UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

Repositorio Digital USM **https://repositorio.usm.cl**

Tesis USM TESIS de Pregrado de acceso ABIERTO

2016

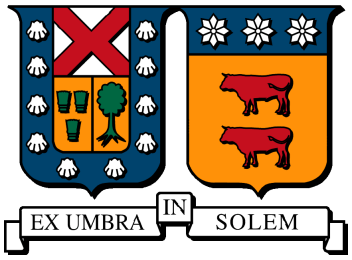
ESTUDIO DE LA ORIENTACIÓN ENTRE EL TENSOR ANISOTRÓPICO DE REYNOLDS Y EL TENSOR DE DEFORMACIÓN PROPUESTO EN LA HIPÓTESIS DE BOUSSINESQ

CORTÉS ATUÁN, ANDRÉS ANTONIO

http://hdl.handle.net/11673/39965

Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO-CHILE



ESTUDIO DE LA ORIENTACIÓN ENTRE EL TENSOR ANISOTRÓPICO DE REYNOLDS Y EL TENSOR DE DEFORMACIÓN PROPUESTO EN LA HIPÓTESIS DE BOUSSINESQ

ANDRÉS ANTONIO CORTÉS ATUAN

MEMORIA DE TÍTULO INGENIERÍA CIVIL MECÁNICA

PROFESOR GUÍA : DR. ING. ARTURO GONZALEZ ARAYA
PROFESOR CORREFERENTE : PHD CHRISTOPHER COOPER VILLAGRÁN

Noviembre 2016

Resumen

En las ecuaciones promediadas de Navier-Stokes conocidas como RANS (Reynolds Average Navier Stokes equations) surge como incógnita el tensor de Reynolds $\overline{u_i' u_j'}$. Para la determinación del tensor de Reynolds se pueden utilizar modelos de turbulencia, dentro de los cuales destacan los que se basan en la hipótesis de Boussinesq $\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3}k = -2\nu_T S_{ij}$. Los términos a la izquierda de la ecuación representan el tensor Anisotrópico de Reynolds R, mientras que los términos de la derecha ν_T y S_{ij} representan la Viscosidad Turbulenta y el Tensor de Deformación. Esta hipótesis propone la existencia de un alineamiento entre los ejes principales de ambos tensores.

La suposición hecha por Boussinesq tiene impresiciones en distintos flujos. Este estudio está enfocado en evaluar la hipótesis de Boussinesq mediante una comparación geométrica entre la orientación del tensor anisotrópico de Reynolds y el tensor de deformación.

En los cálculos se determinaron 3 ángulos, los cuales describen la orientación relativa entre los ejes principales de R y S según la metodología de Higgins, Parlange y Menevau [10]. Además se evaluó el índice ρ_{RS} de Schmitt [16], el cuál prueba la validez de la hipótesis, mediante un producto interno entre R y S.

Se utilizó la base de datos DNS de THTlab [6] para dos flujos desarrollados: un canal ($Re_m = \{3220, 4586, 10039\}$) y una tubería ($Re_\tau = \{180, 157\}$).

Se aplicó la metodología sobre datos de mediciones LDV de una tubería con Swirl [14] con $Re = 2,8 \cdot 10^5$. Se usaron datos sin rotación para comparar con el caso DNS, y datos con rotación tal que $Ro = \{1{,}80, 1{,}45, 0{,}75\}$.

Se contó con los perfiles de velocidad y las estadísticas de la turbulencia en los casos vistos. Se empleó el programa MatLab para los cálculos, facilitando el almacenamiento, el uso de los resultados y la generación de gráficos.

Los resultados indicaron que tanto el número de Reynolds, como la generación de una rotación (Swirl), producen un cambio sobre la orientación de los tensores R y S que permiten mejorar el comportamiento del modelo de Bousssinesq.

Agradecimientos

Gracias al profesor guía Arturo González por la oportunidad de aportar con este trabajo, la paciencia y la buena disposición. También al profesor correferente Christopher Cooper por ayudar a evaluar mi memoria de título.

A mis padres Leyla y Roberto, y a mi hermana Constanza por criarme y educarme, y por estar siempre conmigo. A mis abuelos Majaín y Gloria, por ser un gran ejemplo a seguir.

Gracias a Bárbara, que siempre me ha motivado y me ha enseñado a crecer. Te quiero mucho.

A la banda Grisú (Anibal, Sebastián y Matías) y a la música, que son una parte importante de mi. A mis compañeros de universidad: Miguel, Francisco, Ignacio, Juan Pablo y tantos otros con los que comparto este logro y para quienes deseo lo mejor en su vida profesional y personal. A mis amigos fuera de la universidad Diego, Darío, Francisco, Guido y Felipe que siempre tienen la mejor disposición para alegrarme.

Un agradecimiento a la gente del puerto Punta Chungo y de Energía Baquedano, por guiarme en mis primeras labores como profesional.

Gracias a mis gatitos Parri, Mili, Tiger y Murphy, por darme su cariño tan puro y sincero.

Nada en mi vida sería posible sin ustedes al lado.

Índice general

1. Introducción 1
   1.1. Motivación . . . 2
   1.2. Objetivos Propuestos . . . 3

2. Marco Teórico 4
   2.1. Ecuación de Momentum . . . 5
      2.1.1. Navier-Stokes Incompresible . . . 5
      2.1.2. Reynolds Average Navier-Stokes (RANS) . . . 6
   2.2. Tensor de Esfuerzos de Reynolds . . . 10
      2.2.1. Estadísticas de la Turbulencia . . . 11
   2.3. Aproximación de Boussinesq . . . 13
      2.3.1. Tensor Infinitesimal de Deformación . . . 14
      2.3.2. Energía Cinética . . . 14
      2.3.3. Viscosidad Turbulenta . . . 15
      2.3.4. Hipótesis de Boussinesq . . . 15

3. Metodología 16
   3.1. Datos . . . 17
      3.1.1. Canal DNS THTlab . . . 17
      3.1.2. Tubería DNS THTlab . . . 18
      3.1.3. Mediciones LDV Tubería con Swirl . . . 19
   3.2. Alineamiento entre dos Tensores . . . 21
      3.2.1. Tensiones y direcciones principales . . . 21
      3.2.2. Ángulos entre Tensores . . . 23
      3.2.3. Índice ρ_{RS} . . . 24
   3.3. Extensión de Boussinesq sobre RANS . . . 25

3.4. Splines Cúbicos y Derivadas Discretas . . . 26
3.5. Variables Adimensionales . . . 27
3.6. Cantidades en Coordenadas Cilíndricas . . . 28
3.7. Resumen Metodología . . . 30

4. Resultados 33
4.1. Canal DNS THTlab . . . 34
4.1.1. Campo de Velocidades . . . 34
4.1.2. Tensor de Deformación . . . 35
4.1.3. Estadísticas de la Turbulencia . . . 36
4.1.4. Tensor de Reynolds . . . 37
4.1.5. Comparación R-S . . . 39
4.1.6. Prueba directa sobre RANS . . . 41
4.2. Tubería DNS . . . 43
4.2.1. Campo de Velocidades . . . 44
4.2.2. Tensor de Deformación . . . 46
4.2.3. Tensor de Reynolds . . . 48
4.2.4. Comparación R-S . . . 50
4.3. Tubería LDV Swirl . . . 51
4.3.1. Perfiles de Velocidad . . . 52
4.3.2. Derivadas Direccionales . . . 55
4.3.3. Tensor de Deformación . . . 57
4.3.4. Tensor de Reynolds . . . 58
4.3.5. Orientación entre R y S . . . 61

5. Conclusiones 65
5.1. Canal DNS . . . 66
5.2. Tubería DNS . . . 66
5.3. Tubería LDV con Swirl . . . 67
5.4. Generalidades . . . 67

6. Anexos 69
A. Cálculo de Autovalores y Autovectores . . . 70
B. Gráficos de contorno LDV . . . 71
C. Códigos Matlab . . . 81
C.1. Leer Datos . . . 81

C.2. Cálculos 81
C.3. Resultados 85
C.4. Tensor Reynolds 94
C.5. Derivadas con Splines 94
C.6. Tensor Boussinesq 96
C.7. Autovalores y Autovectores 97
C.8. Ángulos 97
C.9. ρ_{RS} 98
C.10. Diferencial sobre un Tensor 98
C.11. Cambio de Estructura de Datos 100

Índice de figuras

2.1. Tensor de esfuerzos que actúan sobre un elemento infinitesimal. 11
2.2. Ejemplo de una fluctuación aleatoria u_i' sobre una velocidad promedio $\bar{u}_i$. 12
2.3. Ejemplo de dos variables aleatorias a y b en función del tiempo. 13

3.1. Esquema de un flujo a través de placas paralelas en coordenadas cartesianas. 18
3.2. Esquema del flujo a través de una tubería en coordenadas cilíndricas. . . 19
3.3. (a) Esquema del arreglo de medición: 1. Bomba de caudal ,2. Difusor-Tobera, 3. Generador de Swirl, 4. Área de Mediciones. (b) Generador de Swirl. 20
3.4. Rotación de un tensor hacia sus ejes principales. 22
3.5. Descripción del alineamiento relativo entre dos tensores ortogonales [10]. 23
3.6. Etapas de la metodología aplicada. 32

4.1. Velocidad Axial Canal DNS [12]. 34
4.2. Derivada de la velocidad $\bar{u}*$ con respecto al ancho $y*$ del canal DNS . . 35
4.3. Representación direcciones principales de S y ángulos con respecto XZY a para el canal DNS [12]. 36
4.4. Componentes $\overline{u_i'u_j'}$ no nulas de R en canal DNS [12]. 37
4.5. Ángulos de elevación de R para el canal DNS [12] ($D_p - XZY$). . . . 38
4.6. Representación direcciones principales de R y ángulos con respecto XZY a para el canal DNS [12]. 38
4.7. Ángulo Elevación θ canal DNS [12] ($D_R - D_S$). 39
4.8. Representación direcciones principales de S y R ángulos entre ellas para el canal DNS [12]. 40
4.9. Índice ρ_{RS} canal DNS [12]. 40
4.10. Prueba sobre RANS en canal DNS [8] (a) $d\rho_{RS}$ (b) η. 42

4.11. Derivada de ρ_{RS} con respecto a $y*$ canal DNS [12]. 43
4.12. Campos de velocidad promedio (a) Axial, (b) Tangencial y (c) Radial en Tubería DNS de THTlab [5]. 44
4.13. Derivadas de la velocidad con respecto a r en tubería DNS [5]. 45
4.14. Derivada de la velocidad tangencial relativa al radio $\frac{\partial}{\partial r}\frac{\bar{u_\theta}*}{r}$ tubería DNS [5]. 46
4.15. Ángulos entre $D_S - X\theta r$ tubería DNS [5]. 47
4.16. Componentes $\overline{u_i' u_j'}$ tensor de Reynolds en tubería DNS [5]. Datos $\triangle$ con control de Drag y $\square$ sin. 48
4.17. Ángulos entre $D_R - X\theta r$ tubería DNS [5]. 49
4.18. Ángulos entre $D_R - D_S$ para tubería DNS con $\triangle$ y sin $\square$ control de turbulencia. 50
4.19. Indice de Orientación relativa entre R y S para tubería DNS. 51
4.20. Perfiles de velocidad para $Ro = 180$ a lo largo de la tubería LDV [14]. . 53
4.21. Perfiles de velocidad para Ro distintos, en la posición $x = 14D$ en tubería LDV [14]. 55
4.22. Derivadas direccionales de Datos LVD en la posición $x = 14D$ en tubería LDV [14]. 56
4.23. Ángulos entre D_S y $X\theta r$ para datos LDV con $x = 14D$ en tubería LDV [14]. 58
4.24. Estadísticas de turbulencia para Ro distintos, en la posición $x = 14D$ en tubería LDV [14]. 59
4.25. Ángulos entre D_R y $X\theta r$ para datos LDV con $x = 14D$ en tubería LDV [14]. 61
4.26. Orientación relativa entre R y S para datos LVD [14] con $Ro = 0,0{,}75,$ $1{,}40, 1{,}80$ en tubería LDV [14]. 62
4.27. Evolución de ρ_{RS} a lo largo de la tubería LVD [14] para $Ro = 1{,}80$. . . 63
4.28. ρ_{RS} a lo largo de la tubería LVD [14] para (a)$x = 4D$ y (b)$x = 14D$. . . 64

6.1. Ángulo θ_S tubería LDV [14]. 72
6.2. Ángulo ϕ_S tubería LDV [14]. 73
6.3. Ángulo ζ_S tubería LDV [14]. 74
6.4. Ángulo θ_R tubería LDV [14]. 75
6.5. Ángulo ϕ_R tubería LDV [14]. 76
6.6. Ángulo ζ_R tubería LDV [14]. 77

6.7. Ángulo θ tubería LDV [14]. 78
6.8. Ángulo ϕ tubería LDV [14]. 79
6.9. Ángulo ζ tubería LDV [14]. 80

Índice de tablas

3.1. Constantes de flujo de los sets de datos DNS de canal. 18
3.2. Constantes de flujo de los sets de datos DNS de tubería. 19

Nomenclatura

Constantes del Flujo

Viscosidad Dinámica	μ
Densidad	ρ
Viscosidad Cinemática	ν
Viscosidad Turbulenta	ν_T
Energía Cinética Turbulenta	k
Velocidad de Pared	u_τ
Velocidad Media	u_m
Número de Reynolds de Pared	Re_τ
Número de Reynolds Característico	Re_m
Largo Característico	D

Coordenadas Cartesianas

Componentes de Velocidad	$\{u, v, w\}$
Velocidades Promedio Temporal	$\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$
Fluctuaciones de Velocidad	$\{u', v', w'\}$
Posición	$\{x, y, z\}$

Coordenadas Cilíndricas

Componentes de Velocidad	$\{u_x, u_\theta, u_r\}$
Velocidades Promedio Temporal	$\{\overline{u_x}, \overline{u_\theta}, \overline{u_r}\}$
Fluctuaciones de Velocidad	$\{u'_x, u'_\theta, u'_r\}$
Posición	$\{x, \theta, r\}$

Tensores y Alineamiento

Tensor de Reynolds	$-\overline{u_i' u_j'}$
Tensor Anisotrópico de Reynolds	$R = -\overline{u_i' u_j'} + k$
Autovalores Tensor Anisotrópico	λ_R
Direcciones Principales Tensor Anisotrópico	$\left\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\right\}_R$
Tensor de Deformación	S
Autovalores Tensor de Deformación	λ_S
Direcciones Principales Tensor de Deformación	$\left\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\right\}_S$
Ángulo Elevación [1]	θ
Ángulo Azimutal	ϕ
Ángulo Proyección	ζ
Índice de Alineamiento entre Tensores (Schmitt)	ρ_{RS}

[1] Se indican las variables para la comparación entre los Tensores Isotrópico y Anisotrópico sin índice (θ, ϕ, γ). Para una comparación de orientación relativa entre los tensores y tensor fijo (ejes coordenados por ejemplo) se utiliza el índice R e S, tensor Anisotrópico y de Deformación respectivamente (θ_R, ϕ_R, γ_R).

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Durante el último siglo ha habido un gran desarrollo en la mecánica de flujos turbulentos, con el objetivo de resolver la ecuación de Navier-Stokes(1822). De forma analítica-empírica se han formulado modelos numéricos para casos particulares, limitados en su aplicabilidad. Ante la aparición de problemas más complejos y formas más elaboradas se ha tratado de encontrar un modelo que pueda describir el comportamiento del fluido en cualquier caso. En esta búsqueda se han ido obteniendo distintas herramientas que permiten simplificar, o más bien resumir un flujo con un menor número de datos.

Boussinesq(1877) introdujo el concepto de Eddy Voscosity (Viscosidad Turbulenta) ν_T, en adición a la energía cinética k del flujo, como la causa de las fluctuaciones turbulentas. Parte de su análisis consistía en considerar la velocidad y presión promedio en un lapso de tiempo infinitesimal.

Osborne Reynolds(1895), dedicado a analizar la transición laminar-turbulenta, propuso separar los campos de velocidades y presión en una parte estacionaria y otra parte fluctuante en la ecuación de Navier-Stokes. Junto con esto, realizó un promedio temporal (con un set de reglas y formas bastante específicas) para trabajar con cantidades medias, dando lugar al sistema de ecuaciones Reynolds Average Navier-Stokes(RANS).

