



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Obras Civiles

COMPENSACIÓN ADAPTIVA DEL RETRASO DE SISTEMAS DE CARGA MULTI-AXIAL EN ENSAYOS DE SIMULACIÓN HÍBRIDA EN TIEMPO REAL

Memoria de Título presentada por

Ignacio Andrés Godoy Quezada

como requisito parcial para optar al título de la carrera de

Ingeniería Civil

Profesor Guía
Gastón Andrés Fernandois Cornejo

Mayo de 2021



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

TITULO DE LA TESIS:

**COMPENSACIÓN ADAPTIVA DEL RETRASO DE SISTEMAS DE
CARGA MULTI-AXIAL EN SIMULACIÓN HÍBRIDA EN TIEMPO REAL**

AUTOR:

Ignacio Andrés Godoy Quezada

TRABAJO DE MEMORIA, presentado como requisito parcial para optar al título de la carrera de INGENIERIA CIVIL de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Prof. Gastón Fermandois

Prof. Claudio Sepúlveda

Santiago, Chile, Mayo de 2021

COMPENSACIÓN ADAPTIVA DEL RETRASO DE SISTEMAS DE CARGA MULTI-AXIAL EN SIMULACIÓN HÍBRIDA EN TIEMPO REAL

Ignacio Godoy*, Gastón Fernandois*

*Departamento de Obras Civiles – Universidad Técnica Federico Santa María

Resumen

La simulación híbrida en tiempo real (RTHS) es una alternativa eficiente a las pruebas de mesa vibratoria ya que resuelve los problemas de costos y capacidad de este ensayo. Además, logra evaluar el desempeño de estructuras con componentes estructurales donde su comportamiento es dependiente de la velocidad. Este método separa la estructura completa en una subestructura numérica y otra experimental, donde el acoplamiento entre subestructuras se logra manteniendo la compatibilidad y el equilibrio en la interfaz mediante el uso de actuadores servo-hidráulicos. Para imponer condiciones de borde realistas con varios grados de libertad, en la subestructura experimental se requiere un sistema de carga con múltiples actuadores. Este método se conoce como simulación híbrida en tiempo real multi-axial (maRTHS), que debido al alto acoplamiento entre actuadores producen problemas de retraso e inestabilidades durante el ensayo. Por lo cual, en este trabajo se analizará este problema mediante un marco de acero de un piso en el cual la subestructura experimental corresponde a una columna a la que se le impondrán condiciones de borde (desplazamiento y rotación) mediante el uso de dos actuadores conectados a una placa rígida, demostrando lo propenso a inestabilidades que son estos sistemas. Luego, se cuantifica el valor máximo de retraso del sistema y se demuestran las ventajas y buenos resultados de compensar el retraso mediante un compensador feedforward adaptivo capaz de adaptarse ante cambios en planta nominal del actuador.

Palabras claves: Simulación híbrida tiempo real (RTHS), múltiples actuadores, compensación adaptiva.

Introducción

Los ensayos más comunes para evaluar el comportamiento de estructuras sometidas a cargas sísmica son la prueba cuasi-estática, mesa vibratoria y métodos de simulación híbrida. La prueba cuasi-estática presenta una gran limitación ya que sus resultados no entregan información alguna sobre el comportamiento dinámico del espécimen ensayado. Mientras que la prueba de mesa vibratoria logra reproducir con un alto grado de fidelidad los efectos dinámicos que el sismo impone a las estructuras. Sin embargo, este ensayo presenta algunas desventajas como el elevado costo y el tamaño del espécimen a ensayar está limitado a la capacidad de la mesa vibradora (Carrillo et al., 2016).

La simulación híbrida o prueba pseudo-dinámica es una alternativa a la mesa vibratoria ya que utiliza la técnica de subestructuración, en la cual se calcula la respuesta del componente numérico de una estructura y se ejecuta cuasi-estáticamente (es decir, carga aplicada lentamente) en un componente físico. La principal limitación de este método es que el efecto de la tasa de carga en la fuerza de restauración de la estructura no debe tener grandes consecuencias en el comportamiento de esta ya que esta se aplica de forma lenta (Nakashima, 2001).

Mientras, la simulación híbrida en tiempo real (*Real Time Hybrid Simulation, RTHS*) es un método experimental alternativo a los ensayos antes descritos ya que es capaz de aplicar la carga de manera dinámica sobre una subestructura experimental. Entonces, los ensayos RTHS resultan ser un método eficaz y económico para predecir el comportamiento dinámico de estructuras (McCrum & Williams, 2016).

En particular, el acoplamiento entre las subestructuras se logra manteniendo la compatibilidad y el equilibrio en la interfaz mediante el uso de actuadores y sensores. A diferencia de la simulación híbrida convencional, los desplazamientos en un ensayo RTHS son impuestos en tiempo real. Debido a la dinámica inherente de los actuadores, se introduce un retraso de tiempo entre el comando de

desplazamiento y la posición deseada. Esto resulta en una desincronización entre las subestructuras que si no se compensa adecuadamente es probable que produzca inestabilidad en el circuito de retroalimentación del sistema, donde el retraso en la respuesta impuesto por el actuador está relacionado directamente con la rigidez del espécimen ensayado (Darby et al., 2002). Por lo cual la compensación del retardo del actuador es fundamental para la estabilidad y precisión de RTHS y se deben utilizar métodos adecuados como lo son los basados en la teoría del control adaptivo (Chen et al., 2015; Chae et al., 2013).

Mientras, el ensayo RTHS multi-axial consiste en emplear simuladores de carga de múltiples grados de libertad para crear condiciones de borde realistas (desplazamientos y rotaciones). El simulador de carga posee múltiples actuadores conectados a una placa rígida, por lo cual deben funcionar de manera coordinada para lograr una posición global deseada y condiciones de borde realistas en la estructura física. Sin embargo, cuando se desea controlar múltiples grados de libertad, el nivel de acoplamiento dinámico entre actuadores es significativo y se debe emplear un control adecuado para el ensayo como el descrito en Fermandois et al. (2017), en el cual se controlan seis grados de libertad (tres traslaciones y tres rotaciones) en la interfaz de subestructuras, mediante el uso de seis actuadores.

Por lo tanto, en este trabajo se estudiará un ensayo RTHS multi-axial completamente virtual donde todos los elementos necesarios serán modelados numéricamente. Se analizará un sistema estructural compuesto por un marco de momento de un piso sometido a un registro sísmico, donde el sistema de carga está compuesto por dos actuadores conectados mediante un soporte rígido (Blakeborough et al., 2001). Este sistema de carga será responsable de imponer las condiciones de contorno necesarias para acoplar físicamente las subestructuras, donde el retraso inducido por los actuadores se compensará mediante un controlador feedforward adaptivo (Chen et al., 2015) que busca reducir los errores de sincronización en tiempo real.

Descripción del problema

Realizar un ensayo de simulación híbrida en tiempo real multiaxial completamente virtual, modelando todos sus componentes a través de Matlab/Simulink, la manera en que serán modelados los elementos se define a continuación.

Estructura de referencia

El problema por resolver se basa en el estudio realizado por Blakeborough et al. (2001) para el caso de dos grados de libertad en la subestructura experimental. La estructura de referencia corresponde a un marco de un piso compuesto por dos columnas y una viga sometida a una carga distribuida de 4 [KN/m], como muestra la Figura 1; las dimensiones de las columnas son HSS 4x4x3/16 mientras que la viga es HSS 3x3x1/8 según la nomenclatura (AISC, 2011), cada una de las propiedades se describen en Tabla 1.

Tabla 1 : Propiedades estructuras de referencia.

Propiedades estructura		
E	200000	[MPa]
m_1	14	[kg/m]
m_2	7.06	[kg/m]
I_1	2.58	[mm ⁴ /10 ⁶]
I_2	0.741	[mm ⁴ /10 ⁶]
h	1	[m]
L	3.88	[m]

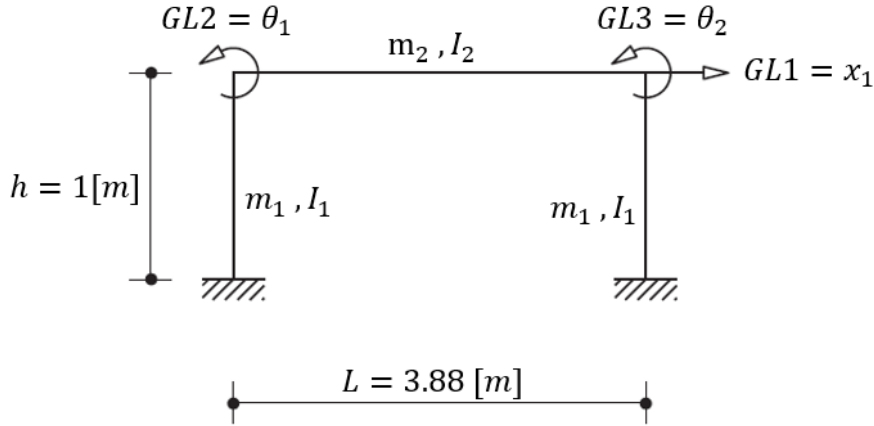


Figura 1: Estructura de referencia.

La estructura de referencia se modela mediante método de elementos finitos, asumiendo elementos axialmente indeformables, es decir cuatro grados de libertad por elemento, lo cual da como resultado que la estructura de referencia cuente con tres grados de libertad globales (x_1 , θ_1 y θ_2), las matrices de masa y rigidez consistentes se obtienen según:

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \Psi_i''(x) \Psi_j''(x) dx \quad (1)$$

$$m_{ij} = \int_0^L m(x) \Psi_i(x) \Psi_j(x) dx \quad (2)$$

Donde las funciones de prueba corresponden a polinomios cúbicos como se muestra en la ecuación (3), donde las constantes a_i dependerán de las condiciones de contorno del elemento.

$$\Psi_{i,j} = a_1 + a_2 \left(\frac{x}{L}\right) + a_3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + a_4 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3)$$

Con estas consideraciones las matrices de masa y rigidez consistentes son la siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} m_2 L + 2 \frac{156 m_1 h}{420} & \frac{22 m_1 h^2}{420} & \frac{22 m_1 h^2}{420} \\ \frac{22 m_1 h^2}{420} & \frac{4 m_1 h^3}{420} + \frac{4 m_2 L^3}{420} & -\frac{3 m_2 L^3}{420} \\ \frac{22 m_1 h^2}{420} & -\frac{3 m_2 L^3}{420} & \frac{4 m_1 h^3}{420} + \frac{4 m_2 L^3}{420} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$K = \begin{bmatrix} 2 \frac{12 EI_1}{h^3} & \frac{6 EI_1}{h^2} & \frac{6 EI_1}{h^2} \\ \frac{6 EI_1}{h^2} & \frac{4 EI_1}{h} + \frac{4 EI_2}{L} & \frac{2 EI_2}{L} \\ \frac{6 EI_1}{h^2} & \frac{2 EI_2}{L} & \frac{4 EI_1}{h} + \frac{4 EI_2}{L} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Considerando que m_2 contiene el peso propio del elemento y un porcentaje de la sobrecarga de la estructura, la matriz de amortiguamiento C se calculó con un amortiguamiento modal igual al 2%, para las frecuencias 1 hasta 3. Por otra parte, la estructura se somete al registro de “Northridge 1994 Tarzana CH1”, representada por la señal $\ddot{z}_g(t)$, donde la carga sísmica es la siguiente.

$$F_{sis}(t) = -[M] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{z}_g(t) \quad (6)$$

En base a esto la ecuación (7) rige el comportamiento de la estructura de referencia.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_{sis}(t) \quad (7)$$

donde $x = \{x_1 \ \theta_1 \ \theta_2\}^T$ es el vector de grados de libertad (desplazamiento y rotaciones); $\dot{x} = \{\dot{x}_1 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2\}^T$ es el vector de velocidad; y $\ddot{x} = \{\ddot{x}_1 \ \ddot{\theta}_1 \ \ddot{\theta}_2\}$ es el vector de aceleración.

Sub-estructuración

El modelo utilizado para la sub-estructuración se basa en el indicado por Darby et al. (2002) como muestra la Figura 2, donde la subestructura numérica está compuesta por la columna derecha y la viga de la estructura de referencia mientras que la subestructura experimental corresponde a la columna izquierda.

