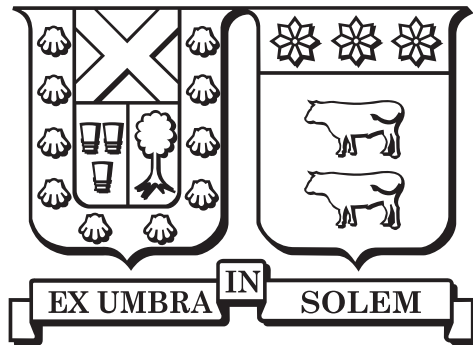


# UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO - CHILE



---

## Sobre la convergencia de soluciones para sistemas de segundo orden de familias de operadores cocoercivos

---

Tesis presentada por:  
RUBÉN URBANO ASTUDILLO COLINA

*Como requisito parcial  
Para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática*

*Director de tesis:*  
JUAN PEYPOUQUET  
*Codirector de tesis:*  
PEDRO GAJARDO

Enero, 2019



# UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO - CHILE



---

## Sobre la convergencia de soluciones para sistemas de segundo orden de familias de operadores cocoercivos

---

Tesis presentada por:

RUBÉN URBANO ASTUDILLO COLINA

*Como requisito parcial*

*Para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática*

*Director de tesis:*

JUAN PEYPOUQUET

*Codirector de tesis:*

PEDRO GAJARDO

*Revisor interno:*

LUIS BRICEÑO

*Revisor externo:*

HÉCTOR RAMÍREZ

Enero, 2019

Material de referencia, su uso no involucra responsabilidad del autor o de la institución.



TÍTULO DE LA TESIS: Sobre la convergencia de soluciones para sistemas de segundo orden de familias de operadores cocoercivos.

AUTOR: Rubén Urbano Astudillo Colina.

TESIS, presentada como requisito parcial para optar al grado de Magíster en Ciencias mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EVALUADORA:

Integrantes:	Firma
Juan Peypouquet Universidad de Chile	_____
Pedro Gajardo Universidad Técnica Federico Santa María	_____
Luis Briceño Universidad Técnica Federico Santa María	_____
Héctor Ramírez Universidad de Chile	_____

Valparaíso, Enero 2019



# Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo del Departamento de Matemática UTFSM quienes permitieron las gestiones de trabajar con profesores de la Universidad de Chile. A la conferencia GAFEVOL 2018 y sus organizadores por permitirme exponer sobre este trabajo, junto con el proyecto FONDECYT 1181179 que financió mis gastos en dicha conferencia. A la comisión de tesis por el tiempo invertido en la revisión. Agradezco encarecidamente a mi director de tesis Juan Peypouquet cuya disposición, comentarios y ayuda en general mantuvieron este proyecto en línea. También al profesor Pedro Gajardo por su disponibilidad a ser codirector de tesis, haciendo el nexo en la UTFSM. A mis profesores a lo largo de la carrera, en particular a Mariela Carvacho por su ayuda en pregrado. A mis amigos Eduardo Núñez, Gala Carreño, Pablo Quijada, Diego Gajardo, Daniel Quero y Franco Tapia cuya amistad, pláticas, ideas y presencia me han mantenido más de lo que creen durante todo este proceso. Finalmente le agradezco a mis padres, Rubén Astudillo Rojas y Clara Colina Gotopo, quienes me enseñaron a valorar el conocimiento y amar a mi prójimo. También a mi Dios por sostenerme. Este trabajo es dedicado a la memoria de Elida Colina Gotopo, que tu sencillez y alegría sea un ejemplo para nuestras vidas.





*Dedicado a  
Elida Colina Gotopo*



# Resumen

Esta tesis tiene como objetivo analizar el comportamiento asintótico de sistemas de segundo orden

$$\ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + \alpha(t)A_{\alpha(t)}u(t) = 0, \quad t > t_0 \quad (0.1)$$

cuando el operador  $A$  sea maximal monótono,  $\alpha(t) \in \mathcal{C}^1$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  y la relación de estas con el conjunto de ceros  $A^{-1}\{0\}$ . A partir de esta formulación se obtiene una discretización implícita que posea resultados análogos

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s} + \alpha_k A_{\alpha_k} u_{k+1} = 0, \quad k > k_0.$$

Se deriva un método iterativo basado en RIPA a partir de este. Este es un resultado de importancia en distintas áreas como optimización, teoría de equilibrio y economía.

En el primer capítulo se dará una motivación al estudio de este problema. Ira acompañada por una reseña de los desarrollos que condujeron a (0.1). Se señala algunas propiedades de la formulación que la hacen atractiva a la hora de estudiar inclusiones  $0 \in Ax$  de operadores maximales monótonos. En el segundo capítulo se dan algunas definiciones preliminares a nuestro trabajo.

El tercer capítulo contiene la formulación continua de nuestro resultado. Este está presentado mediante un lema valido para formulación más generales y un teorema específico para nuestra representación de manera de resaltar la utilidad de las hipótesis. El resultado esta acompañado por una sección con lemas claves de la demostración. Se incluyen experimentos numéricos comparado las tasas de convergencias de este modelo en diferentes casos.

El cuarto capítulo contiene una variante discreta implícita del teorema anterior. Mostrando que las implementaciones numéricas preservaran el comportamiento de sus contrapartes continuas. Se adjunta una sección de con el calculo de términos intermedios de la demostración. Se propone un método iterativo basado en RIPA [5] de implementación sencilla. Se plantean una serie de experimentos numéricos comparado la formulación RIPA para diversos operadores y situaciones, mostrando sus fortalezas.

Finalmente, en el quinto capítulo se habla un poco de las direcciones futuras de este trabajo y bibliografía



# Abstract

The objective of this thesis is to analyze the asymptotic behavior of the second order system

$$\ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + \alpha(t)A_{\alpha(t)}u(t) = 0, \quad t > t_0 \quad (0.2)$$

when  $A$  is a maximally monotone operator,  $\alpha(t) \in \mathcal{C}^1$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  and its relation with set of zeros  $A^{-1}\{0\}$ . From this, we obtain an implicit discretization that has related results

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s} + \alpha_k A_{\alpha_k} u_{k+1} = 0, \quad k > k_0.$$

We obtain an iterative method based on RIPA from this last formulation. This result has application of different areas such as optimization, equilibrium theory and economics.

On the first chapter, we'll give motivation to the study of this problem. It will followed by a review of the developments that led to (0.2). We will highlight some properties that make this formulation attractive when studying inclusions of the form  $0 \in Ax$  on maximally monotone operators. On the second chapter we'll give some definitions related to our work.

The third chapter contains the continuous formulation of our result. It will be presented via a lemma that is valid on a more general setting and a specific theorem for our formulation, highlighting the utility of the different hypothesis. We attach the necessary lemmas for the proof. We also attach numerical experiments that compare the convergence rate of this formulation on different cases.

The fourth chapter contain an implicit discrete variant of the previous theorem. Showing that the discrete implementation preserves the behavior of their continuous counterparts. We attach a section with the calculation terms participating on the demonstration. We propose a iterative method based on RIPA [5] of simple implementation. We include a series of numerical experiments comparing the RIPA formulation for different operators and situation, showing their strengths.

Finally on the fifth chapter, we speak of the future work directions and the bibliography.



# Índice general

Agradecimientos	i
Resumen	v
Abstract	vii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Origen formulación . . . . .	2
1.2 Propiedades de formulación . . . . .	4
<b>2 Preliminares</b>	<b>5</b>
<b>3 Formulación continua</b>	<b>9</b>
3.1 Lemas auxiliares . . . . .	18
3.2 Experimentos . . . . .	21
3.2.1 Operadores no cocoercivos . . . . .	21
3.2.2 Operador cocoercivo . . . . .	22
3.2.3 Comparando el progreso para distintas funciones $\alpha(t)$ y valores de $\gamma$ . . . . .	23
<b>4 Formulación discreta</b>	<b>25</b>
4.1 Detalles de calculo . . . . .	31
4.1.1 Determinando $\dot{h}_k$ . . . . .	31
4.1.2 Determinando $\ddot{h}_k$ . . . . .	31
4.1.3 Calculando $\nabla\ \dot{u}_k\ ^2$ . . . . .	32
4.2 Método RIPA para implementación . . . . .	33
4.3 Experimentos . . . . .	34
4.3.1 Operadores no cocoercivos . . . . .	34
4.3.2 Operador cocoercivo . . . . .	35

4.3.3 Comparando el progreso entre diferentes sucesiones  $\alpha_k$  y valores de  $\gamma$  . . . . . 36

**5 Conclusiones y trabajo futuro . . . . . 39**



# Capítulo 1

## Introducción

En optimización hay un empuje por el uso y estudio de operadores monótonos, lo cual es un paso natural, puesto que los problemas de inclusión en operadores monótonos generalizan a los problemas de optimización convexa. Esto ha resultado en una rica teoría [8] que rescata muchos resultados en este nuevo marco. Un problema fundamental es el diseño de sistemas dinámicos cuyas soluciones resuelvan inclusiones monótonas de la forma  $0 \in Ax$ . Este es un problema con diversas aplicaciones en optimización, teoría de juegos y economía. Cuando  $A : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  es un operador maximalmente monótono, se propone el uso de sistemas dinámicos de la forma

$$\ddot{u}(t) + \gamma \dot{u}(t) + \alpha(t)A_{\alpha(t)}u(t) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (1.1)$$

donde  $\alpha(t) > 0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  y  $A_{\alpha(t)}$  la regularizada de Yosida de  $A$  con parámetro  $\alpha(t)$ . La motivación para esto proviene de que bajo condiciones adecuadas de  $\alpha(t)$  y  $\gamma$ , las soluciones  $u(t)$  de dicho sistema convergen débilmente a un elemento del conjunto

$$S := A^{-1}\{0\}, \quad (1.2)$$

caracterizando su comportamiento asintótico. Al implementar numéricamente estos sistemas mediante una discretización implícita

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s} + \alpha_k A_{\alpha_k} u_{k+1} = 0, \quad k \geq k_0, \quad s \in \mathbb{R}_{++} \quad (1.3)$$

donde  $\alpha_k$  es una secuencia estrictamente positiva, se tiene el mismo comportamiento asintótico que en el caso continuo. Además, se mostrará cómo obtener un método iterativo explícito a partir de esta formulación.

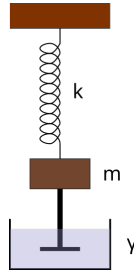


Figura 1.1: Oscilador armónico con disipación

## 1.1 Origen formulación

En optimización convexa, los algoritmos más usuales son los de descenso en gradiente y método de *Newton*. Para una función convexa  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  las ecuaciones que estos van iterando corresponden a

$$\dot{u} + \nabla\phi(u) = 0, \quad \dot{u} + \nabla^2\phi(u)^{-1}\nabla\phi(u) = 0$$

respectivamente. En los 60's surgió interés por los llamados *sistemas disipativos* desde una perspectiva de optimización. Estos provienen del estudio de los osciladores armónicos simples, cuyo comportamiento es descrito por la ley de *Hooke* como  $m\ddot{u} + ku = 0$  donde  $k$  es una constante de elasticidad del resorte,  $m$  la masa suspendida y  $u$  su posición. Se noto que al agregar un término  $\gamma$ -disipativo dependiente de la velocidad al sistema (como podría ser un brazo sumergido en un líquido), el sistema disipa su energía

$$m\ddot{u} + \gamma\dot{u} + ku = 0.$$

Para obtener una formulación que sea amigable a optimización convexa, lo único necesario es reemplazar el termino lineal  $ku$  por el gradiente (o sub-diferencial) de una función convexa  $\phi$ . Esto resulta en el denominado *sistema de la bola pesada con fricción*, presentado por *Polyak* originalmente en [15].

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} + \nabla\phi(u) = 0.$$

Bajo condiciones sensatas de  $\phi$ , las orbitas  $u(t)$  cumplen que  $\nabla\phi(u) \rightarrow 0$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ . Esto nos dice que en efecto estamos minimizando el valor  $\phi(u(t))$ , pero nada nos dice del comportamiento asintótico de  $u(t)$ . *Álvarez* [1] fue quien esclareció el comportamiento asintótico de  $u(t)$  respecto al conjunto de puntos críticos de  $\phi$ . Este resultado prueba usa el lema de *Opial* [13] y se asemeja al teorema de *Bruck* [11].

