de manera adecuada el efecto de las perturbaciones. En la figura 4.16 se observa que el voltaje de actuación aumenta al activarse los escalones que simulan dichas perturbaciones. No obstante, las restricciones de actuación se mantienen dentro de los límites establecidos.

En las figuras 4.17 y 4.18 se aprecia que los tiempos de ejecución del solver alcanzan, como máximo, valores cercanos a $4,620 \times 10^{-5}$ segundos, mientras que los mínimos rondan los $6,3 [\mu s]$. Esto indica que el solver continúa ejecutándose, en su peor caso, con una diferencia de 2 órdenes de magnitud respecto al tiempo de muestreo. Dado que los tiempos de ejecución del solver resultaron ser menores al tiempo de muestreo, bajo esta condición, se puede concluir que la planta puede controlarse sin inconvenientes, incluso empleando un tiempo de muestreo más menor.

Finalmente, la figura 4.19 muestra que todos los estados de la planta aumentada responden ante las perturbaciones aplicadas; sin embargo, los estados tienden a converger a cero.

Dado que en la figura 4.14 se observa que el efecto de las perturbaciones no se mitiga completamente, se modifica el valor de Γ hasta encontrar un valor que mejore el desempeño, el cual es $\Gamma = 10^{-2}$ en la configuración de MPC, con el fin de incrementar el esfuerzo de control. Con este ajuste se obtuvieron las siguientes figuras:

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

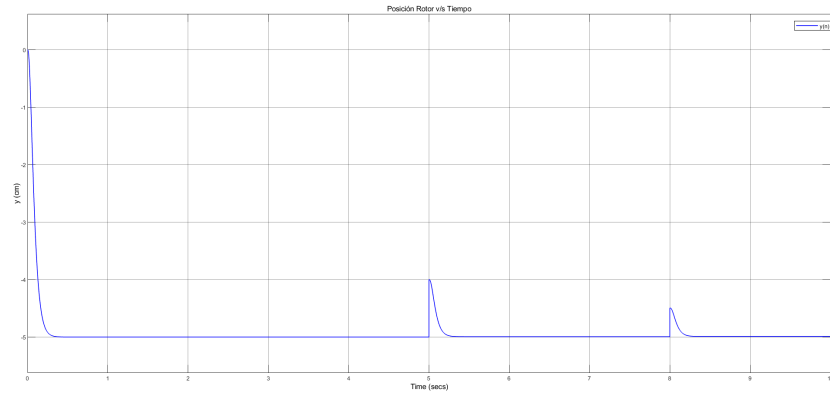


Fig. 4.20: Prueba con perturbaciones: Gráfico de salida y_k con $\Gamma = 10^{-2}$.

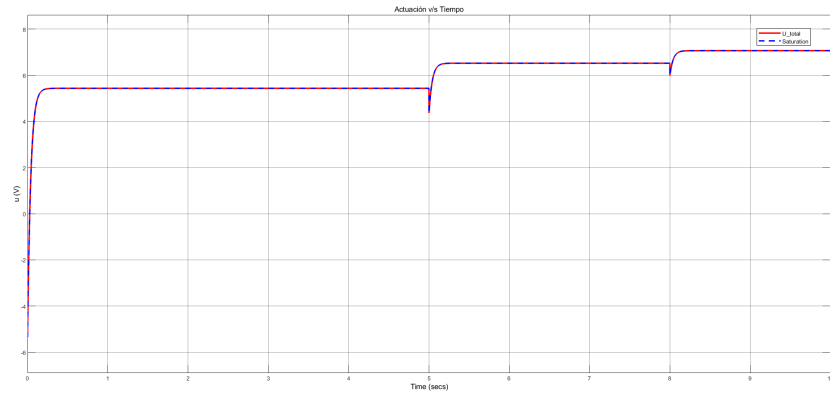


Fig. 4.21: Prueba con perturbaciones: Gráfico de actuación u_k con $\Gamma = 10^{-2}$.

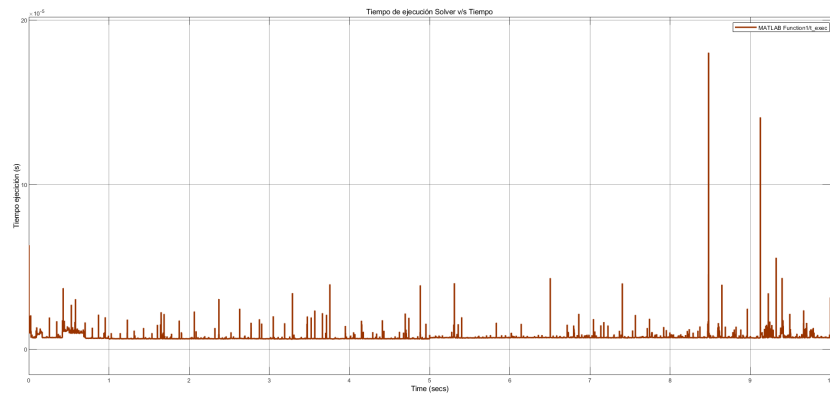


Fig. 4.22: Prueba con perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog con $\Gamma = 10^{-2}$.

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

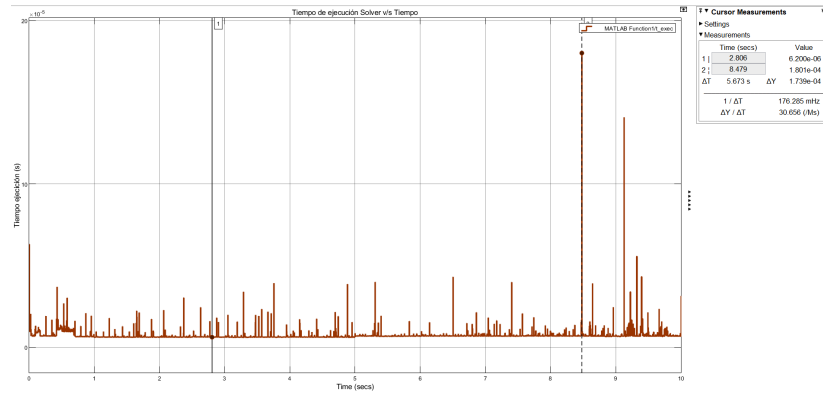


Fig. 4.23: Prueba con perturbaciones: Tiempo de ejecución del solver quadprog con mediciones detalladas con $\Gamma = 10^{-2}$.

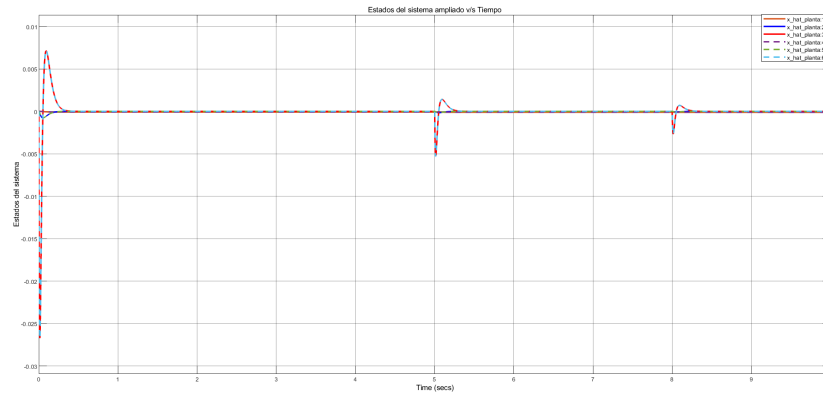


Fig. 4.24: Prueba con perturbaciones: Estados del sistema planta aumentada con $\Gamma = 10^{-2}$.

De la figura 4.20 se aprecia que el sistema ahora es capaz de alcanzar la referencia establecida sin inconvenientes, logrando mitigar el efecto de las perturbaciones. En la figura 4.21 se observa que el voltaje de actuación prácticamente no varió respecto de la figura 4.16.

En las figuras 4.22 y 4.23 se aprecia que los tiempos de ejecución del solver presentan valores similares a los del caso anterior.

Finalmente, la figura 4.24 muestra que todos los estados de la planta aumentada alcanzan valores menores en comparación con la figura 4.19, evidenciando una mejora en la respuesta del sistema ante perturbaciones.

4.7 Pruebas de Simulación con observador de estados y perturbaciones constantes

Para esta última prueba se implementa un observador de estados con el fin de estimar los estados de la planta aumentada, tal como se muestra en la siguiente figura:

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

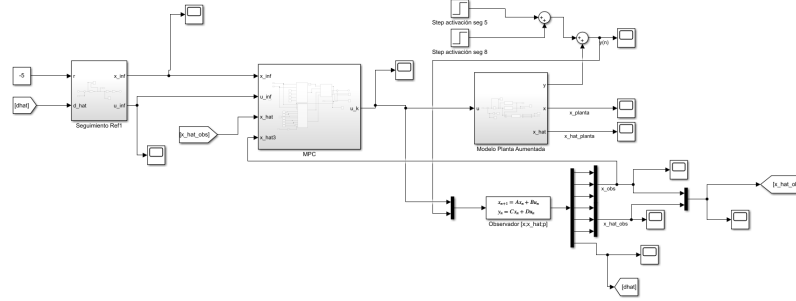


Fig. 4.25: Prueba con perturbaciones y observador: Esquema MPC con seguimiento a referencia y observador de estados.

Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes figuras:

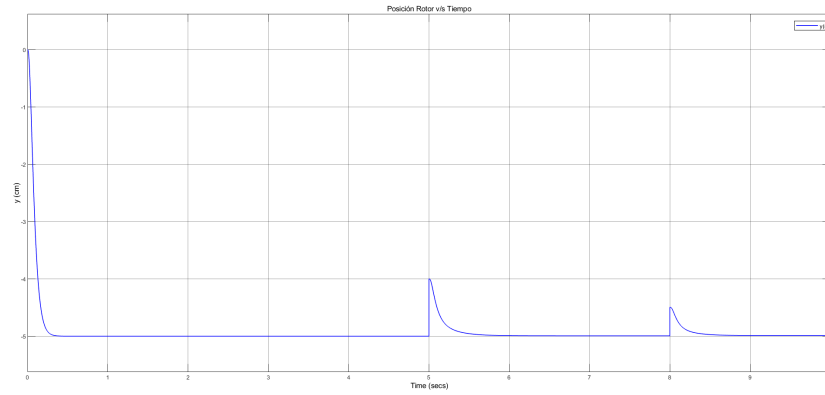


Fig. 4.26: Prueba con perturbaciones y observador: Gráfico de salida y_k .

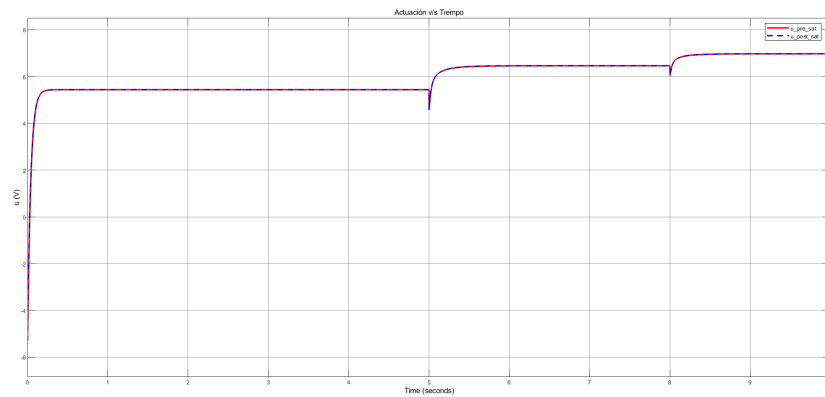


Fig. 4.27: Prueba con perturbaciones y observador: Gráfico de actuación u_k .

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

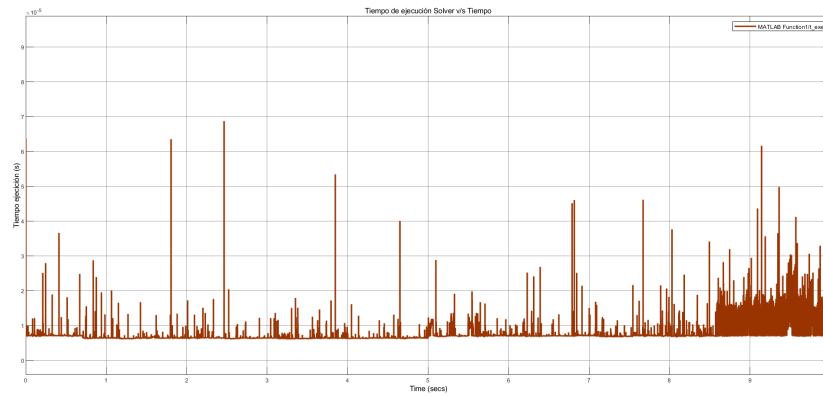


Fig. 4.28: Prueba con perturbaciones y observador: Tiempo de ejecución del solver quadprog.

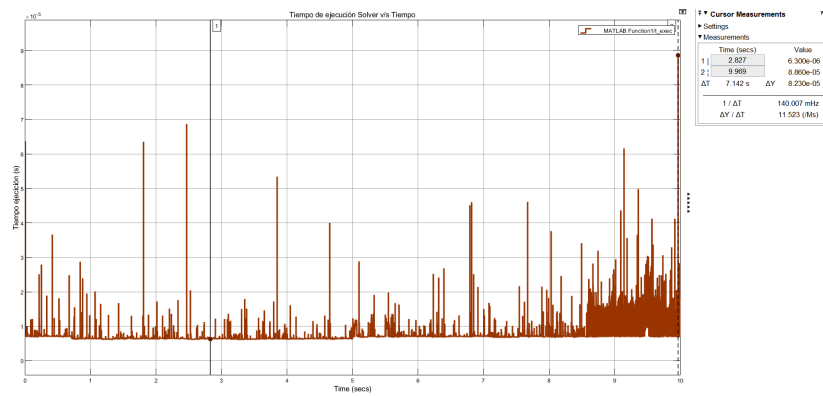


Fig. 4.29: Prueba con perturbaciones y observador: Tiempo de ejecución del solver quadprog con mediciones detalladas.

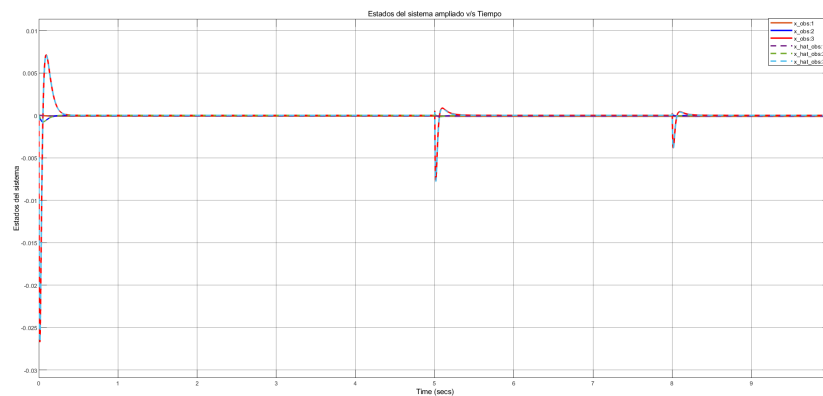


Fig. 4.30: Prueba con perturbaciones y observador: Estados del sistema planta aumentada.

De la figura 4.26 se aprecia que el sistema es capaz de alcanzar la referencia, mitigando por completo el efecto de las perturbaciones. En la figura 4.27 se observa que el voltaje de

4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

actuación se mantiene dentro de los límites establecidos, presentando un comportamiento equivalente al caso sin observador de estados.

En las figuras 4.28 y 4.29 se aprecia que los tiempos de ejecución del solver alcanzan como máximo valores cercanos a $8,860 \times 10^{-5}$ segundos, mientras que el mínimo registrado es del orden de $6,3 [\mu s]$. Esto indica que, incluso en el peor de los casos, el solver se ejecuta con dos órdenes de magnitud de diferencia respecto al tiempo de muestreo. Dado que los tiempos de ejecución del solver se mantienen siempre por debajo el tiempo de muestreo, bajo esta condición y las vistas anteriormente, se puede concluir que la planta puede controlarse sin inconvenientes, incluso empleando un tiempo de muestreo menor.

Finalmente, en la figura 4.30 se muestra que los estados del sistema presentan un comportamiento similar al observado en la figura 4.24, alcanzando valores comparables para todas las variables de estado.

5 Implementación física del sistema de control

En este capítulo se describe la implementación física del controlador predictivo en el sistema de levitación magnética. Tras la validación en simulación, se procedió a integrar el bloque de control en la planta real mediante hardware de adquisición de datos y la plataforma QUARC, lo que permitió evaluar el desempeño del MPC bajo condiciones experimentales.

Se detallan los elementos de hardware y software utilizados, junto con la configuración necesaria para la comunicación entre el modelo de control y la planta. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos, analizando la respuesta del sistema frente a diferentes horizontes de predicción, periodos de muestreo y restricciones de actuación.

5.1 Hardware utilizado

A continuación se describirán todos los componentes físicos utilizados:

- **Sistema de Levitación Magnética:** El sistema de levitación magnética mostrado en la figura 5.1a está compuesto por un rotor, dos sensores (uno para medir la corriente y otro para medir la posición del rotor) y dos interruptores: el primero permite seleccionar entre el uso del controlador interno o uno externo, mientras que el segundo genera una señal aleatoria para modificar el setpoint del controlador interno. En este caso, los interruptores se configuran para utilizar el controlador externo y deshabilitar la generación de la señal aleatoria, tal como se muestra en la figura 5.1b. El levitador utilizado corresponde al marcado con el número 2.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL



(a) Sistema de Levitación Magnética (b) Configuración de los interruptores

Fig. 5.1: Sistema de Levitación Magnética y su configuración de interruptores.

- **Interfaz de adquisición y generación de señales analógicas:** Esta interfaz permite adquirir señales analógicas desde sensores y generar señales analógicas de salida hacia actuadores. Para la correcta utilización del conversor, es necesario seleccionar el canal 0 mediante el interruptor correspondiente, como se muestra en la figura 5.2b, asegurando de esta manera el envío adecuado de la señal de control al sistema de levitación. Se conecta directamente al levitador a través de un cable ethernet a DB.



(a) Entradas A/D

(b) Salidas D/A

Fig. 5.2: Entradas y salidas del sistema de adquisición de datos.

- **Tarjeta de adquisición de datos multifuncional (DAQ) NI-PCI-6221 (37-pin):** Esta tarjeta, incorporada en los computadores del laboratorio, permite la adquisición de señales de sensores y sistemas físicos mediante la medición de entradas analógicas de alta resolución. Asimismo, posibilita la generación de salidas analógicas para el accionamiento de los actuadores.

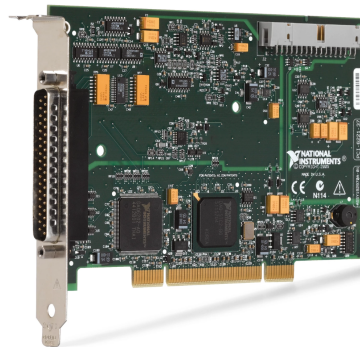


Fig. 5.3: Tarjeta de adquisición de datos NI-PCI-6221 (37-pin)

5.2 Software de Quanser utilizado

QUARC™ es la forma más eficiente de diseñar, desarrollar, implementar y validar aplicaciones en tiempo real sobre hardware utilizando Simulink®. QUARC genera código en tiempo real directamente a partir de controladores diseñados en Simulink y lo ejecuta en tiempo real

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

sobre el objetivo de Windows, todo ello sin necesidad de procesamiento digital de señales ni de escribir una sola línea de código [12].

Quanser, a través de **QUARC™**, ofrece un conjunto de herramientas que permiten validar el diseño y la implementación de controladores en tiempo real. Para acceder a estas herramientas es necesario ingresar a la biblioteca de **Simulink** y dirigirse a la sección correspondiente a **QUARC**. Cabe señalar que su utilización requiere contar con el *add-on* instalado y con la licencia de uso habilitada.

A continuación, se presentan los bloques de **QUARC** utilizados en este trabajo:

- **Bloque HIL Initialize:** Este bloque asocia un nombre con una placa particular HIL.