Reynolds, dentro del desarrollo de las RANS, realizó un análisis tensorial del comportamiento del fluido donde participan: el gradiente de presión, el gradiente de velocidad y un conjunto de coeficientes de correlación entre las fluctuaciones turbulentas llamado Tensor de Esfuerzos de Reynolds. Precisamente con este concepto surge el problema principal de las ecuaciones de Navier Stokes, a lo que se le llama Closure Problem: Encontrar el valor de las 6 componentes del Tensor de Reynolds en función de las cantidades promedio de la velocidad y la presión.

Una extraña coincidencia es que Boussinesq "ya había resuelto" ese problema casi 20 años antes de que fuera planteado y probablemente por este motivo el modelo presenta discordancias con algunas consideraciones que hizo Reynolds, según Schmitt ([16] pp. 3).

Como se verá en el desarrollo de este trabajo, existen discordancias en la orientación del tensor de Boussinesq con respecto al de Reynolds. Con esto en mente se hará un

análisis de la orientación de ambos tensores utilizando las metodologías de Schmitt [16] y de Higgins, Parlange y Menevau [10] sobre simulaciones DNS [11] y mediciones LVD [14].

1.2. Objetivos Propuestos

Objetivo Principal

- Construir y usar herramientas para la evaluación de la Aproximación de Boussinesq en la modelación de flujos incompresibles turbulentos.

Objetivos Específicos

- Investigar la teoría asociada a los flujos turbulentos y la hipótesis de Boussinesq.
- Construir herramientas para la evaluación del modelo de Boussinesq mediante un software matemático.
- Evaluar el modelo con datos de simulaciones DNS (Direct Numerical Simulation) y datos de mediciones LDV (Laser-Doppler Velocimeter) de flujos turbulentos.
- Analizar el comportamiento de variables asociadas a la orientación del tensor Anisotrópico de Reynolds y del tensor Isotrópico de Deformación.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Ecuación de Momentum

2.1.1. Navier-Stokes Incompresible

Las ecuaciones de Navier-Stokes son la base de la mecánica de fluidos newtonianos, ya que gobiernan el movimiento de flujos de distintas características: compresible o incompresible, laminar o turbulento, viscoso o no viscoso, etc. Algunas de estas características permiten considerar ciertas cantidades constantes. Estas ecuaciones son derivadas del teorema de Teorema de Transporte de Reynolds y el Teorema de Divergencia [4].

Se plantea un campo de velocidades $\vec{V}$, que en coordenadas cartesianas se puede descomponer en $V_x = u$, $V_y = v$ y $V_z = w$.

$$\vec{V} = \vec{V}(u, v, w) = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \tag{2.1}$$

Primero, para establecer la conservación de masa, se escribe la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \tag{2.2}$$

El primer término consiste en las variaciones de densidad del fluido. Una consideración utilizada es la de incompresibilidad: Densidad Constante, por lo que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. El segundo término es la divergencia del campo de velocidades. La divergencia de un campo vectorial en un volumen de control cerrado corresponde a la diferencia entre el flujo de entrada y el flujo de salida. Como se observa, para flujos incompresibles: $\nabla \cdot (\rho u) = 0$.

En segundo lugar se tiene la ecuación de movimiento, basada en la conservación de Momentum Lineal:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + g + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \vec{V} \tag{2.3}$$

Los términos a la izquierda corresponden a la derivada material del campo de velocida-

des, análogo a la aceleración $m \cdot a$ en la conservación de momentum lineal. El Término Local $\frac{\partial u}{\partial t}$ se considera nulo para flujos estacionarios y tiene un valor distinto de cero para flujos no estacionarios. El $\text{Término Convectivo}$ $\left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \vec{V}$ depende de la geometría del flujo. Su no-linealidad es el factor que agrega una gran dificultad en la resolución de la ecuación.

Los términos de la derecha son la analogía a $\sum F$ en la segunda Ley de Newton, las fuerzas ejercidas sobre la partícula del fluido que se está observando. Estas fuerzas se dividen en: gradiente de Presión $\frac{1}{\rho}\nabla P$, fuerza de gravedad g y fuerzas viscosas $\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{V}$. De estos términos, como tercera consideración se aplica $g = 0$.

No se menciona la ecuación de Energía dado que no se utilizará en el análisis.

Aplicando las simplificaciones nombradas, se reescriben las ecuaciones 2.2 y 2.3 separando por componentes de las derivadas direccionales en coordenadas cartesianas:

$$x) \qquad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2.4}$$

$$y) \qquad \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{2.5}$$

$$z) \quad \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.7}$$

Se obtiene un sistema de 4 ecuaciones diferenciales no-lineales.

2.1.2. Reynolds Average Navier-Stokes (RANS)

Reynolds (1877) planteó la descomposición del campo de velocidad para un análisis del fenómeno de la turbulencia. Este método considera que la velocidad y la presión se

separan en una parte promedio y una perturbación:

$$u = \bar{u} + u' \quad ; \quad v = \bar{v} + v' \quad ; \quad w = \bar{w} + w' \quad ; \quad P = \bar{P} + P' \tag{2.8}$$

El término promedio $\bar{u}$ se puede asociar al comportamiento de un fenómeno estacionario, y se asume constante en el tiempo. La parte $\mathrm{fluctuante}\ u'$ se asocia al fenómeno turbulento, y no tiene una presencia significante en flujos laminares.

Se reemplazan los términos de la descomposición (2.8) en (2.3) y (2.2) (se muestra sólo una de las tres ecuaciones de momentum, ya que luego se simplifican términos y se llega a una forma similar para cada componente):

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}+u'}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}+u')^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{w}+w')}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial z^2}\right) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.10}$$

Para el siguiente paso se aplica el promedio temporal a 2.9. Para simplificar términos se consideran las siguientes propiedades planteadas por Reynolds ([15] pp. 558-559):

1. El promedio temporal de una fluctuación es cero.

$$\bar{u'} = lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}(u-\bar{u})dt \equiv 0$$

   Donde T es el periodo en el cual se realiza la integración y t_0 es el tiempo de referencia.

2. La derivada de un promedio con respecto al tiempo es cero.

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = 0$$

3. El promedio de una derivada es igual a la derivada del promedio.

$$\overline{\frac{du}{dx}} = \frac{d\bar{u}}{dx}$$

4. El promedio de una multiplicación entre un promedio y otro término cumple la siguiente igualdad.

$$\overline{\bar{u}v} = \bar{u}\bar{v}$$

5. El promedio es indiferente si se realiza más de una vez sobre el mismo término.

$$\overline{\bar{u}} = \bar{u}$$

Desarrollando:

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{d\overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{d\overline{v'w'}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right) \tag{2.11}$$

El término que tiene las primeras derivadas de los promedios se reduce utilizando la ecuación de continuidad (2.3) bajo el siguiente razonamiento: Al promediar esta expresión se tiene, por la propiedad (2.12), lo siguiente:

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right) = 0 \tag{2.12}$$

Ahora, concentrándose en los términos de interés, se aplica la regla de la cadena para descomponer la derivada y se factoriza $\bar{u}$ a la derecha :

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = \bar{u}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial\, \bar{w}}{\partial z}\right) + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\, \bar{u}}{\partial z}$$

Se aplica (2.12), simplificando un término.

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\, \bar{u}}{\partial z} \tag{2.13}$$

Para terminar, se reordena (2.11) incluyendo esta última igualdad para llegar a las RANS [15] para cada componente de (2.3):

$$x) \quad \rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\, \bar{u}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu\nabla^2\bar{u} - \rho\left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{d\overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{d\overline{u'w'}}{\partial z}\right) \tag{2.14}$$

$$y) \quad \rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\, \bar{v}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu\nabla^2\bar{v} - \rho\left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{d\overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{d\overline{v'w'}}{\partial z}\right) \tag{2.15}$$

$$z) \quad \rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\, \bar{w}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu\nabla^2\bar{w} - \rho\left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{d\overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{d\overline{w'^2}}{\partial z}\right) \tag{2.16}$$

Usualmente en la literatura se encuentra la ecuación (2.13) resumida de forma vectorial (similar a (2.1.1)):

$$\rho\left(\overline{u_i}\cdot\nabla\right)\overline{u_i} = -\nabla\cdot\bar{P} + \mu(\nabla^2\cdot\overline{u_i}) - \rho(\overline{u_i'u_j'}\cdot\nabla) \tag{2.17}$$

Se puede observar que el resultado es similar a las ecuación de NS escrita en coordenadas cartesianas (2.1.1) añadiendo un factor $\overline{u_iu_j}$ que se descompone a partir del término convectivo $(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$. Este es llamado $\mathrm{Tensor\ de\ Esfuerzos\ de\ Reynolds}$.

2.2. Tensor de Esfuerzos de Reynolds

Un tensor de esfuerzos es una matriz que permite describir la distribución de los esfuerzos internos de tracción y de corte que actúan sobre un cuerpo con un volumen definido. En fluidos, el volumen en cuestión puede corresponder a un elemento infinitesimal (una partícula, un volumen finito, etc).

El tensor de de Reynolds corresponde a los esfuerzos producidos por las fluctuaciones turbulentas ([15] ecuación 18.5):

$$\sigma'_x = -\rho\overline{u'^2} \quad ; \quad \tau'_{yz} = -\rho\overline{u'v'} \quad ; \quad \tau'_{xz} = -\rho\overline{u'w'} \quad ... \tag{2.18}$$

Los esfuerzos de tracción σ'_i corresponden al valor RMS (Root Mean Square) de cada fluctuación (u'^2_i o $u'_i u'_i$) y los esfuerzos cortantes τ'_{ij} son los coeficientes de correlación entre las perturbaciones ($u'_i u'_j$). En su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Las componentes del esfuerzo cortante son simétricas (Por ejemplo, $\tau'_{xy} = \tau'_{yx}$), por lo que el tensor se describe con seis variables distintas.

Su significado físico puede interpretar como la parte del moméntum contenido en las fluctuaciones turbulentas. Su efecto se muestra sobre un volumen cúbico infinitesimal en la siguiente figura:

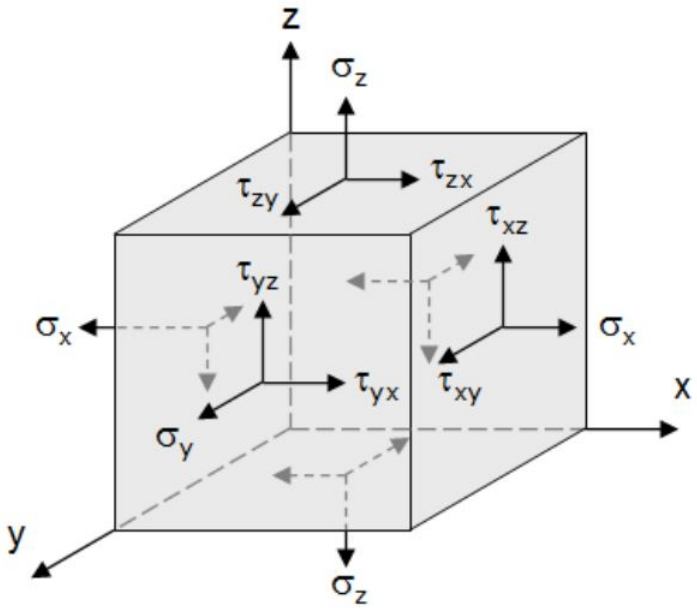


Figura 2.1: Tensor de esfuerzos que actúan sobre un elemento infinitesimal.

2.2.1. Estadísticas de la Turbulencia

Recordando la descomposición de Reynolds, la magnitud de una perturbación corresponde a la diferencia entre la velocidad y su promedio para cada instante (ecuación (2.8)).

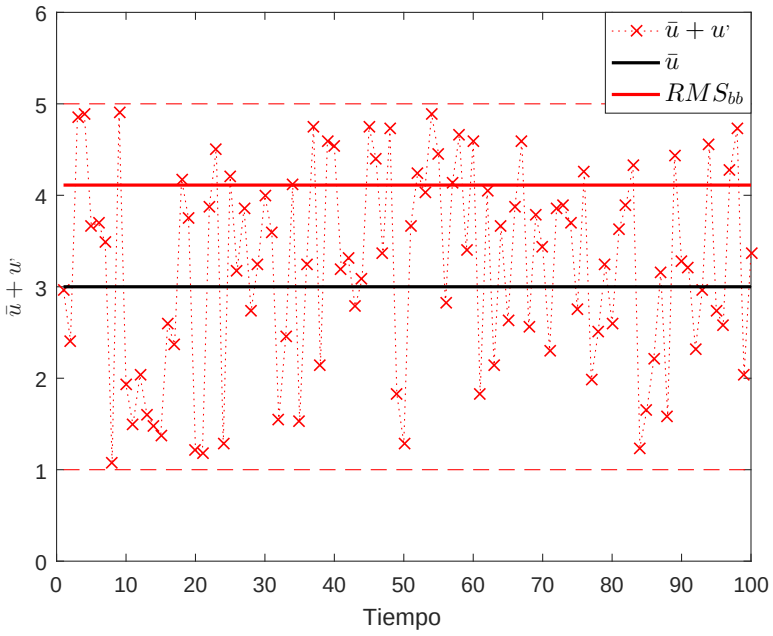


Figura 2.2: Ejemplo de una fluctuación aleatoria u_i' sobre una velocidad promedio $\bar{u}_i$.

Notar que en la figura se indica el valor RMS de la variable, que corresponde a la Raíz del Promedio del Cuadrado. Este valor se asocia a las componentes $u_i'u_i'$ en la diagonal del tensor de Reynolds:

$$\overline{u_i'u_i'} = RMS_{u_i}^2 = \frac{1}{N}\sum {u_i'}^2 \tag{2.20}$$

En estadística se utiliza el concepto de $\mathrm{Varianza}$, que indica la medida de dispersión de los datos.

Por otro lado, las componentes fuera de la diagonal de $\overline{u_i'u_j'}$ tienen que ver con la correlación entre las fluctuaciones de las distintas direcciones (por ejemplo $\overline{u'v'}$ entre las fluctuaciones en las direcciones X e Y). Esto se calcula de forma similar a (2.2.1), a lo que se llama $\mathrm{Coovarianza}$.

$$\overline{u_i'u_j'} = \frac{1}{N}\sum u_i'u_j' \tag{2.21}$$

A continuación se muestra un ejemplo de dos variables aleatorias[1] con sus respectivos estadísticos.

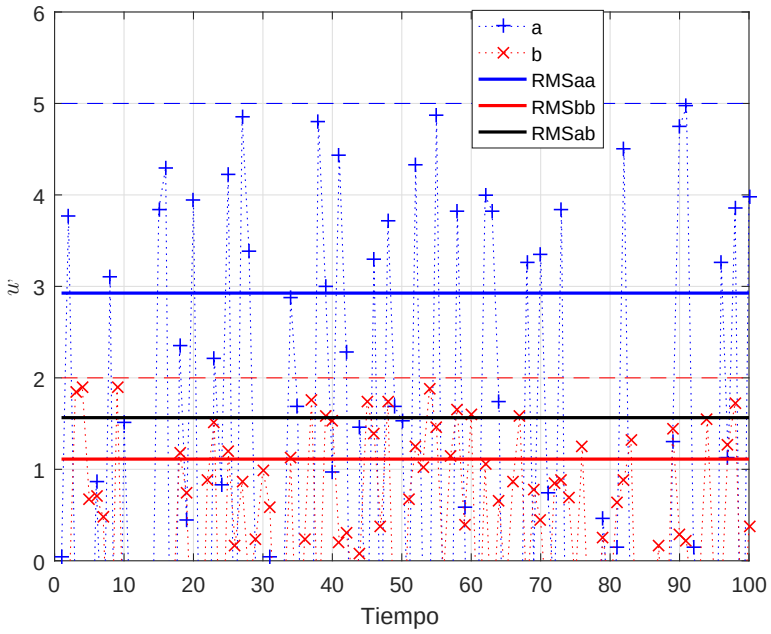


Figura 2.3: Ejemplo de dos variables aleatorias a y b en función del tiempo.

Se muestra sólo el cuadrante positivo de las variables. Las líneas segmentadas corresponden a los límites superiores de cada variable. Se dibujaron con líneas continuas los valores RMS para a en color azul, para b en rojo y la correlación ab en negro.