La demostración de *Álvarez* utiliza fuertemente el hecho de que estamos trabajando con una función potencial convexa, que tiene un gradiente localmente *Lipschitz*. Dado que todo gradiente de una

función convexa es monótono maximal, podríamos generalizar desde una perspectiva de optimización convexa a una de inclusiones en operadores monótonos. Instancias de problemas con estos operadores ocurren en diferentes áreas como teoría de equilibrio, economía, teoría de juegos [4, sec 4.2], EDPs [9, chap 7] y estadística [5, sec 1.3]. La pregunta es efectivamente para que clases de operadores monótonos podemos recuperar el resultado de *Álvarez*.

Se ha notado que al utilizar operadores cocoercivos se puede recuperar el resultado como es visto en [2] y [4]. Pero la cocoercividad es una hipótesis fuerte y difícil de garantizar, incluso en el caso de operadores relativamente sencillos. Un caso clásico en la literatura es tomar la matriz rotación de 2 dimensiones

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta tiene solo el cero en su kernel, sin embargo, al estudiar las orbitas solución del sistema de segundo

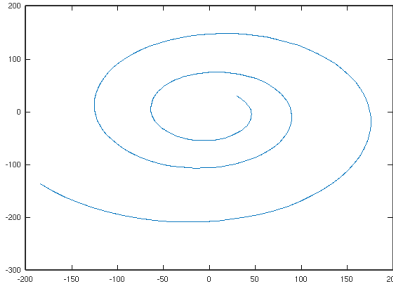


Figura 1.2: Sistema de segundo orden para matriz de rotación

orden obtenemos divergencia (ver figura 1.2). En otros casos, el sistema con el operador base puede estar mal puesto en el sentido de no tener única solución.

Para solucionar esto, se utilizó una construcción estándar para formar un operador cocoercivo a partir de un operador base. Si  $A$  es maximalmente monótono y  $\lambda > 0$ , el operador  $A_\lambda$  es conocido como la regularizada de *Yosida* [8, chap 23] de  $A$  con parámetro  $\lambda$ . Este operador es  $\lambda$ -cocoercivo y comparte los mismos ceros de  $A$ , lo que habilita el estudio de problemas como el anterior mediante su regularizada en sistemas de segundo orden.

Con esta herramienta, se han propuesto diferentes formulaciones de sistemas de segundo orden, que basados en ideas de la regularizada de *Yosida*, obtienen diferentes características o propiedades. Nosotros mostramos algunas que han inspirado este trabajo. Tenemos el trabajo de *Attouch & Peypouquet* [5] que estudia sistemas del estilo

$$\ddot{u} + \frac{\alpha}{t} \dot{u} + A_{\lambda(t)} u = 0 \quad (1.4)$$

donde se trabaja con una familia de operadores  $(A_{\lambda(t)})$  generados a partir de un operador base  $A$ . Aquí se obtiene un resultado análogo al nuestro pidiendo que  $\lambda(t) \sim t^2$  con posibilidad de modificar algunas

constantes. Nosotros tomamos esta idea y pedimos que nuestra función  $\alpha(t)$  cumplan condiciones más relajadas, para tener la libertad de elección y mejorar la convergencia del modelo. El método numérico RIPA propuesto para resolver estos sistemas es adaptado a nuestro trabajo.

Por otro lado, está el trabajo de *Attouch & Álvarez* [3] que estudiaron modelos de la forma

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} + u - \text{proj}_C(u - \mu\nabla\phi(u)) = 0$$

donde  $C$  es un subconjunto convexo y  $\phi$  una función convexa. Los autores muestran que el operador  $u \mapsto u - \text{proj}_C(u - \mu\nabla\phi(u))$  es  $\frac{1}{2}$ -cocoercivo para un rango de valores de  $\mu$ . El argumento usado también será válido para nuestros operadores (ver Lema 3).

## 1.2 Propiedades de formulación

Con estas ideas, las ventajas de utilizar modelos de la forma (1.1) y (1.3) proviene de cuatro propiedades:

**Igualdad de ceros** Para todo  $t \geq t_0$ ,  $\alpha(t) > 0$  se tiene la siguiente igualdad

$$A^{-1}\{0\} = \bigcap_{t \geq t_0} (\alpha(t)A_{\alpha(t)})^{-1}\{0\},$$

lo cual nos habilita a utilizar nuestra formulación para sistemas de segundo orden disipativos que no converjan con  $A$  simple.

**Garantía de cocoercividad** La familia de operadores  $\alpha(t)A_{\alpha(t)}$  es  $\frac{1}{2}$ -cocoerciva uniformemente sobre  $t$ . Esto será clave para garantizar la convergencia.

**Factor  $\alpha(t)$**  El estar estudiando una familia  $\alpha(t)A_{\alpha(t)}$  se nos da libertad de cambiar ligeramente el operador en las iteraciones, lo que nos puede habilitar a tener mejor convergencia numérica. Más aun, el rango de diferentes  $\alpha(t)$  a considerar es relativamente amplio.

**Método iterativo explícito** Dada la elección de nuestro operador, podremos adaptar el método RIPA [5] a nuestro sistema.

## Capítulo 2

# Preliminares

En este capítulo introduciremos algunas propiedades de los operadores a estudiar. Estas definiciones provendrán principalmente de [8].

**Definición** (Operador  $\lambda$ -cocoercivo). Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de producto interno y  $D \subset \mathcal{H}$  un subconjunto no vacío. Un operador  $A : D \rightarrow \mathcal{H}$  es  $\lambda$ -cocoercivo si cumple la inecuación

$$\forall x, y \in D, \langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq \lambda \|Ax - Ay\|^2.$$

**Definición** (Operador monótono). Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de producto interno. Un operador multivaluado  $A : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  es monótono si

$$\forall (x, u), (y, v) \in \text{gra}A, \langle x - y, u - v \rangle \geq 0.$$

**Definición** (Operador maximalmente monótono). Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de producto interno y  $A : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un operador monótono.  $A$  es maximalmente monótono si  $\forall (x, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$$(x, u) \in \text{gra}A \iff \forall (y, v) \in \text{gra}A, \langle x - y, u - v \rangle \geq 0.$$

Observe que un operador  $\lambda$ -cocoercivo es claramente monótono. Con el siguiente lema, mostraremos que además es *Lipschitz* continuo.

**Lema 1.** Si  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es un operador  $\lambda$ -cocoercivo, entonces es  $\frac{1}{\lambda}$  Lipschitz continuo.

*Demostración.* Para todo  $x, y \in \mathcal{H}$  por cocoercividad tenemos

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \lambda \|Ax - Ay\|^2$$

Usando *Cauchy-Schwarz* obtenemos

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\| \|x - y\| &\geq \lambda \|Ax - Ay\|^2 \\ \implies \frac{1}{\lambda} \|x - y\| &\geq \|Ax - Ay\| \end{aligned}$$

siendo este el resultado buscado. □

La continuidad y monotonía desprendida de un operador  $\lambda$ -cocoercivo nos permite afirmar que este es maximalmente monótono.

**Lema 2.** *Sea  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  monótono y continuo. Entonces el operador  $A$  es maximalmente monótono<sup>1</sup>.*

**Definición 1** (Resolvente y aproximación de Yosida). Sea  $A : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  y  $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$ . El resolvente de  $A$  con índice  $\gamma$  es definido como

$$J_{\gamma}^A := (\text{Id} + \gamma A)^{-1}$$

y la aproximación de *Yosida* para  $A$  con índice  $\gamma$  corresponde a

$$A_{\gamma} := \frac{1}{\gamma} (\text{Id} - J_{\gamma}^A).$$

Un operador  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es maximalmente monótono sí y solo sí su resolvente es no-expansivo [10, Prop 2.2]. La no-expansividad equivale a la condición

$$\|J_{\alpha}^A x - J_{\alpha}^A y\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

lo que a su vez equivale a pedir que el operador posea constante de *Lipschitz* a lo más 1. Es esta propiedad, la que permite dotarle a toda la familia  $\alpha(t)A_{\alpha(t)}$  de una constante de cocoercividad  $\lambda$  común. Esto pues la Definición 1 nos los caracteriza por la forma  $I - J_{\alpha(t)}^A$ , la cual se estudia en el siguiente lema.

**Lema 3.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio Hilbert y  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador no-expansivo. El operador  $A = I - T$  es  $\frac{1}{2}$ -cocoercivo, esto es*

$$\forall u, w \in \mathcal{H}, \quad \langle Av - Aw, v - w \rangle \geq \frac{1}{2} \|Av - Aw\|^2$$

---

<sup>1</sup>Véase [8, Cor 20.25]

*Demostración.* Mostraremos que  $\langle Av - Aw, v - w \rangle - \frac{1}{2}\|Av - Aw\|^2 \geq 0$ . Por calculo directo

$$\begin{aligned}
& \langle Av - Aw, v - w \rangle - \frac{1}{2}\|Av - Aw\|^2 \\
&= \langle v - Tv - w + Tw, v - w \rangle - \frac{1}{2}\|Av - Aw\|^2 \\
&= \langle v - Tv - w + Tw, v - w \rangle - \frac{1}{2}\|(v - w) - (Tv - Tw)\|^2 \\
&= \langle v - Tv - w + Tw, v - w \rangle + \langle Tv - Tw, v - w \rangle - \frac{1}{2}\|v - w\|^2 - \frac{1}{2}\|Tv - Tw\|^2 \\
&= \langle v - w, v - w \rangle - \frac{1}{2}\|v - w\|^2 - \frac{1}{2}\|Tv - Tw\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|v - w\|^2 - \frac{1}{2}\|Tv - Tw\|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la no-expansividad de  $T$ . □

Por tanto si  $A$  es monótono, tenemos que  $\alpha(t)A_{\alpha(t)} = I - J_{\alpha(t)}^A$  es un operador  $\frac{1}{2}$ -cocoercivo para todo  $t$ .





## Capítulo 3

# Formulación continua

El sistema que estudiaremos corresponde a

$$\ddot{u} + \gamma \dot{u} + \alpha(t)A_{\alpha(t)}u = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\gamma > \sqrt{2}$ ,  $\alpha(t) \in \mathcal{C}^1$  es una función positiva,  $A$  es un operador maximal monótono y  $A_{\alpha(t)}$  es la regularizada de Yosida con parámetro  $\alpha(t)$  para este operador. Para establecer la existencia y unicidad de una solución  $u \in \mathcal{C}^2((0, \infty); \mathcal{H})$ , nos basaremos en las propiedades de

$$(t, u) \rightarrow \alpha(t)A_{\alpha(t)}u. \quad (3.2)$$

Por la Definición 1 y el Lema 3, sabemos que el operador  $\alpha(t)A_{\alpha(t)}$  es  $\frac{1}{2}$ -cocoercivo, lo cual implica por el Lema 1 que es uniformemente *Lipschitz* continuo con constante 2 en la variable  $u$ . Por otro lado, dado el Lema 6 que aparece en la subsección 3.1 y la continuidad de  $\alpha(t)$ , se tiene que el operador (3.2) es continuo en  $t$ . Al plantear el sistema lineal de primer orden para (3.1), podemos aplicar *Cauchy-Lipschitz-Picard* [9, Thm 7.3] para decir que dadas condiciones iniciales  $u(0) = u_0$ ,  $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$  exista una única solución global  $u \in \mathcal{C}^2([0, \infty[, \mathcal{H})$ .

El resultado esta sección presenta la relación entre el comportamiento asintótico de soluciones del sistema (3.1) y el conjunto de ceros  $A^{-1}\{0\}$ . Este será presentado en dos partes: primero el Lema 4 prueba algunos resultados intermedios validos en un marco más general de un operador  $A(t)$   $\lambda$ -cocoercivo, después se procede a enunciar el Teorema 1 en el marco del sistema (3.1) resaltando el uso de las hipótesis sobre este.

**Lema 4.** Sea  $A(t) : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un operador  $\lambda$ -cocoercivo para todo  $t \geq 0$  y  $\gamma > 0$  una constante. Sea el sistema diferencial

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + A(t)u(t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{H}, \quad \dot{u}(0) &= v_0 \in \mathcal{H} \end{aligned} \tag{3.3}$$

tal que admita una única solución  $u \in \mathcal{C}^2([0, \infty[, \mathcal{H})$ . Definamos el conjunto

$$S := \bigcap_{t>0} (A(t)^{-1}\{0\}).$$

Si  $\lambda\gamma^2 > 1$  y  $S \neq \emptyset$ , se cumplen los siguientes enunciados

1.  $\dot{u}, \ddot{u} \in L^2(0, \infty; H)$
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u}(t) = 0$ .