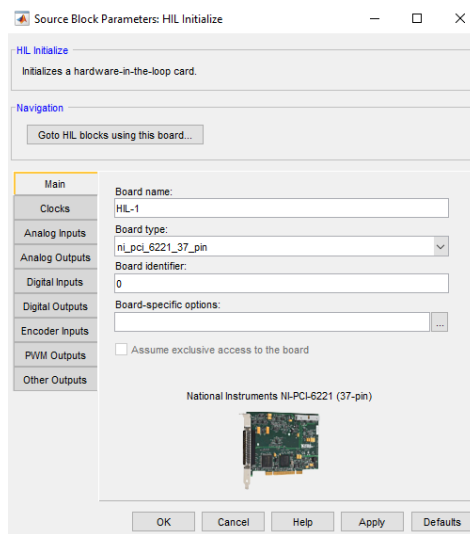


Fig. 5.4: Software Quanser: HIL initialize

- **Bloque HIL Read Analog:** Este bloque lee el canal analógico especificado cada vez que es ejecutado. La lectura del canal es inmediata.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

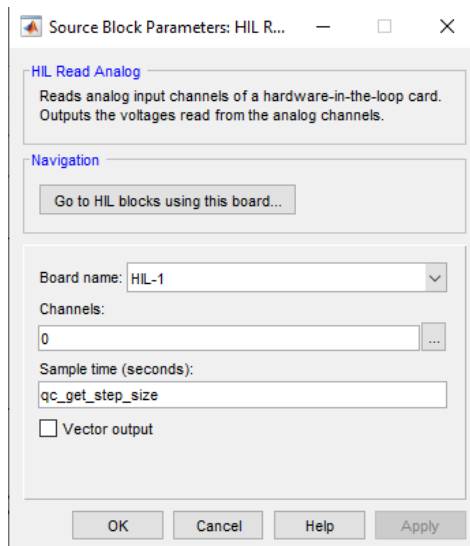


Fig. 5.5: Software Quanser: HIL Read Analog

- **Bloque HIL Write Analog:** Este bloque escribe a un canal analógico especificado cada vez que el bloque es ejecutado. La escritura al canal es inmediata.

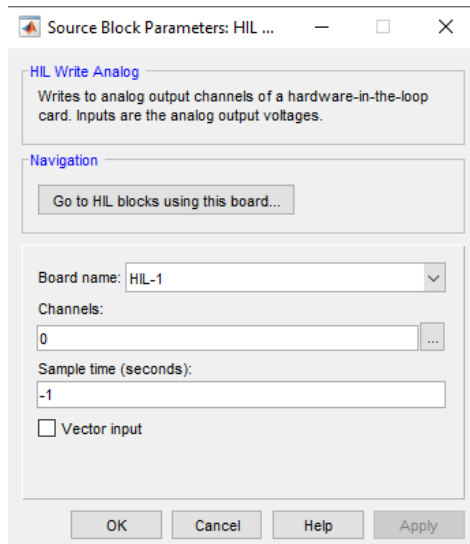


Fig. 5.6: Software Quanser: HIL Write Analog

- **Bloque To Host File:** Este bloque permite escribir datos en distintos formatos de archivos. Permite analizar de manera sencilla datos una vez realizado un experimento.

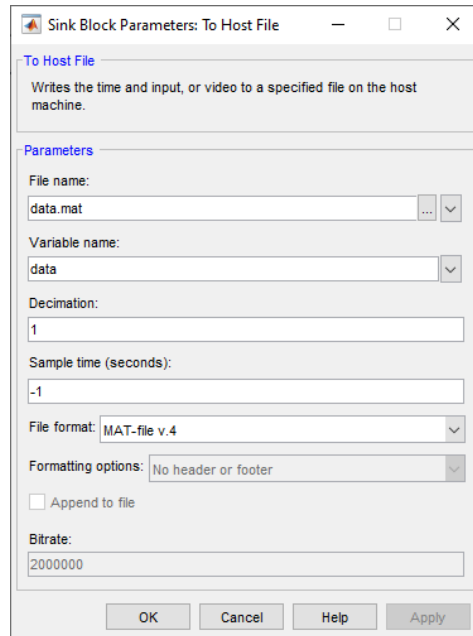


Fig. 5.7: Software Quanser: To Host File

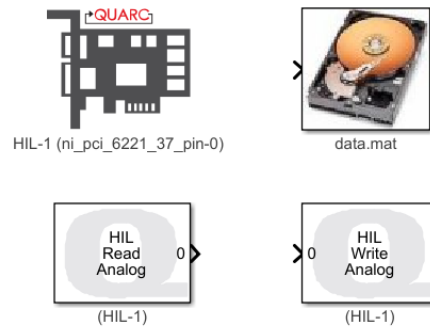


Fig. 5.8: Bloques utilizados

5.3 Configuración de MPC

Para la implementación de MPC en simulink con Quarc, se consideran un periodo de muestreo $T_s = 0,001[s]$. Las matrices discretas son las mismas utilizadas en la simulación, estas son:

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

$$A_d = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0010 & 0,0000 \\ 0,0302 & 1,0003 & 0,0010 \\ 59,4830 & 0,6251 & 0,9051 \end{bmatrix}, \quad B_d = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0005 \\ 0,9517 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$C_d = [57500 \quad 0 \quad 0], \quad D_d = 0$$

Las pruebas iniciales se realizan con un horizonte de predicción $N = 2$, con $\Gamma = 10^{-2}$, $\Omega = C'_y \cdot C_y$, $\Omega_N = \Omega$. Como referencia se define $R = -8 [cm]$.

El vector de condiciones iniciales utilizado es el siguiente:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Las restricciones de estado y de control se configuran de la misma forma que las utilizadas para la simulación:

$$x_{\min} = \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \\ -100 \\ -15 \\ -10 \\ -100 \end{bmatrix}, \quad x_{\max} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 100 \\ 15 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$u_{\min} = -10, \quad u_{\max} = 10$$

Las ganancias de los observadores y de la realimentación son las mismas utilizadas en la simulación del sistema, estas son:

$$L = 1,0 \times 10^5 [1,2358 \quad 0,0618 \quad 0,0005],$$

$$K = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0002 \\ 0,0024 \end{bmatrix}, \quad K_{ep} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0001 \\ 0,0005 \\ 0,0000 \\ 0,0001 \\ 0,0004 \\ 0,8641 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

En la figura 5.9 se aprecia la implementación de la planta aumentada. El bloque HIL Write Analog es el encargado de entregar la señal de actuación a al levitador magnético. El bloque HIL Read Analog entrega la señal del sensor infrarrojo del levitador magnético.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

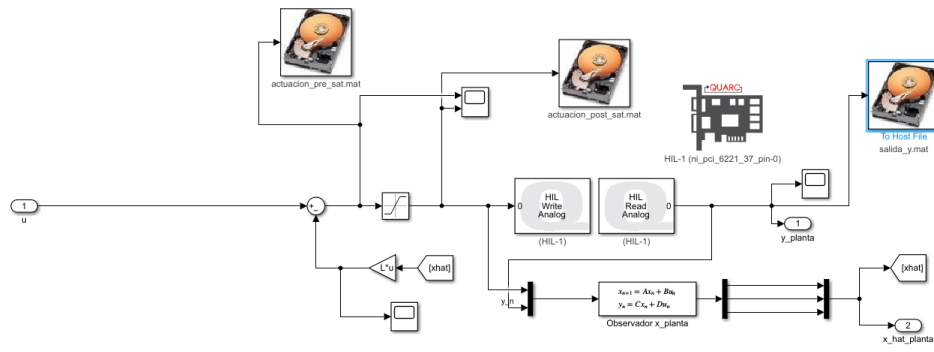


Fig. 5.9: Implementación física: Modelo de planta aumentada

En la figura 5.10 se muestra el esquema general a utilizar, los bloques MPC y seguimiento a referencia son los mismos utilizados en la simulación del sistema, los cuales se encuentran en las figuras 4.5 y 4.6 respectivamente.

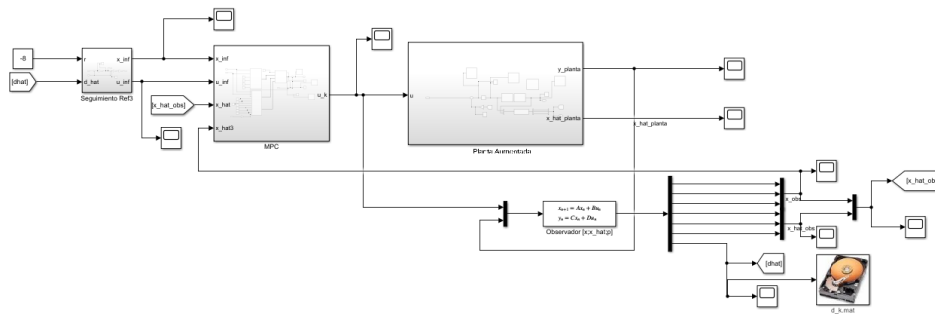


Fig. 5.10: Implementación física: Esquema MPC con seguimiento a referencia

5.4 Resultados Obtenidos de la implementación

A continuación, se presentan los resultados obtenidos al modificar distintos parámetros del sistema, tales como el horizonte de predicción, el período de muestreo y las restricciones de actuación.

5.4.1 Resultados cambiando el horizonte de predicción:

Los siguientes resultados fueron obtenidos utilizando un periodo de muestreo de 1 [ms]. Para poder generar una *build* dentro de Simulink es necesario configurar en el solver el mismo periodo de muestreo de 1 [ms], como se muestra en la figura 5.11.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

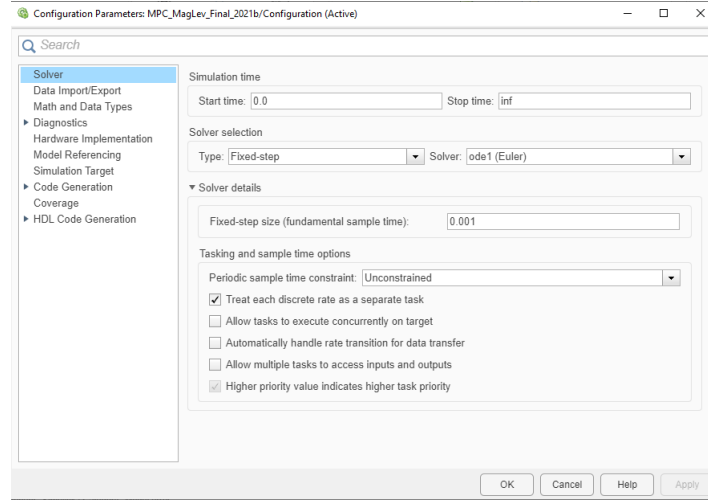


Fig. 5.11: Configuración del *solver* en Simulink con un periodo de muestreo de 1 [ms]

Resultados para $\Gamma = 10^{-2}$ con horizonte $N = 2$

En la Figura 5.12 se presentan los resultados de la salida y_k . En la subfigura (a) se observa que, durante todo el intervalo de simulación, el controlador no es capaz de mantener el rotor en torno a la referencia. La subfigura (b) permite ver con mayor detalle que, incluso en régimen estacionario, la salida se mantiene lejos de la posición deseada.

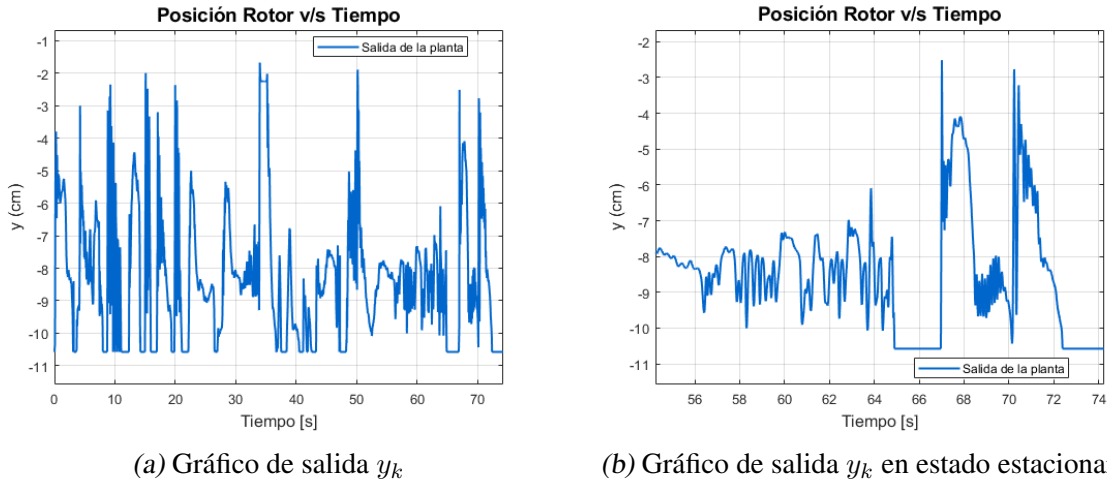
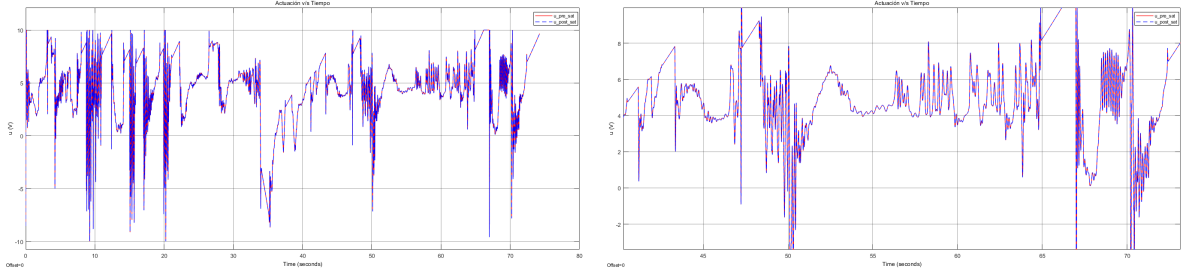


Fig. 5.12: Resultados cambiando N : posición del rotor en el tiempo con $\Gamma = 10^{-2}$.

La Figura 5.13 muestra la señal de actuación u_k . En la subfigura (a) se aprecia que la actuación presenta oscilaciones agresivas y persistentes durante toda la simulación, sin lograr estabilizarse en un valor fijo. En la subfigura (b) se confirma que estas oscilaciones se mantienen en el estado estacionario. Cabe destacar que, a pesar de este comportamiento, la actua-

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

ción cumple en todo momento con las restricciones impuestas, aunque el esfuerzo de control resulta ineficiente.



(a) Gráfico de actuación u_k

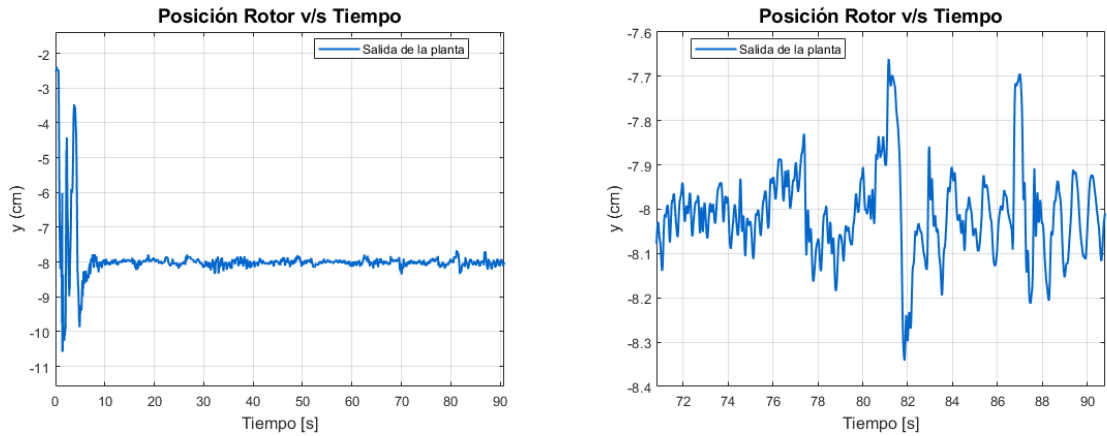
(b) Gráfico de actuación u_k en estado estacionario

Fig. 5.13: Resultados cambiando N : actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 10^{-2}$.

Resultados para $\Gamma = 1$ con horizonte $N = 2$

Para mejorar el rendimiento del controlador, se prueba cambiando el valor de Γ para mejorar el esfuerzo de control hasta encontrar un valor que permita el control, el cual llega a ser 1. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

Salida y_k La Figura 5.14 se presentan los resultados de la salida y_k . En la subfigura (a) se observa que el controlador es capaz de mantener el rotor en torno a la referencia, mientras que en la subfigura (b) se aprecia que la desviación máxima respecto al valor deseado alcanza aproximadamente $0,34 \text{ [cm]}$, lo que evidencia un buen seguimiento.



(a) Gráfico de salida y_k

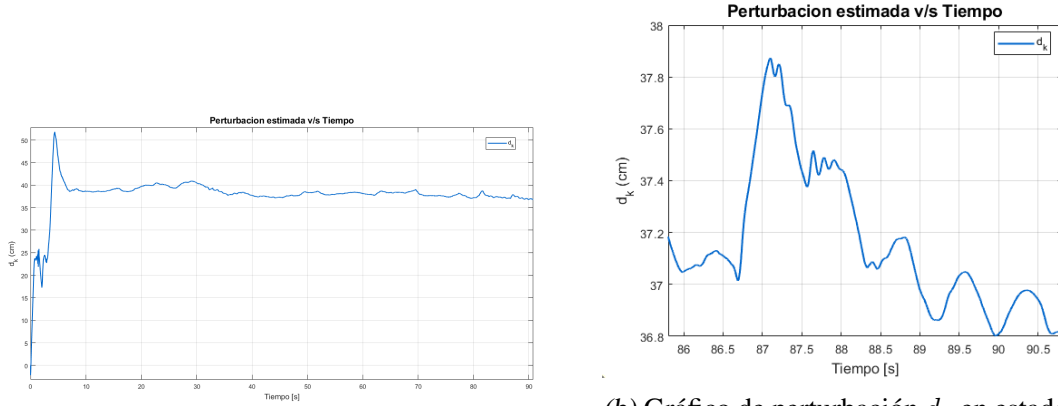
(b) Gráfico de salida y_k en estado estacionario

Fig. 5.14: Resultados cambiando N : posición del rotor en el tiempo con $\Gamma = 1$.

Perturbación d_k La Figura 5.15 presenta la evolución de la perturbación estimada. En la subfigura (a) se observa que converge con el tiempo hacia un valor estacionario, mientras

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

que en la subfigura (b) se aprecia que dicho valor se estabiliza alrededor de $36,6 \text{ [cm]}$. La perturbación estimada d_k alcanza un valor estacionario mayor al rango físico de la salida de la planta. Algunas razones que pueden explicar este resultado son que d_k actúa como un término compensador que recoge discrepancias asociadas a un modelado parcial de la dinámica real, puede reflejar una posible mala elección de la ganancia del observador y, por último, que este acumula errores al haberse supuesto la existencia de una única perturbación, considerada únicamente en la salida. Este comportamiento se observa de manera consistente y se repite en los resultados posteriores.

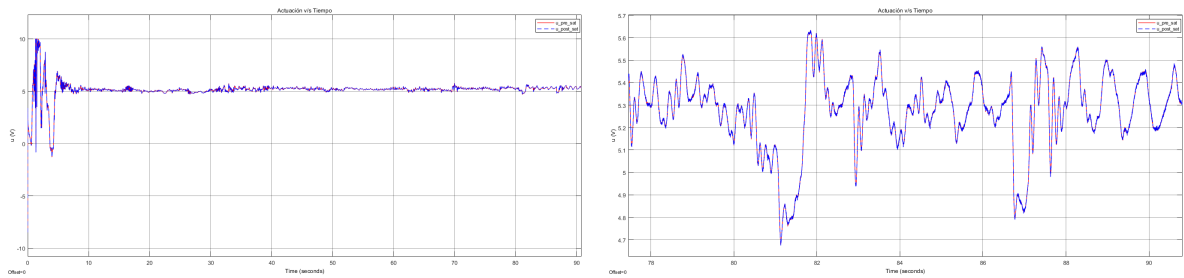


(a) Gráfico de perturbación d_k

(b) Gráfico de perturbación d_k en estado estacionario

Fig. 5.15: Resultados cambiando N : perturbación d_k en el tiempo con $\Gamma = 1$.