2.3. Aproximación de Boussinesq

Es un modelo usado para calcular las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds $\overline{u_i' u_j'}$ anteriormente descrito.

[1] El comportamiento de las fluctuaciones turbulentas está alejado del de una variable aleatoria, se manejan conceptos como la Asimetría (Skewness) y la Curtósis (Kurtosis) para su descripción [3]. Este ejemplo sólo se utiliza para mostrar el comportamiento de la varianza y la coovarianza, no tiene relación con datos reales.

Boussinesq planteó que una parte de la energía discipada por la turbulencia se produce por un esfuerzo viscoso, distinto de la viscosidad molecular del fluido. A esto llamó Viscosidad Turbulenta (Eddy Viscosity). El tensor de Reynolds se modela como el tensor infinitesimal de Deformación S_{ij} más una constante denominada Energía Cinética Turbulenta k.

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_T S_{ij} \tag{2.22}$$

Donde δ_{ij}: Delta de Kroeneker definida con valor 1 para $i = j$.

2.3.1. Tensor Infinitesimal de Deformación

El tensor de deformación o Tensor Infinitesimal de Deformación de Cauchy surge del análisis matemático sobre un volumen finito de fluido ([1] pp. 79). El análisis considera las derivadas direccionales como los esfuerzos normales y cortantes sobre el volumen dado, para constituir el tensor de Cauchy como:

$$S = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right) & \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

2.3.2. Energía Cinética

Otra parte del tensor tiene que ver con una variable k, que corresponde a la energía cinética que discipan las fluctuaciones en las tres direcciones cartesianas.

Boussinesq propone que la energía cinética actúa de forma homogénea en las tres direcciones principales. Por lo tanto, k se calcula como la traza del tensor de Reynolds.

$$k = \frac{1}{2} \sum \overline{u_i' u_i'} \tag{2.24}$$

2.3.3. Viscosidad Turbulenta

Es un concepto planteado en 1877 por Boussinesq, definiendo que la transferencia de Momentum causada por remolinos turbulentos puede ser modelada con una viscosidad turbulenta. En esa publicación viscosidad turbulenta ν_T es una cantidad escalar que varía según la "agitación promedio generada" [16].

No se entrará en un mayor análisis de esta variable porque se utilizará una herramienta para omitir su influencia sobre los resultados (considerando que es un escalar en el postulado original).

2.3.4. Hipótesis de Boussinesq

Se realiza un despeje en (2.22) para obtener lo siguiente:

$$\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = -2\nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.25}$$

Planteando $R = \overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$ como el "tensor anisotrópico sin traza" y $S = \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ como el "tensor de deformación" (análogo a la relación con los esfuerzos viscosos $R_\nu = -2\nu S$ para fluidos Newtonianos [16]) la hipótesis se reduce en lo siguiente:

$$R = -2\nu_T S \tag{2.26}$$

Considerando ν_T como un escalar [2], esta hipótesis plantea la proporcionalidad entre R y S mediante la viscosidad turbulenta. Teniendo en cuenta esto se realizará una comparación de R y S en términos de la orientación de sus ejes principales para una prueba directa de la hipótesis de Boussinesq (2.26).

[2] En los modelos de turbulencia se puede encontrar con que ν_T también puede ser planteado como un vector o como un tensor.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Datos

1. Datos DNS de THTLab de la Universidad de Tokio, Japón [11] [12] [7].

Las simulaciones DNS (Direct Numerical Simulation) son realizadas en base a las ecuaciones de Navier-Stokes, por lo que tienen un alto costo computacional, lo que se recompensa con una gran presición de cálculos y fineza del mallado. Se utilizan métodos espectrales y las variables entregadas corresponden a promedios temporales. Las simulaciones se realizan considerando un gran espacio, pero generalmente los datos se recolectan en una sección específica de interés (por ejemplo, la posición donde el flujo está desarrollado). Los datos se presentan como promedio temporal. En los casos vistos, las condiciones de frontera impuestas son el número de Reynolds de pared Re_τ, un largo característico Δ, el gradiente de presión y la geometría del caso.

2. Mediciones LDV de la universisdad de Bochum, Alemania [14].

LDV (Laser-Doppler Velocimeter) o LDA (Laser-Doppler Anemometer) es un método no intrusivo utilizado para medir campos de velocidad en flujos. Se aplica el fenómeno de interferencia en un láser a lo largo del tiempo para detectar el movimiento de pequeñas partículas que se mueven junto con el fluido [2]. Mediante el análisis de patrones de interferencia se obtienen los campos de velocidad en el tiempo.

3.1.1. Canal DNS THTlab

"El campo simulado es un flujo turbulento bidimensional desarrollado entre dos placas paralelas. Por lo tanto, el flujo es homogéneo tanto en la dirección del flujo (x) como en la dirección horizontal del canal (z) y las estadísticas dependen sólo en la distancia al muro. Los datos presentados aquí son adimensionalizados por las variables de la pared, por ejemplo, u_τ y ν. La condición del flujo es definida por el gradiente de presión impuesto (o la velocidad de fricción) y la distancia entre los muros (altura del canal)" [11].

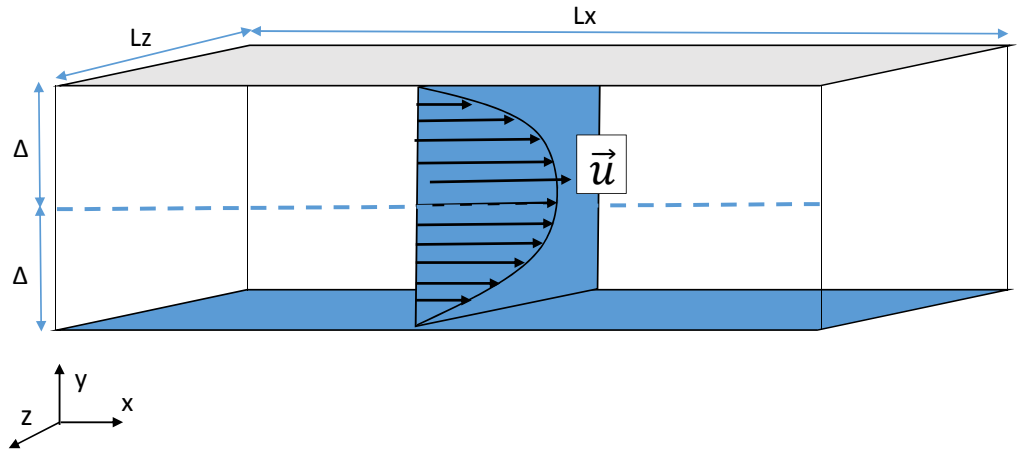


Figura 3.1: Esquema de un flujo a través de placas paralelas en coordenadas cartesianas.

Los distintos casos varían en las condiciones impuestas para la simulación. En base a esto cambian las condiciones del flujo, obtenidas de los set de datos disponibles en [6][1].

Denominación	CH12 PG.WL7	CH12 PG.WL8	CH12 PG.WL9
Re_τ	109	150	298
Re_m	3220	4586	10039
ν	1.004	1.004	1.004
u_m	13.5766	14.7127	16.8497
u_τ	0.9961	0.9968	1.0003
Δ	109.8667	151.0809	299.0906

Tabla 3.1: Constantes de flujo de los sets de datos DNS de canal.

La simulación considera el ancho total 2Δ, pero por simetría axial los datos mostrados corresponden a la mitad del canal.

3.1.2. Tubería DNS THTlab

"El campo simulado es un flujo completamente desarrollado en una tubería cilíndrica. El flujo es homogéneo en ambas direcciones longitudinal y azimutal y las estadísticas dependen sólo de la distancia desde la pared. Los datos presentados aquí son adimensionalizados por las variables de pared, por ejemplo, u_τ y ν. La condición del flujo es definida por el gradiente de presión impuesto y el radio de la tubería" [5].

[1] En la sección "DNS Database" se puede acceder a los datos con la denominación correspondiente. En el vínculo "Code Number Abbreviation" se menciona la nomenclatura utilizada (por ejemplo, **CH** para un canal, o **PI** para una tubería).

Los datos se obtienen en coordenadas cilíndricas donde los ejes son $x\theta r$, direcciones axial o longitudinal, angular o azimutal y radial (distancia de la pared) respectivamente.

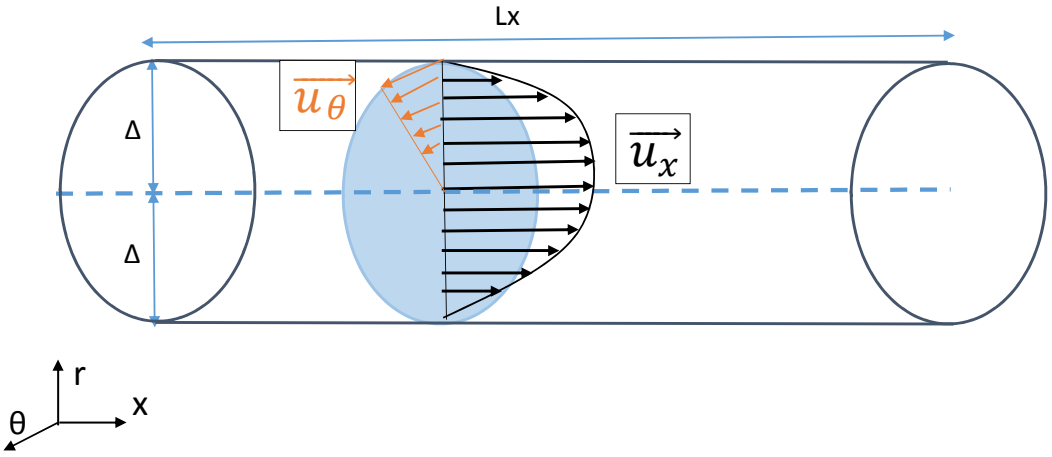


Figura 3.2: Esquema del flujo a través de una tubería en coordenadas cilíndricas.

Se muestran las condiciones de flujo de los sets de datos utilizados en la siguiente tabla:

Denominación	PI12 PG.WL3	PI12 BS.WL1
Re_τ	180	157
Re_m	5310	5300
ν	1.004	1.004
u_m	14.8738	14.8885
u_τ	1.0084	0.8821
Δ	179.2162	178.7020

Tabla 3.2: Constantes de flujo de los sets de datos DNS de tubería.

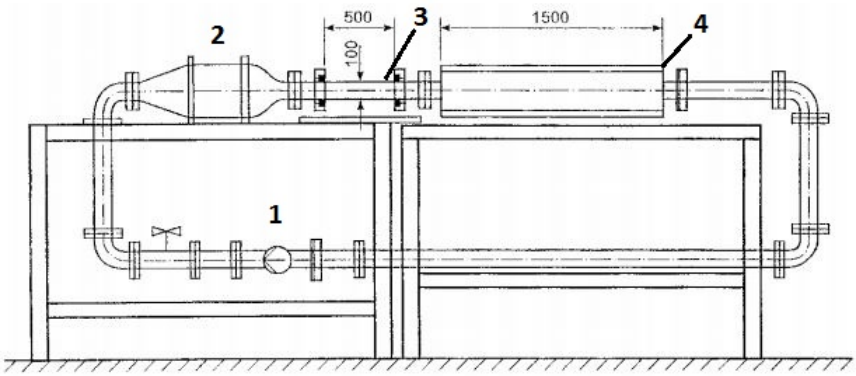
En los datos PI12 BS.WL1 se impone una condición de u_τ de menor magnitud en relación a PI12 PG.WL3, produciendo un efecto menor de la pared sobre el flujo. Esto disminuye las estadísticas de la turbulencia y por lo mismo se le llama “Control de la Turbulencia”.

3.1.3. Mediciones LDV Tubería con Swirl

Se analizó un flujo con giro en una tubería, reproducido en un laboratorio y medido mediante el método LVD, documentado en el paper de Rocklage-Marliani, Schmidts y Vantasa Ram [14]. Como se especifica, el número de Reynolds nominal de las medi-

ciones es de $2{,}8 \cdot 10^5$ con respecto a una velocidad media de $2,87[m/s]$ y una tubería de $100mm$ de diámetro.

(a)



(b)

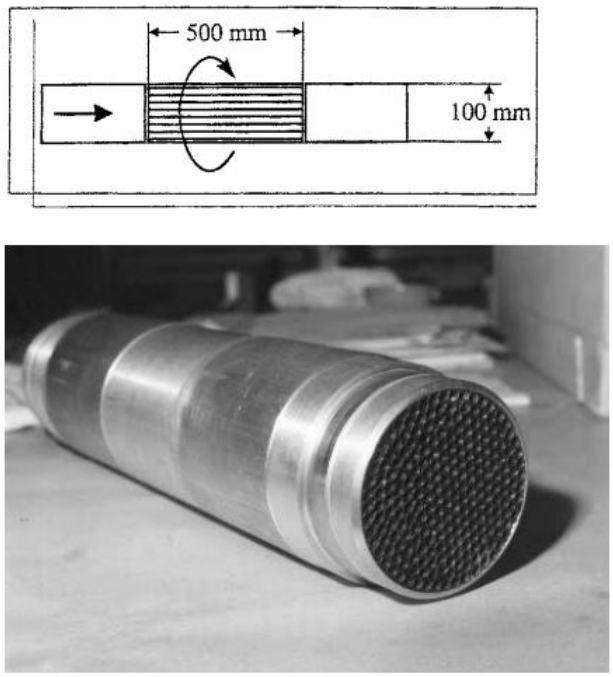


Figura 3.3: (a) Esquema del arreglo de medición: 1. Bomba de caudal ,2. Difusor-Tobera, 3. Generador de Swirl, 4. Área de Mediciones. (b) Generador de Swirl.

El flujo es similar a la tubería DNS 3.2, con la diferencia que la velocidad tangencial u_θ tiene una magnitud importante. En la figura 3.3(b) se muestra el elemento que permite producir una rotación homogénea en el flujo, generando una componente tangencial. La velocidad de giro es cuantizada por un número adimensional Ro, que compara la

velocidad media u_m con la velocidad angular de rotación Ω y el diámetro de la tubería D.

$$Ro = \frac{\Omega D}{2u_m} \tag{3.1}$$

Se tienen datos de velocidad y turbulencia para valores de Ro de $1{,}80$, $1{,}40$, $0{,}75$ y 0 como medida de referencia.

3.2. Alineamiento entre dos Tensores

Para poder comparar dos tensores (como se vió anteriormente: El tensor anisotrópico de Reynolds R con el tensor de Deformación S) se hace un análisis de la orientación entre ellos. Una forma de realizar esto es calcular las tensiones y direcciones principales de ambos tensores y compararlas.

3.2.1. Tensiones y direcciones principales

Se utiliza un método para encontrar los ejes principales de los tensores, es decir, rotar el sistema de coordenadas de modo que el tensor sólo tenga componentes σ_{ii} en la diagonal (sin esfuerzos cortantes). Esto no afecta el valor del tensor, es más, facilita su análisis.