*Demostración.* La  $\lambda$ -cocoercividad de  $A(t)$  para todo  $t \geq 0$  implica que  $A(t)$  es  $\frac{1}{\lambda}$  Lipschitz continua y maximalmente monótona para todo  $t$  por los Lemas 1 y 2 respectivamente.

Comenzaremos probando que  $u(t)$  es acotado. Sea  $z \in S$  un elemento fijo pero arbitrario. Definimos una función auxiliar  $h(t)$  por

$$h(t) := \frac{1}{2} \|u(t) - z\|^2$$

Sus primera y segunda derivadas corresponden a

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \langle u(t) - z, \dot{u}(t) \rangle \\ \ddot{h}(t) &= \|\dot{u}(t)\|^2 + \langle u(t) - z, \ddot{u}(t) \rangle \end{aligned}$$

Por simple cálculo, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \ddot{h}(t) + \gamma\dot{h}(t) &= \|\dot{u}(t)\|^2 + \langle u(t) - z, \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) \rangle \\ &= \|\dot{u}(t)\|^2 + \langle u(t) - z, -A(t)u(t) \rangle \\ &= \|\dot{u}(t)\|^2 - \langle u(t) - z, A(t)u(t) - A(t)z \rangle \quad (A(t)z = 0) \\ &\leq \|\dot{u}(t)\|^2 - \lambda \|A(t)u(t) - A(t)z\|^2 \quad (\text{por } \lambda\text{-cocoercividad}) \\ &= \|\dot{u}(t)\|^2 - \lambda \|A(t)u(t)\|^2 \\ &= \|\dot{u}(t)\|^2 - \lambda \|\ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t)\|^2 \\ &= \|\dot{u}(t)\|^2 - \lambda \|\ddot{u}(t)\|^2 - \lambda\gamma 2\langle \ddot{u}(t), \dot{u}(t) \rangle - \lambda\gamma^2 \|\dot{u}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\ddot{h}(t) + \gamma \dot{h}(t) + \lambda \|\ddot{u}(t)\|^2 + \lambda \gamma \frac{d}{dt} \|\dot{u}\|^2 + (\lambda \gamma^2 - 1) \|\dot{u}(t)\|^2 \leq 0. \quad (3.4)$$

Dado el requerimiento de  $\lambda \gamma^2 > 1$ , podemos remover dos términos no-negativos de (3.4) para obtener

$$\ddot{h}(t) + \gamma \dot{h}(t) + \lambda \gamma \frac{d}{dt} \|\dot{u}\|^2 \leq 0,$$

lo cual implica que la función

$$t \mapsto \dot{h}(t) + \gamma h(t) + \lambda \gamma \|\dot{u}\|^2 \quad (3.5)$$

es no-creciente para todo  $t \geq 0$ . En particular, le podemos acotar por sus valores iniciales

$$\dot{h}(t) + \gamma h(t) + \lambda \gamma \|\dot{u}\|^2 \leq \dot{h}(0) + \gamma h(0) + \lambda \gamma \|\dot{u}(0)\|^2 =: C_{z,1}.$$

Al remover los términos no-negativos de esta inecuación se obtiene

$$\dot{h}(t) + \gamma h(t) \leq C_{z,1}, \quad \forall t \geq 0.$$

Tomemos la ecuación anterior y renombremos la variable a  $s$

$$\dot{h}(s) + \gamma h(s) \leq C_{z,1}, \quad \forall s \geq 0,$$

y tomemos  $t > 0$  fijo pero arbitrario. Multiplicando este último resultado por  $\exp(\gamma s) > 0$  a ambos lados e integrando entre  $(0, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\exp(\gamma s) h(s)) &\leq \exp(\gamma s) C_{z,1} \quad / \int_0^t ds \\ \implies \exp(\gamma t) h(t) - \exp(\gamma 0) h(0) &\leq \frac{1}{\gamma} (\exp(\gamma t) C_{z,1} - \exp(\gamma 0) C_{z,1}) \\ \implies h(t) &\leq \exp(-\gamma t) h(0) + \frac{1}{\gamma} (C_{z,1} - C_{z,1} \exp(-\gamma t)) \\ \implies h(t) &\leq \frac{C_{z,1}}{\gamma} + h(0), \end{aligned}$$

obtenemos una cota superior para  $h(t)$ . Esto nos dice que  $h(t) := \frac{1}{2} \|u(t) - z\|^2$  es acotada y que por tanto  $u(t)$  también lo es.

Ahora probaremos que  $\dot{u}$  es acotada. Integramos la ecuación (3.4) obteniendo la siguiente expresión

$$\dot{h}(t) + \gamma h(t) + \lambda \int_0^t \|\ddot{u}\|^2 + \gamma \lambda \|\dot{u}\|^2 + (\lambda \gamma^2 - 1) \int_0^t \|\dot{u}\|^2 \leq C_{z,2}. \quad (3.6)$$

Tanto el primer sumando como las integrales del tercer y quinto sumando son claramente no-negativas, además el factor  $\lambda\gamma^2 - 1$  es positivo por hipótesis. Removiendo estos términos, la inecuación es reducida a

$$\dot{h}(t) + \gamma\lambda\|\dot{u}(t)\|^2 \leq C_{z,2}.$$

Por definición de  $\dot{h}$ , esto es equivalente a

$$\langle u(t) - z, \dot{u}(t) \rangle + \gamma\lambda\|\dot{u}(t)\|^2 - C_{z,2} \leq 0.$$

Aplicando *Cauchy-Schwarz* se obtiene

$$\gamma\lambda\|\dot{u}(t)\|^2 - \|u(t) - z\|\|\dot{u}(t)\| - C_{z,2} \leq 0$$

lo cual implica que  $\dot{u}(t)$  debe ser acotada; de otra manera, dado que por el párrafo anterior se sabe que  $\|u(t) - z\|$  es acotado, el termino de orden cuadrático incumpliría la restricción eventualmente. Por lo tanto

$$\sup_{t \in [0, +\infty[} \|\dot{u}(t)\| < \infty,$$

obteniendo lo que buscábamos.

Ahora probaremos el ítem 1. Dado que por el párrafo previo  $u, \dot{u}$  son acotadas, tenemos que  $\dot{h}$  también es acotada. Podemos ver esto por definición de  $\dot{h}$

$$\dot{h}(t) = \langle u(t) - z, \dot{u}(t) \rangle \leq \|u(t) - z\|\|\dot{u}(t)\| < \infty.$$

También hemos mostrado que  $h(t)$  es acotada. Consideremos ahora la ecuación (3.6) cuando  $t \rightarrow \infty$ , dado que  $h, \dot{h}$  son acotadas, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|\ddot{u}(s)\|^2 ds < \infty &\iff \ddot{u} \in L^2(0, \infty; H) \\ \int_0^\infty \|\dot{u}(s)\|^2 ds < \infty &\iff \dot{u} \in L^2(0, \infty; H) \end{aligned}$$

obteniendo así el ítem 1.

Para mostrar el ítem 2, fijamos nuestra atención en la ecuación original (3.3). Despejando el termino  $\ddot{u}$  se obtiene la expresión

$$\ddot{u}(t) = -\gamma\dot{u}(t) - A(t)u(t).$$

Aplicando la norma a ambos lados y acotando apropiadamente se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\ddot{u}(t)\| &= \|-\gamma\dot{u}(t) - A(t)u(t)\| \\
&\leq \gamma\|\dot{u}(t)\| + \|A(t)u(t)\| \\
&= \gamma\|\dot{u}(t)\| + \|A(t)u(t) - A(t)z\| \\
&\leq \gamma\|\dot{u}(t)\| + \frac{1}{\lambda}\|u(t) - z\| < \infty
\end{aligned}$$

donde esta última línea fue obtenida de saber que  $A(t)$  es  $1/\lambda$  Lipschitz. Por lo tanto

$$\sup_{t \geq 0} \|\ddot{u}\| < \infty \implies \ddot{u} \in L^\infty(0, \infty; H).$$

Este último resultado, junto con el resultado anterior de  $\dot{u} \in L^2(0, \infty; H)$  implican que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u}(t) = 0$$

probando de esa manera ítem 2. □

**Teorema 1.** Sea  $u \in \mathcal{C}^2([0, \infty[, \mathcal{H})$  la solución del sistema dinámico

$$\begin{aligned}
\ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + \alpha(t)A_{\alpha(t)}u(t) &= 0, \quad t \geq 0 \\
u(0) = u_0, \dot{u}(0) &= v_0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde  $\gamma > 0$  es una constante tal que  $\frac{\gamma^2}{2} > 1$ ,  $A_{\alpha(t)}$  es la regularizada de Yosida de  $A : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un operador maximalmente monótono y  $\alpha(t) > 0$  una función  $\mathcal{C}^1$  tal que

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|\dot{\alpha}(t)\|}{\|\alpha(t)\|} = 0$ .
- $\|\dot{\alpha}(t)\|$  monótono no-creciente.
- $\alpha(t) \geq a$  con  $a > 0$  para  $t > t_0$ .

Definamos el conjunto

$$S := \bigcap_{t > 0} (\alpha(t)A_{\alpha(t)})^{-1} \{0\}.$$

Si  $S \neq \emptyset$  entonces se cumplen los siguientes enunciados

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{u}(t) = 0$
2. Existe  $\bar{u} \in S$  tal que  $u(t) \rightharpoonup \bar{u}$ .

*Demostración.* Los resultados del Lema 4 son válidos para este teorema pues la familia de operadores  $\alpha(t)A_{\alpha(t)}$  es  $\frac{1}{2}$ -cocoerciva por Lema 3. Ahora procederemos a probar el ítem 1. Consideremos la ecuación (3.7) evaluada en  $t + \epsilon$  y  $t$  para  $\epsilon > 0$  fijo pero arbitrario

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t + \epsilon) + \gamma\dot{u}(t + \epsilon) + \alpha(t + \epsilon)A_{\alpha(t + \epsilon)}u(t + \epsilon) &= 0 \\ \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + \alpha(t)A_{\alpha(t)}u(t) &= 0.\end{aligned}$$

Restando estas y multiplicándolas por  $\frac{1}{\epsilon}$  a ambos lados se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\dot{u}_\epsilon(t) + \gamma u_\epsilon(t) &= f_\epsilon(t), \text{ donde} & (3.8) \\ u_\epsilon(t) &:= \frac{\dot{u}(t + \epsilon) - \dot{u}(t)}{\epsilon} \\ f_\epsilon(t) &:= -\frac{\alpha(t + \epsilon)A_{\alpha(t + \epsilon)}u(t + \epsilon) - \alpha(t)A_{\alpha(t)}u(t)}{\epsilon}.\end{aligned}$$

Dado que  $A_{\alpha(t)}$  es la regularización de *Yosida* para  $A$  maximalmente monótono, tenemos una cota para la variación del numerador de  $f_\epsilon(t)$  por el Lema 6

$$\begin{aligned}\|f_\epsilon(t)\| &= \frac{1}{\epsilon} \|\alpha(t + \epsilon)A_{\alpha(t + \epsilon)}u(t + \epsilon) - \alpha(t)A_{\alpha(t)}u(t)\| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \left( 2\|u(t + \epsilon) - u(t)\| + 2\|u(t + \epsilon) - z\| \frac{\|\alpha(t + \epsilon) - \alpha(t)\|}{\|\alpha(t)\|} \right) \quad \forall z \in S, \text{ (por Lema 6)} \\ &= 2\left\| \frac{u(t + \epsilon) - u(t)}{\epsilon} \right\| + 2\|u(t + \epsilon) - z\| \frac{\|\alpha(t + \epsilon) - \alpha(t)\|}{\|\alpha(t)\|}.\end{aligned}$$

Tomaremos  $z \in S$  fijo pero arbitrario a continuación. Como  $\alpha \in C^1, u \in C^2$ , podemos aplicar el teorema de valor medio para decir que existen dos valores  $t_{1,\epsilon}, t_{2,\epsilon} \in (t, t + \epsilon)$  tales que

$$\dot{u}(t_{1,\epsilon}) = \frac{u(t + \epsilon) - u(t)}{\epsilon}, \quad \dot{\alpha}(t_{2,\epsilon}) = \frac{\alpha(t + \epsilon) - \alpha(t)}{\epsilon}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\|f_\epsilon\| &\leq 2\|\dot{u}(t_{1,\epsilon})\| + 2\|u(t + \epsilon) - z\| \frac{\|\dot{\alpha}(t_{2,\epsilon})\|}{\|\alpha(t)\|} \\ &\leq 2 \sup_{s \in [t, \infty)} \|\dot{u}(s)\| + 2\sqrt{2} \sup_{s \in [0, \infty)} \sqrt{h(s)} \frac{\|\dot{\alpha}(t_{2,\epsilon})\|}{\|\alpha(t)\|} =: g(t).\end{aligned}$$