Actuación u_k La señal de control u_k se muestra en la Figura 5.16. En la subfigura (a) se observa que la actuación se mantiene estable, y en la subfigura (b) se aprecia que converge hacia un valor cercano a $5,3 \text{ [V]}$, sin grandes oscilaciones.



(a) Gráfico de actuación u_k

(b) Gráfico de actuación u_k en estado estacionario

Fig. 5.16: Resultados cambiando N : actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 1$.

Tiempo de ejecución En la Figura 5.17 se observa que el tiempo de ejecución promedio del solver quadprog es de $5,009 \times 10^{-6} \text{ [s]}$, mientras que el tiempo máximo alcanza $1,511 \times$

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

10^{-4} [s]. Estos valores están muy por debajo del período de muestreo, lo que confirma la factibilidad en línea del método.

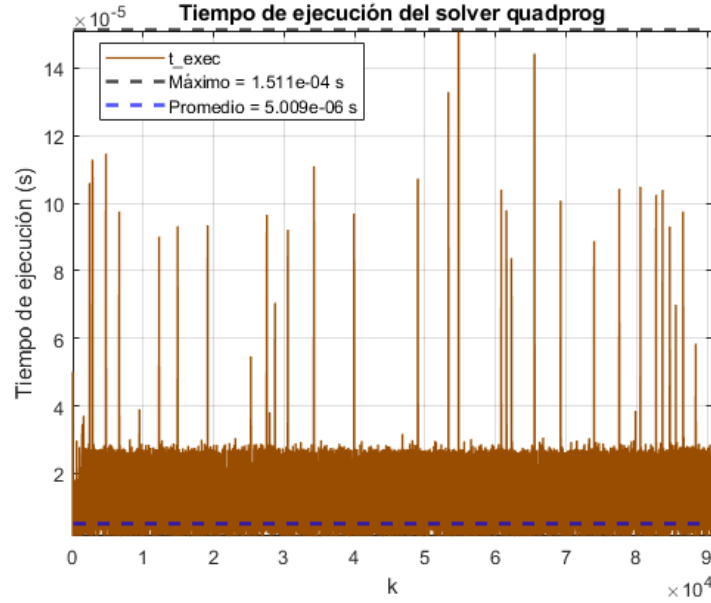


Fig. 5.17: Resultados cambiando N : tiempo de ejecución del solver quadprog con $\Gamma = 1$.

Estados observados La Figura 5.18 y la Figura 5.19 muestran la evolución de los estados del sistema. En la primera se observa que convergen hacia valores estables, mientras que en la segunda se aprecia que no existen diferencias significativas entre los estados estimados en régimen estacionario.

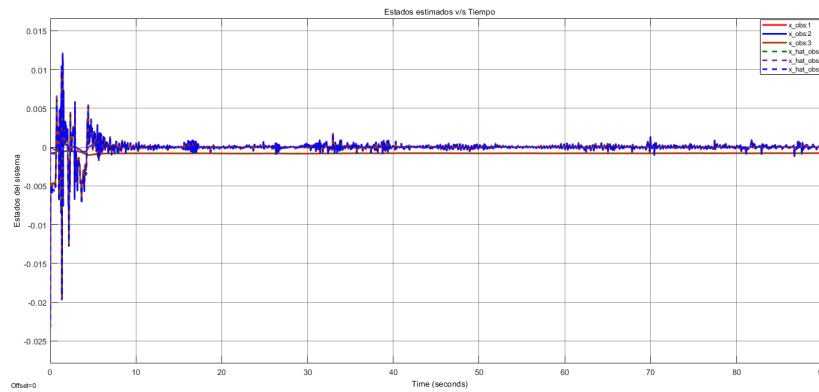


Fig. 5.18: Resultados cambiando N : estados observados del sistema.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

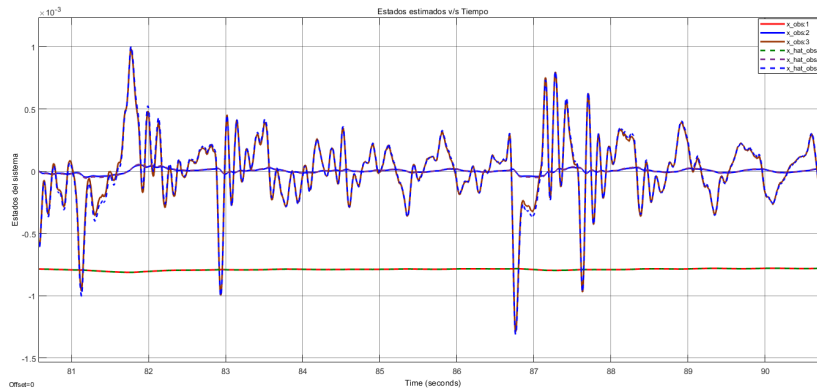


Fig. 5.19: Resultados cambiando N : estados observados del sistema en estado estacionario.

Factibilidad En la Figura 5.20 se muestra que la factibilidad del problema de optimización se cumple en todo momento. La *flag* de salida de `quadprog` se mantiene igual a 1, lo que indica que la función objetivo converge siempre a una solución válida.

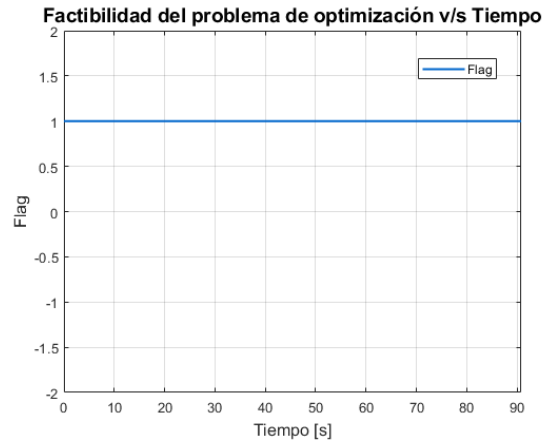


Fig. 5.20: Resultados cambiando N : factibilidad del problema de optimización con $\Gamma = 1$.

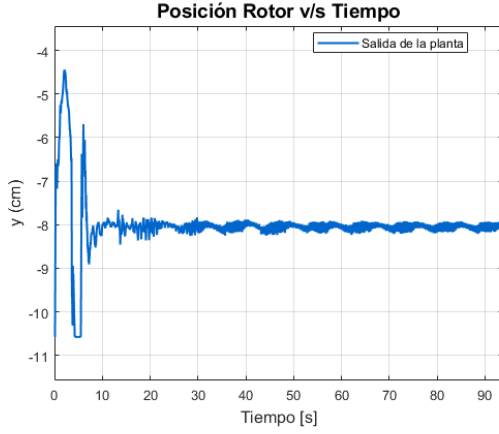
En resumen, para $\Gamma = 1$ y $N = 2$ el controlador logra estabilizar el sistema, manteniendo el rotor cercano a la referencia con pequeñas desviaciones. La perturbación estimada converge adecuadamente y la señal de control se mantiene en un rango eficiente, sin sobrepasar las restricciones. Además, los tiempos de ejecución confirman la viabilidad del esquema en línea y la factibilidad del problema de optimización en todo instante.

Resultados para $\Gamma = 1$ con horizonte $N = 5$

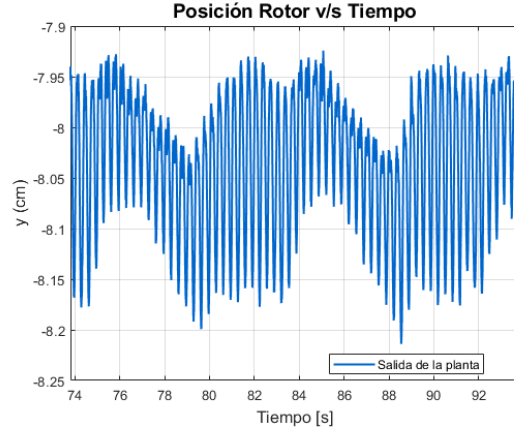
Salida y_k La Figura 5.21 se presentan los resultados de la salida y_k . En la subfigura (a) se observa que el controlador logra mantener el rotor en torno a la referencia deseada. En la

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

subfigura (b) se aprecia que el controlador consigue acercar aún más la posición del rotor a la referencia, con desviaciones máximas del orden de $0,22 \text{ [cm]}$.



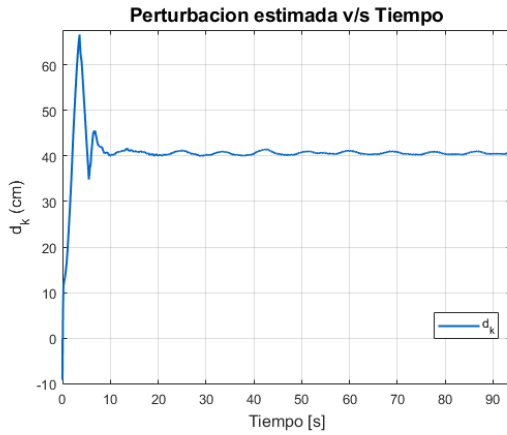
(a) Gráfico de salida y_k



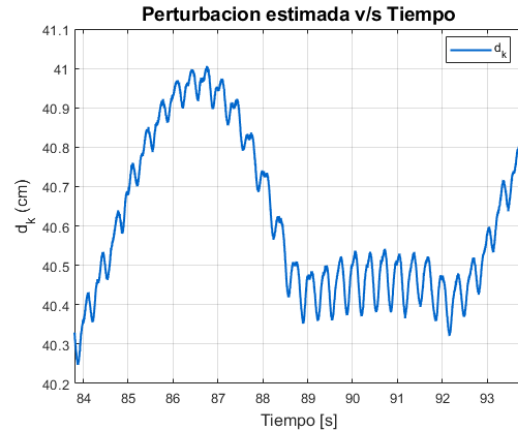
(b) Gráfico de salida y_k en estado estacionario

Fig. 5.21: Resultados cambiando N : posición del rotor en el tiempo con $\Gamma = 1$.

Perturbación d_k La Figura 5.22 presenta la evolución de la perturbación estimada. En la subfigura (a) se observa que converge con el tiempo hacia un valor estacionario, mientras que en la subfigura (b) se aprecia que dicho valor se estabiliza en torno a $40,6 \text{ [cm]}$.



(a) Gráfico de perturbación d_k



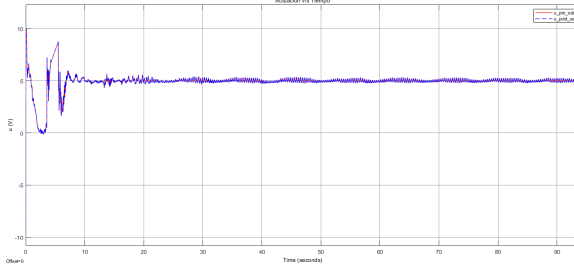
(b) Gráfico de perturbación d_k en estado estacionario

Fig. 5.22: Resultados cambiando N : perturbación d_k en el tiempo con $\Gamma = 1$.

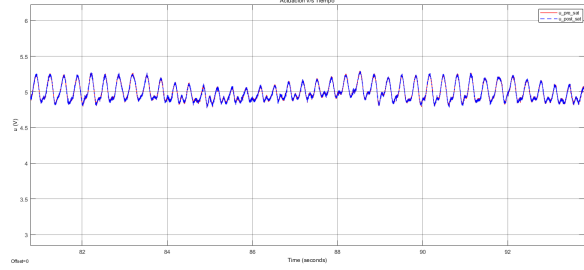
Actuación u_k La Figura 5.23 muestra la evolución de la señal de control. En la subfigura (a) se observa que u_k converge hacia un valor fijo. En la subfigura (b) se aprecia que este valor

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

se estabiliza en torno a 5,2 [V], presentando un patrón casi constante con forma semejante a una señal sinusoidal.



(a) Gráfico de actuación u_k



(b) Gráfico de actuación u_k en estado estacionario

Fig. 5.23: Resultados cambiando N : actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 1$.

Tiempo de ejecución En la Figura 5.24 se observa que el tiempo de ejecución promedio del solver es de $8,782 \times 10^{-6}$ [s], mayor que en el caso con $N = 2$, lo que resulta esperado ya que el incremento del horizonte aumenta el tamaño de las matrices involucradas. Por otro lado, el tiempo máximo alcanza los $1,199 \times 10^{-4}$ [s], valor que sorpresivamente es menor al caso anterior. En todo caso, ambos tiempos se mantienen muy por debajo del período de muestreo, confirmando la factibilidad del método.

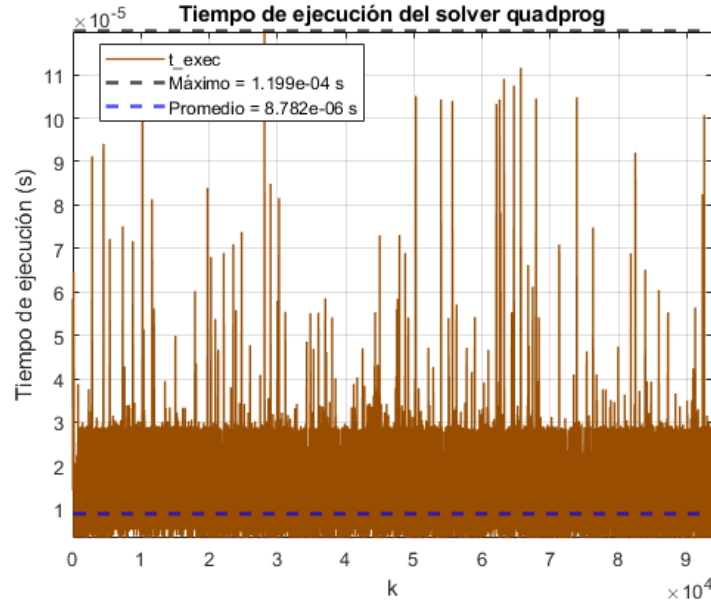


Fig. 5.24: Resultados cambiando N : tiempo de ejecución del solver quadprog con $\Gamma = 1$.

Estados observados La Figura 5.25 y la Figura 5.26 muestran los estados del sistema. En la primera se observa que convergen hacia valores determinados, mientras que en la segunda

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

se aprecia un patrón de tipo sinusoidal, semejante al de la señal de actuación. Además, no se detectan diferencias entre los estados observados en régimen estacionario.

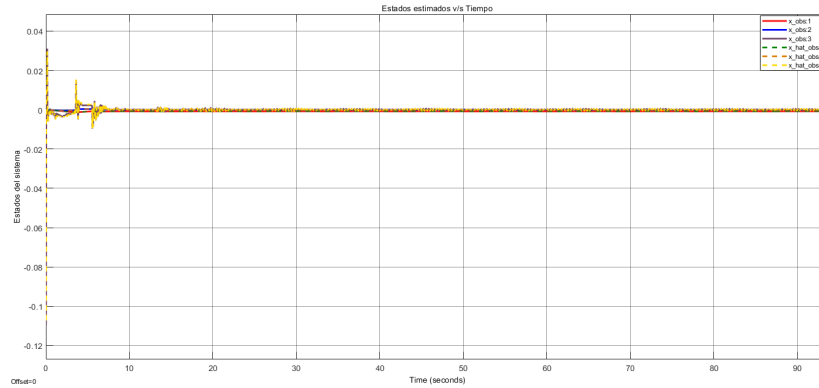


Fig. 5.25: Resultados cambiando N : estados observados del sistema.

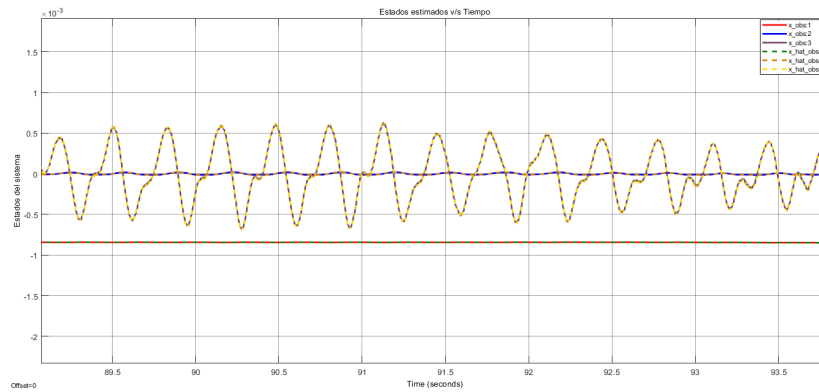


Fig. 5.26: Resultados cambiando N : estados observados del sistema en estado estacionario.

Factibilidad En la Figura 5.27 se muestra que el problema de optimización fue factible en todo momento, ya que la flag de salida del solver se mantuvo igual a 1 durante todo el tiempo medido.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

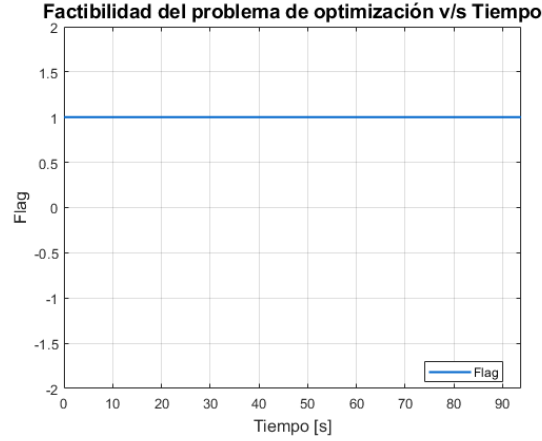
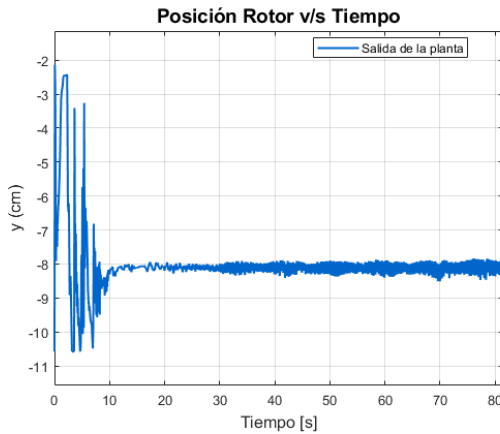


Fig. 5.27: Resultados cambiando N : factibilidad del problema de optimización con $\Gamma = 1$.

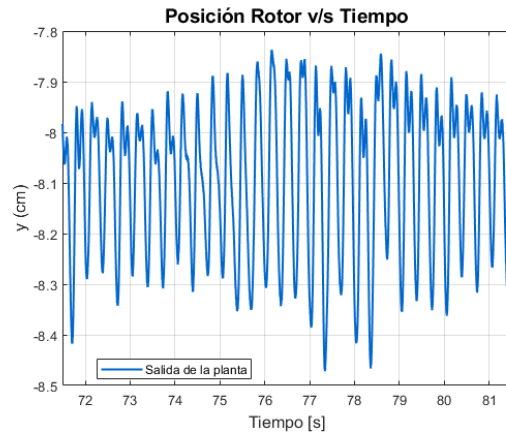
Para $\Gamma = 1$ y $N = 5$, el controlador logra un desempeño mejorado respecto al caso con $N = 2$, reduciendo las desviaciones en la salida y manteniendo la actuación en un valor estable. La perturbación se estima correctamente, los estados presentan un comportamiento coherente y el problema de optimización permanece factible en todo instante. Aunque los tiempos de ejecución aumentan levemente, se mantienen suficientemente bajos para garantizar la viabilidad en línea del esquema.

Resultados para $\Gamma = 1$ con horizonte $N = 7$

Salida y_k La Figura 5.28 se presentan los resultados de la salida y_k . En la subfigura (a) se observa que el controlador logra mantener el rotor en torno a la referencia. Sin embargo, en la subfigura (b) se aprecia un deterioro en el desempeño respecto al caso con $N = 5$, ya que la salida presenta desviaciones máximas de aproximadamente $0,44 \text{ [cm]}$.