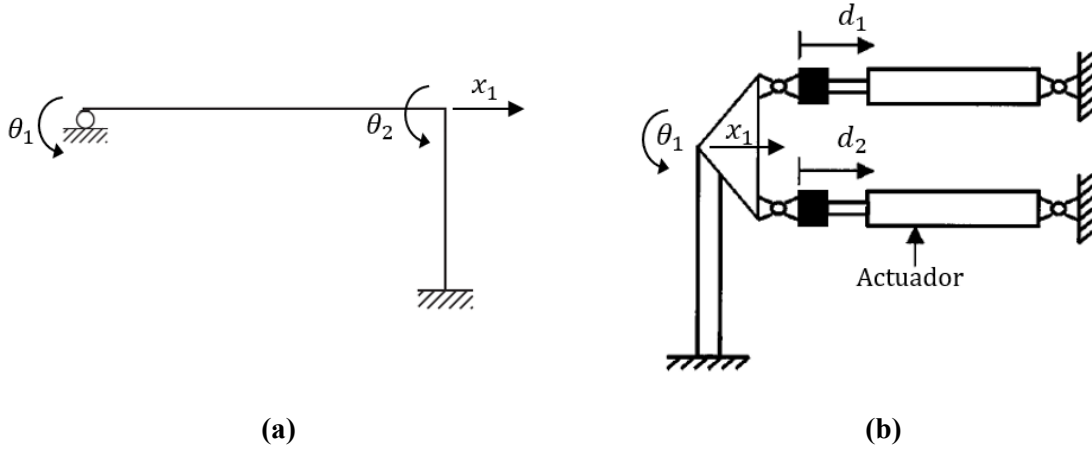


Figura 2: Subestructuración del sistema de referencia.

(a) Subestructura numérica. (b) Subestructura experimental (Darby et al., 2002).

La subestructura numérica (Figura 2a) se modela al igual que la estructura de referencia mediante un modelo de elementos finitos, mientras que la fuerza de restauración de la subestructura experimental (Figura 2b), se modela en base a la rigidez de la columna, como se muestra la ecuación (8). En realidad, la subestructura experimental tiene masa y amortiguación asociada, pero estas variables se incorporan en la subestructura numérica ya que la principal componente del retardo del actuador depende de la rigidez.

$$F_{rest} = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{h^3} & \frac{6EI_1}{h^2} \\ \frac{6EI_1}{h^2} & \frac{4EI_1}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

En base a lo descrito anteriormente se obtiene la ecuación (9) que rige el comportamiento de nuestro sistema híbrido, donde se incluyen ambas subestructuras.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_{sis} - F_{rest} \quad (9)$$

Actuador

El modelo de actuador que se utiliza corresponde al descrito en Carrion & Spencer (2007), y se ilustra en la Figura 3. El modelo del sistema de prueba servo-hidráulico se obtiene combinando modelos matemáticos del controlador, la servo-válvula, el actuador hidráulico y el espécimen de ensayo.

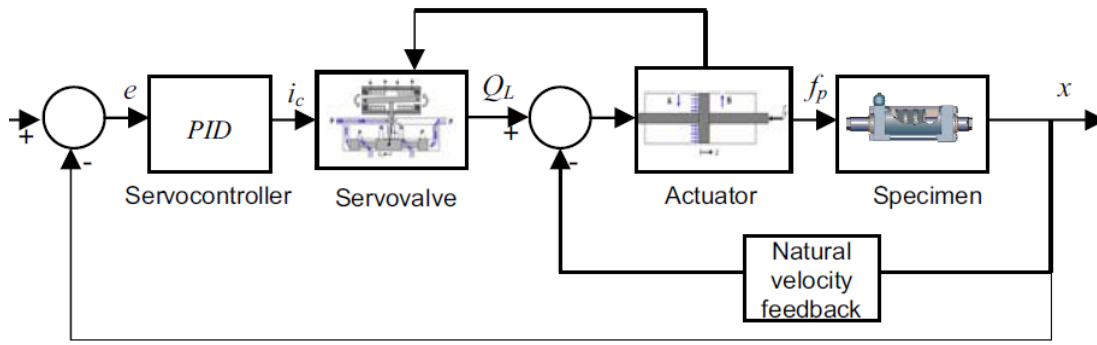


Figura 3: Diagrama de bloques de la dinámica del actuador (Carrion & Spencer, 2007).

Para las pruebas híbridas en tiempo real, la respuesta dinámica del sistema de carga se puede caracterizar a través de una función de transferencia, en este caso la función indicada en la ecuación (10) corresponde a la función de transferencia del actuador que tiene un denominador de tercer orden, es decir tres polos.

$$G_{xu}(s) = \frac{K_{prop} \frac{K_q A}{K_c}}{\left(\frac{V_t}{4\beta_e K_c} m_t\right) s^3 + \left(m_t + \frac{V_t}{4\beta_e K_c} c_t\right) s^2 + \left(c_t + \frac{V_t}{4\beta_e K_c} k + \frac{A^2}{K_c}\right) s + k + K_{prop} \frac{K_q A}{K_c}} \quad (10)$$

Donde los parámetros de la función de transferencia se indican en Tabla 2 y s corresponde a la variable de Laplace.

Tabla 2: Parámetros función de transferencia.

Componente	Parámetro	Valor	Unidad	Descripción
Controlador	K_p	3.0	mA/in	Gain proporcional
	τ_v	0.00332	s	Constante de tiempo servo-válvula
Servo-válvula	K_q	23.01	in ³ /s/mA	Gain válvula
	K'_c	1.36e-5	in ³ /s/psi	Gain presión del flujo en la válvula
Actuador	A	0.751	in ²	Área del pistón
	C_l	5.89e-6	in ³ /s/psi	Coefficiente de fuga del actuador
	V_t	48.66	in ³	Volumen de fluido en las cámaras actuador
	β_e	95958	psi	Effective oil bulk modulus
Componente experimental	m_t	0.023	Lb-s ² /in	Masa total del pistón
	c_t	9.509	Lb-s/in	Coefficiente de amortiguación
	k	234.8	Lb/in	Rigidez

De esta forma, se obtiene la siguiente función de transferencia aumentada:

$$G_{xu}(s) = \frac{6.12e6}{s^3 + 374s^2 + 73770s + 6.12e6} \quad (11)$$

Dado que la entrada y la salida de la función de transferencia del actuador es un desplazamiento, se debe realizar compatibilidad en la interfaz de las sub-estructuras como muestra la Figura 2(b) y se debe obtener la matriz de transformación cinemática que se detalla a continuación.

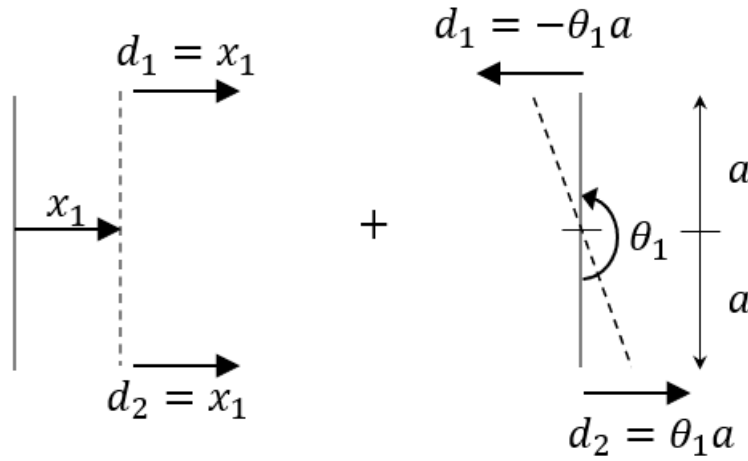


Figura 4: Compatibilidad de grados libertad de la estructura a desplazamientos de los actuadores.

El desplazamiento que debe aplicar cada actuador se basa en la suma de los aportes de los grados de libertad de la estructura x_1 y θ_1 , que se muestra gráficamente en Figura 4, con esto se obtiene la matriz de transformación cinemática T que se indica en la ecuación (12) que transforma coordenadas cartesianas a coordenadas del actuador.

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Con esto ya se puede resolver el sistema completo, ya que de la subestructura numérica se obtiene el desplazamiento y rotación, x_1 y θ_1 , que se debe aplicar en la subestructura experimental. Luego, mediante la matriz de transformación T se obtiene las elongaciones de los actuadores, d_1 y d_2 . Finalmente, las elongaciones medidas d_1' y d_2' son utilizadas para calcular el desplazamiento y rotación medida, x_1' y θ_1' , con retraso mediante la inversa de la matriz de transformación T , completando el bucle como indica la Figura 5.

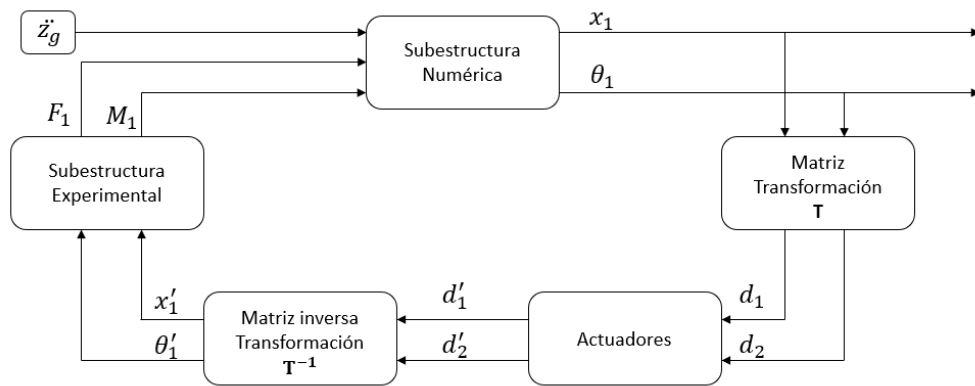


Figura 5: Diagrama sistema cerrado con actuador doble.

Compensación del retraso

En base a un reporte realizado por Galmez & Fernandois (2019), en el cual se realiza una revisión de diferentes métodos de compensación dinámica adaptativa, los controladores feedforward muestran ser los

mejores candidatos para la compensación del retraso en RTHS debido a su fácil diseño e implementación. Asimismo, un segundo reporte (Galmez & Fernandois, 2019a) en el cual se implementan controladores feedforward adaptivos para RTHS, demostró que una versión modificada del adaptive model based (Chen et al., 2015) tiene un mejor comportamiento tanto en el indicador de retraso como del error medio cuadrático de la respuesta.

Controlador feedforward

En primer lugar, se diseña un controlador feedforward como se indica en Figura 6.

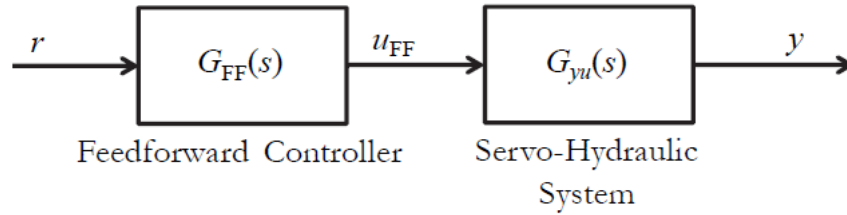


Figura 6: Esquema de controlador feedforward.

El controlador feedforward corresponde al propuesto en Phillips & Spencer (2011), basado en la función de transferencia condensada del actuador descrita en la ecuación (11), que puede ser escrito de forma alternativa como:

$$G_{yu}(s) = \frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3} \quad (13)$$

El objetivo del controlador feedforward es cancelar la dinámica del sistema servohidráulico utilizando el inverso de la ecuación (13), por lo cual la función de transferencia del controlador puede ser escrita como:

$$G_{FF}(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 \quad (14)$$

La ecuación (14) escrita en el dominio del tiempo es:

$$u_{FF}(t) = a_0r(t) + a_1\dot{r}(t) + a_2\ddot{r}(t) + a_3\dddot{r}(t) \quad (15)$$

Para calcular las derivadas de orden superior se utiliza una aproximación de diferencias finitas, como por ejemplo la Backward Finite Difference (Olver, 2014). Con esto, el controlador FeedForward escrito en el dominio discreto del tiempo se expresa como:

$$u_{FF}[i] = \left(a_0 + \frac{11a_1}{6\Delta t} + \frac{2a_2}{\Delta t^2} + \frac{a_3}{\Delta t^3}\right)x[i] + \left(\frac{-3a_1}{\Delta t} - \frac{5a_2}{\Delta t^2} - \frac{3a_3}{\Delta t^3}\right)x[i-1] \\ + \left(\frac{3a_1}{2\Delta t} + \frac{4a_2}{\Delta t^2} + \frac{3a_3}{\Delta t^3}\right)x[i-2] + \left(\frac{-a_1}{3\Delta t} - \frac{a_2}{\Delta t^2} - \frac{a_3}{\Delta t^3}\right)x[i-3] \quad (16)$$

Donde Δt es el periodo de muestreo en el sistema discreto, mientras que $x[i]$, $x[i-1]$, $x[i-2]$, $x[i-3]$ son el desplazamiento de comando en el paso de tiempo correspondiente.