Por hipótesis, sabemos que  $\|\dot{\alpha}(t)\|$  es monótona no-creciente y que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|\dot{\alpha}(t)\|}{\|\alpha(t)\|} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{u}(t)\| = 0.$$

Por lo tanto, podemos seguir acotando  $g(t)$  como

$$\begin{aligned} g(t) &\leq 2 \sup_{s \in [t, \infty)} \|\dot{u}(s)\| + 2\sqrt{2} \sup_{s \in [0, \infty)} \sqrt{h(s)} \frac{\|\dot{\alpha}(t)\|}{\|\alpha(t)\|} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \\ &\implies \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Luego en la ecuación (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{u}_\epsilon(t) + \gamma u_\epsilon(t) &= f_\epsilon(t) \\ \implies e^{\gamma t} \dot{u}_\epsilon(t) + \gamma e^{\gamma t} u_\epsilon(t) &= e^{\gamma t} f_\epsilon(t) \\ \implies u_\epsilon(t) &= e^{-\gamma t} u_\epsilon(0) + e^{\gamma t} \int_0^t e^{-\gamma s} f_\epsilon(s) ds \\ \implies \|u_\epsilon(t)\| &\leq e^{-\gamma t} \|u_\epsilon(0)\| + \int_0^t e^{\gamma(s-t)} g(s) ds \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $e^{-\gamma t} \|u_\epsilon(0)\|$  tiende claramente a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para el otro termino, por (3.9) dado  $\delta > 0$  fijo, existe un  $t_\delta$  tal que  $\forall s \geq t_\delta$ ,  $g(s) \leq \delta$ . Luego para  $t > t_\delta > 1$  es válido

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\gamma(s-t)} g(s) ds &= \int_0^{t_\delta} e^{\gamma(s-t)} g(s) ds + \int_{t_\delta}^t e^{\gamma(s-t)} g(s) ds \\ &= B(t) + C(t). \end{aligned}$$

Notamos que  $\dot{u}$  es acotado y por tanto  $g(t)$  también lo es; denotamos como  $C_1$  a dicha cota. Luego para  $B$

$$\begin{aligned} B(t) &\leq \int_0^{t_\delta} e^{\gamma(s-t)} C_1 ds \\ &= e^{-t\gamma} C_1 \int_0^{t_\delta} e^{\gamma s} ds \\ &= e^{-t\gamma} C_1 \frac{e^{\gamma t_\delta} - 1}{\gamma}, \quad t > t_\delta \end{aligned}$$

lo cual converge a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$  independiente del  $\delta$  que tomemos. Por otro lado, en la expresión  $C(t)$  usamos la cota  $\delta$

$$\begin{aligned} C(t) &\leq e^{-t\gamma} \delta \int_{t_\delta}^t e^{s\gamma} ds \\ &= e^{-t\gamma} \delta \frac{e^{t\gamma} - e^{t_\delta\gamma}}{\gamma} \\ &= \delta \frac{1 - e^{(t_\delta-t)\gamma}}{\gamma} < \frac{\delta}{\gamma}, \quad t > t_\delta. \end{aligned}$$

La cota previa es válida para todos los valores de  $\delta > 0$ . Haciendo esta tender  $\delta \rightarrow 0$  y  $t \rightarrow \infty$  obtenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$ . Dado que  $\epsilon$  fue arbitrario en el cálculo anterior, al hacer tender  $t \rightarrow \infty$  en la ecuación (3.10) se obtiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \sup_{\epsilon > 0} \|u_\epsilon(t)\| \right) = 0.$$

Notando que para todo  $t \geq 0$  tenemos la siguiente inecuación

$$\|\ddot{u}(t)\| \leq \sup_{\epsilon > 0} \|u_\epsilon(t)\|$$

concluimos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{u}(t) = 0$ , probando ítem 1.

Finalmente probaremos el ítem 2 para lo cual usaremos el Lema de *Opial* (Lema 5). Primero mostraremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - z\|$$

existe como límite. Enfocando nuestra atención en  $\dot{h}$ , podemos probar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{h}(t) = 0$  puesto que le podemos acotar por

$$\dot{h}(t) = \langle u(t) - z, \dot{u}(t) \rangle \leq \|u(t) - z\| \|\dot{u}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

dado que sabemos que  $\|u(t) - z\|$  es acotada y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u}(t) = 0$ . Ahora definimos una función auxiliar

$$\psi(t) = \dot{h}(t) + \gamma h(t) + \gamma \lambda \|\dot{u}(t)\|^2.$$

Sabemos por ecuación (3.5) que esta función es no-creciente y que todos sus términos son acotados, por lo tanto  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$  existe como un número. Luego

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{h}(t) + \gamma \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) + \gamma \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{u}(t)\|^2 \\ &= \gamma \lim_{t \rightarrow \infty} h(t). \end{aligned}$$

Dado que  $\lim \psi$  existe, también lo hace  $\lim h(t)$ . Por definición este límite es

$$h(t) = \frac{1}{2} \|u(t) - z\|^2$$

lo que nos dice que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - z\|$  existe.

Para satisfacer la segunda condición del Lema de *Opial* tenemos que mostrar que  $\forall \{t_n\} \rightarrow \infty$ ,  $u(t_n) \rightarrow$



$\bar{u}$  tenemos que  $\bar{u} \in S$  con  $S$  el conjunto

$$S := \bigcap_{t \geq 0} (\alpha(t)A_{\alpha(t)})^{-1} \{0\}.$$

Por la ecuación (3.7) tenemos que

$$\begin{aligned} -\ddot{u}(t) - \gamma\dot{u}(t) &= \alpha(t)A_{\alpha(t)}u(t) & (3.11) \\ \implies -\ddot{u}(t) - \gamma\dot{u}(t) &= (Id - J_{\alpha(t)}^A)u(t) \\ \implies -\ddot{u}(t) - \gamma\dot{u}(t) - u(t) &= -J_{\alpha(t)}^A u(t) \\ \implies \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + u(t) &= J_{\alpha(t)}^A u(t) \\ \implies \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + u(t) &= (Id + \alpha(t)A)^{-1}u(t) \\ \implies u(t) &\in (Id + \alpha(t)A)(\ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + u(t)) \\ \implies 0 &\in \ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + \alpha(t)A(\ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + u(t)) \\ \implies \frac{-\ddot{u}(t) - \gamma\dot{u}(t)}{\alpha(t)} &\in A(\ddot{u}(t) + \gamma\dot{u}(t) + u(t)). & (3.12) \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) \rightarrow 0 &\implies \ddot{u}(t) \rightarrow 0 \\ \dot{u}(t) \rightarrow 0 &\implies \dot{u}(t) \rightarrow 0 \\ u(t) &\rightarrow \bar{u} \end{aligned}$$

y por la hipótesis sobre  $\alpha(t)$  de tener una cota inferior estrictamente positiva, tenemos por la convergencia en la topología fuerte y topología débil del grafo de  $A$  maximalmente monótono (Lema 7) que al pasar el límite a  $t \rightarrow \infty$  en la expresión anterior se obtiene

$$0 \in A\bar{u} \iff \bar{u} \in A^{-1}0.$$

Pero esto también implica que

$$\begin{aligned}
0 \in A\bar{u} &\iff 0 \in \alpha(t)A\bar{u} & (3.13) \\
&\iff \bar{u} \in \bar{u} + \alpha(t)A\bar{u} \\
&\iff \bar{u} \in (Id + \alpha A)\bar{u} \\
&\iff \bar{u} = (Id + \alpha A)^{-1}\bar{u} \\
&\iff J_{\alpha(t)}^A \bar{u} = \bar{u} \\
&\iff \left( Id - J_{\alpha(t)}^A \right) \bar{u} = 0 \\
&\iff \alpha(t)A_{\alpha(t)}\bar{u} = 0. & (3.14)
\end{aligned}$$

Luego, lo anterior es cierto para todo  $t > 0$ , por lo tanto

$$\bar{u} \in \bigcap_{t>0} (\alpha(t)A_{\alpha(t)})^{-1} \{0\},$$

probando así la segunda hipótesis de *Opial* y obteniendo así la convergencia débil de  $u(t)$  a un elemento de  $S$ . Esto termina de probar el ítem 2 y finaliza el teorema.  $\square$

### 3.1 Lemas auxiliares

**Lema 5** (*Opial*). *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio Hilbert y  $u : [0, \infty] \rightarrow \mathcal{H}$  una función y  $S \subset H$  un conjunto no vacío con las siguientes propiedades*

- $\forall \{t_n\} \rightarrow \infty$  con  $u(t_n) \rightarrow \bar{u}$ , se tiene que  $\bar{u} \in S$ .
- $\forall z \in S$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - z\|$  existe como un límite en  $\mathbb{R}$ .

Entonces  $u(t)$  converge débilmente a un elemento de  $S$ .

Cabe notar que esta formulación del lema de *Opial* no es la original. En [13], *Opial* obtiene un resultado similar en el marco de trabajo de operadores no-expansivos. Esta formulación aparece por primera vez en [7]. Por conveniencia reproduciremos una demostración basada en [14, Lem 5.2].

*Demostración.* Por la segunda hipótesis  $u(t)$  es acotada. Si mostramos que esta tiene un único punto de acumulación débil,  $u(t)$  deberá converger débilmente a ese punto. Sean  $(t_j), (m_j)$  dos sucesiones tales que  $u(t_j) \rightarrow \hat{u}$ ,  $u(m_j) \rightarrow \bar{u}$ . Por la primera hipótesis  $\bar{u}, \hat{u} \in S$ , lo cual por la segunda hipótesis nos dice que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - \hat{u}\| = a$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - \bar{u}\| = b$  existen. Luego dada la identidad

$$\|u(t) - \hat{u}\|^2 = \|u(t) - \bar{u}\|^2 + \|\hat{u} - \bar{u}\|^2 + 2\langle u(t) - \bar{u}, \hat{u} - \bar{u} \rangle, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

podemos estudiar los casos para  $(t_j)$ ,  $(m_j)$

$$\begin{aligned}\|u(t_j) - \hat{u}\|^2 &= \|u(t_j) - \bar{u}\|^2 + \|\hat{u} - \bar{u}\|^2 + 2\langle u(t_j) - \bar{u}, \hat{u} - \bar{u} \rangle \\ \|u(m_j) - \hat{u}\|^2 &= \|u(m_j) - \bar{u}\|^2 + \|\hat{u} - \bar{u}\|^2 + 2\langle u(m_j) - \bar{u}, \hat{u} - \bar{u} \rangle.\end{aligned}$$

Tomando los límites de las sub-sucesiones  $(t_j)$ ,  $(m_j)$ , se obtiene

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + \|\hat{u} - \bar{u}\|^2 + 2\|\hat{u} - \bar{u}\|^2 \\ a^2 &= b^2 + \|\hat{u} - \bar{u}\|^2,\end{aligned}$$

lo cual restando nos implica que  $\|\hat{u} - \bar{u}\|^2 = 0$ . □

**Lema 6** (Variación de la función  $\gamma \mapsto \gamma A_\gamma x$ ). *Sea  $\gamma, \delta > 0$  y  $x, y \in \mathcal{H}$ . Para cada  $z \in S$  con  $S = A^{-1}\{0\}$  se tiene la desigualdad*

$$\|\gamma A_\gamma x - \delta A_\delta y\| \leq 2\|x - y\| + 2\|x - z\| \frac{|\gamma - \delta|}{\gamma}.$$

Este resultado tiene su demostración en [5, Lemma A.4] y se basa en la identidad del resolvente de [8, Prop 23.28]. Aquí solo repetimos el argumento por conveniencia.