(a) Gráfico de salida y_k

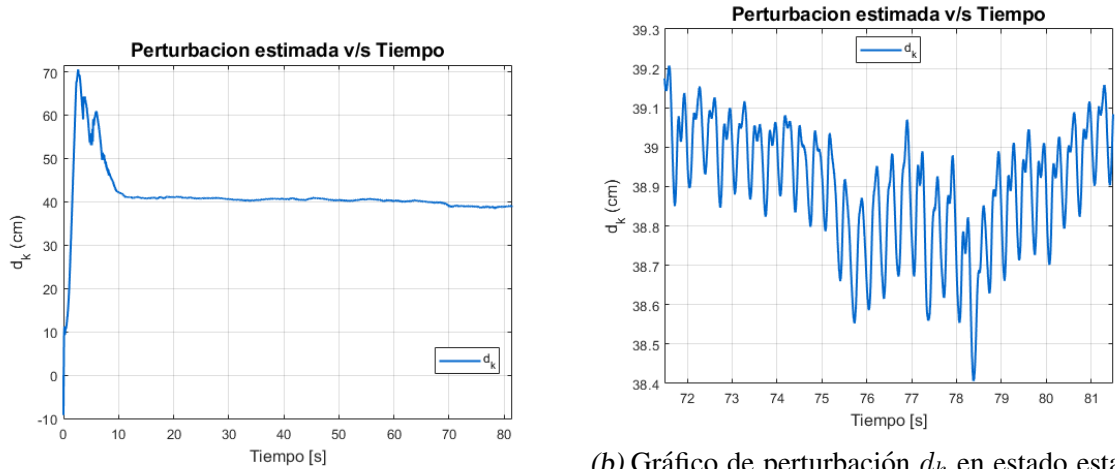


(b) Gráfico de salida y_k en estado estacionario

Fig. 5.28: Resultados cambiando N : posición del rotor en el tiempo con $\Gamma = 1$.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

Perturbación d_k La Figura 5.29 presenta la evolución de la perturbación estimada. En la subfigura (a) se observa que converge con el tiempo hacia un valor estacionario. En la subfigura (b) se aprecia que dicho valor se estabiliza en torno a $38,9 [cm]$.

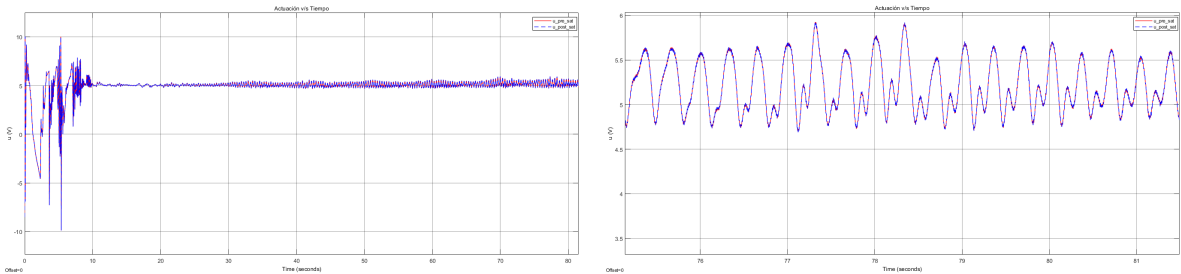


(a) Gráfico de perturbación d_k

(b) Gráfico de perturbación d_k en estado estacionario

Fig. 5.29: Resultados cambiando N : perturbación d_k en el tiempo con $\Gamma = 1$.

Actuación u_k La Figura 5.30 muestra la señal de control. En la subfigura (a) se observa que u_k converge hacia un valor fijo, mientras que en la subfigura (b) dicho valor se estabiliza en torno a $5,2 [V]$.



(a) Gráfico de actuación u_k

(b) Gráfico de actuación u_k en estado estacionario

Fig. 5.30: Resultados cambiando N : actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 1$.

Tiempo de ejecución En la Figura 5.31 se observa que el tiempo de ejecución promedio del solver aumenta a $1,194 \times 10^{-5} [s]$, mayor al caso con $N = 5$, lo cual es esperado. El tiempo máximo llega a $1,451 \times 10^{-4} [s]$, también mayor al caso anterior. Aun así, ambos valores se mantienen por debajo del período de muestreo.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

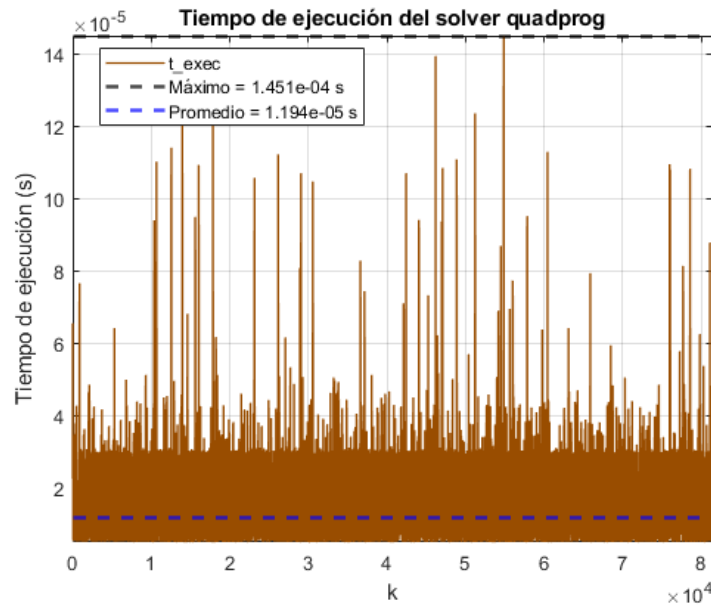


Fig. 5.31: Resultados cambiando N : tiempo de ejecución del solver quadprog con $\Gamma = 1$.

Estados observados La Figura 5.32 y la Figura 5.33 muestran los estados del sistema. En la primera se observa que convergen hacia valores determinados, mientras que en la segunda no se evidencian diferencias entre los estados estimados.

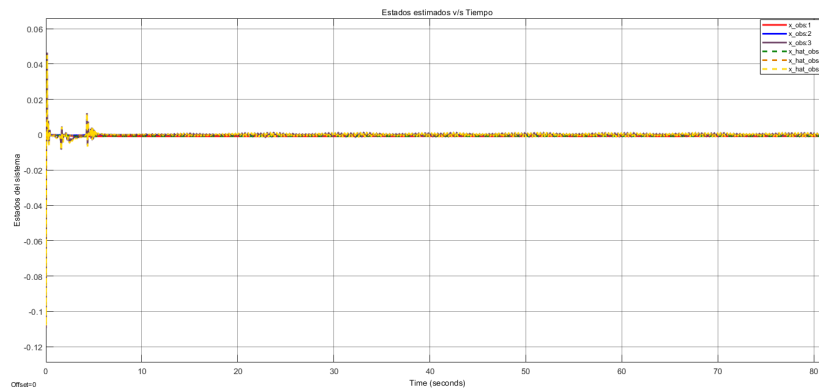


Fig. 5.32: Resultados cambiando N : estados observados del sistema.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

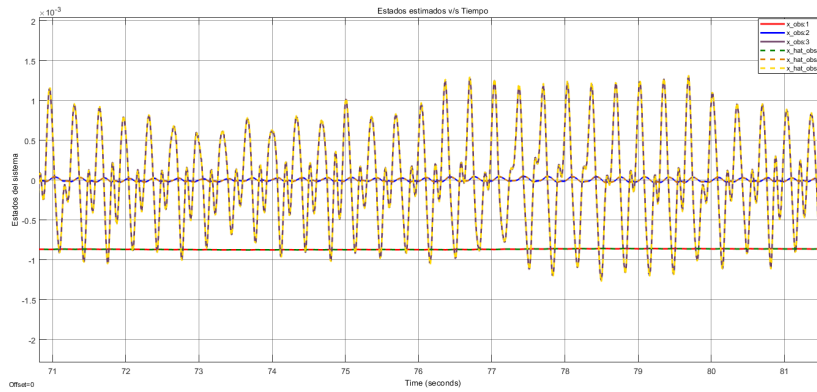


Fig. 5.33: Resultados cambiando N : estados observados del sistema en estado estacionario.

Factibilidad En la Figura 5.34 se muestra que el problema de optimización fue factible en todo momento, ya que el solver alcanzó una solución en cada instante de tiempo.

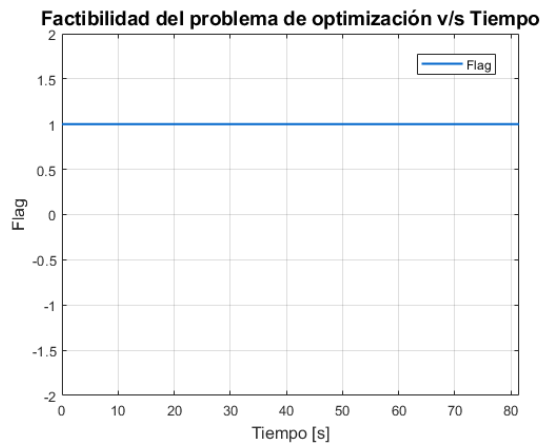


Fig. 5.34: Resultados cambiando N : factibilidad del problema de optimización con $\Gamma = 1$.

Para $\Gamma = 1$ y $N = 7$, el desempeño del controlador empeora respecto al caso con $N = 5$. La salida presenta mayores desviaciones respecto a la referencia, la señal de actuación mantiene oscilaciones significativas y el esfuerzo de control resulta poco eficiente. Si bien la factibilidad del problema de optimización y los tiempos de ejecución se mantienen adecuados, se concluye que aumentar el horizonte de predicción N más allá de 5 solo deteriora el rendimiento del controlador.

5.4.2 Resultados cambiando el periodo de muestreo:

Resultados para periodos de muestreo menores a 1 [ms]

En las figuras 5.35 y 5.36 se observa que *Quarc* no es capaz de generar un modelo cuando se utiliza un período de muestreo menor a 1 [ms], ya que este se encuentra fuera del rango admitido. En teoría sería posible controlar el sistema utilizando un periodo de muestreo menor, pero se tendría que implementar en otras plataformas de procesamiento embebido que permitan la aplicación de periodos de muestreo menores a 1 [ms].

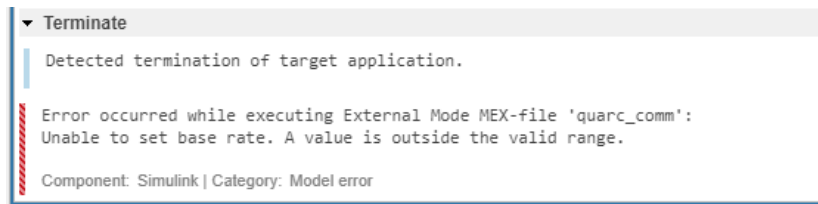


Fig. 5.35: Error de Quarc para un período de muestreo de 0,9 [ms].

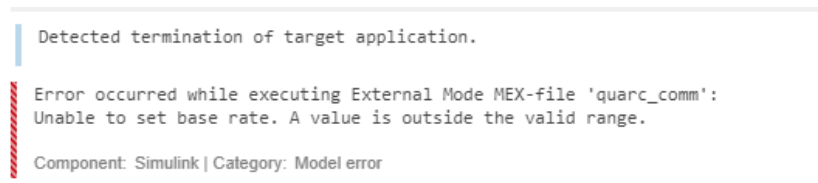


Fig. 5.36: Error de Quarc para un período de muestreo de 0,5 [ms].

Resultados para $\Gamma = 1$, $N = 4$ y período de muestreo $T_s = 2$ [ms]

Para implementar correctamente el período de muestreo en *Simulink*, fue necesario modificar la configuración del *solver* y establecer un valor de 2 ms, tal como se muestra en la Figura 5.37.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

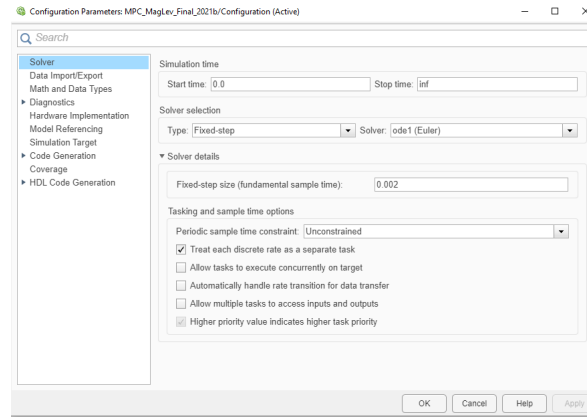
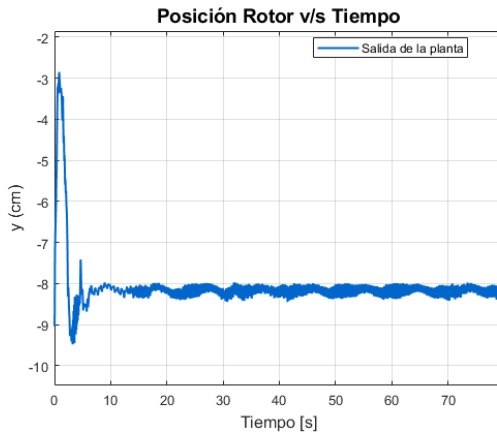
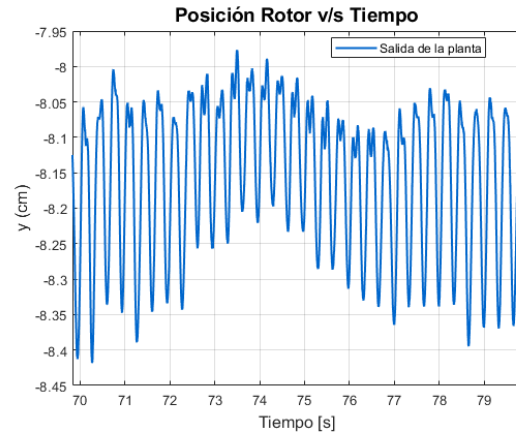


Fig. 5.37: Configuración del solver en Simulink para un período de muestreo de 2 ms.

Salida y_k . En la Figura 5.38 se presentan los resultados de la salida y_k . La subfigura (a) muestra que el controlador mantiene al rotor en torno a la referencia deseada, mientras que en la subfigura (b) se aprecia un error estacionario en torno a 0,42 [cm].



(a) Gráfico de salida y_k



(b) Gráfico de salida y_k en estado estacionario

Fig. 5.38: Resultados cambiando el período de muestreo: salida y_k en el tiempo.

Perturbación d_k . En la Figura 5.39 se muestra que la perturbación estimada converge a un valor fijo. La subfigura (b) evidencia que este valor estacionario se ubica en torno a 43 [cm].

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

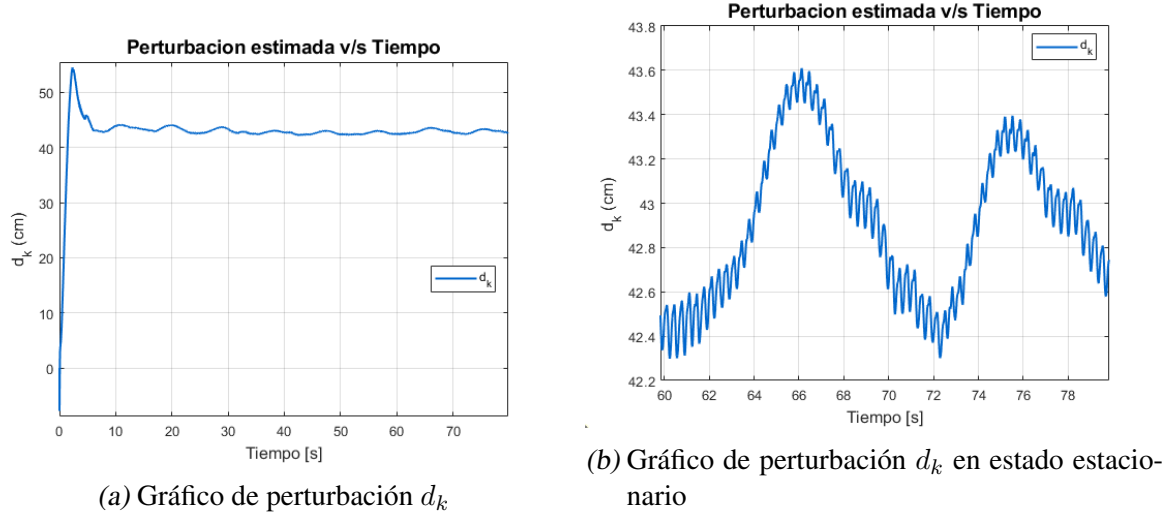


Fig. 5.39: Resultados cambiando el período de muestreo: perturbación d_k en el tiempo.

Actuación u_k . La Figura 5.40 evidencia que la señal de control converge hacia un valor constante. En estado estacionario, la magnitud se estabiliza en torno a 4,9 [V].

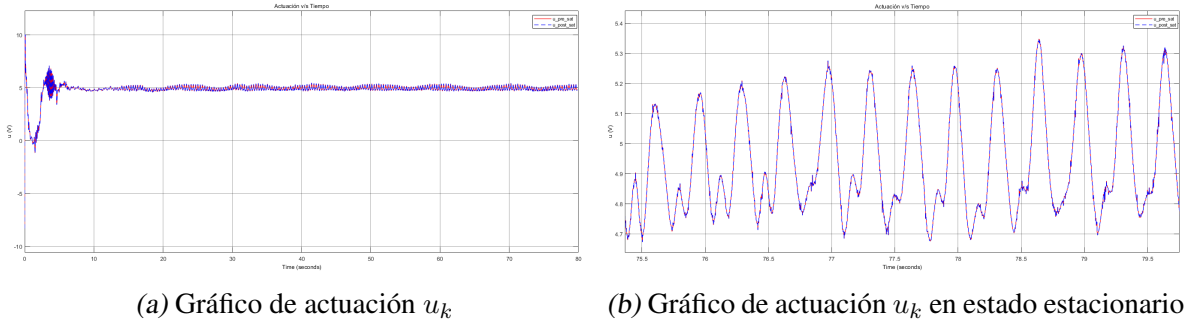


Fig. 5.40: Resultados cambiando el período de muestreo: actuación u_k en el tiempo.

Tiempo de ejecución. La Figura 5.41 muestra que el tiempo de ejecución promedio del solver fue $8,186 \times 10^{-4}$ [s], alcanzando un máximo de $1,192 \times 10^{-4}$ [s], valores que se encuentran muy por debajo del período de muestreo de 2 [ms].

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

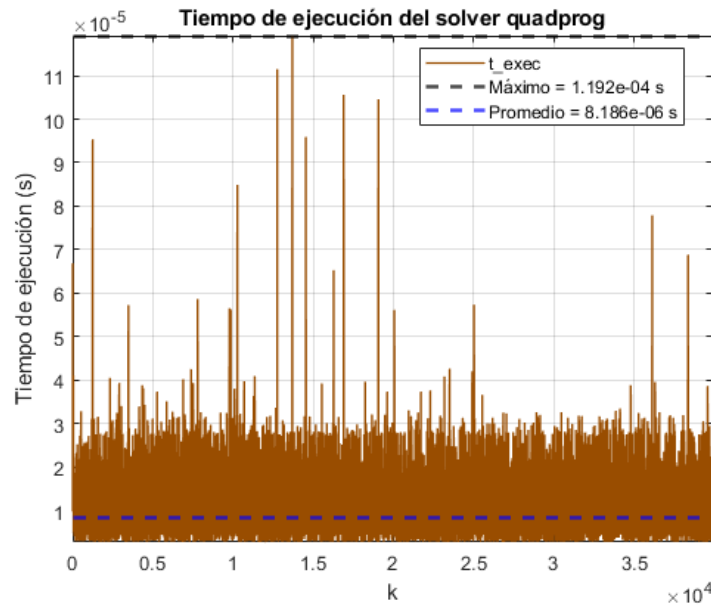


Fig. 5.41: Resultados cambiando el período de muestreo: tiempo de ejecución del solver quadprog.

Estados observados. En la Figura 5.42 se observa que los estados convergen hacia valores determinados, mientras que en la Figura 5.43 se aprecia que no existen diferencias entre los estados estimados.