Controlador feedforward adaptivo

En base esto el controlador que se diseña se muestra en Figura 7.

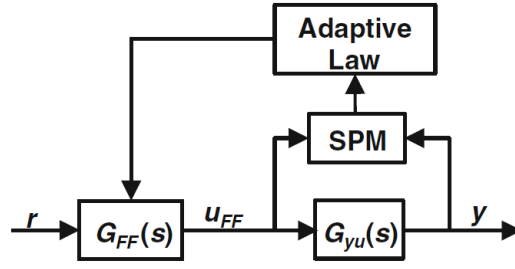


Figura 7: Esquema de control AMB (Chen et al., 2015).

Como se describió anteriormente el modelo de controlador feedforward adaptivo corresponde al propuesto por Chen et al. (2015) como se muestra en Figura 7 con modificaciones que se detallaran más adelante. Para implementarlo se debe obtener el *Static Parametric Model* (SPM) para luego aplicar la ley de control adaptiva. En primer lugar, se debe obtener la relación entre la entrada u y la salida y de la función de transferencia del actuador:

$$y = \frac{1}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (17)$$

El SPM se obtiene separando los parámetros de entrada y salida.

$$u = [a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0] [s^3 y \ s^2 y \ s y \ y]^T \quad (18)$$

Se aplica un filtro de paso bajo $\Lambda(s)$ a los términos conocidos, en el cual $\Lambda(s)$ es un polinomio Hurwitz donde todos los polos están ubicados en el lado izquierdo del plano complejo, obteniendo:

$$\frac{u}{\Lambda(s)} = [a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0] \left[\frac{s^3}{\Lambda(s)} y \ \frac{s^2}{\Lambda(s)} y \ \frac{s}{\Lambda(s)} y \ \frac{1}{\Lambda(s)} y \right]^T \quad (19)$$

Con esto se obtiene el error de estimación en base a las mediciones disponibles como:

$$\varepsilon = \frac{z - \theta^T w}{m_s^2} \quad (20)$$

donde $z = \frac{u}{\Lambda(s)}$ corresponde a la señal filtrada comandada, $\theta = [a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0]^T$ son los parámetros adaptivos a estimar, y $w = \left[\frac{s^3}{\Lambda(s)} y \ \frac{s^2}{\Lambda(s)} y \ \frac{s}{\Lambda(s)} y \ \frac{1}{\Lambda(s)} y \right]$ son las derivadas de la señal medida y pasadas por un filtro $1/\Lambda(s)$; mientras que el parámetro $m_s^2 = 1 + \alpha w^T w$ con $\alpha = 1$ corresponde a un peso asociado a la señal normalizada.

El algoritmo de gradiente se complementa con una función de costo instantáneo debido a la convergencia de sus parámetros, que corresponde a:

$$J(\theta) = \frac{\varepsilon^2 m_s^2}{2} = \frac{(z - \theta^T w)^2}{2 m_s^2} \quad (21)$$

donde el algoritmo de gradiente se usa para minimizar la función de costo respecto al vector de parámetros θ , dado por:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla J(\theta) = \Gamma \varepsilon w \quad (22)$$

donde $\dot{\theta}$ corresponde a la tasa de cambio de los parámetros adaptivos y Γ es la matriz de gains adaptivos que para este estudio se determina mediante ensayo y error.

Modificaciones al compensador AMB original

El método original AMB utiliza el criterio de estabilidad de Routh, el cual impone límites a los parámetros adaptivos a_i , y que para este estudio el criterio no fue considerado. La segunda modificación fue cambiar el filtro original propuesto por el autor ($\Lambda(s) = (s + 1)^3$) por un filtro de Butterworth de

sexto orden con frecuencia de corte 40 [Hz]. Como se puede apreciar en Figura 8, el filtro original(color naranja) incluso a bajas frecuencia modifica la amplitud de las señales a diferencia del filtro de Butterworth(color azul), esto perjudica el proceso de identificación y adaptación de parámetros adaptivos.

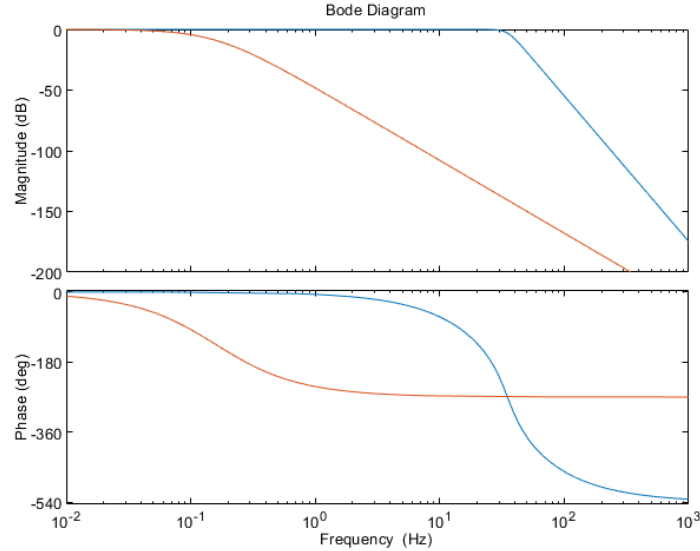


Figura 8: Diagrama de bode filtros en estudio.

(Línea azul: Butterworth; Línea naranja: Filtro original.)

Simulación numérica

Modelo computacional

Con todos los elementos definidos se implementa en Matlab/Simulink (R2020a), obteniendo el modelo que se puede apreciar en Figura 9. Todas las simulaciones se realizaron mediante el método de paso fijo de Runge-Kutta con $\Delta t = 1/2000$ [s].

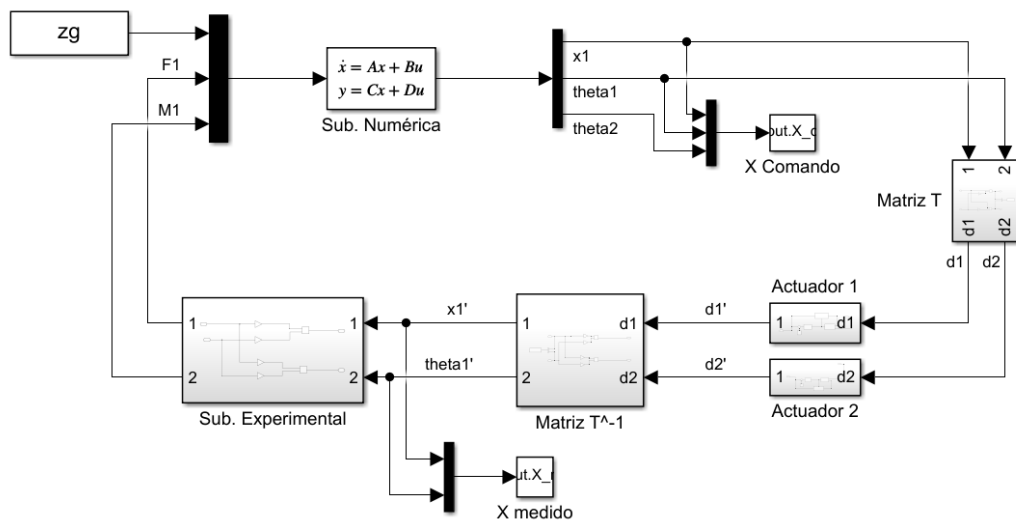


Figura 9: Modelo maRTHS implementado en Simulink.

Cada actuador es modelado con un subsistema “Actuador” genérico, como se detalla en Figura 10, dentro de este subsistema se puede apreciar la presencia de ruido que es modelado mediante un bloque

Band Limited White Noise (BLWN) con frecuencia de corte igual a 10 [Hz] y un valor de poder espectral equivalente al 1% del error medio cuadrático de la señal medida en el actuador, el subsistema “Control adaptivo” es en el que se obtienen los parámetros adaptivos a_i cómo se detalló en “Controlador feedforward adaptivo”, estos parámetros que ingresan al subsistema controlador feedforward implementado según la sección “Controlador feedforward”, mientras que la función de transferencia del actuador corresponde a indicada en ecuación (11).

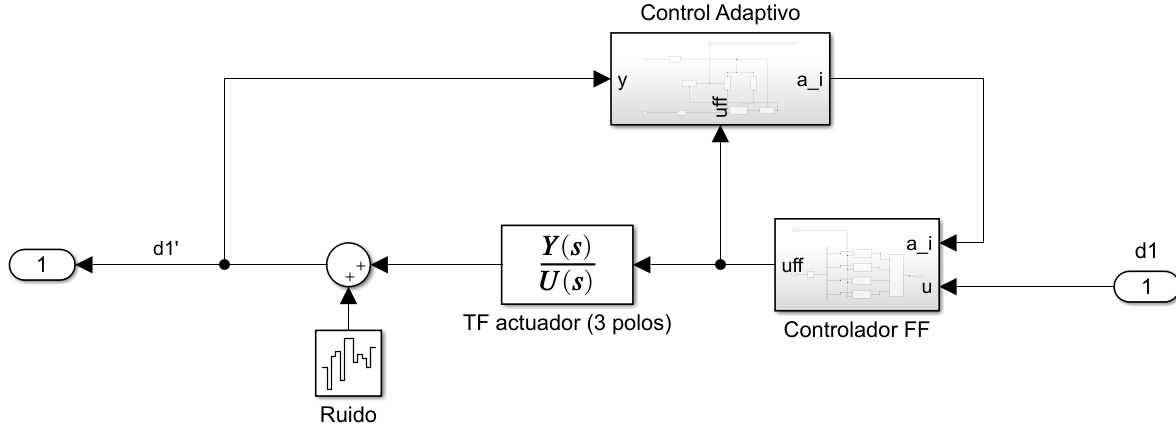


Figura 10: Detalle subsistema actuador.

Parámetros de evaluación

A continuación, se presentan los indicadores utilizados para evaluar el desempeño del ensayo RTHS multi-axial:

- **Gráfico de sincronización:** Grafico que el eje x corresponde al desplazamiento/rotación de referencia mientras que el eje y al desplazamiento/rotación medida, una correcta sincronización se aprecia al obtener una recta con pendiente 45°.
- **Error relativo:** se calcula para cada paso de tiempo “ i ”, como la diferencia entre el desplazamiento/rotación de referencia ($x_{ref,i}$) y el desplazamiento/rotación medida ($x_{m,i}$) dividido en el valor máximo de referencia, se expresa en porcentaje.

$$error_{rel,i} = \frac{x_{ref,i} - x_{m,i}}{\max|x_{ref}|} * 100\% \quad (23)$$

- **RMSE:** error medio cuadrático entre el desplazamiento/rotación medida (x_i^{med}) y desplazamiento/rotación referencia (x_i^{ref}), se expresa en unidades de desplazamiento/rotación.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_i^{ref} - x_i^{med})^2} \quad (24)$$

- **NRMSE:** error medio cuadrático normalizado entre el desplazamiento/rotación medida (x_i^{med}) y un desplazamiento/rotación referencia (x_i^{ref}), normalizado por el desplazamiento/rotación de referencia, se expresa en porcentaje.

$$NRMSE = \sqrt{\frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_i^{ref} - x_i^{med})^2}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_i^{ref})^2}} * 100\% \quad (25)$$

- **Retraso:** Desfase entre el desplazamiento/rotación medido y desplazamiento/rotación objetivo obtenido mediante frequency evaluation index (FEI) (Guo et al., 2014), se expresa en milisegundos[ms].
- **Amplitud:** Error de amplitud entre el desplazamiento/rotación medido y desplazamiento/rotación objetivo obtenido mediante frequency evaluation index (FEI) (Guo et al., 2014), adimensional.
- **J2:** NRMSE entre el desplazamiento/rotación medido y desplazamiento/rotación referencia.
- **J4:** NRMSE entre el desplazamiento/rotación medido y desplazamiento/rotación objetivo.