*Demostración.* Se comienza mostrando la identidad del resolvente. Sea  $A$  un operador maximalmente monótono,  $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}_{++}$  y  $x \in \mathcal{H}$ . Se cumple la siguiente identidad

$$J_\gamma^A x = J_{\lambda\gamma}^A (\lambda x + (1 - \lambda)J_\gamma^A x).$$

Notemos que el resolvente  $J_\beta^A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  pues  $A$  es maximalmente monótono [12] [8, Cor 23.10 (i)]. Obtenemos el resultado de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}x &\in (\text{Id} + \gamma A) (\text{Id} + \gamma A)^{-1} x, \quad \forall x \in \mathcal{H} \\ x &\in (\text{Id} + \gamma A) J_\gamma^A x \\ x - J_\gamma^A x &\in \gamma A (J_\gamma^A x) \\ \lambda (x - J_\gamma^A x) &\in \lambda \gamma A (J_\gamma^A x) \\ \lambda x + (1 - \lambda) J_\gamma^A x &\in J_\gamma^A x + \lambda \gamma A (J_\gamma^A x) = (\text{Id} + \lambda \gamma A) J_\gamma^A x.\end{aligned}$$

Aplicando  $(\text{Id} + \lambda \gamma A)^{-1} = J_{\lambda\gamma}^A$  a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$J_{\lambda\gamma}^A (\lambda x + (1 - \lambda)J_\gamma^A x) = J_\gamma^A x$$

siendo este el resultado buscado.

Ahora pasamos a probar el lema de variación. Bajo las hipótesis del enunciado

$$\begin{aligned}
\|\gamma A_\gamma x - \delta A_\delta y\| &\leq \|x - y\| + \|J_\gamma^A x - J_\delta^A y\| \\
&= \|x - y\| + \|J_\delta^A \left( \frac{\delta}{\gamma} x + \left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right) J_\gamma^A x \right) - J_\delta^A y\| \\
&\leq \|x - y\| + \left\| \frac{\delta}{\gamma} x + \left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right) J_\gamma^A x - y \right\| \\
&\leq 2\|x - y\| + \left|1 - \frac{\delta}{\gamma}\right| \|J_\gamma^A x - x\|.
\end{aligned}$$

Dado que  $\forall z \in S$ ,  $J_\gamma^A z = z$  y usando otra vez la no-expansividad del resolvente deducimos que

$$\begin{aligned}
\|\gamma A_\gamma x - \delta A_\delta y\| &\leq 2\|x - y\| + \left|1 - \frac{\delta}{\gamma}\right| \|J_\gamma^A x - J_\gamma^A z + z - x\| \\
&\leq 2\|x - y\| + 2\|x - z\| \frac{|\gamma - \delta|}{\gamma}.
\end{aligned}$$

□

**Lema 7.** Sea  $A : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  un operador maximalmente monótono y  $\mathcal{H}$  un espacio Hilbert. El grafo de  $A$  es secuencialmente cerrado en  $\mathcal{H}^{strong} \times \mathcal{H}^{weak}$ . Esto es que para toda secuencia  $\{(x_n, u_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Gra}(A)$  y toda  $(x, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , si  $x_n \rightarrow x$  y  $u_n \rightharpoonup u$ , entonces  $(x, u) \in \text{Gra}(A)$ .

Esta demostración se da originalmente en la proposición 20.33 de [8].

*Demostración.* Primero hemos de mostrar que para todo  $(u_n, x_n), (u, x) \in H \times H$  tales que  $u_n \rightharpoonup u$ ,  $x_n \rightarrow x$  entonces  $(u_n, x_n) \rightarrow (u, x)$ . Notemos que  $\{u_n\}$  es una sucesión acotada en consecuencia de ser débilmente convergente y el teorema de *Banach-Steinhaus*. Luego al estudiar  $(u_n, x_n) - (u, x)$

$$\begin{aligned}
\|\langle u_n - u, x_n - x \rangle\| &= \|\langle u_n, x_n - x \rangle + \langle u_n - u, x \rangle\| \\
&\leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \|u_i\| \|x_n - x\| + \langle u_n - u, x \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

se prueba la proposición.

Ahora hemos de probar el teorema. Sea  $\{(x_n, u_n)\} \in \text{Gra}(A)$  y  $(x, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  tales que  $x_n \rightarrow x$ ,  $u_n \rightharpoonup u$ . Tomemos  $(a, b) \in \text{Gra}(A)$  un elemento fijo pero arbitrario. Por monotonía de  $A$  se tiene la inecuación

$$\langle x_n - a, u_n - b \rangle \geq 0.$$

Por la proposición anterior, al tender al límite se obtiene la expresión

$$\langle x - a, u - b \rangle \geq 0$$

pues de no ser así se estaría contradiciendo la monotonía desde algún  $n$  en adelante. La maximalidad de  $A$  junto a la arbitrariedad de  $(a, b) \in \text{Gra}(A)$  implican que  $(x, u) \in \text{Gra}(A)$ .  $\square$

## 3.2 Experimentos

### 3.2.1 Operadores no cocoercivos

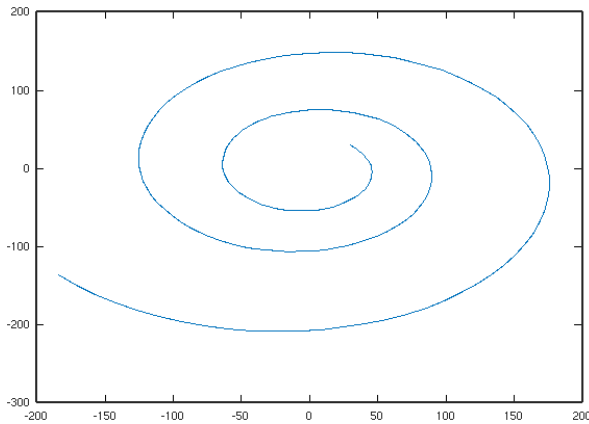
En la introducción se habló de cómo operadores no cocoercivos podían diverger cuando se estudia su modelo de segundo orden. El siguiente es un caso estándar en la literatura como contraejemplo. Consideremos la matriz de rotación  $A \in M_{2 \times 2}$  dada por

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

la cual es monótona y continua, por lo tanto, maximalmente monótona (Lema 2). Es fácil comprobar de que  $A$  no es cocoerciva. Cuando estudiamos la solución al sistema

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 3\dot{u} + Au &= 0 \\ u(0) &= [30, 30]^t, \quad \dot{u}(0) = [0, 0]^t \end{aligned}$$

puede ser mostrado numéricamente que dicha solución no converge al conjunto de ceros de  $A$ .



(a) Sistema de segundo orden para matriz de rotación

$t$	Normas
0	42.426
25	50.896
50	63.326
75	78.792
100	98.034

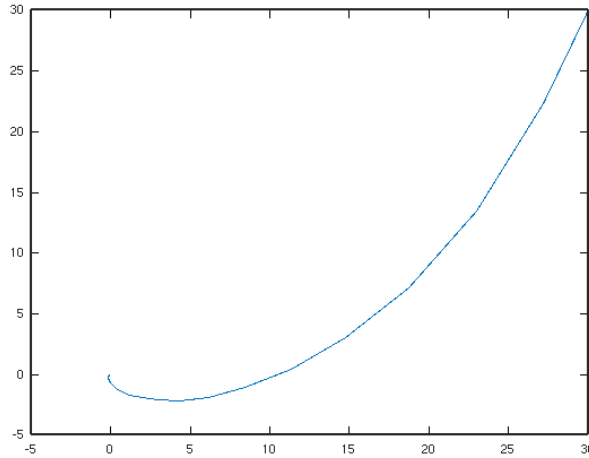
(b) Evolución de las normas  $u(t)$

Consideremos la constante  $\alpha = 2$  y la solución al sistema

$$\ddot{u} + 3\dot{u} + \alpha A_\alpha u = 0$$

$$u(0) = [30, 30]^t, \quad \dot{u}(0) = [0, 0]^t.$$

La constante positiva  $\alpha$  y los valores de  $\lambda, \gamma$  de este sistema satisfacen las condiciones del teorema, garantizándonos convergencia a  $(0, 0)^t$ . Sabemos del resultado que el conjunto de ceros de  $\alpha A_\alpha$  es el



(a) Regularización de la matriz de rotación

$t$	Normas
0	42.426
25	0.050778
50	$4.1198e-05$
75	$3.1959e-08$
100	$2.9139e-09$

(b) Evolución de las normas  $u(t)$

mismo que el conjunto de ceros de  $A$ , el cual es solo  $\{(0, 0)^t\}$ . Así incluso si no tenemos convergencia en el sistema original, podemos igual tener convergencia a dicho conjunto cuando trabajemos con la regularización.

### 3.2.2 Operador cocoercivo

Consideremos la siguiente matriz de orden 3

$$A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Esta matriz como operador es convexa pero no fuertemente convexa, tiene un kernel no trivial y es cocoerciva. Esta última propiedad nos garantiza por un caso particular de [4] la convergencia del modelo de segundo orden. Nos interesa comparar las tasas de convergencias de distintos modelos sobre

este operador. Los sistemas a estudiar serán los siguientes

$$\ddot{u} + 2\dot{u} + Au = 0 \quad (3.17)$$

$$\ddot{u} + 2\dot{u} + \alpha(t)A_{\alpha(t)}u = 0 \quad (3.18)$$

$$\dot{u} + Au = 0 \quad (3.19)$$

$$\ddot{u} + \frac{\beta}{t}\dot{u} + A_{\lambda(t)}u = 0, \quad \text{con } \beta = 8, \lambda(t) := \frac{3t^2}{128} \quad (3.20)$$

$$u(0) = [50, -60, -120]^t, \quad \dot{u}(0) = [0, 0, 0]^t.$$

La ecuación (3.17) es el sistema base de segundo orden, (3.18) es nuestro sistema (3.7) y será estudiado bajo  $\alpha(t) = 3$ ,  $\alpha(t) = t + 1$ , (3.19) es el sistema base de primer orden, (3.20) es el sistema estudiado en [5]. En este último tomo parámetros  $\beta, \lambda$  adecuados de manera que los resultados de [5] sean válidos. La órbitas de todos los sistemas deberán converger al vector  $(0, -60, 0)^t$ , el cual pertenece al kernel de  $A$ . Compararemos las normas respecto al origen siendo  $(0, -60, 0)^t$ .

$t$	(3.17) $A$	(3.18) $\alpha(t) = 3$	(3.18) $\alpha(t) = t + 1$	(3.19)	(3.20)
25	3.391	2.571e-01	8.734e-04	1.529e-01	3.604e-01
50	8.775e-02	4.245e-04	2.541e-11	2.443e-04	2.898e-02
75	2.766e-03	8.679e-07	1.575e-19	4.627e-07	1.071e-02
100	9.441e-05	7.324e-09	4.092e-28	8.917e-10	3.825e-03

Obtenemos que el sistema (3.18) para  $\alpha(t) = t+1$  obtiene muy buenas tasas de convergencia, superando a todos los demás modelos y teniendo un orden de magnitud  $-11$  para  $t = 50$ . Esto puede verse como una justificación de elegir  $\alpha(t)$  variables a la hora de regularizar. El sistema (3.18) para  $\alpha(t) = 3$  obtiene también un buen comportamiento superando al sistema base (3.17) pero no al sistema de primer orden (3.19). Las tasas de (3.20) se deben a la elección de parámetros  $\beta, \lambda$  y pueden hacerse más competitivos, pero generalmente al comparar con modelos de (3.18) la elección de un  $\alpha(t)$  simple como una recta da buenos resultados más fácilmente.

### 3.2.3 Comparando el progreso para distintas funciones $\alpha(t)$ y valores de $\gamma$

Nuestro objetivo será el estudio del comportamiento de sistemas de (3.7) para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\alpha(t)$ . Las funciones  $\alpha(t)$  a considerar serán

$$\alpha_1(t) := t + 1 \quad \alpha_2(t) := \sqrt{t + 1} \quad \alpha_3(t) := \log(t + 1)$$

$$\alpha_4(t) := 3 + 6t^{-0.5} \quad \alpha_5(t) := 3$$

todas estas satisfaciendo las condiciones requerida por nuestro Teorema 1. Los valores de  $\gamma$  a considerar serán los siguientes

$$\gamma_1 := 5 \quad \gamma_2 := \sqrt{2} + 0.1 \quad \gamma_3 := \sqrt{2}.$$

Dado que trabajamos con operadores  $\alpha(t)A_{\alpha(t)}$ , nuestra cota para  $\gamma$  tal que  $\lambda\gamma^2 > 1$  es  $\sqrt{2}$  por Lema 3. Los casos  $\gamma_1, \gamma_2$  garantizan la convergencia. El caso  $\gamma_3$  podría converger pero no hay certeza.