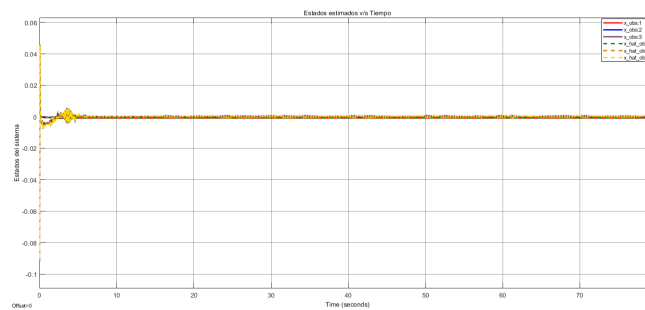


Fig. 5.42: Resultados cambiando el período de muestreo: estados observados del sistema.

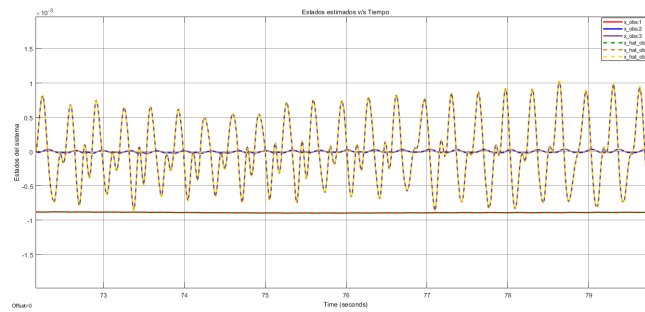


Fig. 5.43: Resultados cambiando el período de muestreo: estados observados del sistema en estado estacionario.

Factibilidad En la Figura 5.44 se muestra que el problema de optimización fue factible en todo momento, ya que el solver alcanzó una solución en cada instante de tiempo.

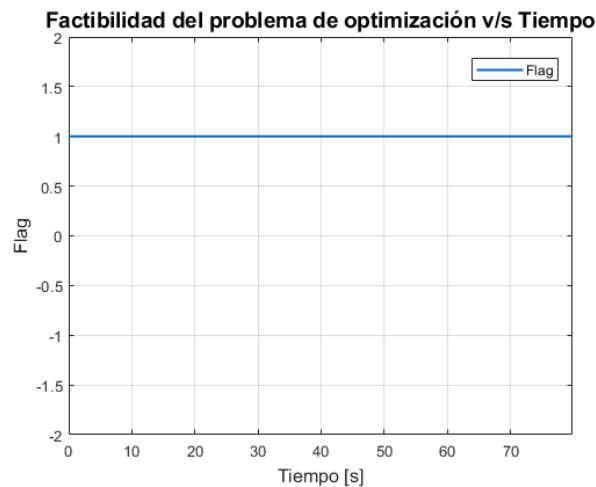


Fig. 5.44: Resultados cambiando el período de muestreo: factibilidad del problema de optimización.

Con $T_s = 2 \text{ [ms]}$ el sistema logra mantener la referencia con bajo error estacionario, la perturbación converge a un valor fijo y la señal de control se estabiliza en torno a un voltaje constante. El tiempo de cómputo permanece holgadamente por debajo del período de muestreo, asegurando la viabilidad en tiempo real.

Resultados para $\Gamma = 1$, $N = 4$ y período de muestreo $T_s = 3$ [ms]

Para implementar correctamente el período de muestreo en *Simulink*, fue necesario modificar la configuración del *solver* y establecer un valor de 3 [ms], tal como se muestra en la Figura 5.45.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

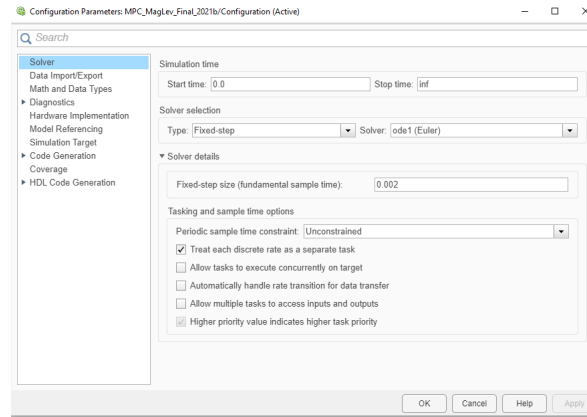
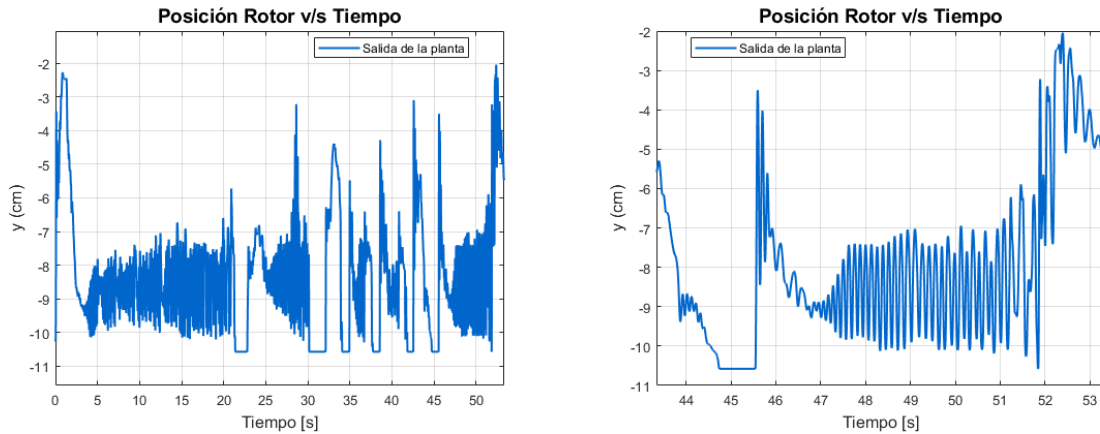


Fig. 5.45: Configuración del solver en Simulink para un período de muestreo de 3 [ms].

Salida y_k . En la Figura 5.46 se presentan los resultados de la salida. En la subfigura (a) se aprecia que el controlador no logra mantener al rotor en torno a la referencia, mientras que en la subfigura (b) se observa con mayor detalle que la posición oscila agresivamente, alcanzando la parte superior del levitador.



(a) Gráfico de salida y_k

(b) Gráfico de salida y_k en estado estacionario

Fig. 5.46: Resultados cambiando el período de muestreo: salida y_k en el tiempo.

Actuación u_k . La Figura 5.47 muestra el comportamiento de la señal de control. En la subfigura (a) se observa que u_k oscila agresivamente, alcanzando en repetidas ocasiones los límites de saturación impuestos por las restricciones. En la subfigura (b), correspondiente al estado estacionario, se aprecia que dichas oscilaciones se mantienen, lo que refleja un esfuerzo de control elevado y poco eficiente.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

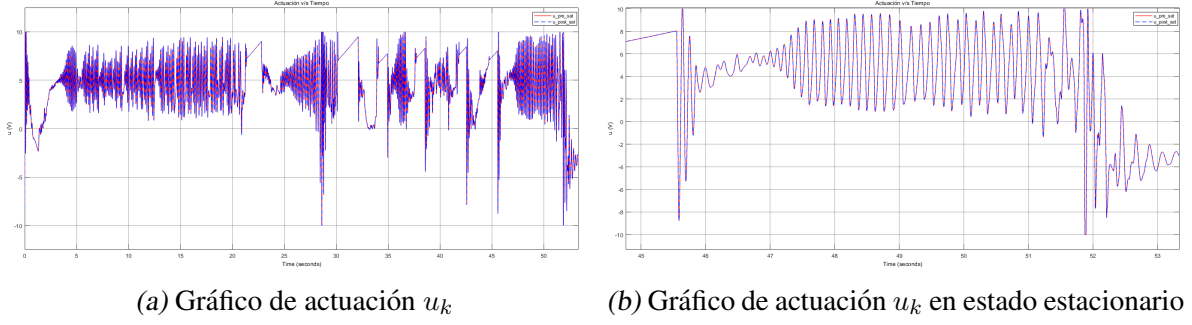


Fig. 5.47: Resultados cambiando el período de muestreo: actuación u_k en el tiempo.

Con $T_s = 3 [ms]$ el sistema no consigue estabilizarse en torno a la referencia. La salida y_k presenta oscilaciones de gran amplitud y la señal de control u_k alcanza con frecuencia los valores de saturación, lo que compromete la eficiencia y estabilidad del controlador.

Resultados cambiando $\Gamma = 10$ y $\Gamma = 100$

Dado que con $\Gamma = 1$ el controlador no fue capaz de mantener el rotor en la posición de referencia, se evalúa el desempeño para valores mayores de Γ , considerando los casos $\Gamma = 10$ y $\Gamma = 100$.

Caso $\Gamma = 10$. En la Figura 5.48 se observa que la salida y_k mejora respecto al caso base, reduciendo el error transitorio. Sin embargo, en el estado estacionario persisten oscilaciones alrededor de la referencia, sin alcanzar una estabilización completa.

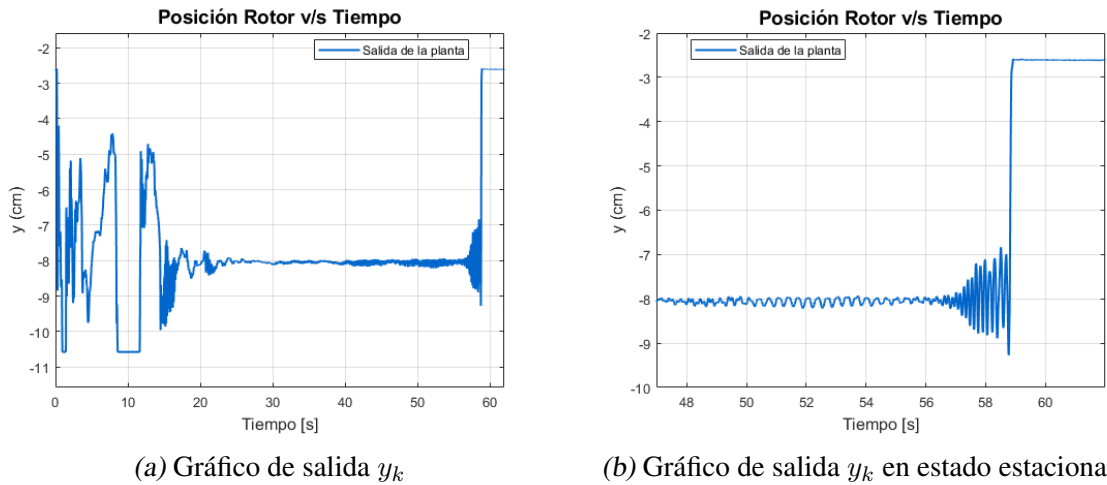


Fig. 5.48: Resultados cambiando el período de muestreo: salida y_k en el tiempo con $\Gamma = 10$.

La Figura 5.49 muestra que la señal de control u_k oscila con gran amplitud, alcanzando en algunos instantes los límites de actuación. En estado estacionario dichas oscilaciones se

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

mantienen, de modo que, aunque el aumento de Γ mejora la respuesta, la alta variabilidad en la actuación termina comprometiendo la estabilidad de la planta.

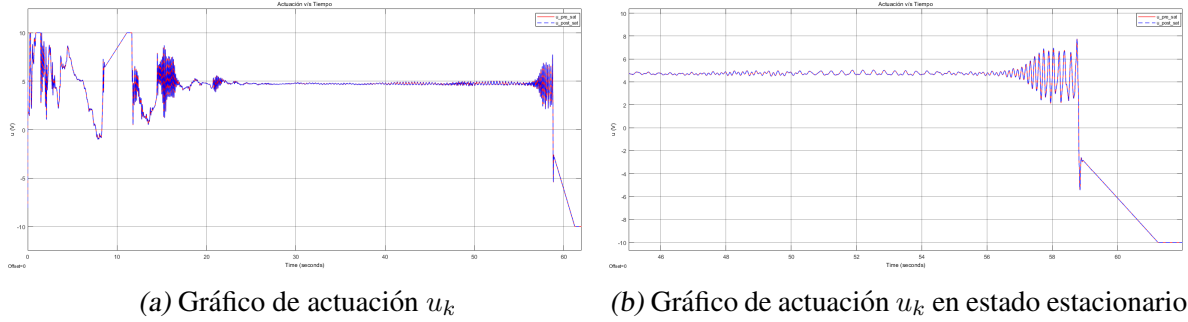


Fig. 5.49: Resultados cambiando el período de muestreo: actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 10$.

Caso $\Gamma = 100$. En la Figura 5.50 se aprecia que el sistema logra reducir parcialmente el error inicial, pero en régimen estacionario aparecen oscilaciones crecientes que se amplifican hacia el final de la simulación, lo que refleja un comportamiento inestable.

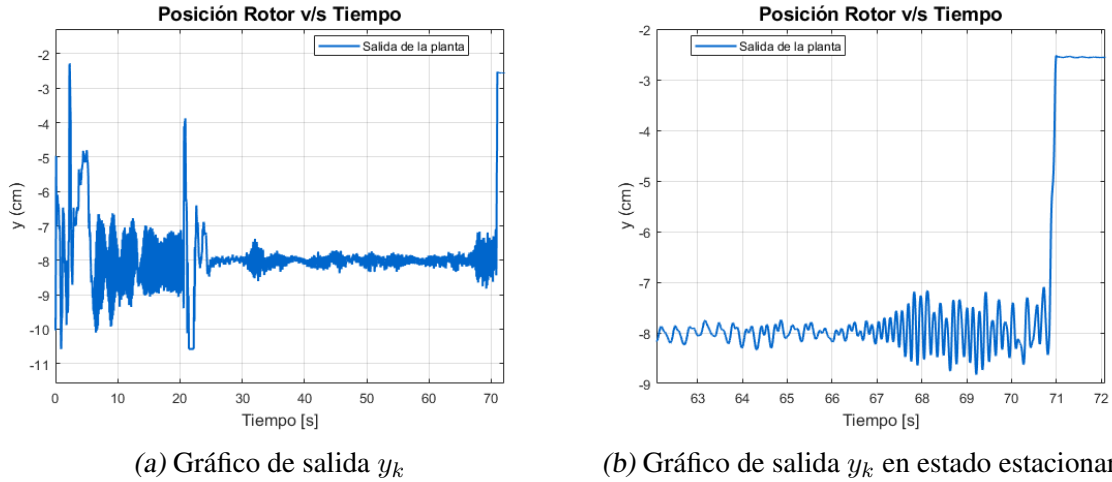


Fig. 5.50: Resultados cambiando el período de muestreo: salida y_k en el tiempo con $\Gamma = 100$.

En la Figura 5.51, correspondiente a la señal de control u_k , la subfigura (a) evidencia oscilaciones de gran amplitud a lo largo de toda la simulación, mientras que en la subfigura (b) estas se mantienen de forma sostenida en el estado estacionario. Este resultado muestra que un valor demasiado elevado de Γ incrementa en exceso el esfuerzo de control y compromete la estabilidad global del sistema.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

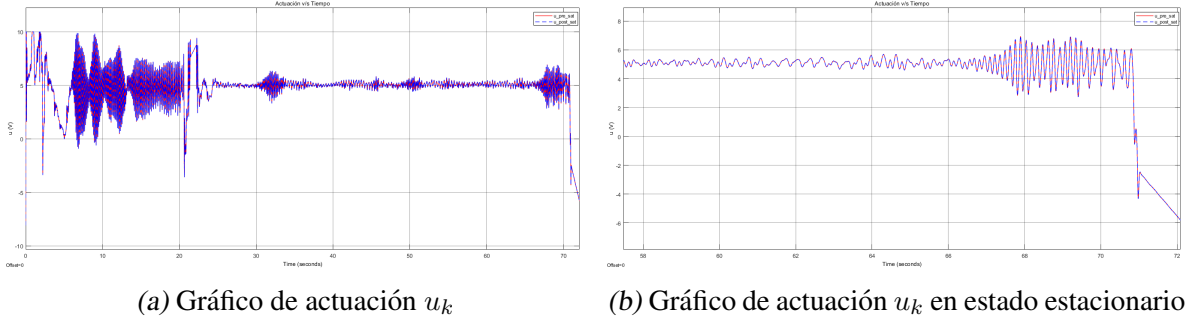


Fig. 5.51: Resultados cambiando el período de muestreo: actuación u_k en el tiempo con $\Gamma = 100$.

Al comparar ambos casos, se concluye que aumentar Γ mejora la capacidad de seguimiento de la referencia, pero a costa de un mayor esfuerzo de control. Mientras que con $\Gamma = 10$ se obtiene un compromiso aceptable entre desempeño y estabilidad, con $\Gamma = 100$ las oscilaciones son mayores. En ambos casos el sistema tiende a la inestabilidad. Además, se concluye que no se puede aumentar más el periodo de muestreo, ya que el sistema se vuelve incontrolable para periodos de muestreo mayores.

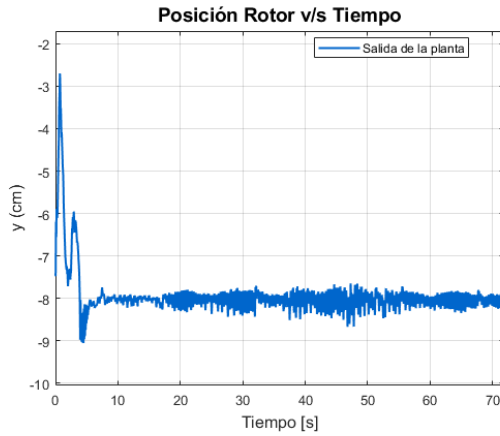
5.4.3 Resultados cambiando las restricciones de actuación:

Para modificar las restricciones del controlador MPC, es suficiente ajustar los valores de $u_{\min}$ y $u_{\max}$ definidos en el anexo *Precompile_MagLev_Final*.

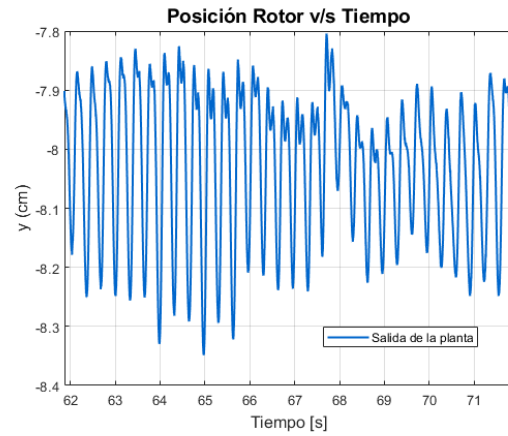
Resultados para $-9 \leq u \leq 9$, con $\Gamma = 1$, $N = 4$ y $T_s = 1$ [ms]

Salida y_k En la Figura 5.52 se presentan los resultados de la salida del sistema. En la subfigura (a) se observa que el controlador consigue llevar y mantener al rotor en torno a la referencia, mientras que en la subfigura (b) se aprecia que, en estado estacionario, la salida presenta desviaciones máximas de aproximadamente $0,34$ [cm].

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL



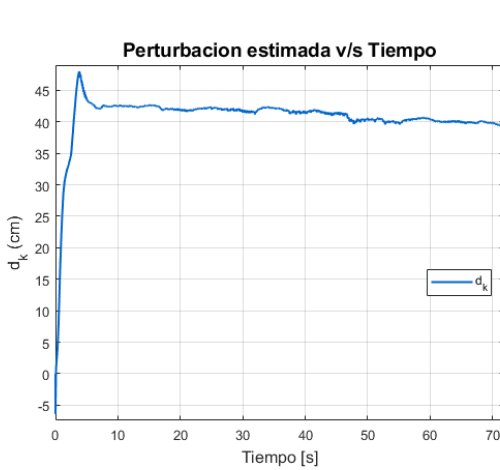
(a) Gráfico de salida y_k



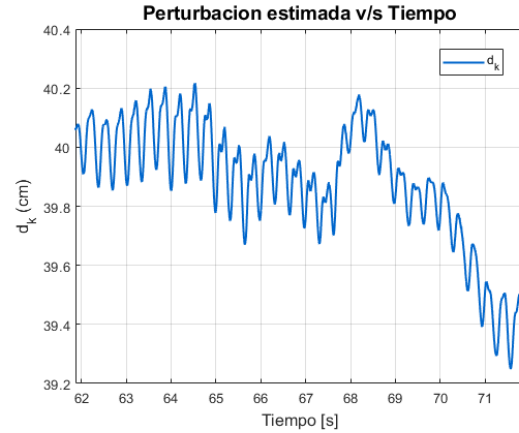
(b) Gráfico de salida y_k en estado estacionario

Fig. 5.52: Resultados con restricciones de actuación: salida y_k en el tiempo.