Resultados y análisis

Estructura de referencia

Al resolver el sistema de referencia sometido al registro de “Northridge 1994 Tarzana CH1” mediante un modelo espacio estado, se obtiene un desplazamiento máximo de 14.43 [mm] y una rotación máxima de 0.0205 [rad] en el nodo de control.

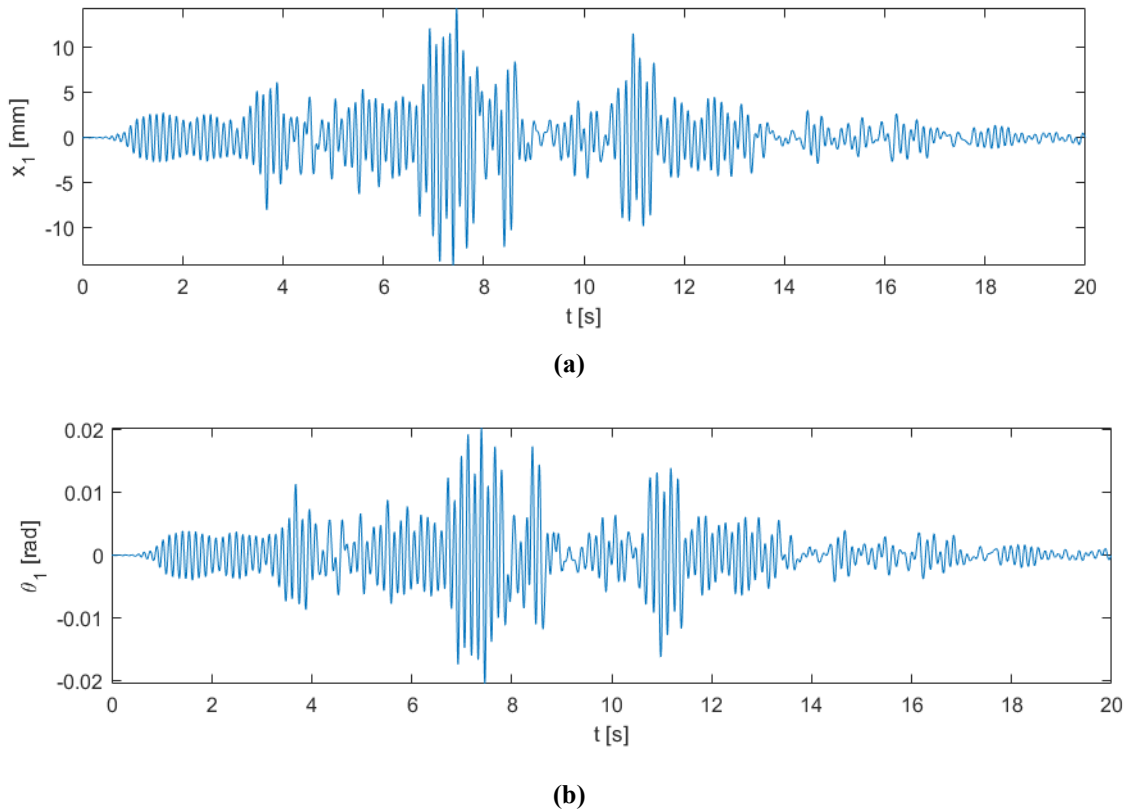


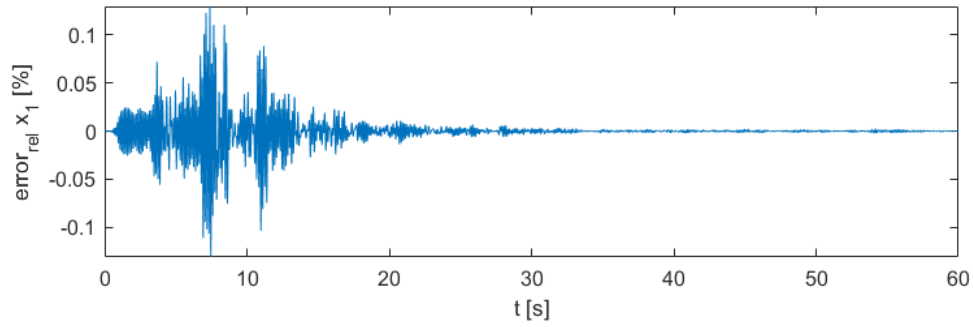
Figura 11: Respuesta del sistema de referencia: (a) desplazamiento; (b) rotación.

Subestructura

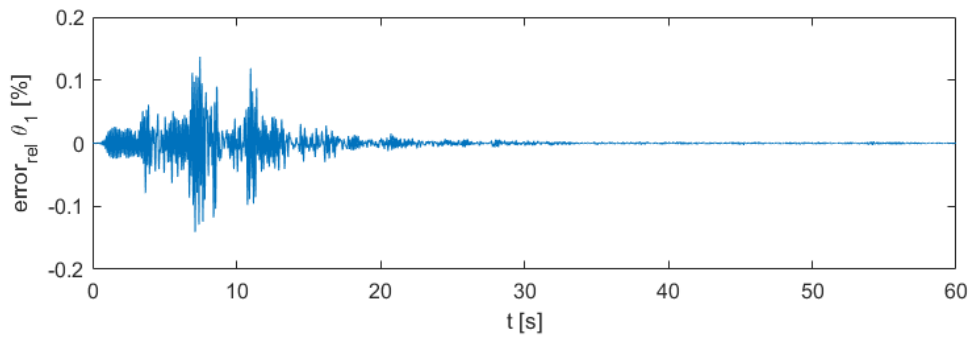
Para la subestructuración se calcula el error relativo a cada una de las respuestas de interés según lo indicado en la ecuación (23), obteniendo errores relativos cercanos al 0.1% lo cual es muy bajo, además se calculan los indicadores RMSE y NRMSE para cada uno de los grados de libertad.

Tabla 3: RMSE y NRMSE para la subestructuración.

GL	RMSE	NRMSE [%]
x_1	2.23e-03	0.1307
θ_1	3.37e-06	0.1395



(a)



(b)

Figura 12: Error relativo simulación con subestructuración: (a) desplazamiento; (b) rotación.

Actuador

Para determinar el retraso de un solo actuador se somete el desplazamiento x_1 de la estructura de referencia a la función de transferencia indicada en la ecuación (11), para analizar el retraso inducido por el actuador se grafica la respuesta objetivo y la respuesta del actuador y como se puede ver en la Figura 13 existe desfase y error en la amplitud en la respuesta, que se indican en Tabla 4.

Tabla 4: Parámetros evaluación al someter desplazamiento x_1 al TF actuador.

Amplitud	Retraso [ms]	NRMSE [%]
0.8852	12.1	50.45

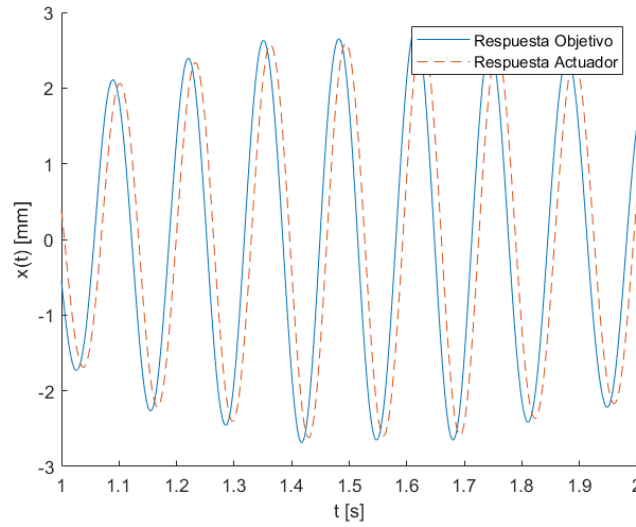


Figura 13: Análisis grafico del retraso inducido por el actuador.

Simulaciones sin compensador

Con todos los elementos necesarios para realizar una simulación híbrida multi-axial se unen en un solo modelo como se muestra en Figura 5. Como se puede apreciar a continuación, la respuesta del grado de libertad 1 es totalmente inestable (Figura 14a). Para complementar se realiza el grafico de sincronización (Figura 14b) entre la respuesta objetivo y la respuesta medida que en el caso de tener una respuesta totalmente sincronizada se espera obtener una recta con pendiente 45 grados y como se puede apreciar se obtiene una serie de curvas lo cual indica que se le está agregando energía al sistema.

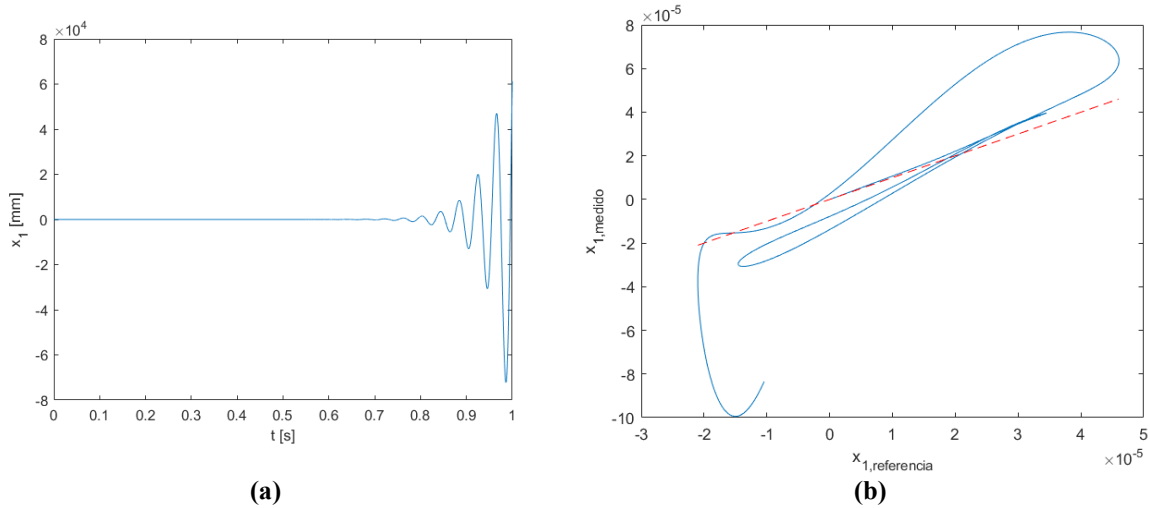


Figura 14: Respuesta de simulación híbrida sin compensación:

(a) respuesta en el tiempo; (b) grafico de sincronización (Nota: línea segmentada roja indica sincronización ideal).

Estabilidad

Debido a los resultados anteriores del sistema sin compensar (Figura 14) se realiza un análisis de la estabilidad del sistema de múltiples actuadores para reflejar la interacción que existe entre ellos al momento de controlar los grados de libertad de la subestructura.

Para esto se representaran los actuadores mediante la función de transferencia más simple según lo descrito en Carrion & Spencer (2007), consistente en un sistema de primer orden (ecuación (26)) que solo depende de la constante de tiempo τ_{xu} .

$$G_{xu}(s) = \frac{1}{\tau_{xu}s + 1} \quad (26)$$

En la misma referencia demuestran que, para frecuencias bajas, el retardo de tiempo (δ_d) es igual a la constante de tiempo (τ_{xu}). Además, como se muestra en la Figura 15, para constantes de tiempo τ_{xu} altas existe un desfase de tiempo alto, por lo cual se iteraran valores de constante de tiempo del orden de $\tau_{xu} = 0.0001$ [s], lo que equivale a retrasos del orden de los $\delta_d = 0.1$ [ms], para no tener problemas de magnitud y solo afecte el retraso en la respuesta del actuador.