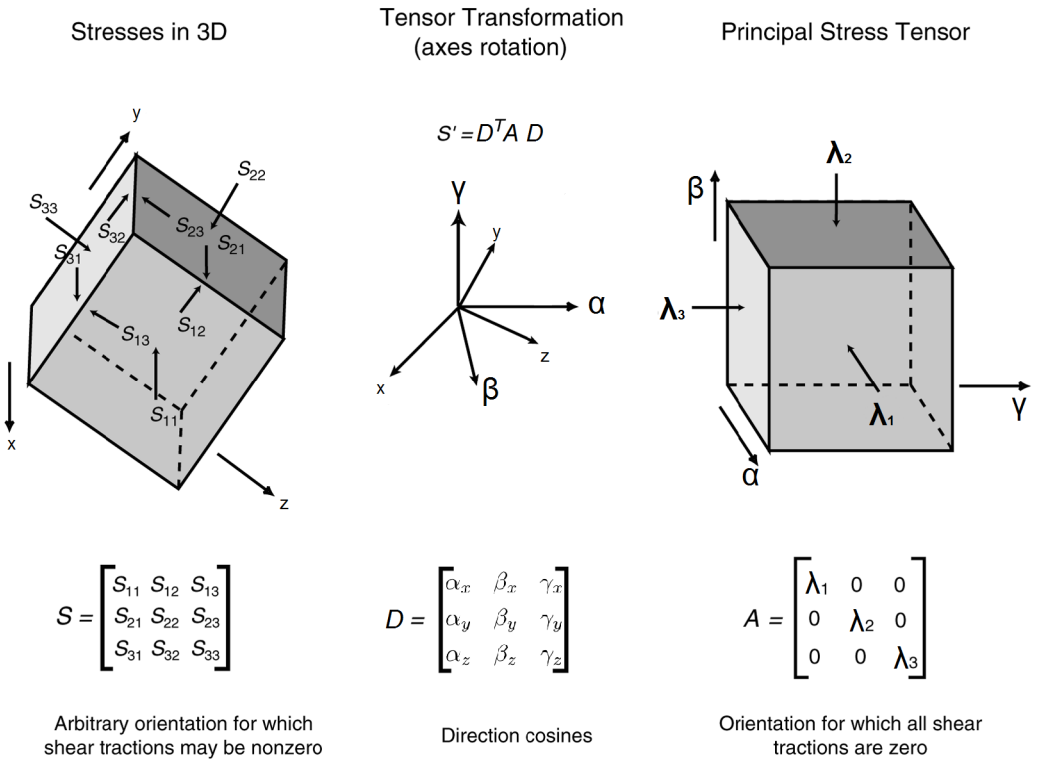


Figura 3.4: Rotación de un tensor hacia sus ejes principales.

Los autovalores λ y autovectores $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ se obtienen mediante la resolución de sistemas lineales, como se detalla en el Anexo A.

Esa operación la realiza la función eig de MatLab, generando dos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{bmatrix}$$

A corresponde a los autovalores o esfuerzos principales de un tensor y D es una matriz que contiene las direcciones principales del tensor ordenadas en columnas.

Se realizan algunas correcciones y reordenamientos sobre estas matrices, como se detalla al final del Anexo A.

3.2.2. Ángulos entre Tensores

Según Higgins, Parlange y Menevau(2003) ”Para caracterizar el alineamiento entre un vector (por ejemplo, vorticidad o gradiente de temperatura) y un tensor o entre dos tensores requiere especificar dos o tres ángulos respectivamente”(p. 68).

Para definir estos ángulos, primero se obtienen los autovalores (A_R y A_S) y autovectores (D_R y D_S) del tensor Anisotrópico y el tensor Isotrópico.

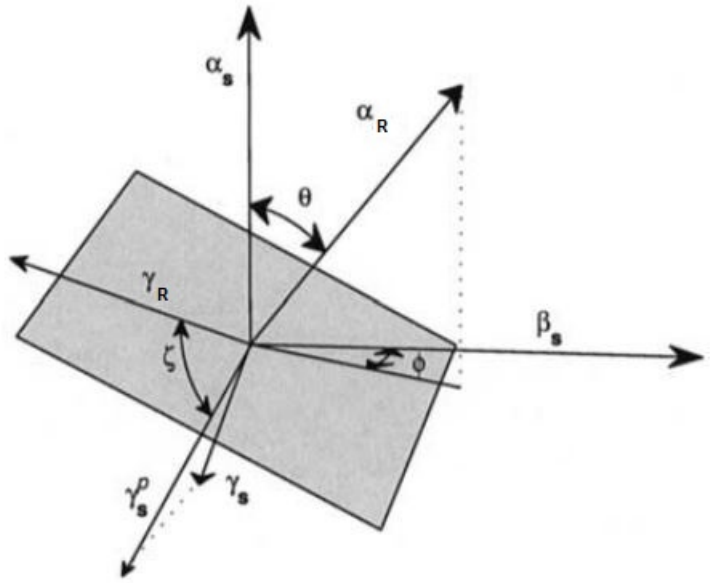


Figura 3.5: Descripción del alineamiento relativo entre dos tensores ortogonales [10].

Los ángulos θ y ϕ son el ángulo de elevación y azimutal del vector α_S relativo a los autovectores del tensor anisotrópico (R). El ángulo ζ se describe entre la proyección de γ_R sobre el plano α_S-γ_S y el vector γ_R.

Los ángulos de la figura 3.5 se obtienen con las siguientes expresiones trigononométricas:

$$\theta = cos^{-1} \frac{|\vec{\alpha_R} : \vec{\alpha_S}|}{|\vec{\alpha_R}| \cdot |\vec{\alpha_S}|} \tag{3.2}$$

$$\phi = cos^{-1} \frac{|\vec{\beta_R} : (\vec{\alpha_S} - (\vec{\alpha_S} \cdot \vec{\alpha_R}) \cdot \vec{\alpha_R})|}{|\vec{\alpha_S} - (\vec{\alpha_S} \cdot \vec{\alpha_S}) \cdot \vec{\alpha_R}| \cdot |\vec{\beta_R}|)} \tag{3.3}$$

$$\zeta = cos^{-1} \frac{|\vec{\gamma_S} : (\gamma_R - (\vec{\gamma_R} \cdot \vec{\alpha_S}) \cdot \vec{\alpha_S})|}{|\vec{\gamma_R} - (\vec{\alpha_R} \cdot \vec{\alpha_S}) \cdot \vec{\alpha_S}| \cdot |\vec{\gamma_S}|} \tag{3.4}$$

Donde $(:)$ es el producto interno o producto punto. Se consideran dos tensores perfectamente alineados cuando $\theta = 0°$, $\phi = 90°$ y $\zeta = 0°$.

Se calculan los ángulos $\langle \theta, \phi, \zeta \rangle$ entre los tensores R y S. También se pueden calcular los ángulos relativos entre un tensor y un set arbitrario de vectores ortonormales, como los ejes coordenados XYZ.

Los ángulos se anotan con un subíndice: $\langle \theta, \phi, \zeta \rangle_R$ para el tensor Anisotrópio y $\langle \theta, \phi, \zeta \rangle_S$ para el tensor de Deformación con respecto a la misma referencia en ambos casos.

3.2.3. Índice ρ_{RS}

Otra forma de evaluar la orientación relativa entre dos tensores R y S es aplicando un producto interno (o producto punto) entre ellos $R : S$. La base de esto es el significado geométrico del producto punto: define el ángulo entre dos vectores mediante un coseno.

Si se tienen dos tensores con la misma orientación (por lo tanto, mismas direcciones principales), se obtiene un valor máximo para el producto interno. Por lo tanto, para normalizar e ignorar la escala del producto se divide por la norma de ambos tensores $|R||S|$.

Schmitt [16] define este concepto como ρ_{RS}.

$$\rho_{RS} = \frac{|R : S|}{|R||S|} \tag{3.5}$$

Tiene un valor máximo 1 para tensores paralelos y 0 si son perpendiculares. Se evalúa que en el máximo de ρ_{RS} se cumple la hipótesis de Boussinesq (2.26), por lo tanto este índice se ocupa para una prueba directa de la proporcionalidad entre R y S.

Por otro lado, la aplicación de ρ_{RS} no cumple la especificidad que tienen los ángulos $\langle \theta, \phi, \zeta \rangle$ en la sección anterior, ya que estos permiten evaluar en qué planos se desvían

los ejes principales.

3.3. Extensión de Boussinesq sobre RANS

La hipótesis de Boussinesq se puede extender hacia las ecuaciones RANS (2.17) que gobiernan el movimiento de los fluidos. En este análisis tiene sentido plantear que término turbulento $\overline{u_i' u_j'} \cdot \nabla$ debería cumplir una igualdad entre las estadísticas de la turbulencia y el tensor de Boussinesq.

$$\overline{u_i' u_j'} \cdot \nabla = \left[\frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \cdot \nabla \tag{3.6}$$

Se puede despejar el tensor de deformación, de modo que:

$$\left[\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \cdot \nabla = - \left[\nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \cdot \nabla \tag{3.7}$$

O bien, haciendo una analogía a la hipótesis de Boussinesq (2.26):

$$R \cdot \nabla = -2 \left[\nu_T S \right] \cdot \nabla \tag{3.8}$$

El término de la derecha se puede separar por la regla de la cadena según el operador nabla.

$$\left[\nu_T S \right] \cdot \nabla = (\nu_T \cdot \nabla) S + \nu_T (S \cdot \nabla) \tag{3.9}$$

Sin embargo, según la investigación bibliográfica de Schdmitt [16], "la viscosidad turbulenta varía levemente según la posición", lo que valida hacer el supuesto que $\nu_T \cdot \nabla \approx 0$ en torno al concepto original de la viscosidad turbulenta. Llamando a los términos de la ecuación (3.8) $d\vec{R} = R \cdot \nabla$ y $d\vec{S} = S \cdot \nabla$ se expresa la siguiente

hipótesis:

$$d\vec{R} = -2\nu_T d\vec{S} \tag{3.10}$$

Esta ecuación es distinta a la hipótesis de Boussinesq, ya que se origina debido a un operador diferencial, y apunta a evaluar directamente la influencia del modelo de turbulencia sobre las ecuaciones de Navier Stokes. Por otro lado, es una ecuación Vectorial (a diferencia de (2.26) que es Tensorial) lo que permite realizar un análisis similar a la sección anterior mediante el índice ρ_{RS} entre $d\vec{R}$ y $d\vec{S}$.

$$d\rho_{RS} = \frac{|d\vec{R} : d\vec{S}|}{|d\vec{R}| \cdot |d\vec{S}|} \tag{3.11}$$

Además se puede calcular una relación entre las normas de ambos vectores:

$$\eta = \frac{|d\vec{R}|}{2|d\vec{S}|} \tag{3.12}$$

Esta relación es análoga a aplicar el valor absoluto sobre (3.10) y despejar el escalar ν_T. Por lo tanto:

$$\nu_T \approx \eta \tag{3.13}$$

Se llegó a esto en base a que ν_T es una constante, lo que no necesariamente se cumple para η. Si η tiene bajas variaciones puede considerarse un buen estimador de ν_T en este análisis.

3.4. Splines Cúbicos y Derivadas Discretas

Para calcular las derivadas direccionales de la velocidad se utilizaron Diferencias Finitas sobre datos interpolados mediante un Spline Cúbico.

Las diferencias finitas son una forma de calcular la derivada de una función discreta dados los puntos (Y_n, x_n) y considerando un intervalo pequeño Δx (Se utilizó un valor arbitrario de 10^{-8}, menor por varios órdenes de magnitud bajo las cantidades analizadas). Se definió un operador centrado de segundo orden de presición para los valores en el centro del dominio y de primer orden para los puntos de las orillas.

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial x}\right|_n = \begin{cases} \frac{Y(x_n+\Delta x)-Y(x_n-\Delta x)}{2\Delta x} & x_{min} < x_n < x_{max} \\ \frac{Y(x_n)-Y(x_n-\Delta x)}{\Delta x} & x_n = x_{max} \\ \frac{Y(x_n+\Delta x)-Y(x_n)}{\Delta x} & x_n = x_{min} \end{cases} \tag{3.14}$$

Para acceder a los valores $Y(x_n + \Delta x)$ e $Y(x_n - \Delta x)$ se realizó una intepolación.

El spline cúbico es una técnica de interpolación polinómica que permite obtener una función polinómica de grado 3 definida por tramos que pasa por cada punto de los datos de origen y que es continua en todo su dominio. Siendo cada tramo designado por i, se tiene:

$$Y_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \tag{3.15}$$

Cada uno de los coeficientes se puede calcular mediante un sistema lineal tridiagonal presentado en [13].

La función spline de MatLab permite evaluar cualquier punto perteneciente al dominio x de Y en base a una interpolación con splines cúbicos, lo que se utiliza para evaluar las diferencias finitas en (3.14).

3.5. Variables Adimensionales

Generalmente los sets de datos se obtienen de forma adimensional: Las variables suelen estar multiplicadas por una constante en función de la velocidad de fricción u_τ [2] y la viscosidad cinemática ν del fluido. En torno a u_τ y ν se utiliza el índice $+$ (caso de los

[2]Es la velocidad correspondiente al esfuerzo de corte en la pared. Esta caracteriza la fuerza de la turbulencia y el espesor de la capa límite.

datos DNS).

- Posición Cartesiana $(x, y, z) + = (x, y, z) \cdot u_\tau/\nu$.
- Velocidad Promedio $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) + = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) / u_\tau$.
- Tensor de Esfuerzos de Reynolds $\overline{u_i u_j} + = \overline{u_i u_j}/u_\tau^2$.
- Derivadas Direccionales de la Velocidad. $du_i/dx_j + = du_i/dx_j \cdot u_\tau^2/\nu$.

Por otro lado, en las mediciones LVD, u_τ es desconocido. En este caso se adimensionaliza en torno a la velocidad media u_m y al largo característico D. Esto se indica con un índice $*$, tal que:

- Posición Cartesiana $(x, y, z) * = (x, y, z) / D$.
- Velocidad Promedio $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) * = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) / u_m$.
- Tensor de Esfuerzos de Reynolds $\overline{u_i u_j} * = \overline{u_i u_j}/u_m^2$.
- Derivadas Direccionales de la Velocidad. $du_i/dx_j * = du_i/dx_j \cdot D/u_m$.

Estas adimensionalizaciones son una variación de escala, por lo que no tienen ninguna incidencia sobre los ángulos (θ, ϕ, ζ) y el índice ρ_{RS}.

3.6. Cantidades en Coordenadas Cilíndricas

En la simulación y recolección de datos en tuberías de sección circular es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas. Por lo mismo, se debe adaptar la metodología a estos casos en base a la transformación de coordenadas de los campos de velocidades $\bar{u_i}$ y las aceleraciones aparentes $\overline{u_i' u_j'}$.

Los esfuerzos normales y de corte se pueden expresar en coordenadas cilíndricas ([4] Anexo B). En base a esto, el tensor de deformación se transforma en:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u_r}}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\bar{u_\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u_r}}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{u_r}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u_x}}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\bar{u_\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u_r}}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u_\theta}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u_r}}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u_\theta}}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{u_r}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u_x}}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u_\theta}}{\partial x}\right) & \frac{\partial \bar{u_x}}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

De forma análoga, el tensor de Reynolds correspondiente con S en (3.16) es:

$$R = \begin{bmatrix} \overline{u'_r u'_r} & \overline{u'_r u'_\theta} & \overline{u'_r u'_x} \\ \overline{u'_r u'_\theta} & \overline{u'_\theta u'_\theta} & \overline{u'_\theta u'_x} \\ \overline{u'_r u'_x} & \overline{u'_\theta u'_x} & \overline{u'_x u'_x} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

3.7. Resumen Metodología

Se escribien una serie de códigos (scripts y funciones) en MatLab para realizar los cálculos explicados en la metodología. esto, con el fin de automatizar la obtención de resultados, almacenándolos en un archivo ".mat" para su fácil access y su posteriór muestra en gráficos. Se adjuntan los códigos escritos en el Anexo C.

Se analizan tres casos por separado: Canal DNS, Tubería sin Rotación y Tubería LDV con Rotación. Para cada caso se programan dos códigos principales: "Cálculos" y "Resultados".

Se ordenan los datos en una planilla Excel.

En el código de "Cálculos", se declaran algunas variables iniciales: características de la malla de datos (nodos en X Y Z y si están en coordenadas cilíndricas o cartesianas) y constantes del flujo de ser necesario (Reynolds, Velocidad Media, Dimensiones).

Luego el programa lee los datos de la planilla mediante la función "LeerDatos", ordenándolos en filas. Los datos iniciales corresponden a los campos de velocidades, la posición y las componentes del tensor de Reynolds. Esto asigna los datos de distintas variables a un entorno tipo "structure" que se escribe con una letra S.

Un structure es un conjunto de variables de distinto tipo (escalares, vectores, matrices, palabras o strings, etc.), lo que permite un manejo más ordenado de los datos. Todos los valores que se van calculando se asignan al structure, de modo que para acceder a ellos se antepone "S." al nombre de la variable.

Se hacen correcciones que no estaban contempladas dentro de la planilla Excel. Por ejemplo, los datos RMS a veces vienen en raíz cuadrada, por lo que se elevan a 2 antes de los cálculos.

En caso de datos en dos dimensiones se hace un cambio (mediante la función "Vector-Matriz") para pasar de filas de datos a matrices. Esto facilita el cálculo de las derivadas.