Perturbación d_k . La Figura 5.53 muestra que la perturbación estimada converge a un valor fijo. En la subfigura (b) se observa que dicho valor estacionario se ubica en torno a 40 [cm].



(a) Gráfico de perturbación d_k

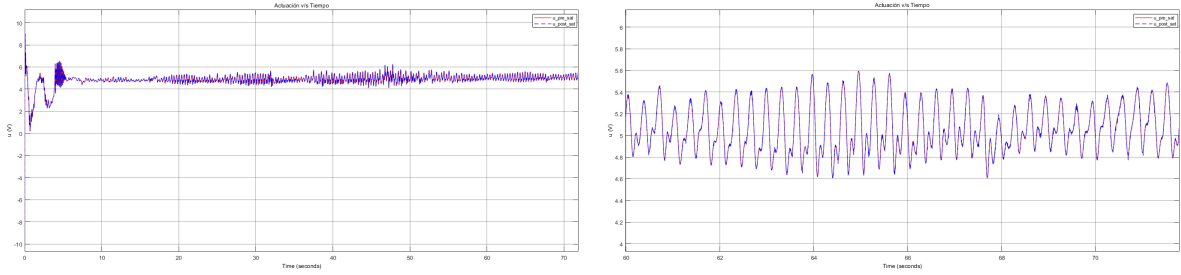


(b) Gráfico de perturbación d_k en estado estacionario

Fig. 5.53: Resultados con restricciones de actuación: perturbación d_k en el tiempo.

Actuación u_k . En la Figura 5.54 se aprecia la señal de control. En la subfigura (a) u_k converge hacia un valor fijo, mientras que en la subfigura (b) dicho valor se estabiliza en torno a 5,1 [V].

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL



(a) Gráfico de actuación u_k

(b) Gráfico de actuación u_k en estado estacionario

Fig. 5.54: Resultados con restricciones de actuación: actuación u_k en el tiempo.

Tiempo de ejecución. En la Figura 5.55 se observa que el tiempo de ejecución promedio del solver fue $7,539 \times 10^{-6}$ [s], alcanzando un máximo de $1,408 \times 10^{-4}$ [s]. Ambos valores se encuentran muy por debajo del período de muestreo de 1 [ms], lo que confirma la factibilidad computacional.

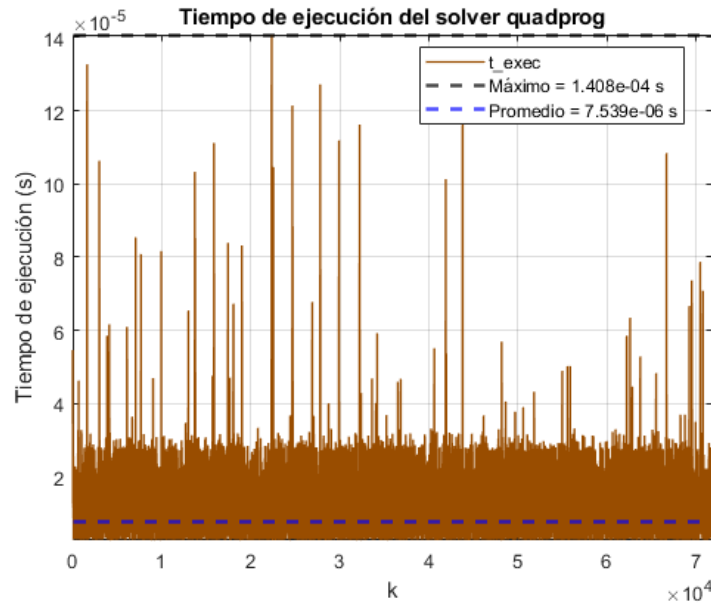


Fig. 5.55: Resultados con restricciones de actuación: tiempo de ejecución del solver quadprog.

Estados observados. La Figura 5.56 muestra que los estados convergen hacia valores determinados. En la Figura 5.57 se aprecia además que no existen diferencias entre los estados estimados en régimen estacionario.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

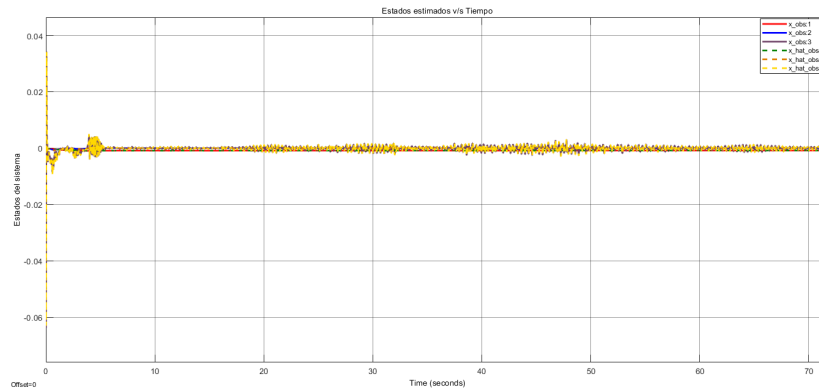


Fig. 5.56: Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema.

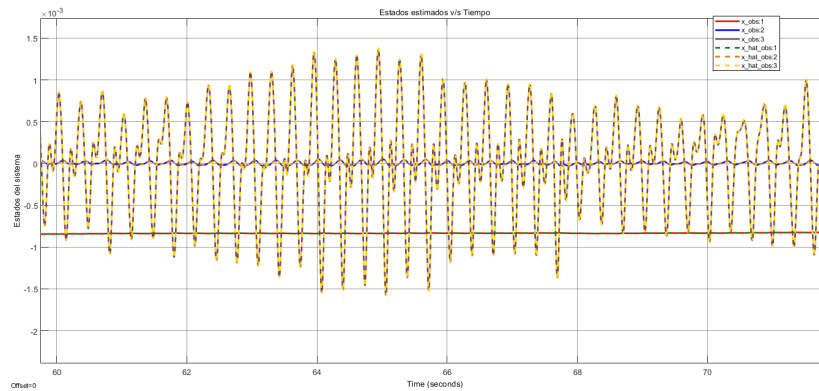


Fig. 5.57: Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema en estado estacionario.

Factibilidad. En la Figura 5.58 se muestra que el problema de optimización fue factible en todo momento, alcanzándose una solución en cada instante de tiempo.

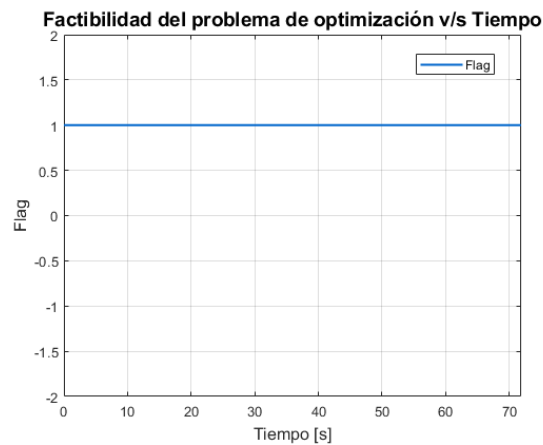


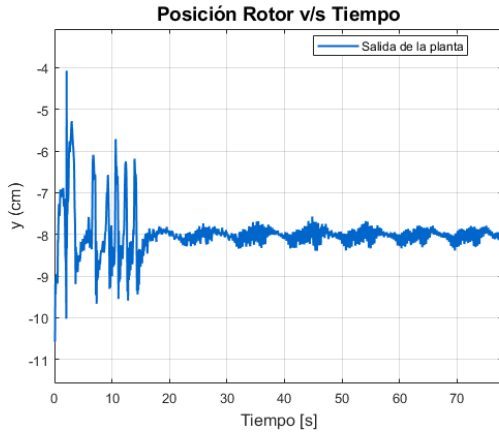
Fig. 5.58: Resultados con restricciones de actuación: factibilidad del problema de optimización.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

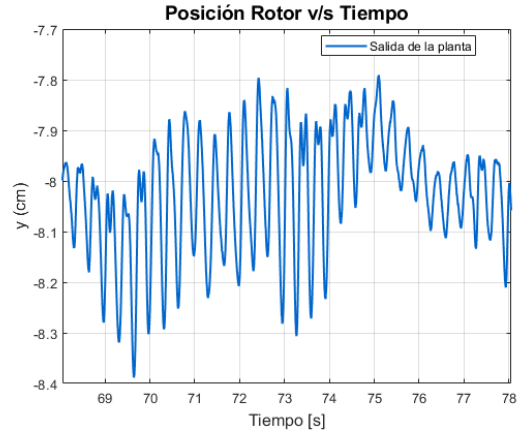
Con las restricciones de actuación acotadas a $-9 \leq u \leq 9$, el controlador fue capaz de mantener el rotor en torno a la referencia. El esfuerzo de control se mantuvo dentro de límites aceptables y el problema de optimización resultó factible en todo instante, lo que confirma que, bajo estas condiciones, el sistema es controlable.

Resultados para $-8 \leq u \leq 8$, con $\Gamma = 1$, $N = 4$ y $T_s = 1$ ms

Salida y_k En la Figura 5.59 se presentan los resultados de la salida del sistema. En la subfigura (a) se observa que el controlador consigue llevar y mantener al rotor en torno a la referencia, mientras que en la subfigura (b) se aprecia que, en estado estacionario, la salida presenta desviaciones máximas de aproximadamente $0,4$ [cm].



(a) Gráfico de salida y_k

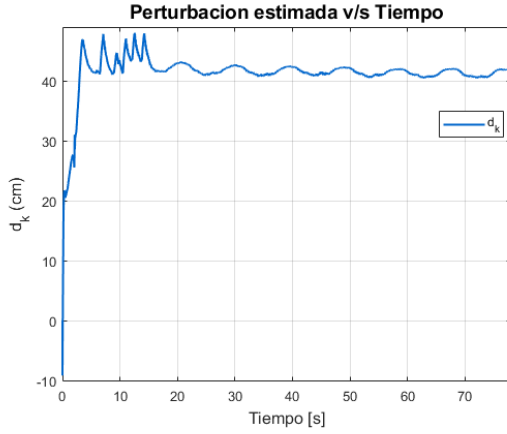


(b) Gráfico de salida y_k en estado estacionario

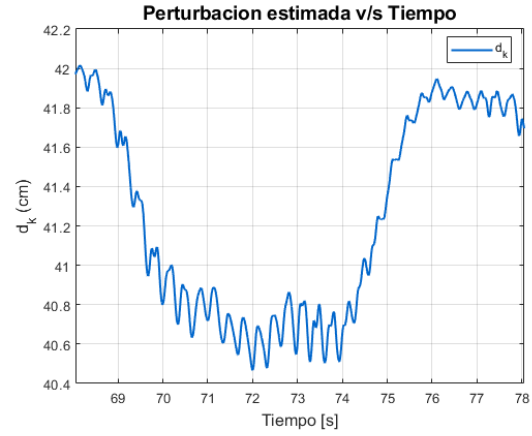
Fig. 5.59: Resultados con restricciones de actuación: salida y_k en el tiempo.

Perturbación d_k . La Figura 5.60 muestra que la perturbación estimada converge a un valor fijo. En la subfigura (b) se observa que dicho valor estacionario se ubica en torno a 41 [cm].

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL



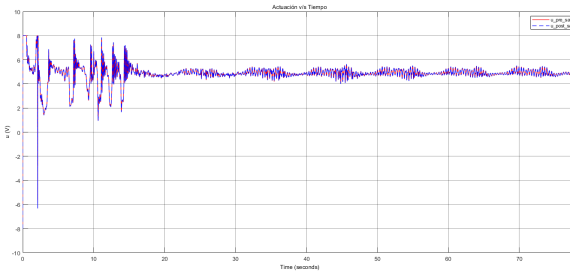
(a) Gráfico de perturbación d_k



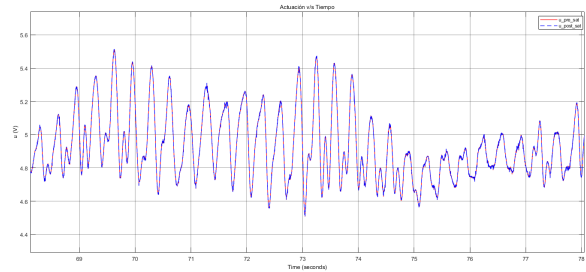
(b) Gráfico de perturbación d_k en estado estacionario

Fig. 5.60: Resultados con restricciones de actuación: perturbación d_k en el tiempo.

Actuación u_k . En la Figura 5.61 se aprecia la señal de control. En la subfigura (a) u_k converge hacia un valor fijo, mientras que en la subfigura (b) dicho valor se estabiliza en torno a 5 [V].



(a) Gráfico de actuación u_k



(b) Gráfico de actuación u_k en estado estacionario

Fig. 5.61: Resultados con restricciones de actuación: actuación u_k en el tiempo.

Tiempo de ejecución. En la Figura 5.62 se observa que el tiempo de ejecución promedio del solver fue $7,400 \times 10^{-6}$ [s], alcanzando un máximo de $2,300 \times 10^{-4}$ [s]. Ambos valores se encuentran muy por debajo del período de muestreo de 1 [ms], lo que confirma la factibilidad computacional.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

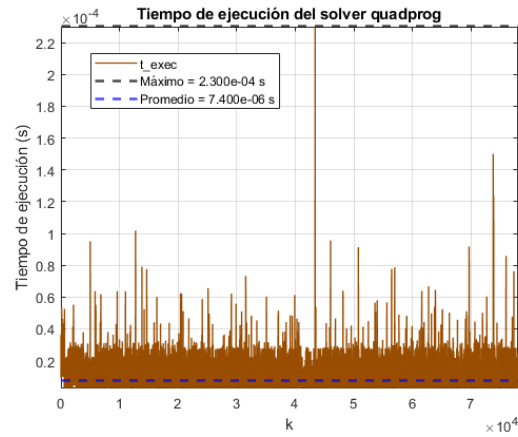


Fig. 5.62: Resultados con restricciones de actuación: tiempo de ejecución del solver quadprog.

Estados observados. La Figura 5.63 muestra que los estados convergen hacia valores determinados. En la Figura 5.64 se aprecia además que no existen diferencias entre los estados estimados en régimen estacionario.

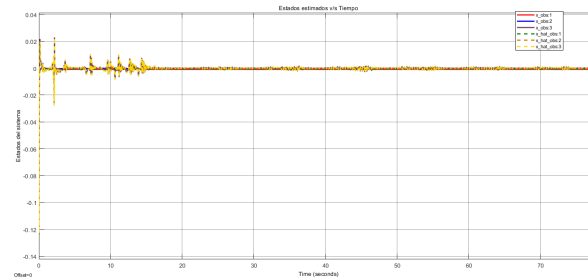


Fig. 5.63: Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema.

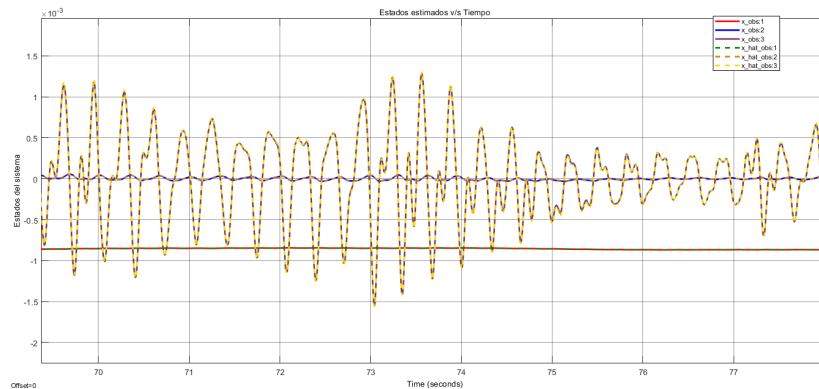


Fig. 5.64: Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema en estado estacionario.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

Factibilidad. En la Figura 5.65 se muestra que el problema de optimización fue factible en todo momento, alcanzándose una solución en cada instante de tiempo.

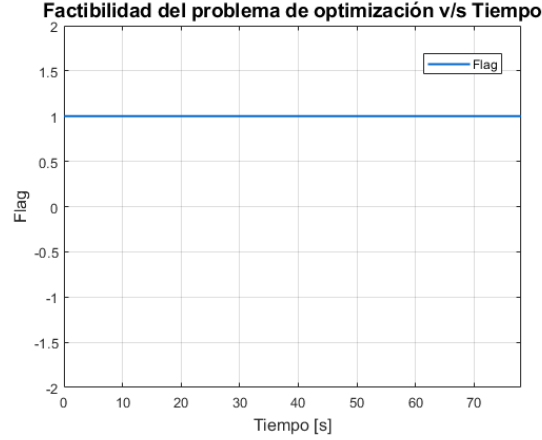


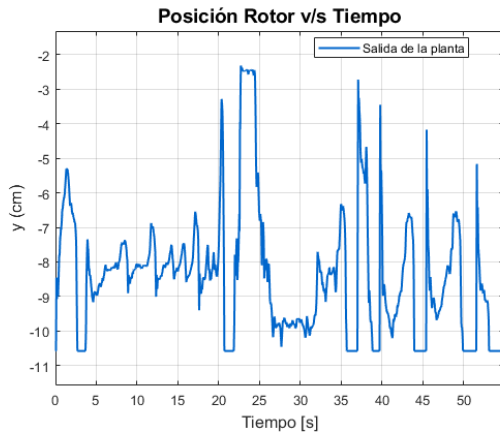
Fig. 5.65: Resultados cambiando las restricciones de actuación: Factibilidad del problema de optimización.

Con las restricciones de actuación acotadas a $-8 \leq u \leq 8$, el controlador fue capaz de mantener el rotor en torno a la referencia. El esfuerzo de control se mantuvo dentro de límites aceptables y el problema de optimización resultó factible en todo instante, lo que confirma que bajo estas condiciones el sistema es controlable.

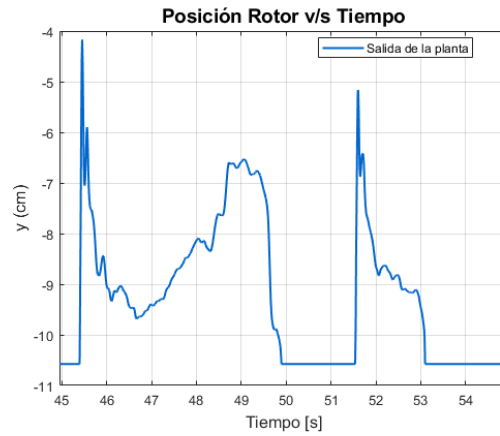
Resultados para $-7 \leq u \leq 7$, con $\Gamma = 1$, $N = 4$ y $T_s = 1 \text{ ms}$

Salida y_k En la Figura 5.66 se presentan los resultados de la salida del sistema. En la subfigura (a) se observa que el controlador no consigue llevar y mantener al rotor en la referencia. En la subfigura (b) se aprecia con mayor claridad que el rotor no alcanza la referencia y que el sistema es inestable.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL



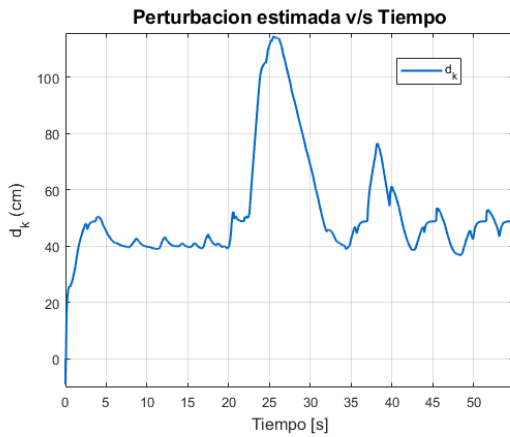
(a) Gráfico de salida y_k



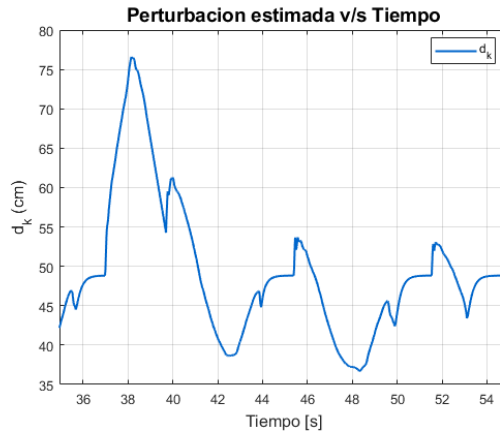
(b) Gráfico de salida y_k en estado estacionario

Fig. 5.66: Resultados con restricciones de actuación: salida y_k en el tiempo.