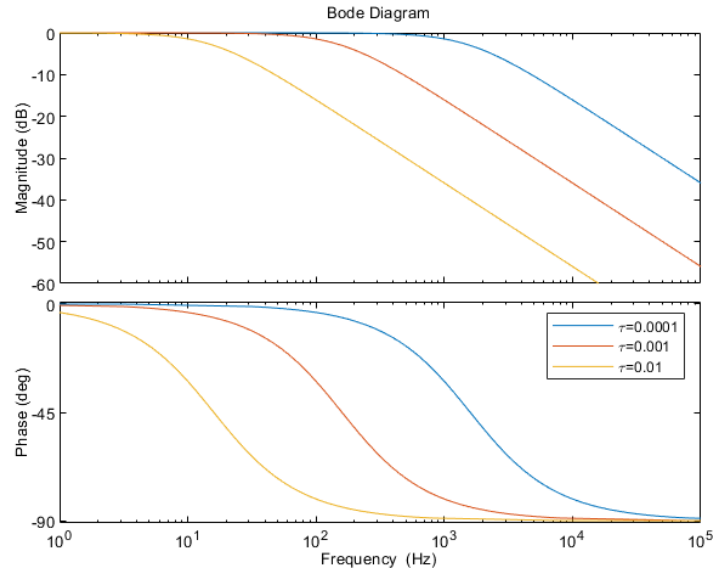


Figura 15: Efecto de la constante de tiempo τ_{xu} en la función de transferencia del actuador de 1 polo.

En el siguiente análisis se varían los parámetros δ_d (retraso del actuador) y se clasifica cada situación si la respuesta es estable o no, como se puede apreciar en la Figura 16. Los ejes “x” e “y” representan el retraso de cada uno de los actuadores, apreciando que el rango de estabilidad del sistema es muy acotado, lo que demuestra la interacción entre los grados de libertad y como afecta el retraso impuesto por los actuadores. Esto da respuesta a porque en la simulación realizada utilizando la función de transferencia de tres polos sin compensar el retraso la respuesta es inestable, ya que el retraso que impone este tipo de actuadores es de 12.1[ms], lo cual está totalmente fuera del rango de estabilidad.

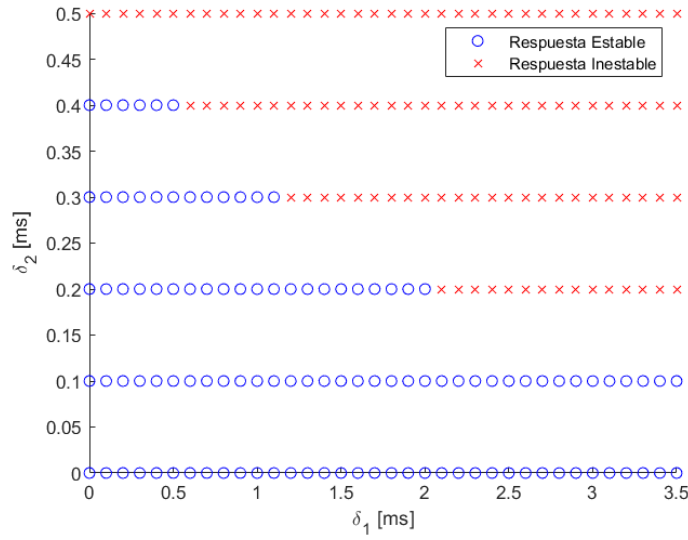


Figura 16: Rango de estabilidad para el sistema.

La anterior clasificación (Figura 16) considera como criterio de estabilidad la situación cuando la respuesta total de la estructura converge a cero luego de que la carga sísmica deja de ser aplicada. Pero no cuantifica el error que se está cometiendo por cual se calcula el NRMSE para ambos grados de libertad, el cual puede ser significativo.

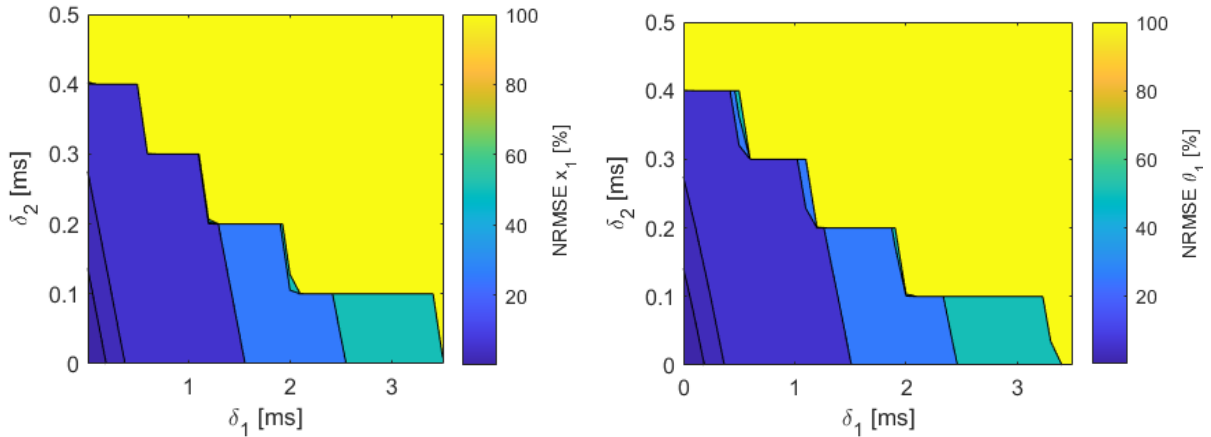


Figura 17 : Error medio cuadrático normalizado para grados de libertad x_1 y θ_1 .

Como se puede apreciar en la Figura 17 el rango de interés es aún más acotado cuando se considera el error de sincronización. Para que el indicador NRMSE sea menor a 25%, el retraso de uno de los actuadores debe ser como máximo 0.4 [ms] mientras que el retraso del otro debe ser como máximo 1.5 [ms]. Por otro lado, si el retraso de uno de los actuadores está sobre 0.4 [ms] y el otro sobre los 3 [ms], el NRMSE es sobre el 100%, por lo cual se debe utilizar un método de compensación dinámico en los actuadores capaz de reducir el retraso alrededor de los 0.4 ~ 1.0 [ms].

Compensador feedforward

En primer lugar, se implementa el compensador feedforward y los resultados son satisfactorios debido a que los gráficos de sincronización presentados a continuación (Figura 18, izquierda). Como se puede apreciar, se acercan bastante al caso ideal y el retraso está dentro del rango de estabilidad del sistema como se indica en Tabla 5, además como se indica en la misma tabla hay una leve amplificación en las señales medidas. Cabe destacar que es posible tener mejores resultados si el tiempo de muestreo disminuye, ya que este método depende principalmente de la aproximación de derivadas de orden

superior de las señales, pero se utiliza 2000 [Hz] ya que este valor es cercano al utilizado usualmente en ensayos reales.

Tabla 5: Parámetros evaluación controlador feedforward.

GL	J2 [%]	Amplitud	Retraso [ms]
x_1	7.70	1.0038	-0.06
θ_1	7.80	1.0041	-0.06

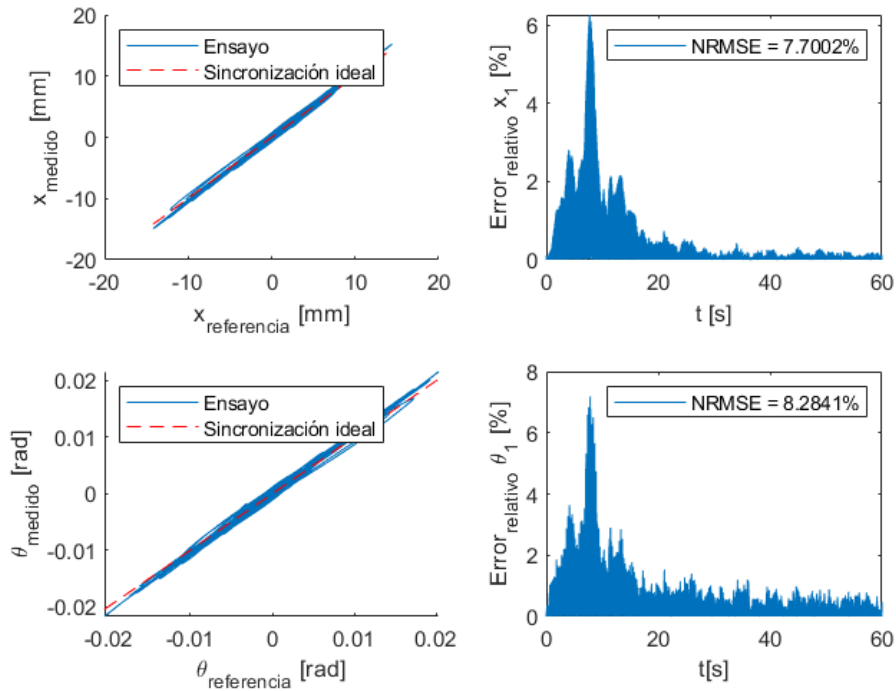


Figura 18: Resultados Compensador FF, izquierda: gráficos sincronización, derecha: Error relativo.

Desempeño compensador feedforward

Para evaluar el desempeño de este compensador se modifica la planta nominal del actuador descrita en la ecuación (13) mediante una constante p como se indica en ecuación (27). Este parámetro se varía hasta modificar las constantes a_i del actuador en un 10%, sin modificar las constantes a_i del compensador.

$$G_{yu}(s) = \frac{1}{p[a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3]} \quad (27)$$

Como se puede apreciar en Figura 19, el error aumenta proporcional a las variaciones realizadas a la planta nominal del actuador. A modo demostrativo, se obtienen la respuesta del sistema al variar ambos actuadores en un 10% (Figura 20), y se puede observar una mala respuesta en el gráfico de sincronización, ya que a lo largo de toda la simulación presenta diferencias entre el valor deseado y el medido y errores relativos muy altos, sumado a un aumento en el retraso como se pudo apreciar en Tabla 6 con respecto al modelo sin modificaciones. Además, si se compara el parámetro $J2$ (Tabla 6) con el obtenido con anterioridad, este aumenta considerablemente. Es por esto que es necesario diseñar un compensador adaptivo capaz de adaptarse a cambios en la planta nominal del actuador o una mala identificación de parámetros.

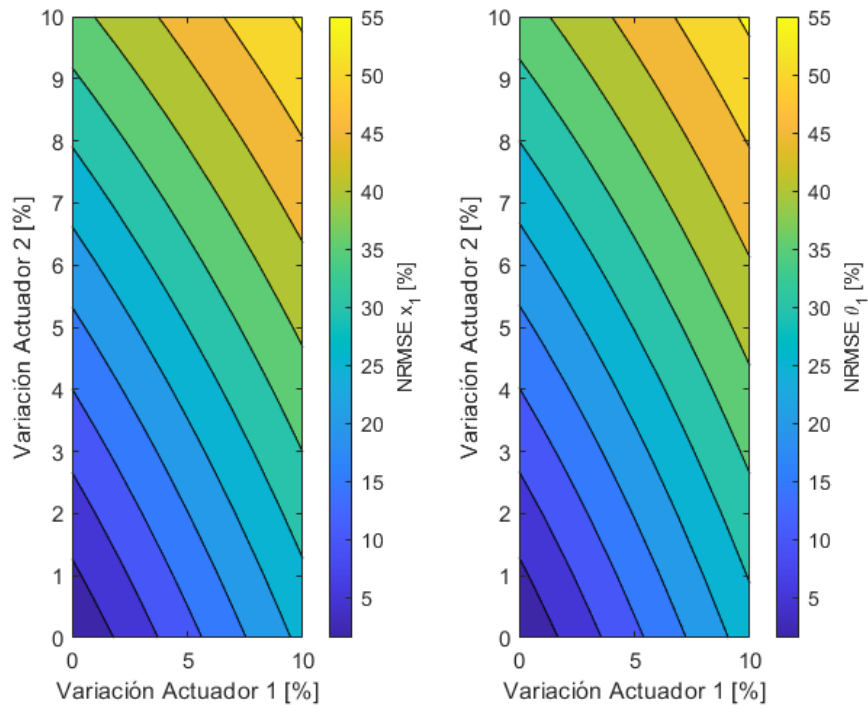


Figura 19: Valor J_2 en funcion de la variaciones realizadas a planta nominal del actuador.