Para estudiar esto usaremos la matriz de rotación  $A$  (eq 3.15) como en el primer ejemplo. Tomaremos su respectiva regularización de *Yosida* para cada  $\alpha(t)$ . Nuestros puntos iniciales serán  $(30, 30)$  con  $(0, 0)$  como condición de primer orden. Las soluciones deberán de converger a  $(0, 0)$  para todos los casos. Compararemos como el sistema a evolucionado hasta el tiempo  $T = 25$  y  $T = 50$ .

$\alpha(t)$	$\gamma$	$T = 25$	$T = 50$
$t + 1$	5	$3.260e-01$	$1.774e-03$
	$\sqrt{2} + 0.1$	$3.341e-06$	$5.424e-10$
	$\sqrt{2}$	$9.013e-06$	$1.435e-09$
$\sqrt{t + 1}$	5	$4.848e-01$	$3.054e-03$
	$\sqrt{2} + 0.1$	$1.038e-04$	$1.678e-09$
	$\sqrt{2}$	$2.130e-04$	$8.501e-10$
$\log(t + 1)$	5	$7.287e-01$	$5.914e-03$
	$\sqrt{2} + 0.1$	$7.678e-04$	$1.972e-09$
	$\sqrt{2}$	$1.386e-03$	$5.974e-09$
$3 + 6t^{-0.5}$	5	$3.697e-01$	$2.801e-03$
	$\sqrt{2} + 0.1$	$1.771e-05$	$1.420e-09$
	$\sqrt{2}$	$4.095e-05$	$4.608e-09$
3	5	$5.070e-01$	$4.838e-03$
	$\sqrt{2} + 0.1$	$1.590e-04$	$3.337e-09$
	$\sqrt{2}$	$3.143e-04$	$1.897e-09$

Lo que vemos en esta tabla es que a mayor valor de  $\gamma$  se tiene una peor convergencia al cero. Pero cuando cruzamos el borde  $\gamma = \sqrt{2}$  seguimos convergiendo a cero, esto sugiere que la cota no es ajustada en general. Otro punto que notar es como  $\alpha_1, \alpha_4$  para  $T = 25$  están más cerca del vector cero que el caso constante  $\alpha_5$ . Esto puede verse como una justificación de trabajar con  $\alpha(t)$  variable en vez de constante al igual que el experimento anterior, pues puede ser que la elección correcta de un  $\alpha(t)$  nos dé una mejor tasa de convergencia.



## Capítulo 4

# Formulación discreta

De igual manera que en la formulación continua, se separará la presentación comenzando con un lema con resultados intermedios válido para operadores más generales  $A_k$ , dando paso luego al teorema que trabajará directamente con nuestra formulación  $\alpha_k A_{\alpha_k}$ .

**Lema 8.** *Sea  $\{u_k\}$  una secuencia dada por la siguiente ecuación inductiva*

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s} + A_k u_{k+1} = 0 \quad (4.1)$$

$u_0, u_1$  dados.

donde  $A_k$  es un operador  $\lambda$ -cocoercivo para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma > 0$  es una constante tal que  $\lambda\gamma^2 > 1$  y  $s \in \mathbb{R}_{++}$ . Definamos el conjunto

$$S := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k^{-1}\{0\}.$$

Si  $S \neq \emptyset$ , entonces se cumple entonces que

$$\{u_{k+1} - u_k\}, \{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\} \in l^2(\mathcal{H}). \quad (4.2)$$

*Demostración.* Notamos que la  $\lambda$ -cocoercividad de  $A_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  implica que  $A_k$  es maximalmente monótono y  $\frac{1}{\lambda}$  Lipschitz continuo para todo  $k \in \mathbb{N}$  por los Lemas 2 y 1 respectivamente.

Comenzaremos probando que las secuencias  $\{u_k\}, \{u_{k+1} - u_k\}$  son acotadas. Sea  $z \in S$  un elemento fijo pero arbitrario. Definimos una secuencia auxiliar  $h_k$  por

$$h_k := \frac{1}{2} \|u_k - z\|^2.$$

Calculamos su primera “derivada” mediante la expresión  $\Delta h_k / s = (h_{k+1} - h_k) / s$  (detalle en la sub-

sección 4.1.1), obteniendo

$$\dot{h}_k = \frac{1}{s} \langle u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - z \rangle - \frac{1}{2s} \|u_{k+1} - u_k\|^2$$

como la expresión correspondiente. Usamos el mismo proceso para determinar la segunda “derivada” de  $h_k$  dada por  $\nabla \dot{h}_k / s = (h_k - h_{k-1}) / s$  (detalle en la subsección 4.1.2), obteniendo

$$\begin{aligned} \ddot{h}_k &= \frac{1}{s^2} (\langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - z \rangle + \|u_{k+1} - u_k\|^2 \\ &\quad - 2\langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle + \frac{1}{2} \|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2) \end{aligned}$$

como resultado.

Ahora consideramos la expresión  $\ddot{h}_k + \gamma \dot{h}_k$ . Previamente a computar dicho valor, vamos a declarar una sub-expresión común que acarraremos a través de los cálculos sin modificar.

$$\begin{aligned} Y &:= -\frac{2}{s^2} \langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle + \frac{1}{2s^2} \|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2 \\ &\quad - \frac{\gamma}{2s} \|u_{k+1} - u_k\|^2 + \frac{1}{s^2} \|u_{k+1} - u_k\|^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

luego en el calculo

$$\begin{aligned} &\ddot{h}_k + \gamma \dot{h}_k \\ &= \left\langle \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2}, u_{k+1} - z \right\rangle + \left\langle \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s}, u_{k+1} - z \right\rangle + Y \\ &= \left\langle \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s}, u_{k+1} - z \right\rangle + Y \\ &= \langle -A_k u_{k+1}, u_{k+1} - z \rangle + Y \\ &= -\langle A_k u_{k+1} - A_k z, u_{k+1} - z \rangle + Y \quad (A_k z = 0) \\ &\leq -\lambda \|A_k u_{k+1} - A_k z\|^2 + Y \\ &= -\lambda \left\| \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s} \right\|^2 + Y. \end{aligned}$$

Expandiendo la norma cuadrática, escribiendo explícitamente  $Y$  y moviendo todos los términos al lado izquierdo quedamos con expresión

$$\begin{aligned} &\ddot{h}_k + \gamma \dot{h}_k + \left( \frac{\lambda}{s^4} - \frac{1}{2s^2} \right) \|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2 + \left( \frac{\lambda \gamma^2}{s^2} + \frac{\gamma}{2s} - \frac{1}{s^2} \right) \|u_{k+1} - u_k\|^2 \\ &\quad + \left( \frac{2\lambda \gamma}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right) \langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle \leq 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Notamos que por el calculo hecho en la subsección 4.1.3, podemos reemplazar el producto interno para

obtener

$$\begin{aligned} \ddot{h}_k + \gamma \dot{h}_k + \left( \frac{\lambda}{s^4} - \frac{1}{2s^2} \right) \|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2 + \left( \frac{\lambda\gamma^2}{s^2} + \frac{\gamma}{2s} - \frac{1}{s^2} \right) \|u_{k+1} - u_k\|^2 \\ + \left( \frac{\lambda\gamma}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) (\|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2 + \nabla \|u_{k+1} - u_k\|^2) \leq 0, \end{aligned}$$

lo cual agrupado es

$$\begin{aligned} \ddot{h}_k + \gamma \dot{h}_k + \left( \frac{\lambda}{s^4} + \frac{1}{2s^2} + \frac{\lambda\gamma}{s^3} \right) \|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2 + \left( \frac{\lambda\gamma}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) \nabla \|u_{k+1} - u_k\|^2 \\ + \left( \frac{\lambda\gamma^2}{s^2} + \frac{\gamma}{2s} - \frac{1}{s^2} \right) \|u_{k+1} - u_k\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) será de donde obtendremos la mayor parte de nuestros resultados. Por la hipótesis  $\lambda\gamma^2 - 1 > 0$  podemos remover algunos términos no-negativos de (4.5) obteniendo

$$\ddot{h}_k + \gamma \dot{h}_k + \left( \frac{\lambda\gamma}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) \nabla \|\dot{u}_k\|^2 \leq 0. \quad (4.6)$$

Se conoce el siguiente resultado

$$u_k - u_0 = \sum_{i=1}^k \nabla u_i, \quad u_{k+1} - u_1 = \sum_{i=1}^k \Delta u_i. \quad (4.7)$$

Por tanto, al sumar (4.6) en  $\{1 \dots k\}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{h}_k + \gamma \dot{h}_k + \left( \frac{\lambda\gamma}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) \nabla \|u_{k+1} - u_k\|^2 \leq 0 \\ \frac{1}{s} \nabla \dot{h}_k + \frac{\gamma}{s} \Delta h_k + \left( \frac{\lambda\gamma}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) \nabla \|u_{k+1} - u_k\|^2 \leq 0 \quad / \cdot s \quad / \sum_{i=1}^k \\ \dot{h}_k + \gamma h_{k+1} + \left( \frac{\lambda\gamma}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \|u_{k+1} - u_k\|^2 \leq C_{z,1}. \end{aligned}$$

En particular, esto implica que

$$\dot{h}_k + \gamma h_{k+1} \leq C_{z,1}.$$

Donde al expandir nuestra notación de  $\dot{h}_k$  es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{h_{k+1} - h_k}{s} + \gamma h_{k+1} &\leq C_{z,1} \quad / \cdot s \\ h_{k+1} - h_k + s\gamma h_{k+1} &\leq sC_{z,1} \\ (1 + s\gamma) h_{k+1} - h_k &\leq sC_{z,1} \\ (1 + s\gamma) h_{k+1} &\leq sC_{z,1} + h_k \\ h_{k+1} &\leq \frac{sC_{z,1}}{1 + s\gamma} + \frac{h_k}{1 + s\gamma}. \end{aligned}$$

Fijemos el valor constante  $C_{2,z} := (sC_{z,1})/(1 + s\gamma)$ . Dada la relación recursiva anterior, le expandimos hasta el caso base.

$$\begin{aligned} h_{k+1} &\leq C_{2,z} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{(1 + s\gamma)^r} + \frac{h_1}{(1 + s\gamma)^k} \\ h_{k+1} &\leq C_{2,z} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+s\gamma}\right)^k}{1 - \frac{1}{1+s\gamma}} + \frac{h_1}{(1 + s\gamma)^k}, \quad 1 + s\gamma > 1 \\ h_{k+1} &\leq C_{2,z} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+s\gamma}} + h_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mostrando que la secuencia  $\{h_k\}$  es acotada. De esto podemos obtener dos resultados: primero que por definición de  $h_k$ , si este es acotado entonces también lo es  $\{u_k\}$ . Segundo que  $\{u_k\}$  sea acotada implica por desigualdad triangular que  $\{u_{k+1} - u_k\}$  también es acotada, obteniendo los resultados que buscábamos.