Se calculan las derivadas direccionales mediante la función "DerivadaSpline2" (2D si se realizan en más de una dirección). Esta función calcula derivadas por diferencias finitas utilizando una interpolación por splines cúbicos.

Se recorre la matriz de datos, asignando las componentes del tensor de Reynolds a una matriz para cada punto mediante “TensorReynolds”. Lo mismo se hace para el tensor de Deformación con la función “Boussinesq”.

Se calculan los ángulos θ, ϕ y ζ (ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4)) con la función “AngulosMenevau” y el índice ρ_{RS} (3.1) con el código “rors”, aplicando las fórmulas vistas. Esto toma como entrada la matriz D de direcciones principales y la compara con otra o un set de ejes coordenados.

Para obtener el gradiente presente en Navier Stokes, se utiliza la función “PuntoGradiente”. Esta calcula el resultado de $d\vec{R} = R \cdot \nabla$ y $d\vec{S} = S \cdot \nabla$ en el análisis de las RANS.

Al terminar con los cálculos, se guardan los datos del structure S en un archivo “.mat” mediante el comando save.

Para obtener gráficos se utiliza el código “Resultados”. Este código abre el o los archivos “.mat” guardados y los transmite en distintos gráficos de forma automática. Estos gráficos son guardados en formato “.fig”.

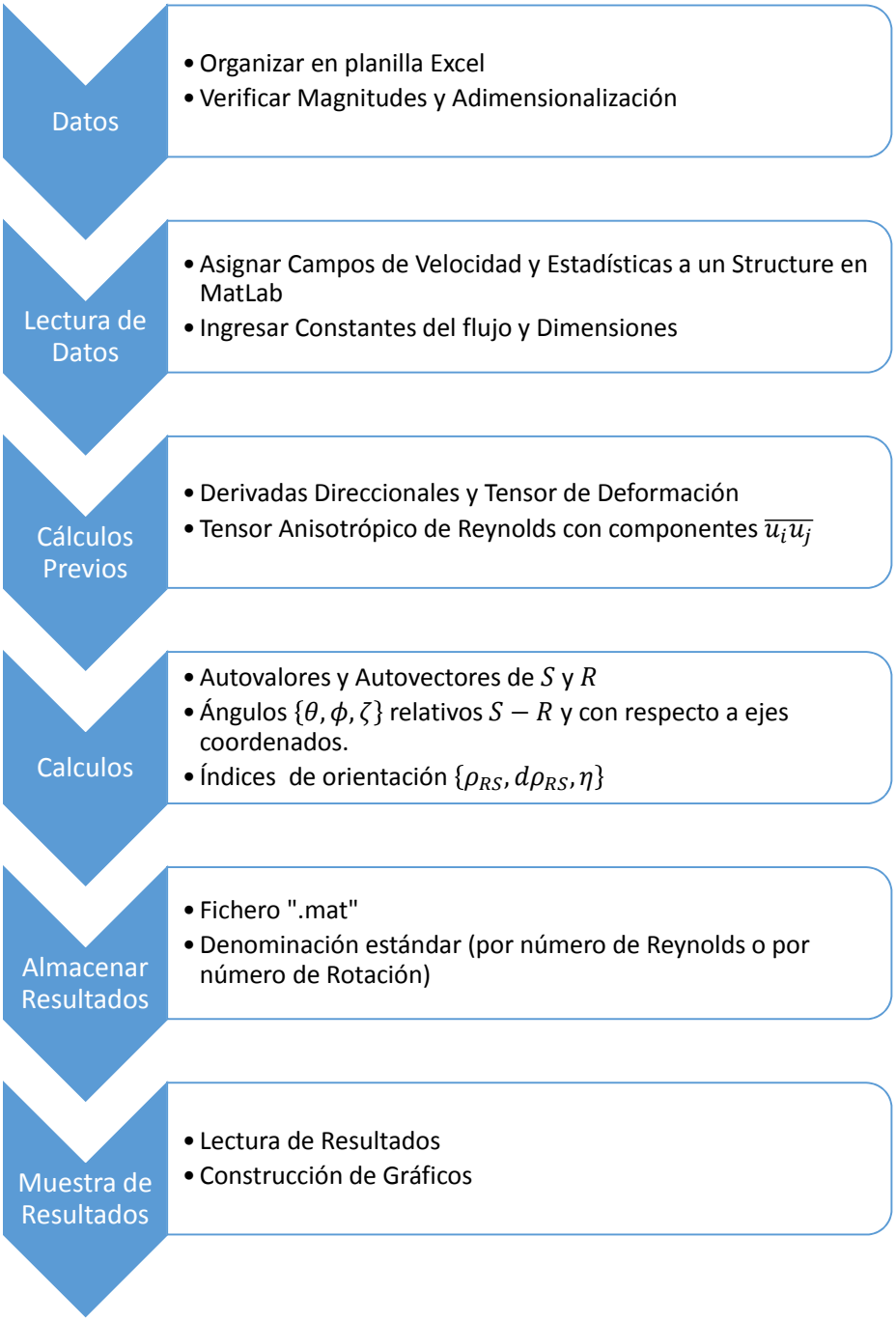


Figura 3.6: Etapas de la metodología aplicada.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Canal DNS THTlab

El fenómeno producido en el canal corresponde a un flujo bidimensional en la dirección X (componente U), que varía en la dirección Y (ancho del canal). Además, como corresponde a un flujo desarrollado, la velocidad no cambia a lo largo del canal ($\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} = 0$) y por simetría tampoco cambia a lo alto ($\frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = 0$). Las velocidades promedio en dirección Y y Z son nulas.

A medida que aumenta el número de Reynolds, el perfil de velocidades tiene una zona lineal (capa límite) más acotada.

4.1.1. Campo de Velocidades

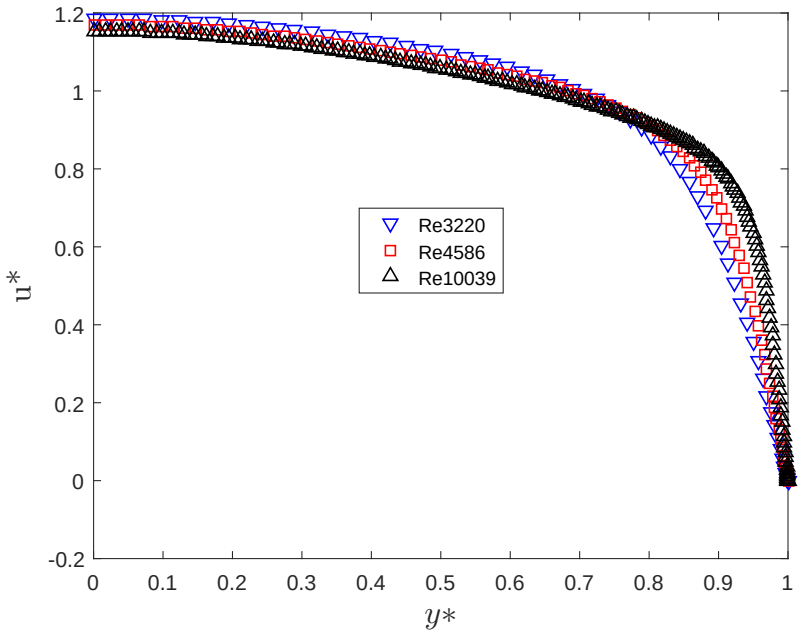


Figura 4.1: Velocidad Axial Canal DNS [12].

El único término diferencial no nulo es $\frac{\partial}{\partial y}$.

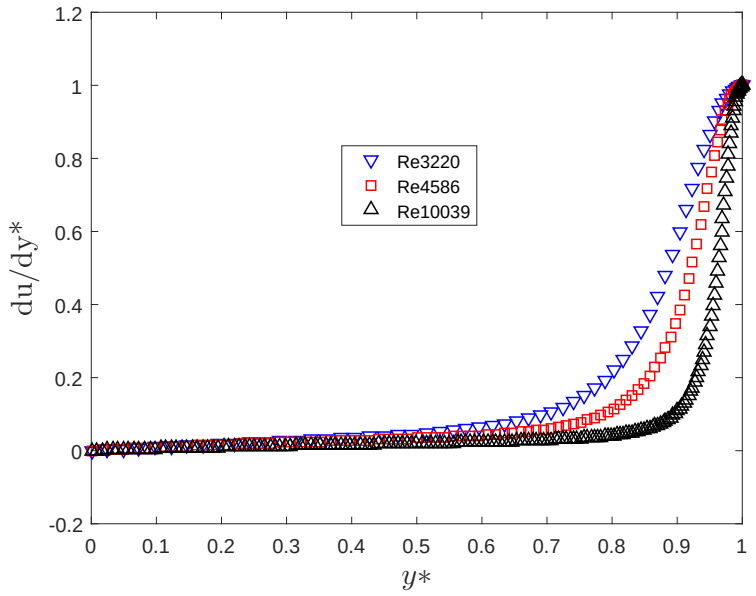


Figura 4.2: Derivada de la velocidad $\bar{u}*$ con respecto al ancho $y*$ del canal DNS .

4.1.2. Tensor de Deformación

La única componente del tensor de deformación S_{ij} distinta de cero corresponde a $S_{uv} = \frac{\partial}{\partial y}$.

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Se calcularon los ángulos $\{\theta, \phi, \zeta\}_S$, correspondientes a la comparación entre D_S y los ejes coordenados XYZ. Esto resultó en $\theta = 45°$, $\phi = 90°$ y $\zeta = 0°$. El cambio de orientación se produce por la relación entre los elementos de un tensor. Al tener sólo una componente, el tensor S se mantiene fijo. Las direcciones principales calculadas corresponden a los siguientes vectores columna:

$$d_p = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

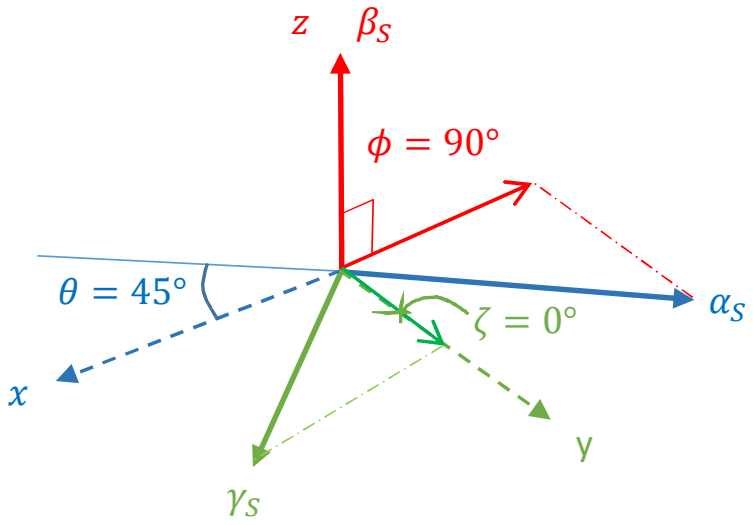
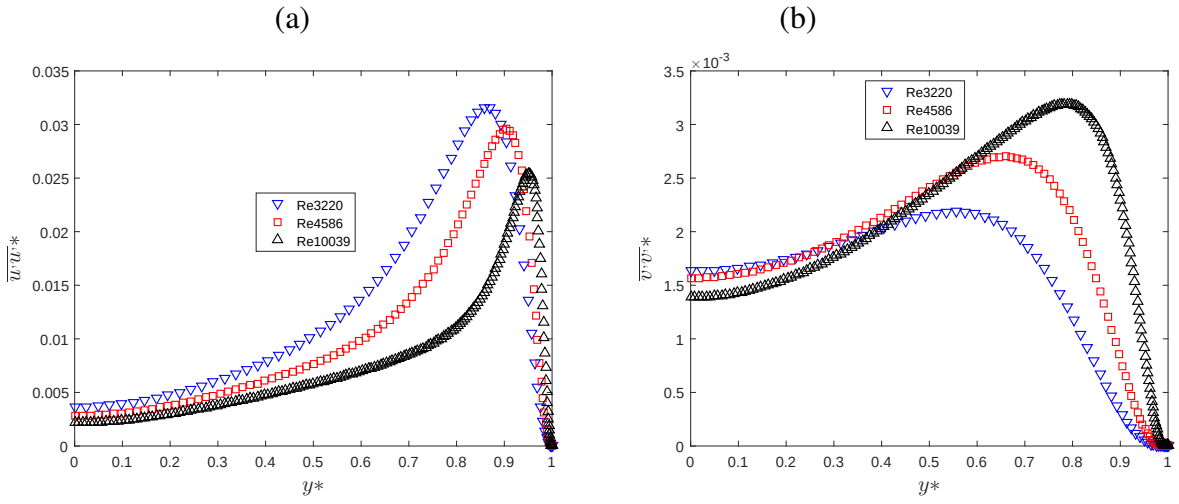


Figura 4.3: Representación direcciones principales de S y ángulos con respecto XZY a para el canal DNS [12].

4.1.3. Estadísticas de la Turbulencia



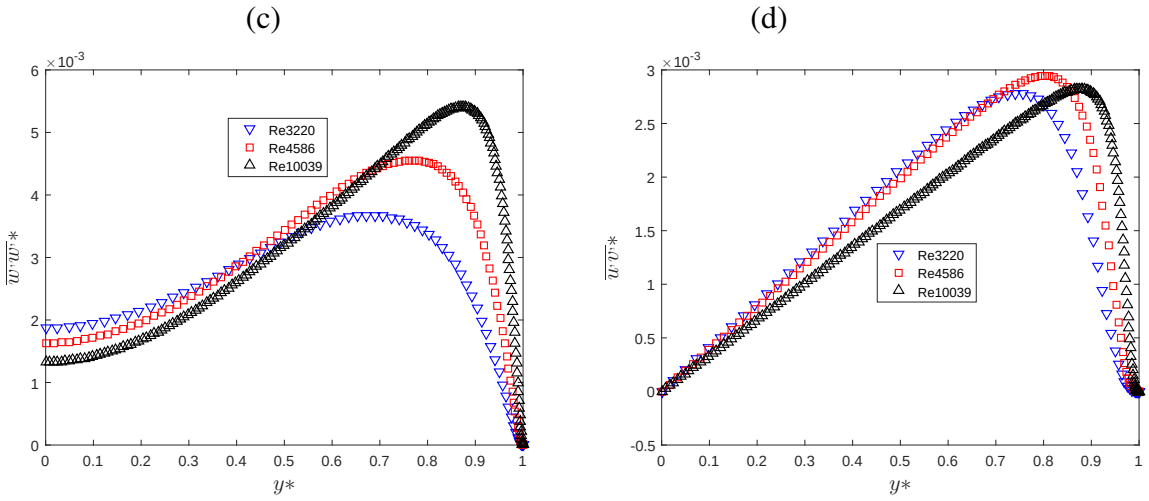


Figura 4.4: Componentes $\overline{u_i' u_j'}$ no nulas de R en canal DNS [12].

Ocurre algo similar al perfil de velocidades, el máximo de las estadísticas de la turbulencia tiende a acercarse a la pared a medida que aumenta el número de Reynolds.

4.1.4. Tensor de Reynolds

A diferencia de S, el tensor Anisotrópico tiene varias componentes. En su forma matricial:

$$R = \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & 0 \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{w'w'} \end{bmatrix} - \frac{1}{3}kI \tag{4.2}$$

Se calcularon los ángulos de las direcciones principales Dp del tensor R con respecto a los ejes XZY. De esto resultó el ángulo de elevación θ variando entre 0 y $15 - 23°$. Los otros ángulos constantes $\phi = 90°$ y $\zeta = 0°$.

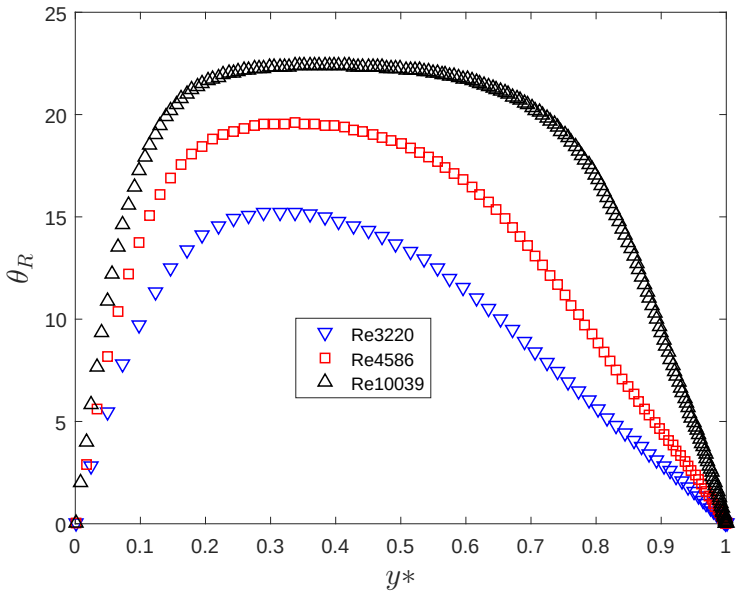


Figura 4.5: Ángulos de elevación de R para el canal DNS [12] ($D_p - XZY$).