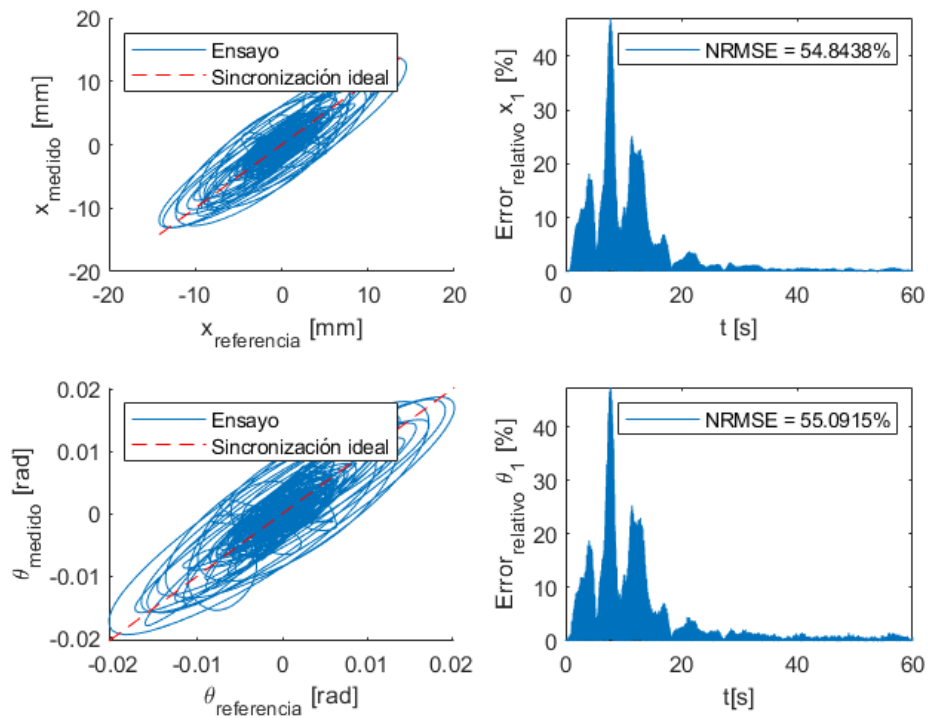


Figura 20: Respuesta Sistema al modificar planta nominal de ambos actuadores en un 10%.

Tabla 6: Parámetros evaluación al modificar planta nominal de ambos actuadores en un 10%.

GL	J2 [%]	Amplitud	Retraso [ms]
x_1	55.03	0.997	0.15
θ_1	55.22	0.997	0.14

Compensador feedforward adaptivo

Debido al mal comportamiento del controlador feedforward ante incertidumbre en la planta nominal del actuador, el siguiente paso es implementar el controlador feedforward adaptivo. Los resultados de este tipo de compensador son muy satisfactorios como se puede apreciar en Tabla 7, ya que el indicador de amplitud es muy cercana a uno y el de retraso muy cercano a cero. Por otra parte, se obtiene una buena sincronización entre la respuesta medida y el valor de referencia, que se puede apreciar en Figura 21. Además, se evidencian valores bajos de indicadores $J2$ y $J4$, esto se puede apreciar en el gráfico de sincronización (Figura 22, izquierda). Respecto al error relativo (Figura 22, derecha) este permanece constante durante toda el ensayo esto se debe a la presencia de ruido en el sistema.

Tabla 7: Parámetros evaluación compensador FF adaptivo.

GL	J2 [%]	Amplitud	Retraso [ms]	J4%
x_1	0.8766	0.9998	-0.0056	0.4444
θ_1	3.1994	0.9994	0.0078	1.4647

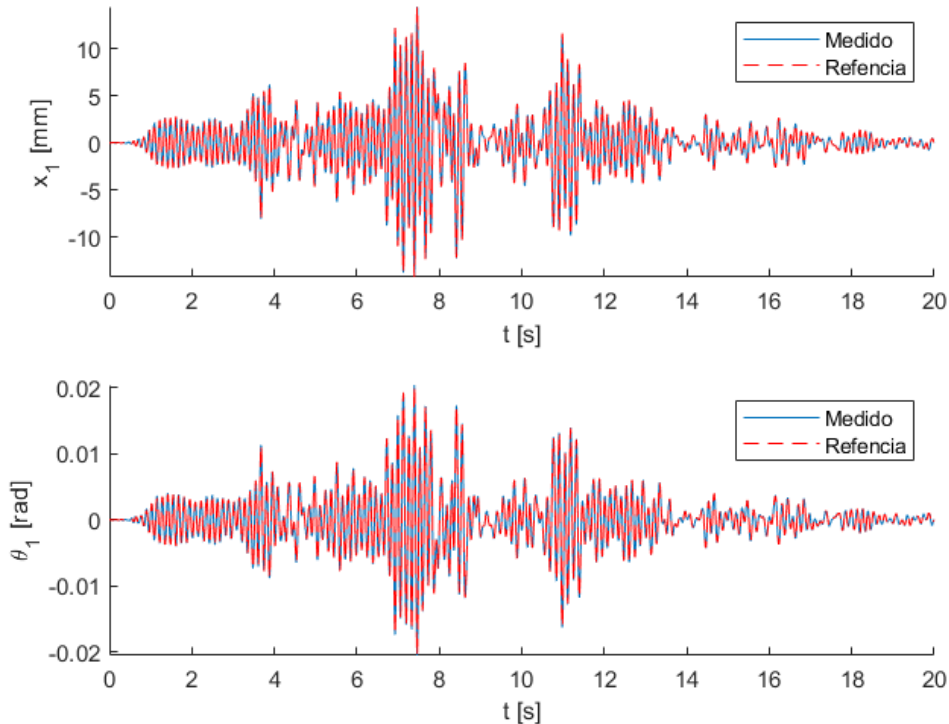


Figura 21: Respuesta sistema completo.

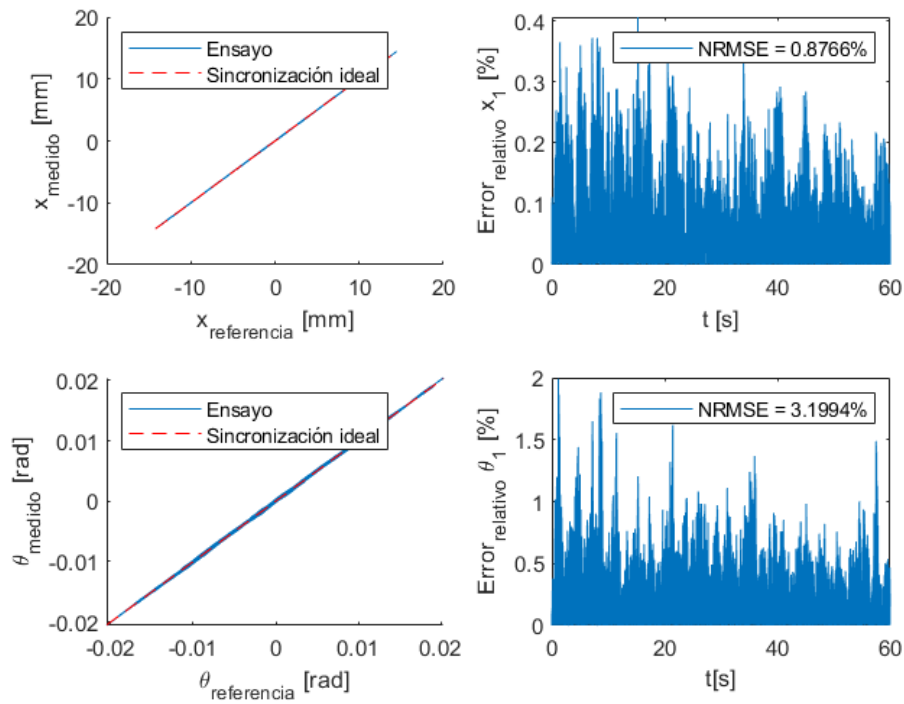


Figura 22: Resultados Compensador FF adaptivo:

Izquierda: gráficos sincronización; derecha: error relativo.

Respecto a la adaptación de parámetros adaptivos (Figura 23), existe una leve adaptación ya que no existen cambios en la planta nominal, solo hay presencia de ruido en el sistema.

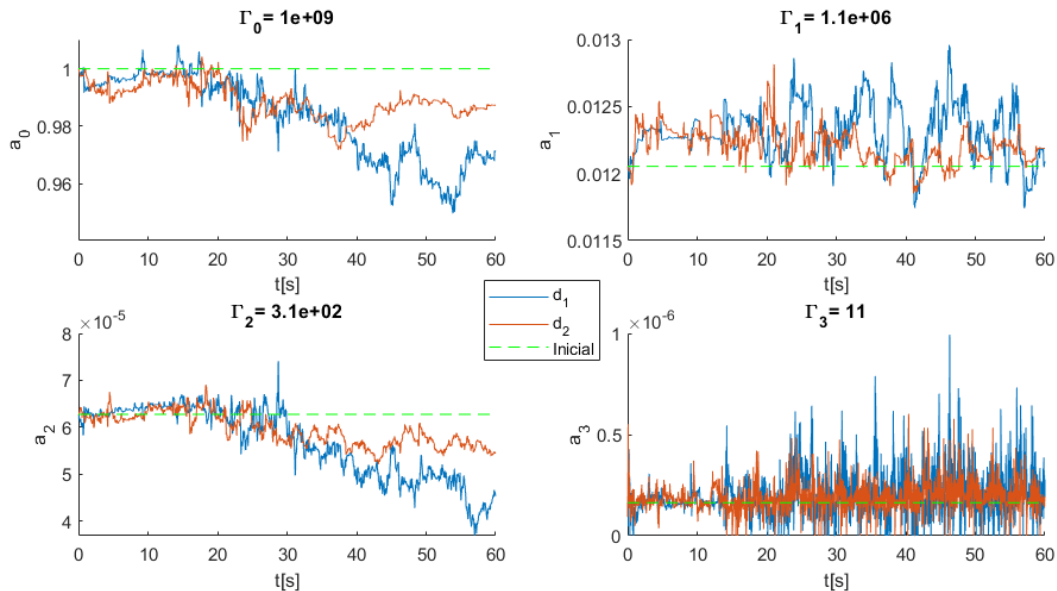


Figura 23 : Adaptación parámetros adaptivos del controlador. (Nota: línea verde segmentada indica valor inicial, d_i indica adaptación parámetro actuador “i”).

Se debe mencionar que la matriz de gains adaptivos fue calibrada mediante prueba y error, modificando la función de transferencia de los actuadores en un 30% y evaluando para que valores se obtiene un

menor valor de J_2 . En base a este criterio, la matriz de gains adaptivos corresponde a la presentada en ecuación (28), que se utiliza para todas las simulaciones.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.9999e9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.09e6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.1e2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1e1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Desempeño compensador feedforward adaptivo

Para analizar el desempeño del compensador adaptivo se examinará la respuesta ante dos fuentes de error: la primera corresponde a cambios en la función de transferencia del actuador de la misma manera que se indica en ecuación (27); la segunda fuente de error corresponde a un retraso puro introducido al sistema como se muestra en Figura 25, los casos en estudio se describen en Tabla 8.

Tabla 8: Descripción de casos de evaluación de desempeño compensador FF adaptivo.

Caso	Descripción*
I	Actuadores sin modificaciones.
II	Ambos actuadores modificados en un 10%.
III	Ambos actuadores modificados en un 20%.
IV	Ambos actuadores con un retraso de 0.5 [ms].
V	Actuador 1 con un retraso de 1 [ms] y actuador 2 con un retraso de 2[ms].
VI	Ambos actuadores modificados en un 10% y retraso de 0.5 [ms].

*Todos los casos indicados en Tabla 8 incluyen la presencia de ruido en el sistema.

Los casos descritos en Tabla 8 se evaluarán en dos registros sísmicos de diferentes características: el primero corresponde al registro utilizado durante todo el estudio (Northridge 1994 TarzanaCH1), que es un sismo de corta duración y un PGA elevado; y el segundo corresponde a un registro nacional (Maule 2010-Concepcion-L), con un PGA no tan alto como de Northridge pero si una larga duración como se puede apreciar en Figura 24, ambos registros no son escalados, es decir, corresponden a 100% PGA.