Ahora probaremos (4.2). Comenzaremos sumando la inecuación (4.5) entre  $\{1 \dots k\}$  notando que

$$\sum_{r=1}^k \ddot{h}_r = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^k \nabla \dot{h}_r = \frac{1}{s} (\dot{h}_k - \dot{h}_0), \quad \frac{\gamma}{s} \sum_{r=1}^k (h_{r+1} - h_r) = \frac{\gamma}{s} (h_{k+1} - h_1)$$

y moviendo los términos constantes a el lado derecho, obtenemos así la siguiente inecuación.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \dot{h}_k + \frac{\gamma}{s} h_{k+1} + \left( \frac{\lambda}{s^4} + \frac{\lambda\gamma}{s^3} + \frac{1}{2s^2} \right) \sum_{r=1}^k \|u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}\|^2 \\ + \left( \frac{\lambda\gamma}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) \|u_{k+1} - u_k\|^2 + \left( \frac{\lambda\gamma^2}{s^2} - \frac{1}{s^2} + \frac{\gamma}{2s} \right) \sum_{r=1}^k \|u_{r+1} - u_r\|^2 \leq C_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sabiendo que  $\{u_k\}, \{u_{k+1} - u_k\}$  son acotadas obtenemos que  $\dot{h}_k$  también lo es. Esto es por simple

calculo

$$\begin{aligned}
|\dot{h}_k| &= \left| \frac{1}{s} \langle u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - z \rangle - \frac{1}{2s} \|u_{k+1} - u_k\|^2 \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{s} \langle u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - z \rangle \right| + \frac{1}{2s} \|u_{k+1} - u_k\|^2 \\
&\leq \frac{1}{s} \|u_{k+1} - u_k\| \|u_{k+1} - z\| + \frac{1}{2s} \|u_{k+1} - u_k\|^2 < \infty.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ahora, sabiendo que  $\{h_k\}$ ,  $\{\dot{h}_k\}$ ,  $\{u_{k+1} - u_k\}$  son acotadas, enfocamos nuestra atención a (4.8) cuando  $k \rightarrow \infty$ . Al remover estos términos acotados, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{\infty} \|u_{r+1} - u_r\|^2 < \infty &\iff \{u_{r+1} - u_r\} \in l^2(\mathcal{H}) \\
\sum_{r=1}^{\infty} \|u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}\|^2 < \infty &\iff \{u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}\} \in l^2(\mathcal{H})
\end{aligned}$$

probando nuestro objetivo. □

**Teorema 2.** *Sea  $\{u_k\}$  una secuencia dada por la siguiente ecuación inductiva*

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s} + \alpha_k A_{\alpha_k} u_{k+1} = 0 \tag{4.10}$$

$u_0, u_1$  dados.

donde  $A_{\alpha_k}$  es la regularizada de Yosida de un operador maximalmente monótono  $A$ ,  $(\alpha_k)$  es una secuencia con una cota inferior estrictamente positiva,  $\gamma > 0$  es una constante tal que  $\frac{\gamma^2}{2} > 1$  y  $s \in \mathbb{R}_{++}$ . Definamos un conjunto

$$S := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (\alpha_k A_{\alpha_k})^{-1} \{0\}.$$

Si  $S \neq \emptyset$  entonces existe  $\bar{u} \in S$  tal que  $\{u_k\} \rightharpoonup \bar{u}$ .

*Demostración.* El resultado del Lema 8 es válido para este teorema pues la familia de operadores  $\alpha_k A_{\alpha_k}$  es  $\frac{1}{2}$ -cocoerciva por Lema 3. Probar convergencia débil a un elemento de  $S$  será consecuencia de utilizar el lema de *Opial* (Lema 5) adecuadamente. Comenzaremos probando que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_k - z\|$  existe como límite. Notamos que  $\{u_{k+1} - u_k\}, \{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\} \in l^2(\mathcal{H})$  implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_{k+1} - u_k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) = 0.$$

Sabemos además que  $\|u_k - z\|$  es acotado. Aplicando estos hechos en la ecuación (4.9) obtenemos que

$\lim_{k \rightarrow \infty} \dot{h}_k = 0$  y en particular acotado. Definimos la secuencia

$$\phi_k = \dot{h}_k + \gamma h_{k+1} + \left( \frac{\gamma\lambda}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) \|u_{k+1} - u_k\|^2$$

la cual es no-creciente en vista de la ecuación (4.6) y con todos sus términos acotados. Por lo tanto, el límite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k$  existe como un número. Luego

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{h}_k + \gamma \lim_{k \rightarrow \infty} h_{k+1} + \left( \frac{\lambda\gamma}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|^2 \\ &= 0 + \gamma \lim_{k \rightarrow \infty} h_{k+1} + 0 \end{aligned}$$

implicando que  $\|u_k - z\|^2$  existe como límite y que por lo tanto  $\|u_k - z\|$  también. Esto muestra la primera condición de *Opial*.

Para mostrar la segunda condición, trabajamos con la regularización de *Yosida*. Moviendo algunos términos en (4.10) resulta en la siguiente expresión.

$$-\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} - \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s} = \alpha_k A_{\alpha_k} u_{k+1}.$$

Al igual que en la ecuación (3.11) de la prueba anterior, podemos expandir la definición de la regularización hasta obtener la expresión

$$\frac{-\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} - \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s}}{\alpha_k} \in A \left( \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + \gamma \frac{u_{k+1} - u_k}{s} + u_{k+1} \right).$$

Dado que

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} \rightarrow 0 &\implies \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} \rightharpoonup 0 \\ \frac{u_{k+1} - u_k}{s} \rightarrow 0 &\implies \frac{u_{k+1} - u_k}{s} \rightharpoonup 0 \\ u_k &\rightharpoonup \bar{u} \end{aligned}$$

y la hipótesis sobre que  $\{\alpha_k\}$  tenga una cota inferior estrictamente positiva, tenemos mediante la convergencia (secuencial) en la topología fuerte y topología débil del grafo de  $A$  que

$$0 \in A\bar{u} \iff \bar{u} \in A^{-1}0.$$

Como en la ecuación (3.13) y (3.14), esto significa que

$$\bar{u} \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (\alpha_k A_{\alpha_k})^{-1} \{0\},$$

probando la segunda condición de *Opial* y mostrando así nuestro objetivo. Esto concluye la demostración.  $\square$

## 4.1 Detalles de calculo

En esta sección damos detalle explícito de cómo obtener las expresiones de trabajo para  $\dot{h}_k, \ddot{h}_k$  y  $\langle u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} \rangle$ .

### 4.1.1 Determinando $\dot{h}_k$

En espacios con producto interno, la siguiente ecuación es valida

$$\langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle = \langle a + b, a - b \rangle. \quad (4.11)$$

Utilizamos dicho resultado en el cálculo de  $\dot{h}_k := \Delta h_k / s$ .

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h_k}{s} &= \frac{1}{s} (h_{k+1} - h_k) \\ &= \frac{1}{2s} (\langle u_{k+1} - z, u_{k+1} - z \rangle - \langle u_k - z, u_k - z \rangle) \quad (\text{usando (4.11)}) \\ &= \frac{1}{2s} \langle u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - z + u_k - z \rangle \\ &= \frac{1}{2s} \langle u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - z + u_{k+1} - u_{k+1} + u_k - z \rangle \\ &= \frac{1}{2s} \langle u_{k+1} - u_k, 2(u_{k+1} - z) - u_{k+1} + u_k \rangle \\ &= \frac{1}{s} \langle u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - z \rangle - \frac{1}{2s} \|u_{k+1} - u_k\|^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Siendo (4.12) la expresión que estaremos utilizando para  $\dot{h}_k$ .

### 4.1.2 Determinando $\ddot{h}_k$

Usando la expresión (4.12) para computar  $\ddot{h}_k = \nabla \dot{h}_k / s$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \dot{h}_k}{s} &= \frac{1}{s^2} \langle u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - z \rangle - \frac{1}{2s^2} \|u_{k+1} - u_k\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{s^2} \langle u_k - u_{k-1}, u_k - z \rangle + \frac{1}{2s^2} \|u_k - u_{k-1}\|^2. \end{aligned}$$

El tercer sumando puede ser reescrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
-\langle u_k - u_{k-1}, u_k - z \rangle &= -\langle u_k - u_{k-1}, u_{k+1} - u_{k+1} + u_k - z \rangle \\
&= -\langle u_k - u_{k-1}, u_{k+1} - z \rangle - \langle u_k - u_{k-1}, -u_{k+1} + u_k \rangle \\
&= -\langle u_k - u_{k-1}, u_{k+1} - z \rangle + \langle u_k - u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle
\end{aligned}$$

el cual al ser reemplazado y agrupado correctamente resulta en la expresión

$$\begin{aligned}
\nabla \frac{\dot{h}_k}{s} &= \frac{1}{s^2} \langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - z \rangle - \frac{1}{2s^2} \|u_{k+1} - u_k\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{s^2} \langle u_k - u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle + \frac{1}{2s^2} \|u_k - u_{k-1}\|^2.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Notemos que podemos reescribir las dos últimas sub-expresiones como sigue

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \|u_k - u_{k-1}\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \|u_{k+1} - u_k - (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \|u_{k+1} - u_k\|^2 - \langle u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} \rangle + \frac{1}{2} \|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle u_k - u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle &= \langle u_{k+1} - u_k - (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}), u_{k+1} - u_k \rangle \\
&= \|u_{k+1} - u_k\|^2 - \langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle
\end{aligned}$$

lo cual, al reemplazar en (4.13) nos deja con

$$\begin{aligned}
\ddot{h}_k &= \frac{1}{s^2} (\langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - z \rangle + \|u_{k+1} - u_k\|^2 + \\
&\quad - 2\langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle + \frac{1}{2} \|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2).
\end{aligned}$$

### 4.1.3 Calculando $\nabla \|\dot{u}_k\|^2$

Comenzamos notando la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_k - u_{k-1} \rangle &= \\
\langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle &- \|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2
\end{aligned} \tag{4.14}$$



luego

$$\begin{aligned}
\nabla \|u_{k+1} - u_k\|^2 &= \langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - u_k + u_k - u_{k-1} \rangle \quad (\text{Por (4.11)}) \\
&= \langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle + \langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_k - u_{k-1} \rangle \\
&= 2\langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle - \|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2 \quad (\text{Por (4.14)}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$2\langle u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, u_{k+1} - u_k \rangle = \|u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}\|^2 + \nabla \|u_{k+1} - u_k\|^2. \quad (4.15)$$

## 4.2 Método RIPA para implementación

El sistema descrito por la ecuación (4.10) corresponde a una formulación discreta implícita del sistema continuo dado en (3.7). Esto se refiere que en nuestro último término tenemos  $\alpha_k A_{\alpha_k} u_{k+1}$  en vez de  $\alpha_k A_{\alpha_k} u_k$ . Si bien esto complica la evaluación manual de  $u_{k+1}$ , las sucesiones resultantes  $\{u_k\}$  generadas por esos sistemas siguen más fielmente a sus contrapartes continuas. Usualmente para obtener  $u_{k+1}$  se debe resolver un subproblema de punto fijo (idealmente de forma eficiente) en cada iteración. Dada la estructura de nuestro problema, podemos hacer una implementación más directa basada en el método RIPA [5, sec 3.1]. Para ver cómo hacer esto, tomemos la ecuación (4.10) y despejemos los valores con  $u_{k+1}$

$$\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\gamma}{s}\right) u_{k+1} + \alpha_k A_{\alpha_k} u_{k+1} = \left(\frac{2}{s^2} + \frac{\gamma}{s}\right) u_k - \frac{1}{s^2} u_{k-1}.$$

Dividiendo por  $\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\gamma}{s}\right)$ , reescribimos lo anterior como

$$\begin{aligned}
u_{k+1} + \underbrace{\frac{\alpha_k}{\frac{1}{s^2} + \frac{\gamma}{s}}}_{r_k} A_{\alpha_k} u_{k+1} &= \underbrace{\frac{\left(\frac{2}{s^2} + \frac{\gamma}{s}\right) u_k - \frac{1}{s^2} u_{k-1}}{\frac{1}{s^2} + \frac{\gamma}{s}}}_{y_k} \\
(I + r_k A_{\alpha_k}) u_{k+1} &= y_k \\
u_{k+1} &= (I + r_k A_{\alpha_k})^{-1} y_k \\
u_{k+1} &= J_{r_k}^{A_{\alpha_k}} y_k.
\end{aligned} \quad (4.16)$$

Es decir que para cada paso  $k$  debemos de calcular la resolvente de  $A_{\alpha_k}$  con parámetro  $r_k$ .

Lo anterior es un paso intermedio del problema de calcular la regularizada de una regularizada. En [8, Prop 23.6] los autores enuncian la siguiente propiedad para este problema

$$\forall \lambda, s \in \mathbb{R}_{++}, (A_\lambda)_s = A_{\lambda+s}.$$

De aquí podemos despejar las resolventes involucradas como fue hecho en [5, eq 82] para obtener la siguiente reescritura

$$\forall \lambda, s \in \mathbb{R}_{++}, J_s^{A\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + s} I + \frac{s}{\lambda + s} J_{\lambda+s}^A.$$

Es decir, la resolvente de una regularizada  $A_\lambda$  puede ser escrita en términos de una regularizada para el operador base  $A$ . Al aplicar este resultado a la ecuación (4.16) obtenemos el siguiente método de calculo

$$\begin{cases} y_k = \left( \left( \frac{2}{s^2} + \frac{\gamma}{s} \right) u_k - \frac{1}{s^2} u_{k-1} \right) / \left( \frac{1}{s^2} + \frac{\gamma}{s} \right) \\ r_k = \alpha_k / \left( \frac{1}{s^2} + \frac{\gamma}{s} \right) \\ u_{k+1} = \left( \frac{\alpha_k}{\alpha_k + r_k} I + \frac{r_k}{\alpha_k + r_k} J_{\alpha_k + r_k}^A \right) y_k. \end{cases} \quad (4.17)$$

el cual es sencillo de implementar si se tiene una rutina para calcular  $J_s^A$  para cualquier  $s \in \mathbb{R}_{++}$ .