A diferencia de S se tiene un ángulo θ variable. Esto tiene relación con que el tensor Anisotrópico tiene más de una componente y la variación relativa entre ellas produce el cambio de ángulo.

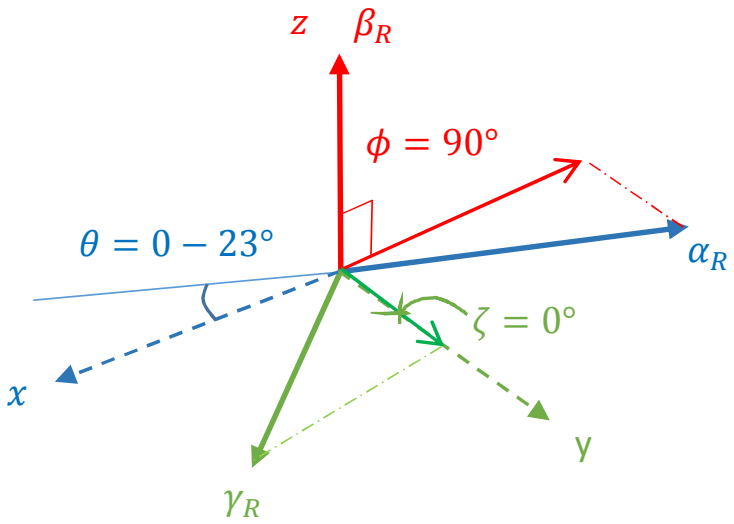


Figura 4.6: Representación direcciones principales de R y ángulos con respecto XZY a para el canal DNS [12].

4.1.5. Comparación R-S

Para la orientación propia (relativo a XZY) de R y S se obtuvieron valores distintos sólo para el ángulo de elevación θ. Se evaluaron los ángulos relativos entre R y S. Donde se obtuvo $\phi = 90$ y $\zeta = 0$ en todo el dominio.

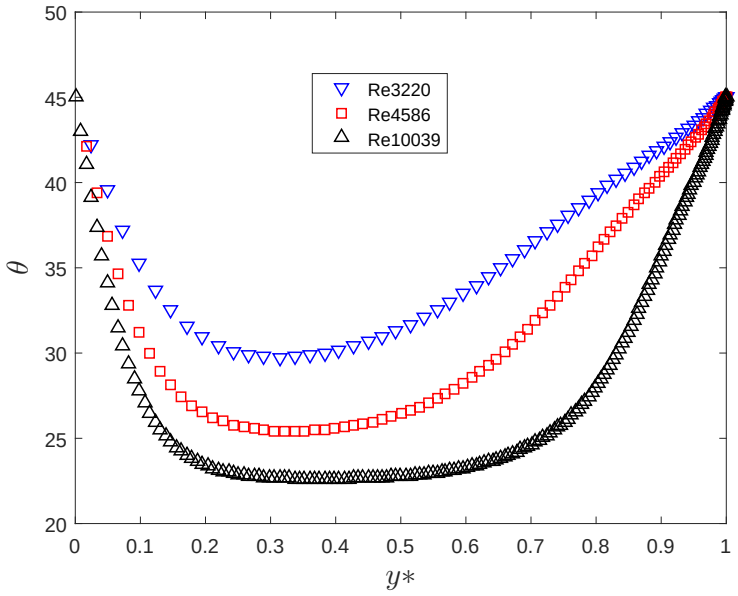


Figura 4.7: Ángulo Elevación θ canal DNS [12] ($D_R - D_S$).

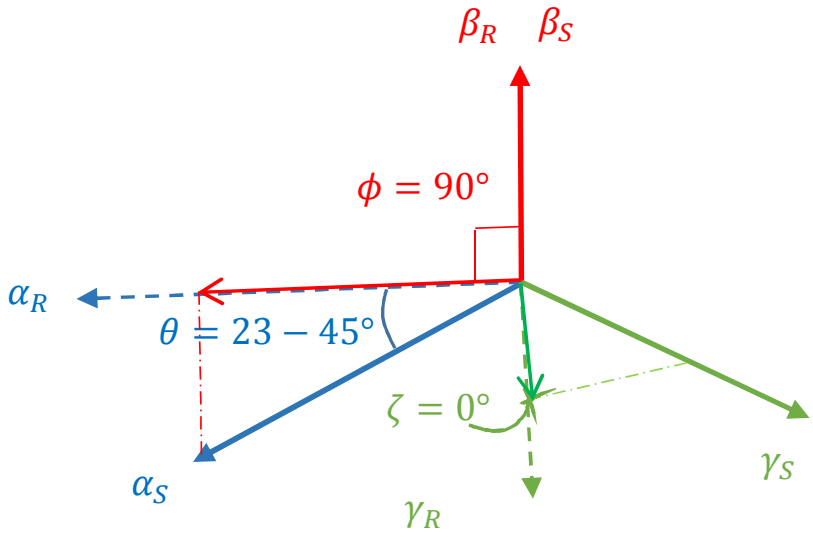


Figura 4.8: Representación direcciones principales de S y R ángulos entre ellas para el canal DNS [12].

Este ángulo tiene concordancia con los resultados de González [9] (pp. 100-101). Para un ángulo de elevación menor, se tiene una orientación relativa similar entre R y S. Esto se ve además en el comportamiento de ρ_{RS}.

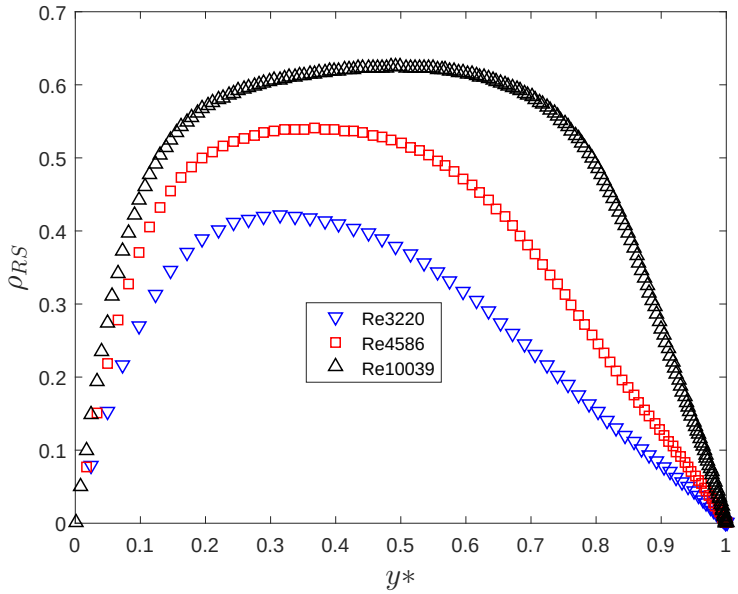


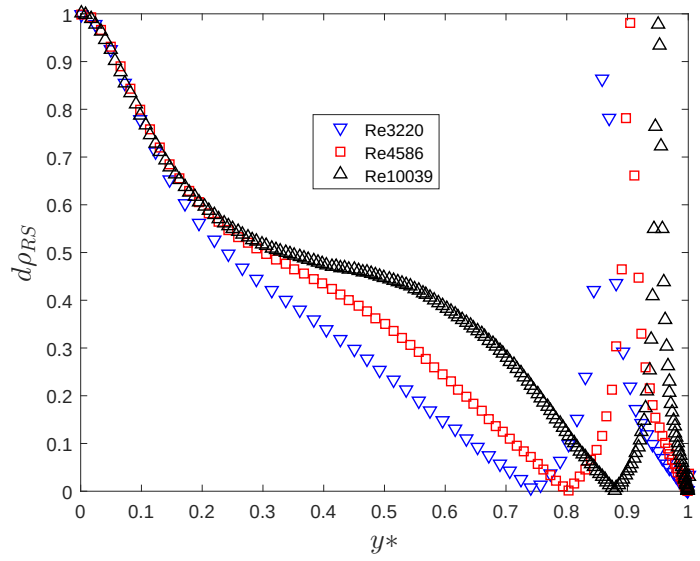
Figura 4.9: Índice ρ_{RS} canal DNS [12].

Para el número de Reynolds mayor se tiene el mejor resultado en el rango $y* \approx 0{,}25 - 0{,}85$, bajando a cero en la pared y en el centro ($y* = 1$ e $y* = 0$ respectivamente). No obstante, este resultado sugiere que el modelo de Boussinesq no tiene un comportamiento adecuado, comparando con el caso ideal donde $\rho_{RS} = 1$. La tendencia sugiere la relación $\theta = 0°$ con $\rho_R S = 1$ y $\theta = 45°$ con $\rho_R S = 0$.

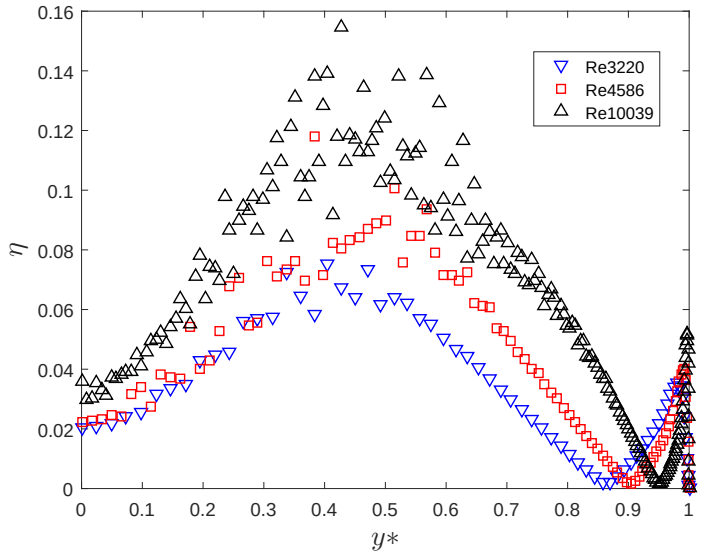
Se obtuvo un mejor alineamiento al aumentar el número de Reynolds. Sin embargo, no se puede asegurar que se podría alcanzar $\rho_{RS} = 1$ (o bien $\theta_{RS} = 0$) con un Reynolds mayor.

4.1.6. Prueba directa sobre RANS

Utilizando el método descrito en la sección 3.3 se calcularon los índices $d\rho_{RS}$ (3.11) y η (3.12).



(a)



(b)

Figura 4.10: Prueba sobre RANS en canal DNS [8] (a) $d\rho_{RS}$ (b) η.

Según 4.10(a), la orientación relativa entre dS y dR mejora al aproximarse al centro del canal, con un valor $d\rho_{RS} = 1$ en el centro. En las orillas la escala del vector dR se reduce a cero en un punto como se observa en (b), lo que produce que aumente el índice hasta $d\rho_{RS} = 1$. Según el estimador η, la viscosidad turbulenta es mayor alrededor de $y* = 0{,}5$. Se obtiene una alta variabilidad (sobre todo para $Re = 10039$), que se puede asociar a un error numérico producido por las derivadas de segundo orden presentes en $S \cdot \nabla$.

No obstante, el factor η tiene una gran variación al alejarse del $y* = 0{,}5$ (cerca de un orden de magnitud), por lo que este análisis es válido en este sector, pero no así para las posiciones donde aproximadamente $\frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0$. Como recomendación se podría añadir a un futuro estudio el uso de valores empíricos de ν_T (utilizando y comparando modelos de turbulencia) en función de $y*$, para no despreciar el factor $\nu_T \nabla$ que aparece en (3.9).

Es pertinente relacionar una comparación entre ρ_{RS} y el cambio del coeficiente ρ_{RS} con respecto a $y*$ ($\frac{\partial \rho_{RS}}{\partial y*}$).

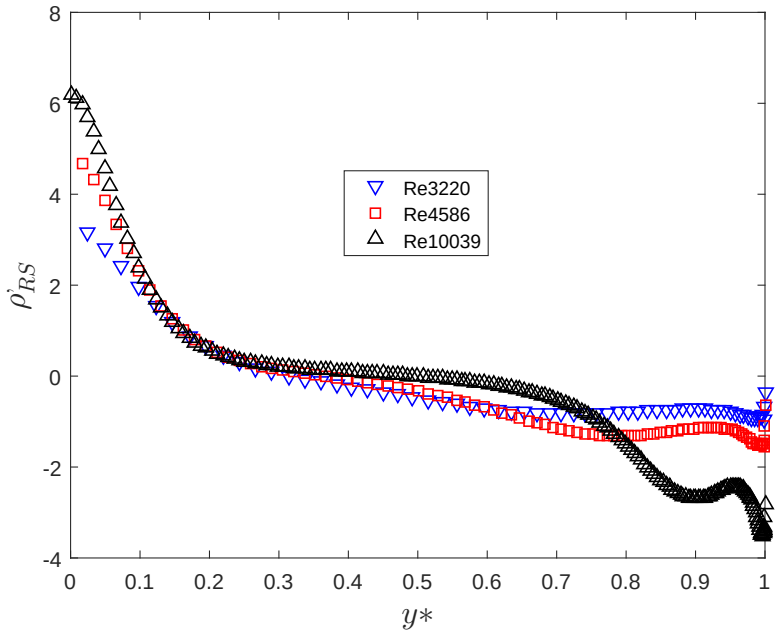


Figura 4.11: Derivada de ρ_{RS} con respecto a $y*$ canal DNS [12].

Tiene sentido que la curva es similar de forma cualitativa a 4.10. Por lo tanto, el comportamiento del término diferencial se asemeja a la Tasa de Cambio del índice ρ_{RS}, que describe la orientación relativa entre los dos tensores.

4.2. Tubería DNS

Similar al caso anterior, pero con sus cantidades expresadas en coordenadas cilíndricas, corresponde a un flujo bidimensional en dirección X con componentes de velocidad axial u_x, velocidad tangencial u_θ y velocidad radial u_r. Las variables dependen sólo de r.

Se utilizaron los datos DNS descritos ($Re_m = 5,3 \cdot 10^3$), en los cuales el flujo está completamente desarrollado y tiene simetría axial, por lo que los operadores diferenciales $\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\theta} = 0$.