Tabla 9: Parámetros evaluación registro Northridge 1994.

Caso	GL	J2 [%]	Amplitud	Retraso [ms]	J4%
I	x_1	0.877	1.000	-0.006	0.444
	θ_1	3.199	0.999	0.008	1.465
II	x_1	2.430	0.999	-0.014	0.814
	θ_1	5.597	0.999	-0.009	2.105
III	x_1	11.694	0.993	-0.054	2.793
	θ_1	44.265	0.952	0.265	11.794
IV	x_1	1.214	1.000	0.002	0.480
	θ_1	3.983	1.000	-0.024	1.602
V	x_1	5.776	1.000	-0.006	1.255
	θ_1	14.403	0.992	0.012	3.358
VI	x_1	3.489	0.998	-0.022	0.995
	θ_1	5.667	0.999	-0.028	2.247

Tabla 10: Parámetros evaluación registro Maule 2010.

Caso	GL	J2 [%]	Amplitud	Retraso [ms]	J4%
I	x_1	0.790	1.000	-0.001	0.378
	θ_1	2.730	1.000	0.004	1.308
II	x_1	1.158	1.000	-0.003	0.474
	θ_1	2.960	1.000	0.007	1.358
III	x_1	2.256	0.999	-0.009	0.733
	θ_1	4.316	1.000	0.018	1.872
IV	x_1	0.895	1.000	0.001	0.384
	θ_1	2.698	0.999	0.002	1.323
V	x_1	6.158	1.000	0.049	1.152
	θ_1	18.812	1.002	-0.080	4.019
VI	x_1	1.288	1.000	0.001	0.475
	θ_1	3.055	1.000	0.002	1.375

Respecto a la adaptación de parámetros adaptivos “ a_i ” (Figura 26, 28, 30) se puede apreciar que independientemente del tipo de variación realizada a la planta nominal existe adaptación de parámetros a excepción del parámetro “ a_3 ” que su adaptación es más bien aleatoria y presenta una mayor dispersión, por lo cual no será tomada en cuenta al momento de analizar su adaptación.

Para examinar el comportamiento de la adaptación de parámetros se analizan tres casos representativos, el primero corresponde al caso III sometido al registro de Northridge, debido a que este caso presenta los mayores errores de amplitud, retraso y NRMSE (J2 y J4), en especial en el grado de libertad rotacional ya que presenta grandes diferencias respecto a su valor de referencia (J2), apreciando en Figura 27 las grandes diferencias de amplitud en la rotación se producen los primeros 5 segundos, luego de esto la respuesta presenta un alto grado de sincronización en ambos grados de libertad, contrastando esto con adaptación de parámetros se puede apreciar que “ a_1 ” tiene una adaptación rápida en comparación a “ a_0 ” y “ a_2 ”, por lo cual se puede asociar a los grandes errores de amplitud a estos parámetros.

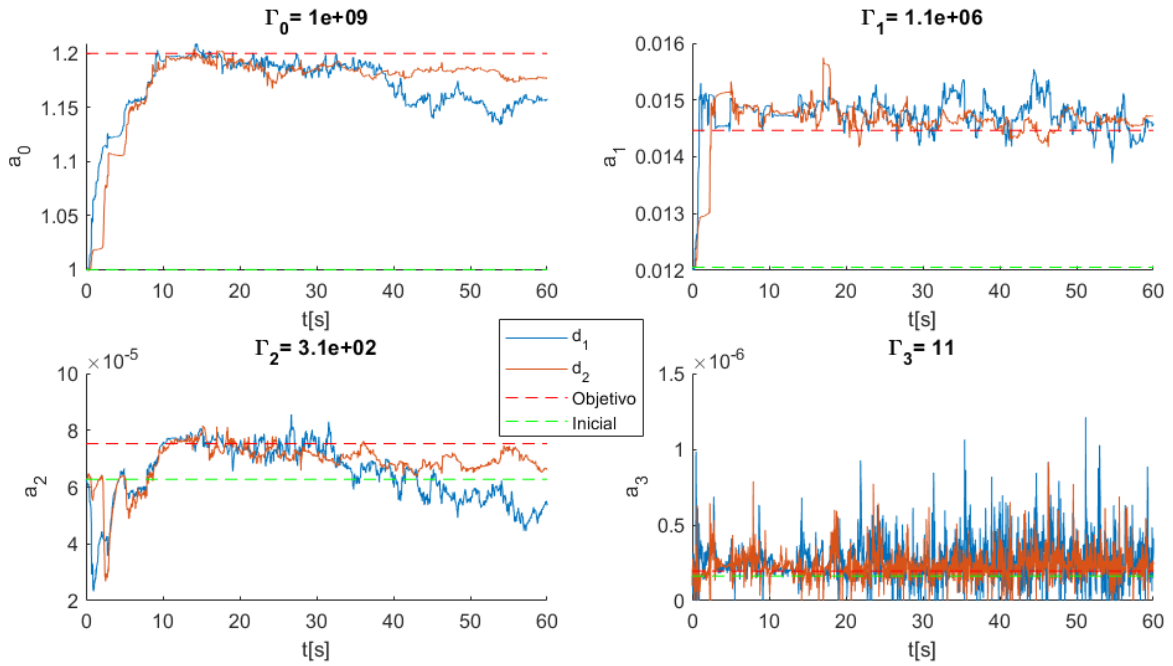


Figura 26: Evolución parámetros adaptivos, caso estudio III, terremoto Northridge 1994.

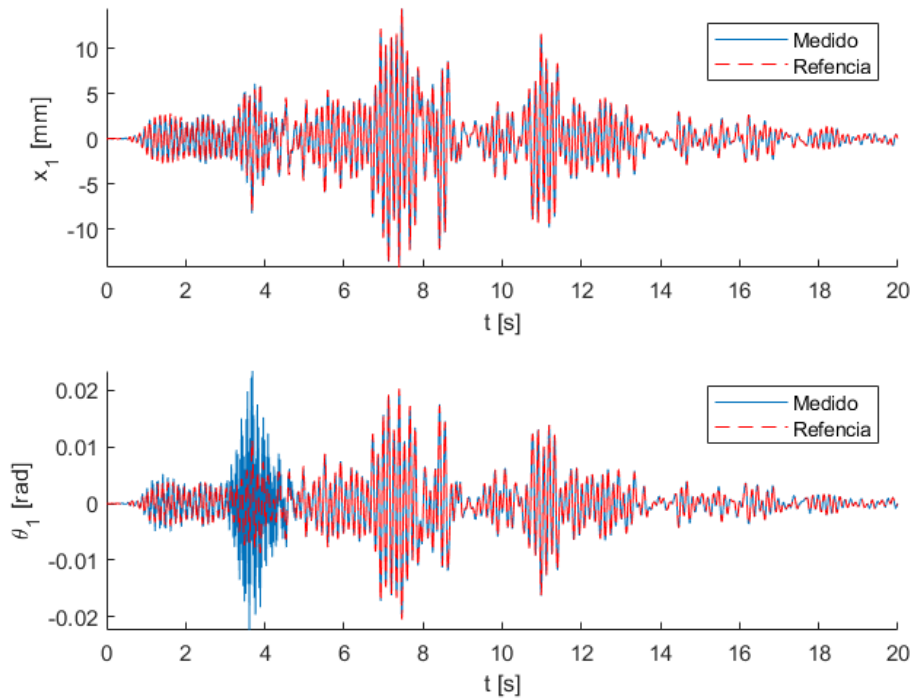


Figura 27: Respuesta del sistema estructural, caso estudio III, terremoto Northridge 1994.

El segundo caso de estudio corresponde al caso V, sometido al registro Maule 2010 al cual se le agrego un retraso puro de diferente magnitud a cada actuador con el fin de analizar el caso en que no se tienen actuadores gemelos interactuando y como se puede apreciar en Figura 28 el parámetro a_1 tienen una rápida adaptación y estabilización en tiempo en contraste a lo que ocurre con los parámetros a_0 y a_2 , además se puede apreciar que la adaptación ocurre a diferentes niveles por lo cual el compensador es capaz de adaptarse a la situación de actuadores distintos. Complementando estos resultados con la

respuesta de los grados de libertad (Figura 29), se puede apreciar que se tiene una respuesta compensada en cuanto a retraso, pero con problemas de compensación en amplitud por lo cual se puede asociar que la compensación del retraso está muy relacionada con la adaptación del parámetro a_1 .

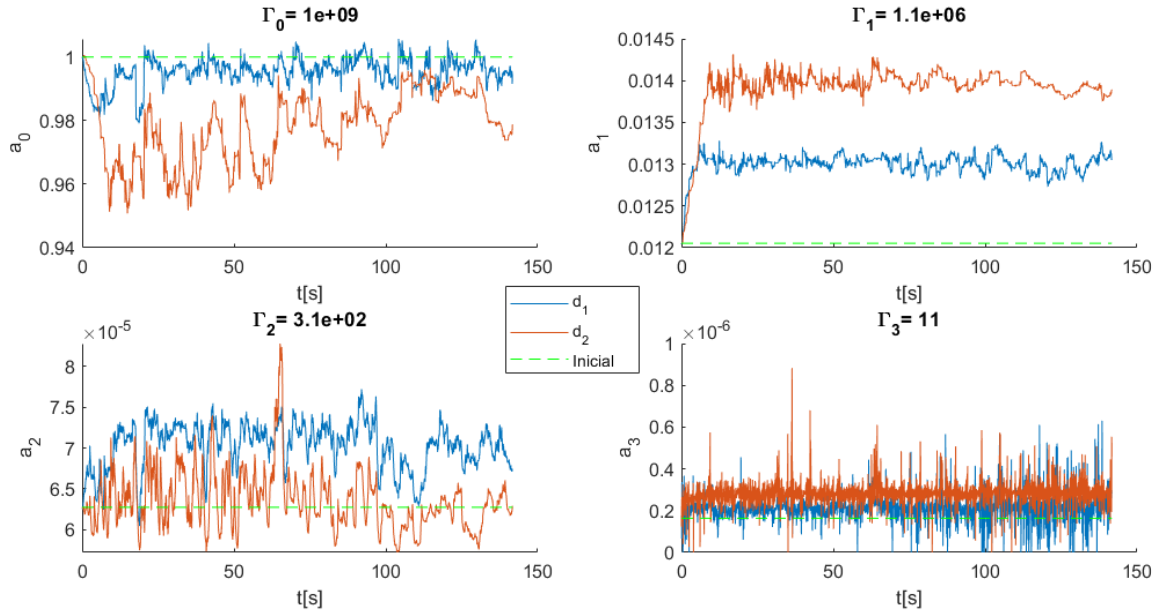


Figura 28: Evolución parámetros adaptivos, caso estudio V, terremoto Maule 2010.

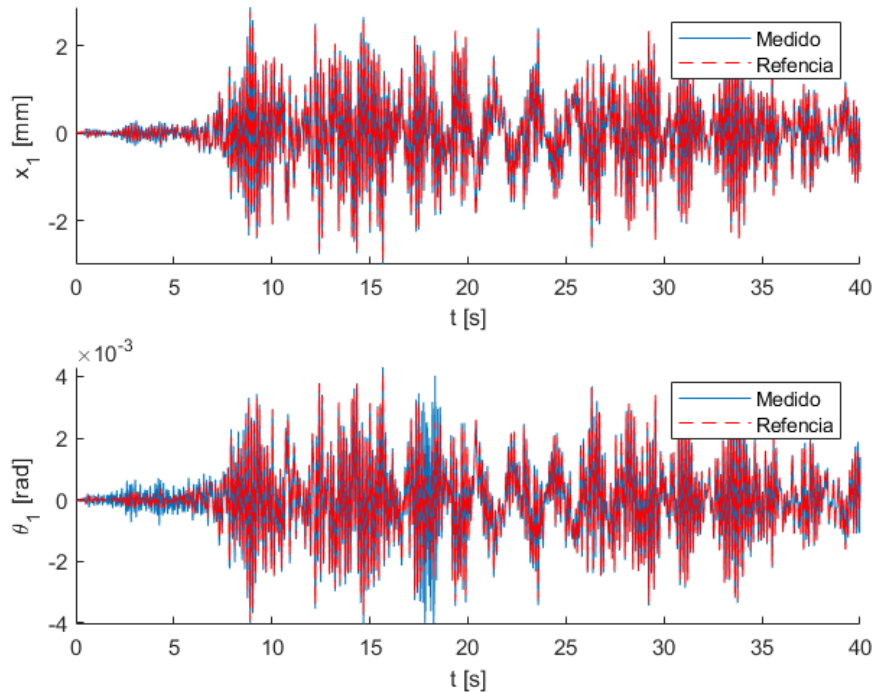


Figura 29: Respuesta estructural, caso estudio V, terremoto Maule 2010.