La teoría del método RIPA fue presentada originalmente en [5] en el marco de trabajo de sistemas como (1.4). Estos están relacionados con los sistemas gradientes inerciales con viscosidad desapareciente estudiado en [16]. Estos últimos estudian el caso cuando la viscosidad es  $\gamma(t) = \alpha/t$ , para algún  $\alpha > 0$  y muestra su relación con el método de descenso rápido en gradiente de *Nesterov*. Al adaptar RIPA a nuestro sistema, perdemos mucho de trabajo en los órdenes de convergencia hecho para (1.4) hecho en [6] pues nuestro sistema tiene factor disipativo  $\gamma$  constante. Se tiene como dirección futura ver qué tanto de este trabajo puede ser recuperado.

A continuación, utilizaremos esta formulación para hacer experimentos computacionales del caso discreto.

## 4.3 Experimentos

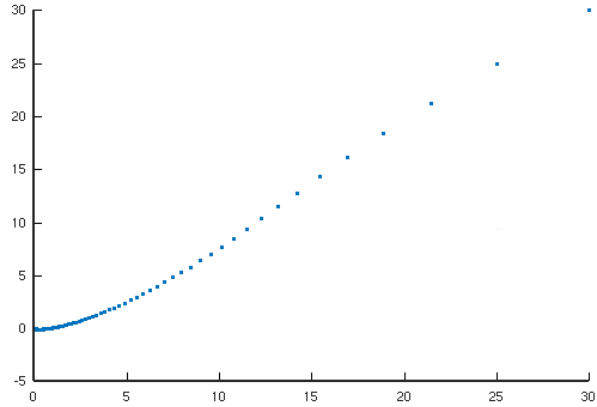
### 4.3.1 Operadores no cocoercivos

En este experimento volvemos a considera la matriz de rotación de 2 dimensiones dada en (3.15). Ya fue aclarado que esta no es un operador cocoercivo, pero si maximalmente monótono. Queremos ver que la formulación discreta también garantiza el comportamiento asintótico de las soluciones a  $S$ . Para esto, tomemos el sistema (4.10) para el caso  $\gamma = 3$ ,  $s = 0.2$ ,  $\alpha_k = 5$

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + 3 \frac{u_{k+1} - u_k}{s} + \alpha A_\alpha u_{k+1} &= 0 \\ u_0 &= [30, 30]^t, \quad u_1 = [25, 25]^t. \end{aligned}$$

De igual manera que en el caso continuo, la solución del sistema de segundo orden para la matriz de rotación no converge al conjunto de ceros de  $A$ . Pero nuestra sucesión solución  $\{u_k\}$  converge al

vector cero, que si pertenece a dicho conjunto como se ve en la figura 4.1. Esto estaba garantizado por



(a) Regularización de la matriz de rotación

$k$	Normas
0	42.426
25	5.0816
50	0.88345
75	0.15361
100	0.026708

(b) Evolución de las normas

Figura 4.1

nuestro resultado dado que satisfacíamos las condiciones. Notar que las normas de los casos continuos y discretos no pueden ser comparadas vis-a-vis, pues la aproximación del tiempo está dada por  $t = sk$ .

### 4.3.2 Operador cocoercivo

Consideremos la matriz  $A$  dada en la ecuación (3.16). Esta matriz tiene un kernel no trivial, es no fuertemente convexa y cocoerciva. Nos interesa comparar las tasas de convergencias de distintos modelos sobre este operador. Los sistemas a estudiar serán los siguientes

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + 2\frac{u_{k+1} - u_k}{s} + Au_{k+1} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + 2\frac{u_{k+1} - u_k}{s} + \alpha_k A_{\alpha_k} u_{k+1} = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{s} + Au_k = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{s^2} + \frac{\beta}{t} \frac{u_{k+1} - u_k}{s} + A_{\lambda_k} u_{k+1} = 0, \quad \beta = 8, \lambda_k = \frac{3k^2}{128} \quad (4.21)$$

$$u_0 = [50, -60, -120]^t, \quad u_1 = [50, -60, -120]$$

con  $s = 0.5$ , donde (4.18) es el sistema de segundo orden con el operador base  $A$ , (4.19) es nuestro sistema (4.10) y será estudiado para  $\alpha_k = 3$ ,  $\alpha_k = k + 1$ , (4.20) es el sistema de primer orden para  $A$  y (4.21) es el sistema propuesto en [5]. Este último también será evaluado vía método RIPA y los parámetros  $\beta, \alpha_k$  fueron escogidos de manera que los resultados de [5] sean válidos. En todos los sistemas, la sucesión  $\{u_k\}$  debiera de converger a  $(0, -60, 0)^t$  y compararemos las normas respecto a

este punto.

$k$	(4.18) $A$	(4.19) $\alpha_k = 3$	(4.19) $\alpha_k = k + 1$	(4.20)	(4.21)
25	24.814	8.471	1.057	3.164	1.291
50	3.872	$3.765e-01$	$6.559e-04$	$8.324e-02$	$9.129e-01$
75	$6.389e-01$	$1.763e-02$	$2.160e-07$	$2.655e-03$	$1.934e-02$
100	$1.111e-01$	$8.730e-04$	$5.121e-11$	$9.157e-05$	$4.142e-02$

Al igual que en la formulación continua de este experimento, el sistema (4.19) con  $\alpha_k = k + 1$  la mejor tasa de convergencia, estando para  $t = 50$  en orden de magnitud  $-04$ . Esto es una justificación de utilizar  $\alpha_k$  variables en la práctica. El sistema (4.19) aun con  $\alpha_k = 3$  supera al sistema base (4.18).

### 4.3.3 Comparando el progreso entre diferentes sucesiones $\alpha_k$ y valores de $\gamma$

Queremos ver los efectos de diferentes elecciones de  $\alpha_k$  y  $\gamma$  sobre nuestros sistemas (4.10). Para esto consideramos las siguientes secuencias  $\alpha_k$  puesto que cumplen con las hipótesis requeridas.

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(1)} &:= k + 1 & \alpha_k^{(2)} &:= \sqrt{k + 1} & \alpha_k^{(3)} &:= \log(k + 1) \\ \alpha_k^{(4)} &:= 3 + 6k^{-0.5} & \alpha_k^{(5)} &:= 3. \end{aligned}$$

La elección de valores de  $\gamma$  a considerar es la siguiente

$$\gamma_1 := 5 \quad \gamma_2 := \sqrt{2} + 0.1 \quad \gamma_3 := \sqrt{2}.$$

En  $\gamma_1, \gamma_2$  se tiene garantizada convergencia por nuestro teorema. En  $\gamma_3$  puede haber convergencia, pero no hay garantía. Como operador base usaremos la matriz de rotación de (3.15) con su respectiva regularización de *Yosida* para cada  $\alpha_k$ . Los puntos iniciales serán  $u_0 = (30, 30), u_1 = (25, 25)$  y el tamaño de nuestro paso  $s = 0.1$ . Las soluciones deberán de converger a  $(0, 0)$  para todos los casos.

Compararemos con el sistema ha evolucionado hasta el tiempo  $k = 50$  y  $k = 100$ .

$\alpha_k$	$\gamma$	$k = 50$	$k = 100$
$k + 1$	5	8.0442e+00	2.8644e+00
	$\sqrt{2} + 0.1$	6.5786e-02	1.4215e-03
	$\sqrt{2}$	5.6579e-05	1.9374e-06
$\sqrt{k + 1}$	5	8.4658e+00	3.0604e+00
	$\sqrt{2} + 0.1$	1.2882e-01	4.6919e-03
	$\sqrt{2}$	3.0855e-04	1.3354e-05
$\log(k + 1)$	5	8.9788e+00	3.3851e+00
	$\sqrt{2} + 0.1$	2.2034e-01	1.2105e-02
	$\sqrt{2}$	1.0925e-03	6.8391e-05
$3 + 6k^{-0.5}$	5	8.4186e+00	3.2292e+00
	$\sqrt{2} + 0.1$	1.3736e-01	8.6670e-03
	$\sqrt{2}$	5.9486e-04	4.1672e-05
3	5	8.8626e+00	3.5217e+00
	$\sqrt{2} + 0.1$	2.2310e-01	1.7096e-02
	$\sqrt{2}$	1.5590e-03	1.3222e-04

De esta tabla podemos extraer las mismas conclusiones que en el caso continuo. Es claro que entre mayor el valor de  $\gamma$  peor es la tasa de convergencia. Si cruzamos la cota  $\gamma = \sqrt{2}$  seguimos teniendo convergencia, lo que sugiere que la cota no es ajustada. Finalmente se ve que hay ciertas instancias de  $\alpha_k$  como  $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(4)}$  que muestran mejores tasas de convergencias que el caso constante.



## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se obtuvieron resultados de comportamiento asintótico de sistemas de segundo orden basados en operadores maximales monótonos. Se muestra una forma iterativa de ir resolviendo estos sistemas utilizando identidades del resolvente. Se espera que los ejemplos sean convincentes en cuanto al interés de utilizar dichas formulaciones en problemas reales, dado que la elección de parámetros  $\alpha(t)$  puede tener efectos notorios en las tasas de convergencia. De este trabajo se desprenden ideas futuras a investigar, podemos mencionar:

- Estudio de las tasas de convergencias para el método iterativo propuesto. El método RIPA tiene trabajos recientes que para establecer resultados de sus tasas de convergencias en [6]. Este resultado depende en algunos pasos de que se está trabajando un sistema de segundo orden donde su factor disipativo tiende a cero. En nuestro caso el factor disipativo  $\gamma$  es constante, por lo que se debe ver cuánto de este trabajo se puede recuperar.
- Determinar si la constante  $\lambda = \sqrt{2}$  es la mas ajustada para el caso general. Hay indicios de que esto no es así. Dado que esto afecta en un punto clave de la demostración al inicio, se debe estudiar cómo recuperar el resto de la prueba.





# Bibliografía

- [1] Alvarez, Felipe. “*On the minimizing property of a second order dissipative system in Hilbert spaces.*” SIAM Journal on Control and Optimization 38.4 (2000): 1102-1119.
- [2] Alvarez, Felipe, and Hedy Attouch. “*An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping.*” Set-Valued Analysis 9.1-2 (2001): 3-11.
- [3] Attouch, Hedy, and F. Alvarez. “*The heavy ball with friction dynamical system for convex constrained minimization problems.*” Optimization. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000. 25-35.
- [4] Attouch, Hedy, and Paul-Emile Maingé. “*Asymptotic behavior of second-order dissipative evolution equations combining potential with non-potential effects.*” ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 17.3 (2011): 836-857.
- [5] Attouch, Hedy, and Juan Peypouquet. “*Convergence of inertial dynamics and proximal algorithms governed by maximally monotone operators.*” Mathematical Programming (2017): 1-42.
- [6] Attouch, Hedy, and Juan Peypouquet. “*Convergence rate of proximal inertial algorithms associated with moreau envelopes of convex functions*”. To appear in Mathematical Programming.
- [7] Baillon, Jean-Bernard. *Comportement asymptotique des contractions et semi-groupes de contractions-equations de schroedinger non lineaires et divers.* Diss. 1978.
- [8] Bauschke, Heinz H., and Patrick L. Combettes. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces.* Vol. 408. New York: Springer, 2011.
- [9] Brezis, Haim. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science & Business Media, 2010.
- [10] Brezis, Haim. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* Vol. 5. Elsevier, 1973.
- [11] Bruck Jr, Ronald E. “*Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space.*” Journal of Functional Analysis 18.1 (1975): 15-26.

- [12] Minty, George J. “*Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space.*” *Duke Mathematical Journal* 29.3 (1962): 341-346.
- [13] Opial, Zdzisław. “*Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings.*” *Bulletin of the American Mathematical Society* 73.4 (1967): 591-597.
- [14] Peypouquet, Juan. *Convex optimization in normed spaces: theory, methods and examples.* Springer, 2015.
- [15] Polyak, Boris T. “*Some methods of speeding up the convergence of iteration methods.*” *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 4.5 (1964): 1-17.
- [16] Su, Weijie, Stephen Boyd, and Emmanuel Candes. “*A differential equation for modeling Nesterov’s accelerated gradient method: Theory and insights.*” *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2014.