Perturbación d_k . La Figura 5.67 muestra que la perturbación estimada no converge del todo a un valor fijo, también se aprecian desviaciones de hasta 80 [cm]. En la subfigura (b) se observa que es estado estacionario la perturbación se ubica en torno a 48 [cm].



(a) Gráfico de perturbación d_k

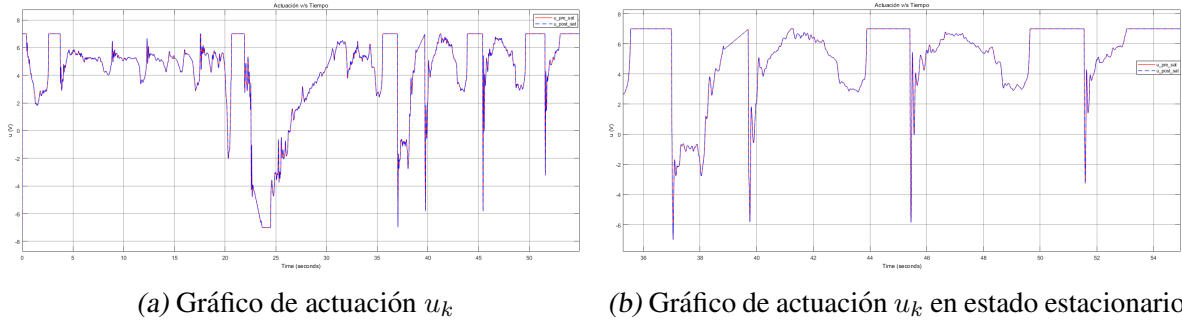


(b) Gráfico de perturbación d_k en estado estacionario

Fig. 5.67: Resultados con restricciones de actuación: perturbación d_k en el tiempo.

Actuación u_k . En la Figura 5.68 se aprecia la señal de control. En la subfigura (a) u_k se aprecia que la actuación oscila constantemente durante la prueba. En la subfigura (b) se aprecia con detalle como la actuación oscila entre los límites de saturación impuestos por las restricciones.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL



(a) Gráfico de actuación u_k

(b) Gráfico de actuación u_k en estado estacionario

Fig. 5.68: Resultados con restricciones de actuación: actuación u_k en el tiempo.

Tiempo de ejecución. En la Figura 5.69 se observa que el tiempo de ejecución promedio del solver fue $1,012 \times 10^{-5}$ [s], alcanzando un máximo de $1,677 \times 10^{-4}$ [s]. Ambos valores se encuentran muy por debajo del período de muestreo de 1 [ms], lo que confirma la factibilidad computacional.

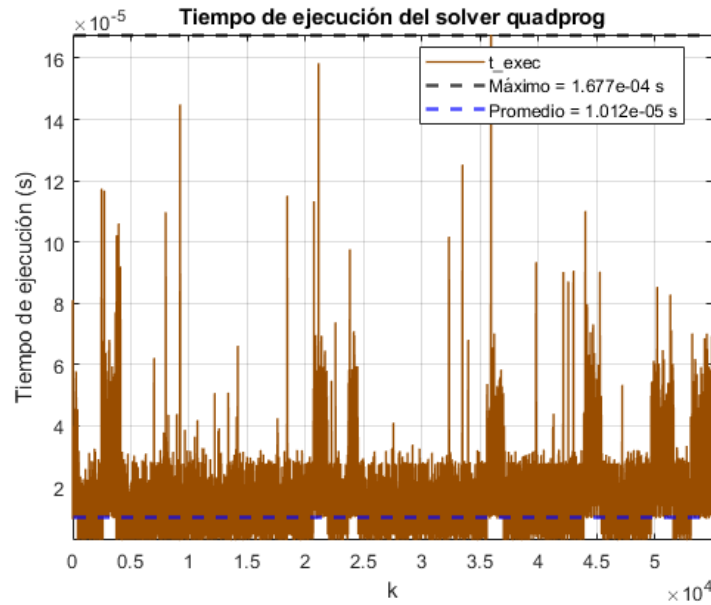


Fig. 5.69: Resultados con restricciones de actuación: tiempo de ejecución del solver quadprog.

Estados observados. La Figura 5.70 muestra que los estados presentan ciertas oscilaciones en sus estados. En la Figura 5.71 se aprecia además que no existen diferencias entre los estados estimados en régimen estacionario.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

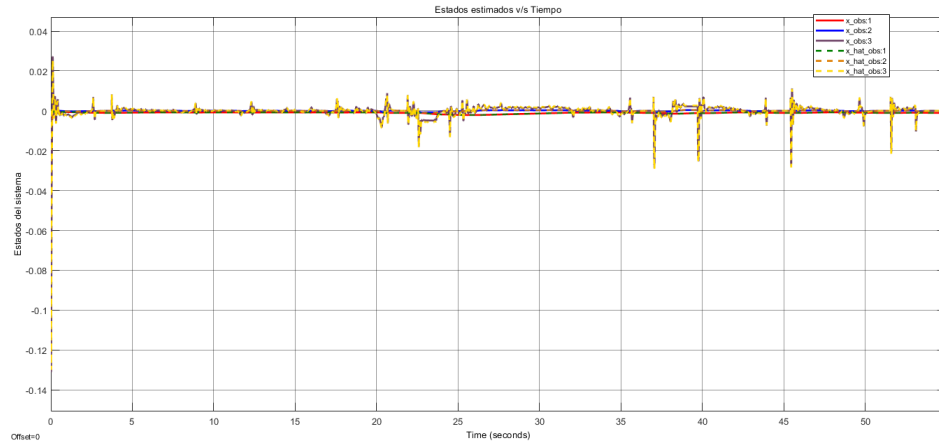


Fig. 5.70: Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema.

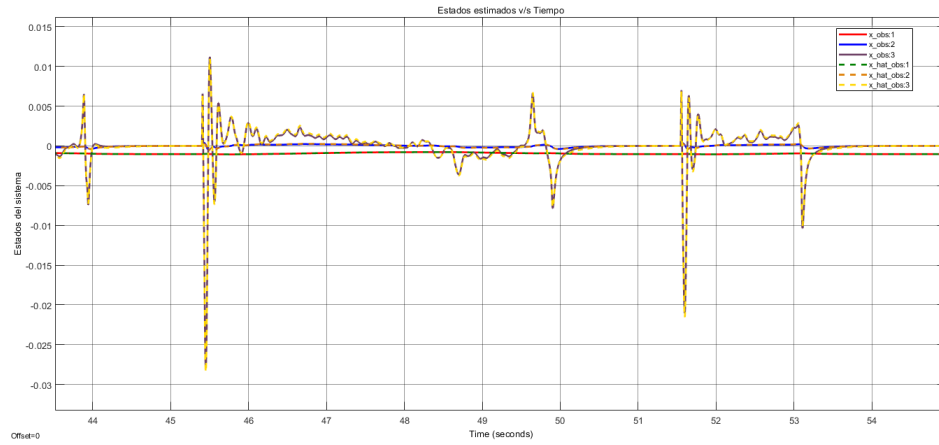


Fig. 5.71: Resultados con restricciones de actuación: estados observados del sistema en estado estacionario.

Factibilidad. En la Figura 5.72 se muestra que el problema de optimización fue factible en todo momento, alcanzándose una solución en cada instante de tiempo.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

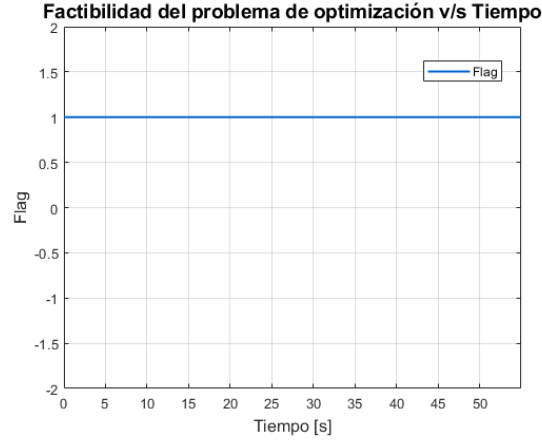


Fig. 5.72: Resultados cambiando las restricciones de actuación: Factibilidad del problema de optimización.

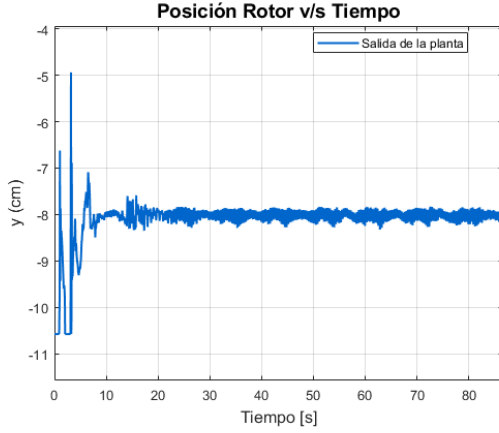
Con las restricciones de actuación acotadas a $-7 \leq u \leq 7$, el controlador no logró llevar el rotor a la referencia. La señal de control presentó oscilaciones y alcanzó repetidamente los valores límites, además, no convergía hacía un valor determinado. Bajo estas condiciones, el sistema no resulta controlable.

Resultados para $-7 \leq u \leq 7$, con $\Gamma = 10$, $N = 4$ y $T_s = 1$ [ms]

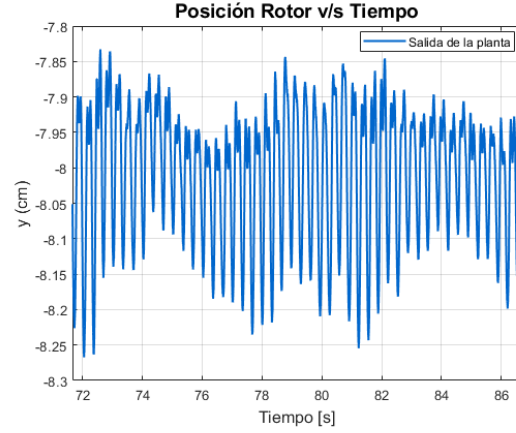
En esta prueba se decide cambiar el valor de Γ a 10 para mejorar el esfuerzo de control y comprobar si, bajo esta nueva condición, se puede controlar el sistema. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

Salida y_k En la Figura 5.73 se presentan los resultados de la salida del sistema. En la subfigura (a) se observa que el controlador consigue llevar y mantener al rotor en torno a la referencia, mientras que en la subfigura (b) se aprecia que, en estado estacionario, la salida presenta desviaciones máximas de aproximadamente 0,26 [cm].

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL



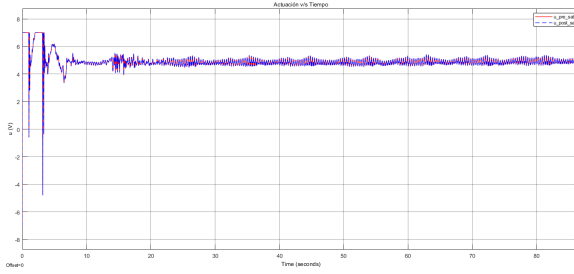
(a) Gráfico de salida y_k



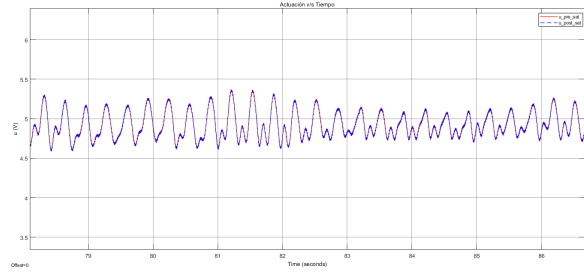
(b) Gráfico de salida y_k en estado estacionario

Fig. 5.73: Resultados con restricciones de actuación: salida y_k en el tiempo.

Actuación u_k . En la Figura 5.74 se aprecia la señal de control. En la subfigura (a) u_k converge hacia un valor fijo, mientras que en la subfigura (b) dicho valor se estabiliza en torno a 5 [V].



(a) Gráfico de actuación u_k



(b) Gráfico de actuación u_k en estado estacionario

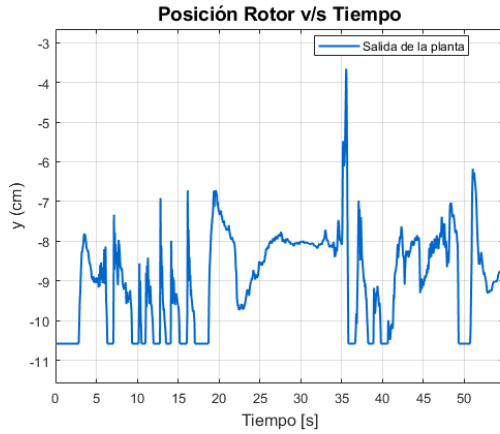
Fig. 5.74: Resultados con restricciones de actuación: actuación u_k en el tiempo.

Con las restricciones de actuación acotadas a $-7 \leq u \leq 7$ y $\Gamma = 10$, el controlador fue capaz de mantener el rotor en torno a la referencia. El esfuerzo de control se mantuvo dentro de límites aceptables y la referencia no presentó grandes desviaciones, lo que confirma que, bajo estas condiciones, el sistema es controlable.

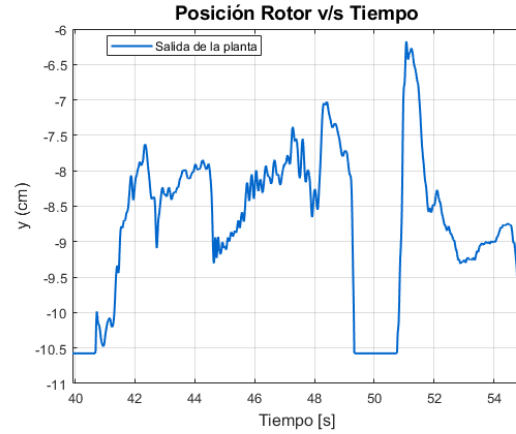
Resultados para $-6 \leq u \leq 6$, con $\Gamma = 10$, $N = 4$ y $T_s = 1$ [ms]

Salida y_k En la Figura 5.75 se presentan los resultados de la salida del sistema. En la subfigura (a) se observa que el controlador no consigue llevar y mantener al rotor en torno a la referencia, mientras que en la subfigura (b) se aprecia que, en estado estacionario, la posición del rotor no converge a la referencia, sino que diverge de esta, mostrando inestabilidad.

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL



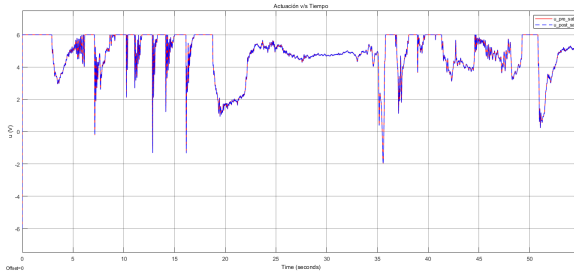
(a) Gráfico de salida y_k



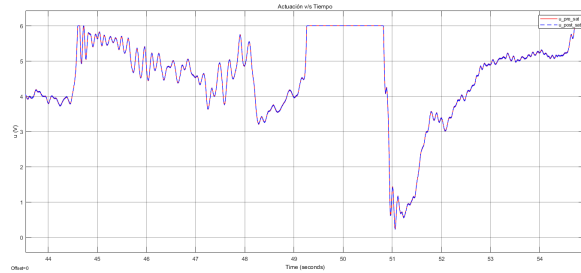
(b) Gráfico de salida y_k en estado estacionario

Fig. 5.75: Resultados con restricciones de actuación: salida y_k en el tiempo.

Actuación u_k . En la Figura 5.76 se aprecia la señal de control. En la subfigura (a) se observa que u_k se mantiene gran parte del tiempo en los 6 [V]. En la subfigura (b) se evidencia que la señal no logra asentarse en un valor cercano a 5 [V], como en casos anteriores, sino que oscila hasta alcanzar el límite de 6 [V].



(a) Gráfico de actuación u_k



(b) Gráfico de actuación u_k en estado estacionario

Fig. 5.76: Resultados con restricciones de actuación: actuación u_k en el tiempo.

Con las restricciones de actuación acotadas a $-6 \leq u \leq 6$ y $\Gamma = 10$, el controlador no logró llevar el rotor a la referencia. La señal de control presentó oscilaciones y alcanzó repetidamente el valor límite de 6 [V]. Bajo estas condiciones, el sistema no resulta controlable.

5.5 Tablas de resultados

Los resultados anteriores se pueden resumir en las siguientes tablas:

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

Tab. 5.1: Efecto de variar el horizonte de predicción N (con $T_s = 1$ [ms] y restricciones de actuación $[-10, 10]$ [V]).

N	Γ	Controla	$t_{\text{solver,max}}$ [s]	$t_{\text{solver,prom}}$ [s]	Observaciones
2	10^{-2}	No	—	—	Mal control; salida inestable.
2	1	Sí	$1,511 \times 10^{-4}$	$5,009 \times 10^{-6}$	Buen seguimiento; solver bajo T_s .
5	1	Sí	$1,199 \times 10^{-4}$	$8,782 \times 10^{-6}$	Estable y factible; mayor tiempo de ejecución del solver.
7	1	Sí	$1,451 \times 10^{-4}$	$1,194 \times 10^{-5}$	Buen desempeño; aumento significativo del tiempo de ejecución del solver.

Tab. 5.2: Efecto de variar el período de muestreo T_s (caso base $\Gamma = 1$, $N = 4$ salvo que se indique).

T_s [ms]	Γ	N	Controla	$t_{\text{solver,max}}$ [s]	$t_{\text{solver,prom}}$ [s]	Observaciones
0.5	1	4	No aplica	—	—	Modelo no ejecutable en <i>Quarc</i> .
0.9	1	4	No aplica	—	—	Modelo no ejecutable en <i>Quarc</i> .
2.0	1	4	Sí	$1,192 \times 10^{-4}$	$8,186 \times 10^{-4}$	Seguimiento correcto; error $\approx 0,42$ [cm]; $d_k \approx 43$ [cm]; $u_k \approx 4,9$ [V].
3.0	1	4	No	—	—	Inestable; y_k oscila y u_k satura frecuentemente.
3.0	10	4	Parcial	—	—	Se mejora el control, pero el sistema se vuelve inestable.
3.0	100	4	No	—	—	Inestable; oscilaciones crecientes en y_k y u_k .

5. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DEL SISTEMA DE CONTROL

Tab. 5.3: Efecto de variar la restricción de actuación u (con $N = 4$ y $T_s = 1$ [ms]).

Límite u [V]	Γ	Controla	$t_{\text{solver,max}}$ [s]	$t_{\text{solver,prom}}$ [s]	Observaciones
$[-9, 9]$	1	Sí	$1,408 \times 10^{-4}$	$7,539 \times 10^{-6}$	Lleva el rotor a la referencia; comportamiento aceptable.
$[-8, 8]$	1	Sí	$2,300 \times 10^{-4}$	$7,400 \times 10^{-6}$	Sistema controlable en todo momento.
$[-7, 7]$	1	No	$1,677 \times 10^{-4}$	$1,012 \times 10^{-5}$	No alcanza la referencia; inestable.
$[-7, 7]$	10	Sí	—	—	Mantiene el rotor Cerca de la referencia; desvío $\approx 0,26$ [cm]; $u_k \sim 5$ [V].
$[-6, 6]$	10	No	—	—	No controlable; u_k satura gran parte del tiempo en 6 [V].