El tercer caso en estudio corresponde al caso VI que es una combinación de dos fuentes de error: una mala identificación de la planta nominal del actuador y un retraso puro. Se puede apreciar un buen comportamiento en la respuesta de ambos grados de libertad, ya que como se muestra en el gráfico de

sincronización (Figura 31, Izquierda) la sincronización es muy cercana a la ideal. Respecto a los parámetros adaptivos, se puede reafirmar que el parámetro a_1 está relacionado con la variable del retraso, a_0 con los errores de amplitud y a_2 correspondería una combinación de ambas variables.

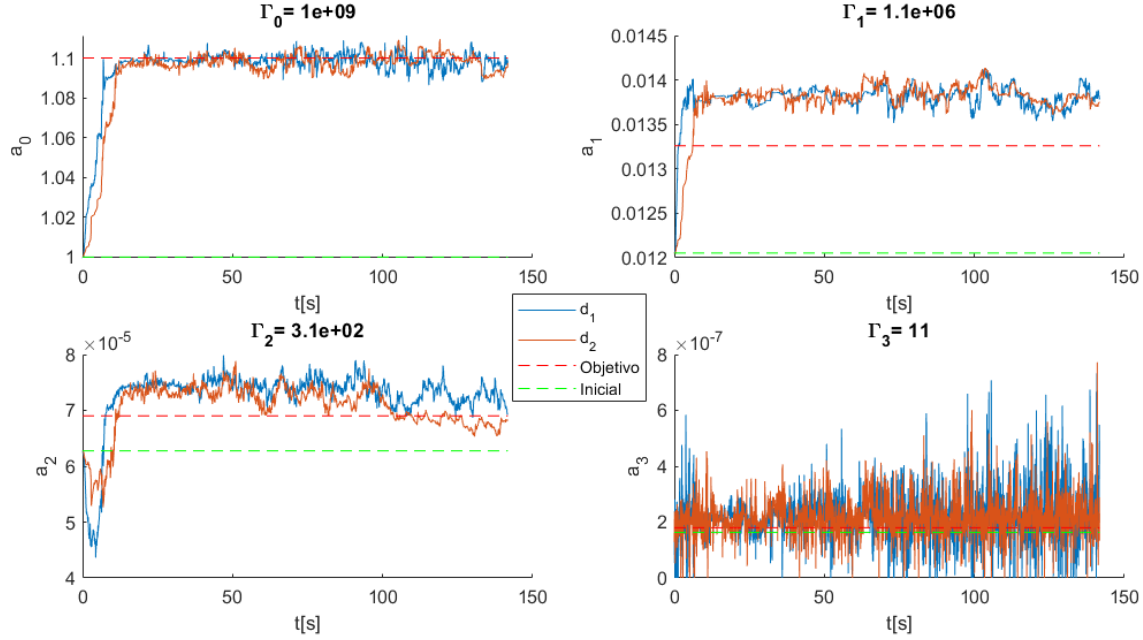


Figura 30: Evolución parámetros adaptivos, caso estudio VI, terremoto Maule 2010.

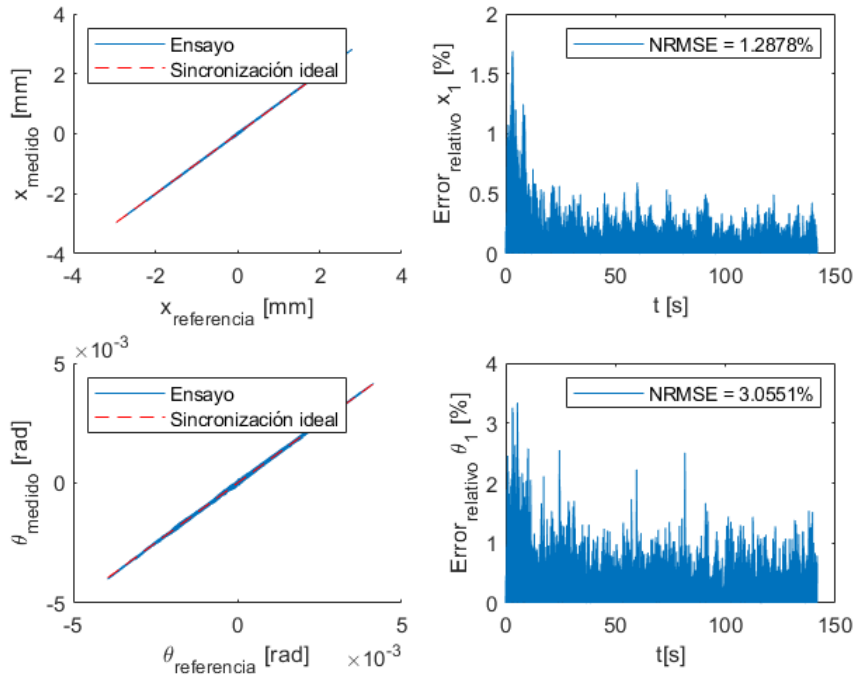


Figura 31: Error de Sincronización, caso de estudio VI, terremoto Maule 2010.

Izquierda: Grafico sincronización, Derecha: Error relativo.

Conclusiones

Este estudio presenta un primer acercamiento a la simulación híbrida en tiempo real multi-axial (maRTHS) en el cual la subestructuración está basada en la rigidez de la subestructura experimental, utilizando actuadores servo-hidráulicos conectados a un soporte rígido para imponer condiciones de contorno multiaxiales en un punto. El estudio muestra lo propenso a inestabilidades que son este tipo de sistemas, demostrando la necesidad de compensar el retraso generados por los actuadores en ensayos maRTHS. En específico, para tener buenos resultados el retraso debe ser compensado bajos los 0.5 milisegundos.

La compensación fue implementada de manera desacoplada, es decir, cada canal del actuador fue compensado de forma independiente. Este tipo de esquema desacoplado facilitó el diseño de los controladores estudiados. En primer lugar, se implementó el controlador feedforward convencional, demostrando un buen comportamiento en cuanto a estabilidad del sistema, errores de amplitud y retraso. Las principales debilidades de este método son la forma en que se obtienen las derivadas de orden superior, ya que estas fueron obtenidas mediante aproximaciones numéricas. También, demostró no ser un buen compensador al momento de existir incertidumbre en la planta nominal del actuador.

Por lo tanto, el siguiente paso fue implementar un controlador feedforward adaptivo AMB que demostró un excelente comportamiento ante una correcta identificación de parámetros adaptivos de la planta nominal del actuador. Este método fue validado ante diferentes fuentes de error, siendo el grado de libertad más afectado la rotación en cuanto errores de amplitud ante todas las variaciones realizadas. Los errores evaluados pueden asociarse principalmente a las aproximaciones numéricas que se utilizaron para obtener derivadas de orden superior. Además presentó un mejor comportamiento ante terremotos como el de Chile 2010 cuya duración de movimiento fuerte es significativa.

En cuanto a la validación del método AMB se probó que el compensador es capaz de adaptarse y estabilizar el ensayo maRTHS a diferentes niveles de intensidad sísmica y en diferentes fuentes de error en la planta nominal del sistema. Pero el más llamativo corresponde al caso en que no se tiene actuadores gemelos. Por otra parte, se mostró la importancia de la calibración de los gains adaptivos del método AMB ya que si estos no eran los adecuados la adaptación podía ser muy lenta, nula o excesiva. En este estudio fueron calibrados mediante prueba y error teniendo buenos resultados, pero lo adecuado sería calibrar mediante la definición de una función objetivo de error como por ejemplo J_2 y minimizar esta mediante algún método de optimización, como por ejemplo "Particle Swarm Optimization".

Otro aspecto que se puede apreciar en la validación del método propuesto es la gran diferencia existente entre los indicadores de desempeño NRMSE, J_2 y J_4 , que indican que existe una gran diferencia entre el desplazamiento/rotación de referencia y la medición, pero no una gran diferencia entre el desplazamiento/rotación comandado y medido. Esto puede deberse a que la subestructuración indicada por Darby et al. (2002) basada en la rigidez de la subestructura experimental no es la adecuada.

Finalmente, este estudio es un primer paso para comprender la complejidad de ensayos maRTHS, por lo cual queda mucho trabajo a futuro como es la consideración de especímenes con comportamiento no lineal, utilizar más actuadores en la interfaz de las subestructuras para recrear condiciones reales es decir seis grados de libertad, analizar distintas configuraciones tanto de disposición de actuadores como de subestructuraciones con fin de poder analizar la sensibilidad de los resultados, ya que como se pudo apreciar en todos los casos de estudio el grado de libertad rotacional es muy sensible ante cualquier cambio en la planta nominal del actuador y por último la validación experimental del método de compensación adaptiva utilizado en un ambiente de laboratorio.

Referencias

- AISC. (2011). *Steel Construction Manual*. American Institute of Steel Construction.
- Blakeborough, A., Williams, M. S., Darby, A. P., & Williams, D. M. (2001). The development of real-time substructure testing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359(1786), 1869–1891. <https://doi.org/10.1098/rsta.2001.0877>
- Carrillo, J., Porras Rodríguez, P., & Sánchez Cruz, M. (2016). Herramienta didáctica para ensayos cuasi-estáticos de pequeños especímenes estructurales. *Revista Científica General José María Córdova*, 14(18), 149. <https://doi.org/10.21830/19006586.47>
- Carrion, J. E., & Spencer, B. F. (2007). *Model-based Strategies for Real-time Hybrid Testing*. Newmark Structural Engineering Laboratory. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Chae, Y., Kazemibidokhti, K., & Ricles, J. M. (2013). Adaptive time series compensator for delay compensation of servo-hydraulic actuator systems for real-time hybrid simulation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 42(11), 1697–1715. <https://doi.org/10.1002/eqe.2294>
- Chen, P. C., Chang, C. M., Spencer, B. F., & Tsai, K. C. (2015). Adaptive model-based tracking control for real-time hybrid simulation. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 13(6), 1633–1653. <https://doi.org/10.1007/s10518-014-9681-2>
- Darby, A. P., Williams, M. S., & Blakeborough, A. (2002). Stability and delay compensation for real-time substructure testing. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(12), 1276–1284. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:12\(1276\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:12(1276))
- Fernandois, G. A., & Spencer, B. F. (2017). Model-based framework for multi-axial real-time hybrid simulation testing. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 16(4), 671–691. <https://doi.org/10.1007/s11803-017-0407-8>
- Galmez, C., & Fernandois, G. A. (2019a). *Controladores Feedforward Adaptivos Para Simulación Híbrida en Tiempo Real*. Departamento de Obras Civiles - Universidad Técnica Federico Santa María.
- Galmez, C., & Fernandois, G. A. (2019b). *Revisión de Métodos de Compensación Dinámica Adaptiva Para Simulación Híbrida en Tiempo Real*. Departamento de Obras Civiles - Universidad Técnica Federico Santa María.
- Guo, T., Chen, C., Xu, W., & Sanchez, F. (2014). A frequency response analysis approach for quantitative assessment of actuator tracking for real-time hybrid simulation. *Smart Materials and Structures*, 23(4). <https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/4/045042>
- McCrum, D. P., & Williams, M. S. (2016). An overview of seismic hybrid testing of engineering structures. In *Engineering Structures* (Vol. 118, pp. 240–261). <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.03.039>
- Nakashima, M. (2001). Development, potential, and limitations of real-time online (pseudo-dynamic) testing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359(1786), 1851–1867. <https://doi.org/10.1098/rsta.2001.0876>
- Olver, P. J. (2014). *Introduction to Partial Differential Equations* (pp. 182–184). Springer.
- Phillips, B. M., & Spencer, B. F. (2011). *Model-Based Feedforward-Feedback Tracking Control for Real-Time Hybrid Simulation*. Newmark Structural Engineering Laboratory. University of Illinois at Urbana-Champaign.