4.2.1. Campo de Velocidades

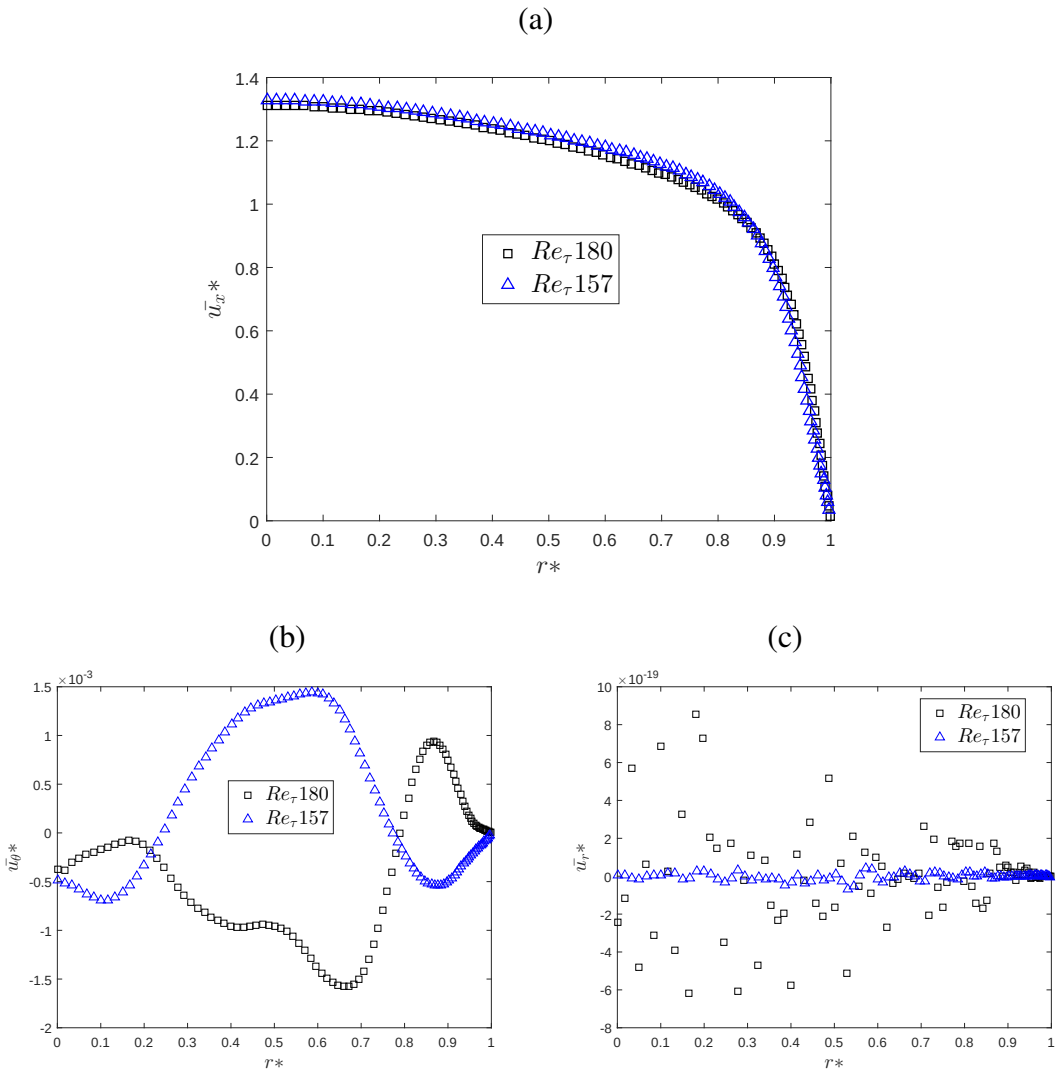


Figura 4.12: Campos de velocidad promedio (a) Axial, (b) Tangencial y (c) Radial en Tubería DNS de THTlab [5].

Ahora se cuenta con tres componentes de la velocidad, en las que predomina la parte axial. Las condiciones del flujo cambian principalmente en su componente tangencial, aunque esta tiene una escala 3 órdenes de magnitud menor que u_x*. La componente radial tiene una escala despreciable, por lo que no debería afectar en los resultados.

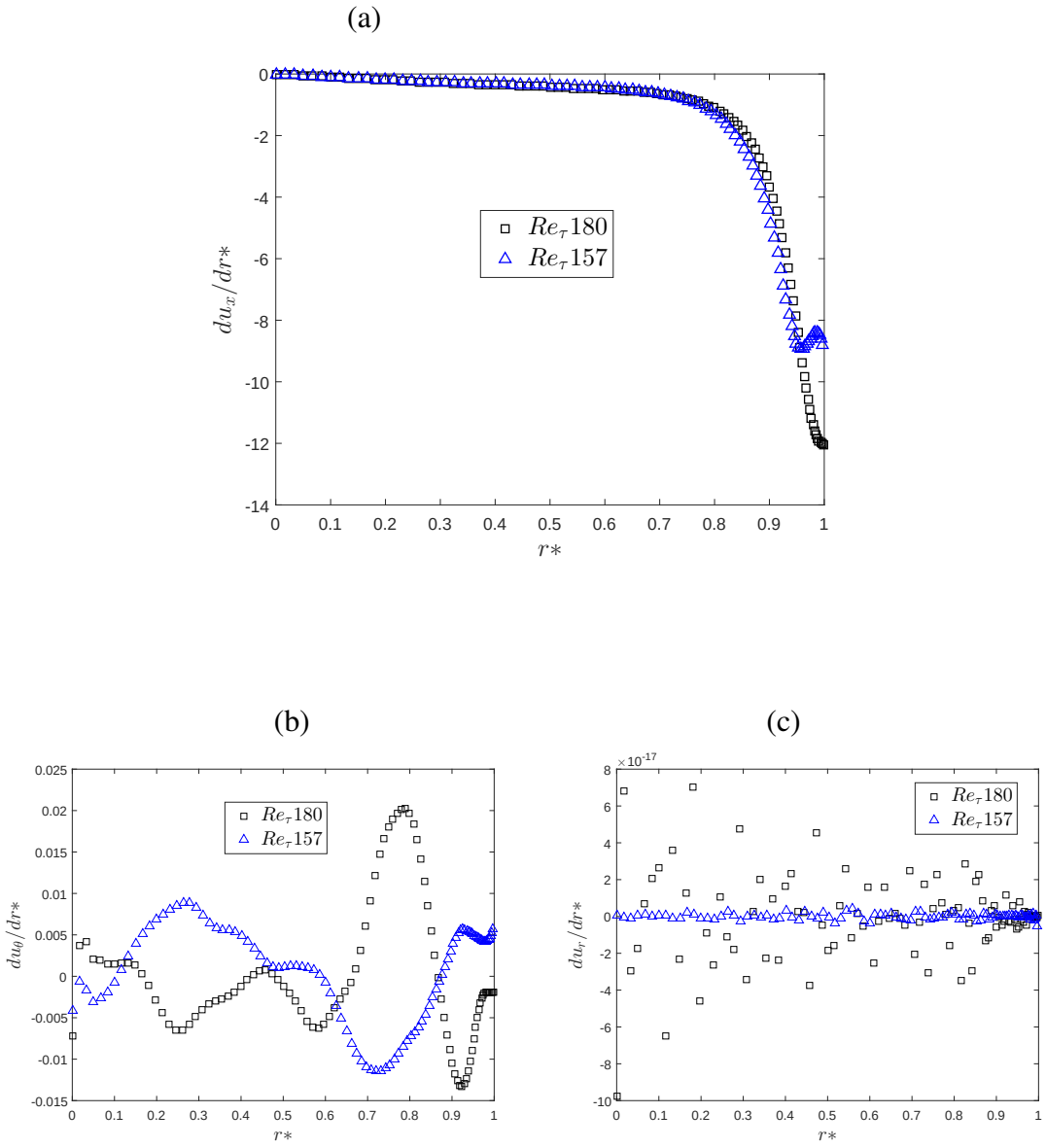


Figura 4.13: Derivadas de la velocidad con respecto a r en tubería DNS [5].

Como es de esperar, predomina la derivada de la velocidad axial, variando cerca de la pared para $Re_\tau = 157$, amortiguando el efecto de los esfuerzos de corte en esta acotada región (control de la turbulencia). También se ven variaciones con respecto a a la componente tangencial.

4.2.2. Tensor de Deformación

El tensor S tiene la siguiente forma, eliminando los términos con $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial \theta}$ en la ecuación (3.16):

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u_r}}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\bar{u_\theta}}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\bar{u_\theta}}{r}\right) & \frac{\bar{u_r}}{r} & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u_x}}{\partial r}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Se calculó la derivada $\frac{\partial}{\partial r}\frac{\bar{u_\theta}}{r}$ que aparece en el término $S_{r\theta}$:

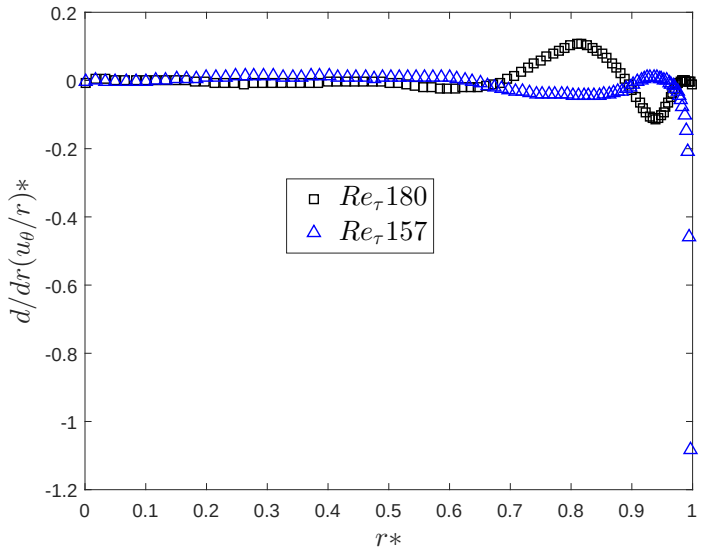


Figura 4.14: Derivada de la velocidad tangencial relativa al radio $\frac{\partial}{\partial r}\frac{\bar{u_\theta}*}{r}$ tubería DNS [5].

Tiene un valor importante al acercarse a la pared.

Se calcularon los ángulos $\{\theta, \phi, \zeta\}_S$ con respecto a los ejes $X\theta r$. Además se comparan los resultados con la tubería LDV ($Re_m = 2,8 \cdot 10^5$) sin Swirl en $x = 14D$ para analizar la influencia del número de Reynolds medio.

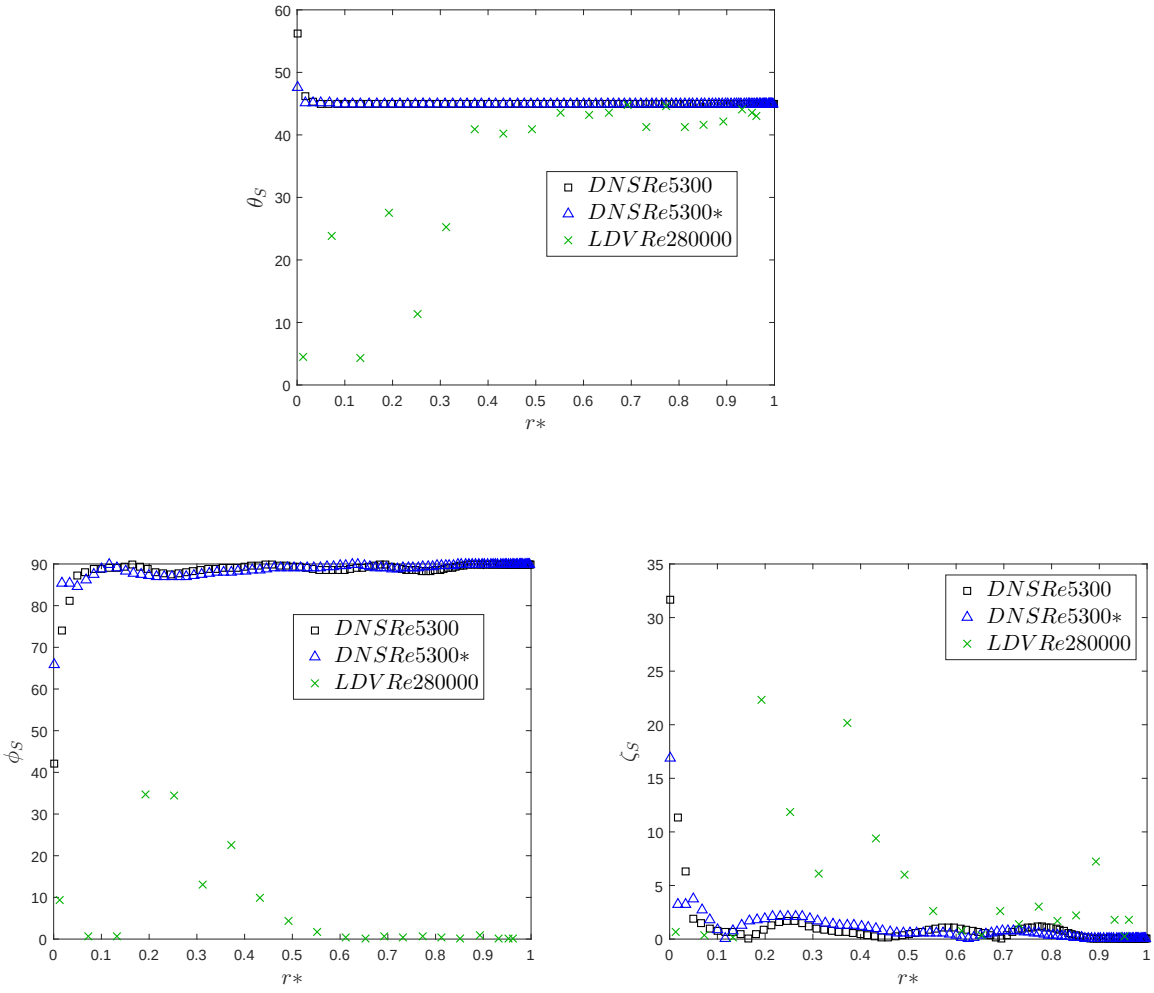


Figura 4.15: Ángulos entre $D_S - X\theta r$ tubería DNS [5].

Comparando los datos DNS, los ángulos (b) ϕ y (c) ζ fluctúan en un rango aproximado de $5°$ con respecto a sus valores normales. Esto se puede explicar en la presencia de dos componentes con magnitud significativa ($\frac{\partial u_x}{\partial r}$ y $\frac{\partial u_\theta}{\partial r}$), generando un cambio en las direcciones principales σ_2 y $\sigma 3$ mostradas en el gráfico 4.3. Como no hay una mayor interacción con las componentes de la diagonal de S, el ángulo de elevación (a) es prácticamente constante igual a $45°$.

En relación a los datos LDV (x), se obtienen diferencias considerables por el número de Reynolds alto. Se muestra una desviación total en el ángulo ϕ_S tendiendo a 0. En los ángulos θ_S y ζ_S la diferencia se observa hacia el centro de la tubería ($r* < 0,4$).

4.2.3. Tensor de Reynolds

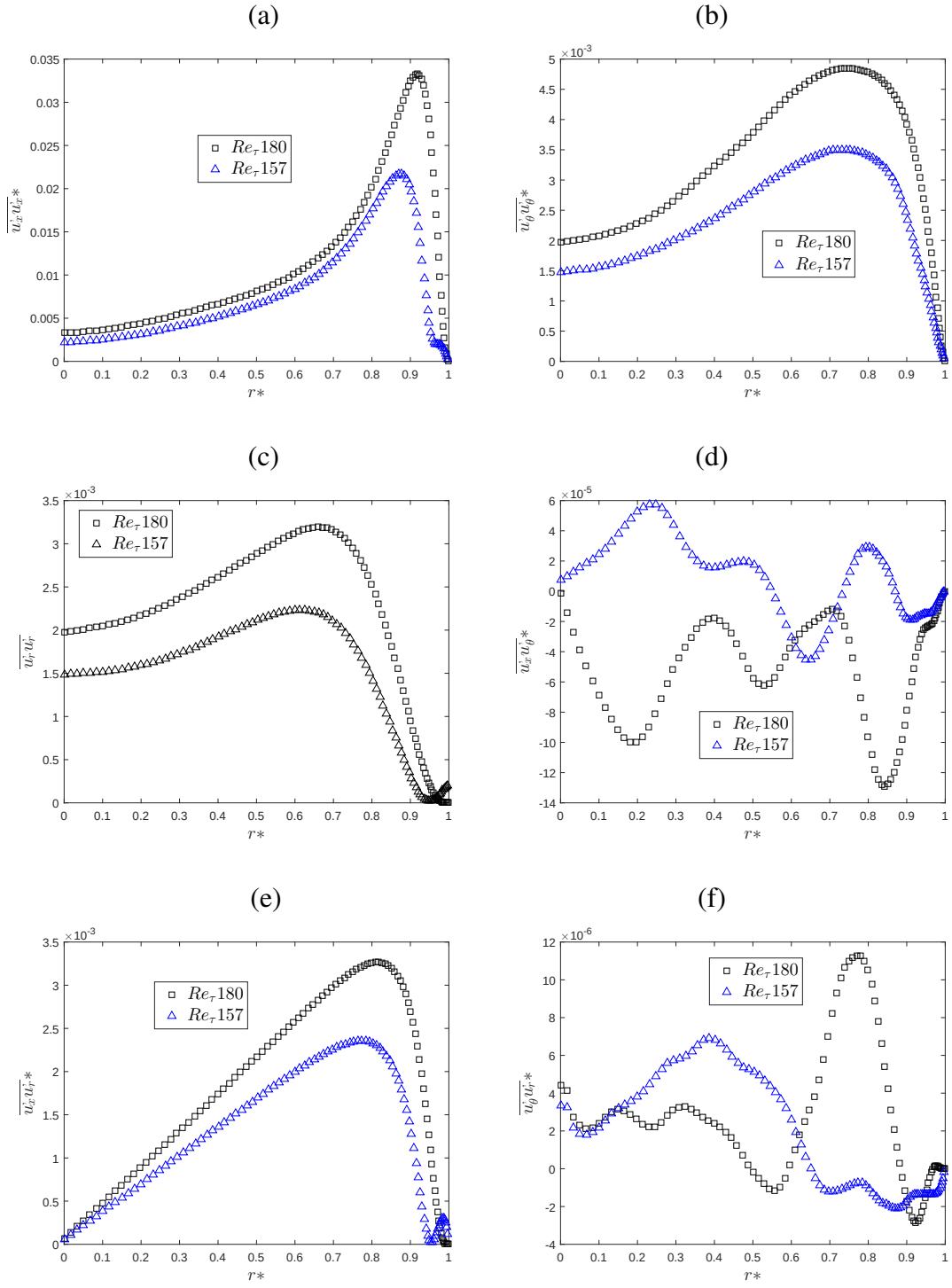


Figura 4.16: Componentes $\overline{u_i' u_j'}$ tensor de Reynolds en tubería DNS [5]. Datos △ con control de Drag y □ sin.