De las tablas anteriores se concluye que, aunque al aumentar el horizonte de predicción el tiempo promedio de ejecución del solver aumentó, los tiempos obtenidos siguen siendo menores al período de muestreo T_s mínimo utilizado, lo que permitiría emplear periodos menores. En cuanto al período de muestreo, en teoría sería factible implementar el controlador con $T_s < 1$ [ms], sin embargo, la plataforma *Quarc* no permite generar el modelo en dichos casos, por lo que se debería probar el modelo en otras plataformas, como por ejemplo en una *MicroLabBox*. Para $T_s = 2$ [ms] el sistema es controlable, mientras que con $T_s = 3$ [ms] el sistema se vuelve inestable incluso ajustando el peso Γ , por lo que el sistema no sería controlable para periodos de muestreo mayores. Respecto a las restricciones de actuación, el sistema se mantiene controlable en el rango $[-7, 7]$ [V], siempre que se realice un ajuste apropiado de Γ , pero al reducir la restricción a $[-6, 6]$ [V] el sistema se vuelve incontrolable, ya que requiere una mayor actuación para alcanzar el valor estable, lo cual es impedido por la propia restricción del controlador.

6 Conclusiones y trabajos futuros

6.1 Conclusiones

El desarrollo de este trabajo permitió diseñar e implementar un controlador predictivo basado en modelo (MPC) aplicado a un sistema de levitación magnética. A través del proceso de modelado, linealización y la implementación de una etapa de preestabilización de la planta, se establecieron las bases necesarias para la formulación del problema de control en términos de programación cuadrática (QP). Posteriormente, se implementó el algoritmo de optimización *Active-Set* mediante el solver `quadprog` de MATLAB, integrando la solución en un esquema de control en tiempo discreto.

Los resultados obtenidos en simulación demostraron el correcto funcionamiento del bloque MPC, validando la metodología propuesta y evidenciando la capacidad del controlador para anticipar la dinámica del sistema y respetar restricciones de actuación. En la implementación física, se comprobó que el controlador fue capaz de mantener la levitación del rotor bajo diferentes configuraciones de horizonte de predicción, periodos de muestreo y límites de control, lo que confirma la eficacia del enfoque planteado frente a un sistema altamente inestable y no lineal.

Si bien los resultados fueron en general satisfactorios, se identificaron situaciones donde el sistema no resultó controlable bajo ciertas condiciones. En particular, fue necesario ajustar el parámetro Γ , con lo cual en algunos casos se logró mejorar el control; sin embargo, en otros escenarios persistió la imposibilidad de estabilizar la planta. Asimismo, se observaron limitaciones cuando se aplicaron restricciones de saturación estrictas entre -6 y $+6$ voltios, bajo las cuales el controlador no pudo mantener la referencia de levitación. A esto se suma la imposibilidad de reducir el periodo de muestreo más allá de cierto umbral debido a limitaciones propias de la plataforma QUARC, lo que restringe los periodos de muestreo que se pueden implementar.

En síntesis, este trabajo demuestra la viabilidad del control predictivo por modelo en un sistema de levitación magnética, pero también evidencia que existen escenarios de no controlabilidad y restricciones prácticas que condicionan su desempeño. No obstante, los resultados obtenidos validan el cumplimiento de los objetivos planteados: se desarrolló el modelo matemático del levitador, se implementó un esquema de preestabilización mediante LQR, se

aplicó MPC con acción integral para eliminar errores en régimen estacionario, y se verificó su funcionamiento tanto en simulación como en la planta física. En conjunto, estos logros consolidan a MPC como una herramienta sólida para enfrentar sistemas con alta inestabilidad y restricciones, reforzando su aplicabilidad en contextos académicos e industriales.

6.2 Trabajos Futuros

Para futuros trabajos, se propone lo siguiente:

- El uso de técnicas más eficientes para la resolución del problema cuadrático en tiempo real, tales como el método de gradiente proyectado, ADMM (*Alternating Direction Method of Multipliers*) o algún otro solver especializado para MPC.
- Migrar la implementación hacia plataformas de procesamiento embebido como Micro-Lab Box o microcontroladores de altas prestaciones, con el fin de reducir los tiempos de cómputo e implementar tiempos de muestreo menores a 1 [ms].
- Explorar el uso de aproximadores no lineales basados en redes neuronales, particularmente arquitecturas con funciones de activación ReLU, para acelerar la solución del problema de optimización o reemplazar al solver tradicional. Este enfoque permitiría entrenar una red neuronal que aproxime la ley de control predictiva, reduciendo tiempos de cómputo y facilitando la implementación en hardware de recursos limitados.

Referencias

- [1] M. Ázua, «Implementación de un sistema de control predictivo usando el toolbox QUARC», Tesis de Pregrado, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile, 2022.
- [2] A. Cedeño, A. Morrison y G. Carvajal, *Control Predictivo Por Modelo*. Universidad Técnica Federico Santa María, 2024, Lecture notes.
- [3] A. L. Cedeño, *Lecture Notes on Model Predictive Control*, Apuntes de clase sobre MPC, 2025.
- [4] Q. Inc., *QUARC Blocks – Alphabetical List (Section H)*, https://docs.quanser.com/quarc/documentation/quarc_blocks_alphabetical_list.html#H, Consultado el 17 de agosto de 2025.
- [5] H. Kwakernaak y R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*. USA: John Wiley & Sons, Inc., 1972, ISBN: 0471511102.
- [6] R. J. Mantz, «Observadores de estados», Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ingeniería, Departamento de Electrotecnia, Cátedra de Control Moderno, La Plata, Argentina, inf. téc., 2003.
- [7] MathWorks, *dlqr — Discrete-time LQR state-feedback controller*, Disponible en: https://la.mathworks.com/help/control/ref/lti_dlqr.html#mw_8b696ceb-0014-4e2b-a93a-b50a4f53c498, The MathWorks, Inc., 2025.
- [8] MathWorks, *What Is Model Predictive Control?*, <https://la.mathworks.com/help/mpc/gs/what-is-mpc.html>, Accedido: 18 de agosto de 2025, 2025.
- [9] National Instruments, *M Series User Manual*, 371022K-01, National Instruments, Austin, Texas, 2009. dirección: <https://www.ni.com/pdf/manuals/371022k.pdf>
- [10] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003, ISBN: 9788420536781. dirección: https://books.google.cl/books?id=QK148EPC_m0C

REFERENCIAS

- [11] K. Ogata, *Modern Control Engineering* (Instrumentation and controls series). Prentice Hall, 2010, ISBN: 9780136156734. dirección: <https://books.google.cl/books?id=Wu5GpNAelzkC>
- [12] Quanser Inc., *QUARC Real-Time Control Software*, <https://www.quanser.com/products/quarc-real-time-control-software/>, Accessed: 2025-08-26, 2025.
- [13] I. The MathWorks, *Simulink*, Disponible en: <https://la.mathworks.com/products/simulink.html>, 2025.
- [14] I. The MathWorks, *quadprog – Quadratic Programming (Optimization Toolbox)*, <https://la.mathworks.com/help/optim/ug/quadprog.html>, Consultado el 20 de agosto de 2025.
- [15] The MathWorks, Inc., *MATLAB®: what is matlab*, Disponible en: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>, 2025.
- [16] F. J. Vargas, D. Erraz y J. C. Agüero, «Guía Experiencia 1: Nociones básicas de programación en Matlab-Simulink para el estudio de sistemas dinámicos», Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, inf. téc., 2021, Asignatura Laboratorio de Control Automático (ELO-271).
- [17] B. Wittenmark, K.-E. Årzén y K. Åström, *Computer Control: An Overview* (IFAC PROFESSIONAL BRIEF), English. International Federation of Automatic Control, 2002.
- [18] E. W. Wong, «Active-Set Methods for Quadratic Programming», Tesis doct., Stanford University, 2011. dirección: <https://escholarship.org/uc/item/2sp3173p>

Anexo | Códigos MATLAB

1 Calculo_Ad

```
clear; clc; close all
syms s t T_s

A = [0, 1, 0;
     0, 0, 1;
     62500, 625, -100];

inv(A);
I = eye(size(A));
sI_A = s * I - A;
inv_sI_A = simplify(inv(sI_A));
% Inicializar la matriz de salida
invLap = sym(zeros(size(inv_sI_A)));

% Aplicar ilaplace a cada elemento
for i = 1:size(inv_sI_A, 1)
    for j = 1:size(inv_sI_A, 2)
        invLap(i, j) = ilaplace(inv_sI_A(i, j), s, t);
    end
end

T_s = 0.001;
A_d = subs(invLap, t, T_s);
A_d = double(vpa(A_d, 12));
disp(A_d)
```

2 Calculo_Bd

```
clear; clc; close all
syms s T tau real

% Define tu matriz A y B simbólicas:
A = [0, 1, 0;
0, 0, 1;
62500, 625, -100];
B = [0;
0;
1];

% Exponencial de matriz simbólica
expA_tau = expm(A * tau); % e^{A tau}

% Integral simbólica de 0 a T del producto de e^{A tau} * B
Bd = int(expA_tau * B, tau, 0, T)

Ts = 0.001;
Bd_eval = simplify(subs(Bd, T, Ts));
double(Bd_eval)
```

3 Prueba_Controlabilidad_Observabilidad

```
clear; clc; close all

% Definición del sistema continuo
A = [0, 1, 0;
0, 0, 1;
62500, 625, -100];
B = [0;
0;
1];
C = [57500, 0, 0];
D = 0;

% Discretización
```

```
Ts = 1e-3;
sys_c = ss(A, B, C, D);
sys_d = c2d(sys_c, Ts);

Ad = sys_d.A;
Bd = sys_d.B;
Cd = sys_d.C;
Dd = sys_d.D;

% Prueba Controlabilidad
C1 = ctrb(A, B);
rank_C1 = rank(C1);
C2 = ctrb(Ad, Bd);
rank_C2 = rank(C2);

% Prueba Observabilidad
O1 = obsv(A, C);
rank_Ob1 = rank(O1);
O2 = obsv(Ad, Cd);
rank_Ob2 = rank(O2);
```

4 Precompilar_MagLev_Final

```
clear; clc; close all

% Definición del sistema continuo
A = [0, 1, 0;
     0, 0, 1;
     62500, 625, -100];
B = [0;
     0;
     1];
C = [57500, 0, 0];
D = 0;

% Discretización
Ts = 1e-3; % periodo de muestreo 1 ms
sys_c = ss(A, B, C, D);
sys_d = c2d(sys_c, Ts);
```

```
Ad = sys_d.A;
Bd = sys_d.B;
Cd = sys_d.C;
Dd = sys_d.D;
Bp = [0; 0; 0]; % Matriz de perturbacion de entrada
Cp = 1;          % Matriz de perturbacion de salida

O = obsv(Ad, Cd);
rank(O);

x0 = [0; 0; 0];
nx = size(Ad,1); % 3 estados
nu = size(Bd,2); % 1 entrada

% Penalizaciones LQR discreto
Q = Cd'*Cd; % penaliza el error en la salida
R = 2e2;    % penaliza el esfuerzo de control

% Cálculo del controlador LQR discreto
[L, ~, ~] = dlqr(Ad, Bd, Q, R);

%% Modelo aumentado: [x; d]
Abar = [Ad, Bp;
zeros(1,3), 1];
Bbar = [Bd; 0];
Cbar = [C, Cp];
nx_aug = nx + 1;

%% Observador de estados planta Arturo

Qe = diag([1e2 1e2 1e2]); % penalización al error de estado estimado
Re = 1e-4;                % penalización al ruido en la salida

% Ganancia óptima del observador discreto resolviendo ecuacion de Riccati
P = idare(Ad', Cd', Qe, Re);
K = (Ad * P * Cd') / (Cd * P * Cd' + Re);
```

```

A_obs = Ad-K*Cd;
B_obs = [Bd K];
C_obs = eye(3);
D_obs = zeros(3,2);

% Sistema en lazo cerrado discreto
Ad_cl = Ad - Bd*L;
Bd_cl = Bd;
Cd_cl = Cd;
Dd_cl = 0;
%% Matriz extendida A_ext y B_ext para [x; x_hat]
A_ext = [Ad, -Bd*L;
K*Cd, Ad - K*Cd - Bd*L];

B_ext = [Bd;
Bd];
C_ext = eye(6); % salida de todos los estados [x; x_hat]
D_ext = zeros(6,1);
x0_ext = zeros(6,1); % Estado inicial para [x; x_hat]

%% Observador de estados para observador extendido [x; x_hat, p]
A_extp = [ Ad,          -Bd*L,          zeros(3,1);
K*Cd,          Ad - K*Cd - Bd*L,      zeros(3,1);
zeros(1,3), zeros(1,3),          1 ];
B_extp = [ Bd;
Bd;
0 ];
C_extp = eye(7); % salida de todos los estados [x; x_hat; p]
D_extp = zeros(7,1);
x0_extp = zeros(7,1);
Cyextp = [Cd, zeros(1,3), 1];

Qep = diag([1e-2 1e-2 1e-2 1e-2 1e-2 1e-2 1e8]); % penalización al error
Rep = 1e2; % penalización al error de salida

% Ganancia óptima del observador discreto resolviendo ecuacion de Riccati
Pep = idare(A_extp', Cyextp', Qep, Rep);

```

```

Kep = (A_extp * Pep * Cyextp') / (Cyextp * Pep * Cyextp' + Rep);

A_obs1 = A_extp - Kep * Cyextp;
B_obs1 = [B_extp Kep];
C_obs1 = eye(7);
D_obs1 = zeros(7,2);
x0_ext1 = zeros(7,1); % Estado inicial para [x; x_hat;p]
%% Configuración MPC
N = 4; % horizonte de predicción
Cy = [Cd, zeros(1,3)];
Gamma = 1e1;
Omega = Cy' * Cy;
Omega_N = Omega;

% Restricciones en la entrada (u)
u_min = -10;
u_max = 10;

% Restricciones de estado
x_min = [-15;-10;-100;-15;-10;-100];
x_max = [15;10;100;15;10;100];
%% Precomputación de matrices para MPC
Q = Cy' * Cy; % penaliza salida, ignora la perturbación
Qblk = kron(eye(N), Q);
Rblk = Gamma * eye(N*nu);
[Acal, Bcal] = MatrizCal(A_ext, B_ext, N);
H = 2*(Rblk + Bcal' * Qblk * Bcal);
% H=(H + H')/2;
%% Segimiento a ref
inv1 = inv(eye(size(A_ext))-A_ext)
inv2 = inv(Cy*inv1*B_ext)

```

5 mat_f

```

function f = mat_f(xk_hat, xinf, A_pred, B_pred, Qblk, N)
% Calcular desviación
x_tilde = xk_hat - xinf;

```

```
% Término lineal del costo
f = 2 * (x_tilde' * A_pred' * Qblk * B_pred);
end
```

6 ineq

```
function [Aineq, bineq] = ineq(xk_hat, xinf, uinf, ...
A_pred, B_pred, ...
N, x_min, x_max, u_min, u_max, L_pre)
% 1) Desviación actual
x_tilde0 = xk_hat - xinf;

% 2) Expandir cotas a horizonte
Xmin_abs = repmat(x_min, N, 1);          % (N*nx x 1)
Xmax_abs = repmat(x_max, N, 1);
Umin_abs = repmat(u_min, N, 1);          % (N*nu x 1)
Umax_abs = repmat(u_max, N, 1);

% 3) Cotitas en desviación (respecto a x_inf, u_inf)
Xmin_tilde = Xmin_abs - repmat(xinf, N, 1);
Xmax_tilde = Xmax_abs - repmat(xinf, N, 1);
Umin_tilde = Umin_abs - repmat(uinf, N, 1);
Umax_tilde = Umax_abs - repmat(uinf, N, 1);

% 4) Predicción por x_tilde0
x_pred_stack = A_pred * x_tilde0;

% 5) Restricciones de ESTADO
Aineq_x = [ B_pred ; -B_pred ];
bineq_x = [ Xmax_tilde - x_pred_stack ;
-Xmin_tilde + x_pred_stack ];

% 6) Restricciones de ENTRADA APLICADA usando L_pre
nu = numel(u_min);                        % entradas por paso
Iu = eye(N * nu);

% L_pre
Lpre_stack = repmat(L_pre(:), N, 1);      % (N*nu x 1)
```

```
% u_apl = u_inf + U_tilde - L_pre    [u_min, u_max]
% => U_tilde    (u_max - u_inf) + L_pre
% => -U_tilde    -(u_min - u_inf) - L_pre
Aineq_u = [ Iu ; -Iu ];
bineq_u = [ Umax_tilde + Lpre_stack ;
-Umin_tilde - Lpre_stack ];

% 7) Ensamble total
Aineq = [ Aineq_x ; Aineq_u ];
bineq = [ bineq_x ; bineq_u ];
end
```

7 solverMPC

```
function [u_tilde,flag,t_exec] = solverMPC(H, f, Aineq, bineq)
% Tamaño fijo esperado (para N = 2, nu = 1 → U ∈ R²)
U_sol = zeros(2,1);
exitflag = -1;

% Opciones del solver
nx = size(H,1);
x0 = zeros(nx,1);
options = optimoptions('quadprog', 'Display', 'off', 'Algorithm', 'active-set');

t_exec = NaN; % Inicializar tiempo de ejecución
% Ejecutar QP solo si entradas no están vacías
if ~isempty(H) && ~isempty(f) && ~isempty(Aineq) && ~isempty(bineq)
tic
[U_sol, ~, exitflag] = quadprog(H, f, Aineq, bineq, [], [], [], [], x0, options);
t_exec = toc;
end
flag=exitflag;
% Salida segura
if exitflag ~= 1
u_tilde = 0;
else
u_tilde = U_sol(1);
end
end
```

8 Graficos

```
%% Grafico salida
t = salida_y(1,:).'; % tiempo
y = salida_y(2,:).'; % salida
figure;
plot(t, y, 'LineWidth',1.5, 'Color',[0 0.4 0.8]);
grid on;

xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize',12);
ylabel('y (cm)', 'FontSize',12);
title('Posición Rotor v/s Tiempo', 'FontSize',14);
legend('Salida de la planta', 'Location','best');

% Ajustar límites de los ejes al rango de los datos
xlim([t(1) t(end)]); % Cambiar t(1) por t(end)-10
ylim([min(y)-1 max(y)+1]);

%%
% Extraer datos (2xN: fila 1 = tiempo, fila 2 = valores)
t = t_exec(1,:).';
y = t_exec(2,:).';
k = (0:numel(y)-1)';

% Estadísticos
y_mean = mean(y);
y_max = max(y);

% Plot
figure;
h1 = plot(k, y, 'b', 'LineWidth', 1,'Color',[0.6 0.3 0]); hold on
h2 = yline(y_max, '--k', 'LineWidth', 1.8, 'Color',[0 0 0]);
h3 = yline(y_mean, '--r', 'LineWidth', 1.8, 'Color',[0 0 1]);
grid on;

xlabel('k');
ylabel('Tiempo de ejecución (s)');
title('Tiempo de ejecución del solver quadprog');
```

```
% Leyenda con valores
legend([h1 h2 h3], ...
{ 't\_exec', ...
  sprintf('Máximo = %.3e s', y_max), ...
  sprintf('Promedio = %.3e s', y_mean) }, ...
'Location','best');

xlim([k(1) k(end)]);
ylim([min(y) max(y)]);

%% Flag
t = flag(1,:).'; % tiempo
y = flag(2,:).'; % salida
figure;
plot(t, y, 'LineWidth',1.5, 'Color',[0 0.4 0.8]);
grid on;

xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize',12);
ylabel('Flag', 'FontSize',12);
title('Factibilidad del problema de optimización v/s Tiempo', 'FontSize',
legend('Flag', 'Location','best');

% Ajustar límites de los ejes al rango de los datos
xlim([t(1) t(end)]);
ylim([-2 2]);

%% Grafico d_k
t = d_k(1,:).'; % tiempo
y = d_k(2,:).'; % perturbación
figure;
plot(t, y, 'LineWidth',1.5, 'Color',[0 0.4 0.8]);
grid on;

xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize',12);
ylabel('d_k (cm)', 'FontSize',12);
title('Perturbacion estimada v/s Tiempo', 'FontSize',14);
legend('d_k', 'Location','best');
```

```
% Ajustar límites de los ejes al rango de los datos  
xlim([t(end)-20 t(end)]);  
ylim([min(y)-1 max(y)+1]);
```