Los datos utilizados presentan las 6 componentes del tensor Anisotrópico de Reynolds (3.17). (d) $\overline{u'_x u'_\theta}$ y (f) $\overline{u'_\theta u'_r}$ tienen una menor magnitud. En el caso de ser despresiadas el tensor R se aproximaría de forma equivalente a la expresión (4.2) para el canal. Sin embargo, no se utilizó esta aproximación en el desarrollo que sigue para comparar con el caso del canal.

Se calcularon los ángulos para R con respecto a los ejes coordenados $X\theta r$.

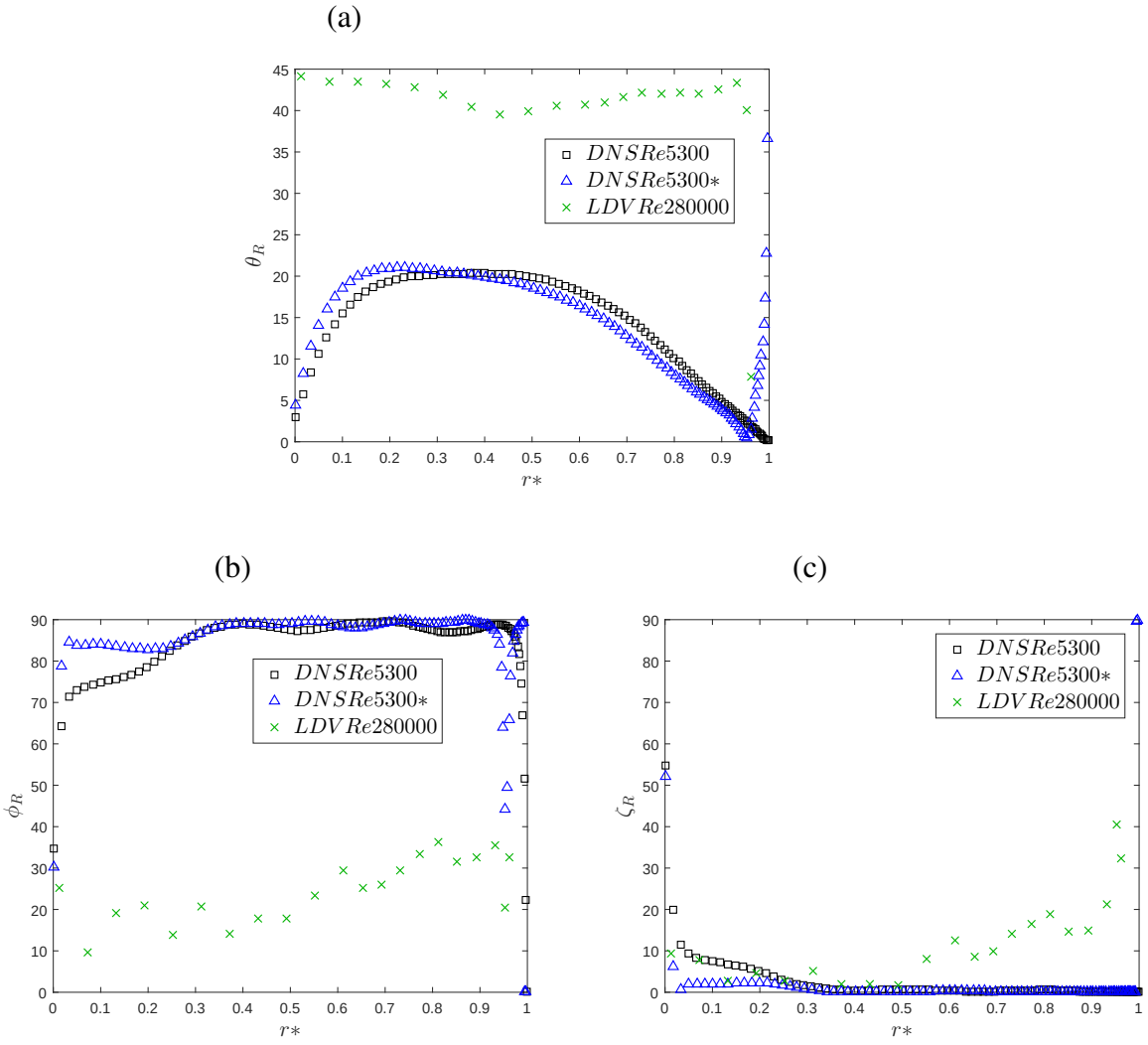


Figura 4.17: Ángulos entre $D_R - X\theta r$ tubería DNS [5].

Es evidente la diferencia entre los distintos sets de datos. El control de la turbulencia disminuye levemente las variaciones de los ángulos ϕ_R y ζ_R hacia el centro de la tubería.

Lo interesante ocurre con el caso LDV (x). Se observa que $\theta_R \approx 45°$, lo que tiene sentido con el resultado del canal: "El ángulo de elevación tiende a $45°$ a medida que aumenta el número de Reynolds". También se obtuvo una gran variación en ϕ_R, que está alejado de su valor normal de $90°$.

4.2.4. Comparación R-S

Se calcularon los ángulos relativos entre las direcciones principales de R y S.

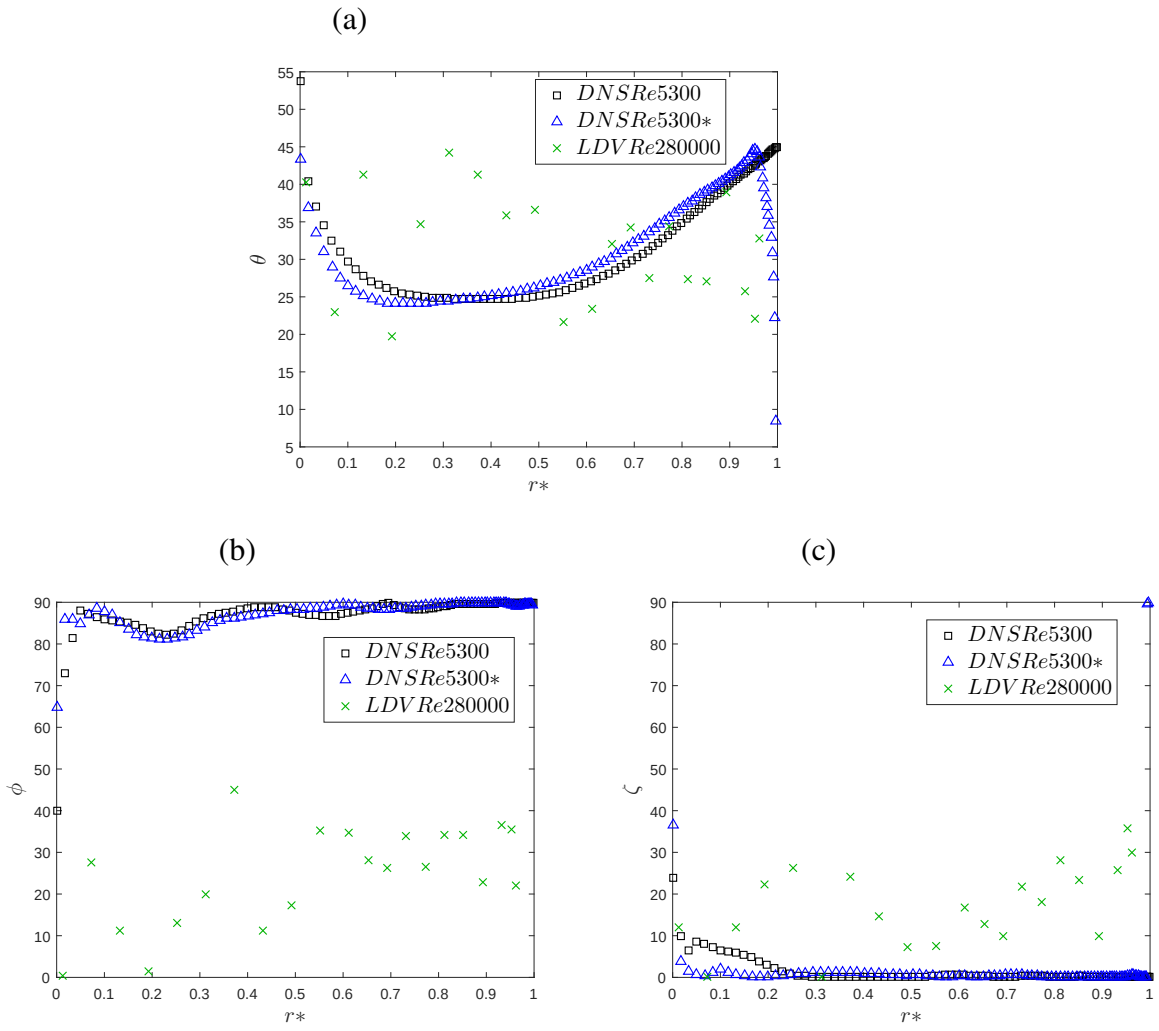


Figura 4.18: Ángulos entre $D_R - D_S$ para tubería DNS con △ y sin □ control de turbulencia.

Se obtuvo un resultado similar a 4.7 para el ángulo de elevación. Cambian los ángulos ϕ

y ζ cerca del centro de la tubería. Esto se explica por la anulación del esfuerzo cortante $\overline{u'_x u'_r}$ al acercarse al centro, lo que no sucede con las otras componentes cortantes $\overline{u'_\theta u'_r}$ y $\overline{u'_x u'_\theta}$.

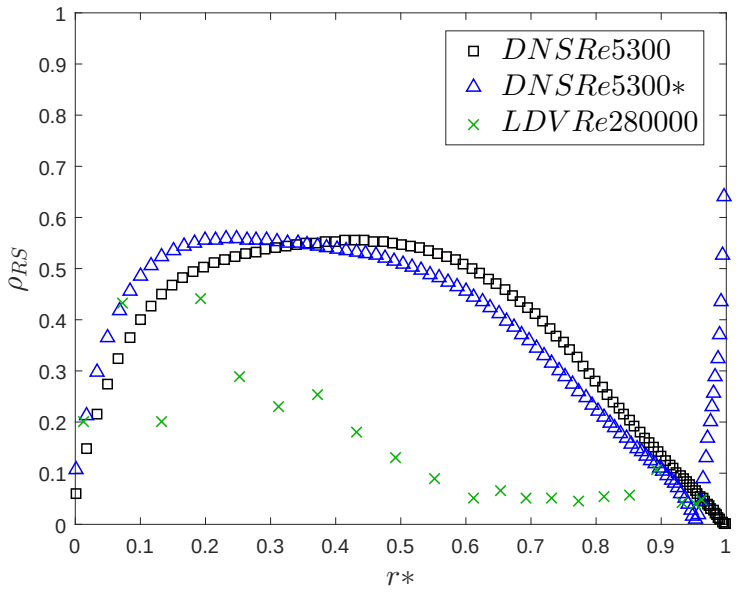


Figura 4.19: Indice de Orientación relativa entre R y S para tubería DNS.

El resultado concuerda con lo presentado en el paper de Schmitt [16] y presenta una similitud al comportamiento del modelo en el canal DNS. Ocurre algo en la cercanía de la pared con los datos $\triangle$ con control de turbulencia. Probablemente se debe a las características del tensor en esta área, ya que se tiene una gran diferencia en las derivadas direccionales con respecto a los datos $\square$ presentadas en 4.13.

Se obtuvo un resultado comparativamente bajo para la tubería LDV sin rotación. Teniendo en cuenta esto, se puede decir que el aumento del número de Reynolds no necesariamente mejora el comportamiento de la hipótesis de Boussinesq en la tubería sobre todo lejos del centro de la sección.

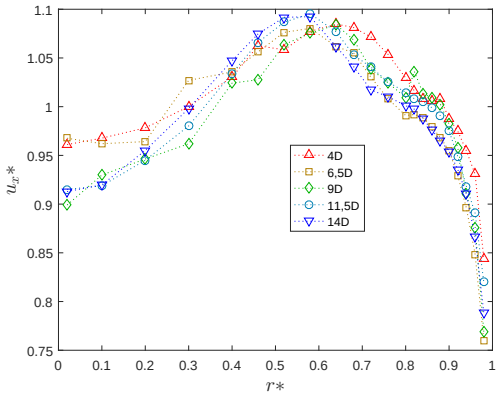
4.3. Tubería LDV Swirl

Consiste en un flujo considerado axisimétrico en torno al eje x y con simetría angular, al que se le añade una rotación en la entrada aumentando la componente tangencial de

la velocidad. Además, a diferencia del caso de la Tubería DNS, el flujo no está desarrollado. Bajo esta condición, se enfatizó el análisis en los datos en la posición $x = 14D$, que corresponde a la medición más alejada de la entrada del flujo donde se puede obtener una mejor comparación a un flujo desarrollado. Se adjunta también el caso sin rotación para comparar con la tubería DNS analizada.

4.3.1. Perfiles de Velocidad

Se muestran a continuación los perfiles de velocidad a lo largo del área de medición, entre $x = 4D$ a $14D$ (escala de colores de rojo a azul) desde la salida del generador de swirl, para la máxima rotación $Ro = 1{,}80$. La velocidad se encuentra adimensionalizada por la velocidad media u_m y el radio r por $D/2$ con el índice $*$, con un valor 0 para el centro y 1 para la pared.



(a)

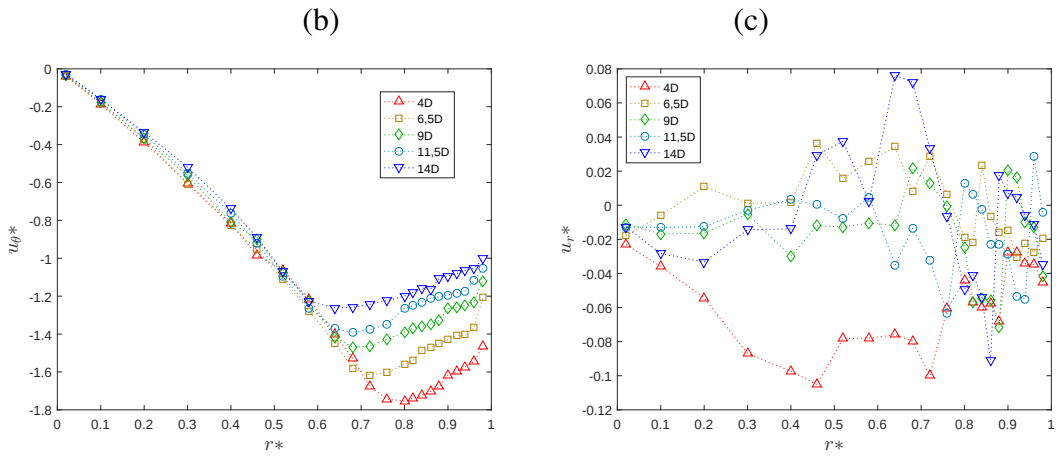
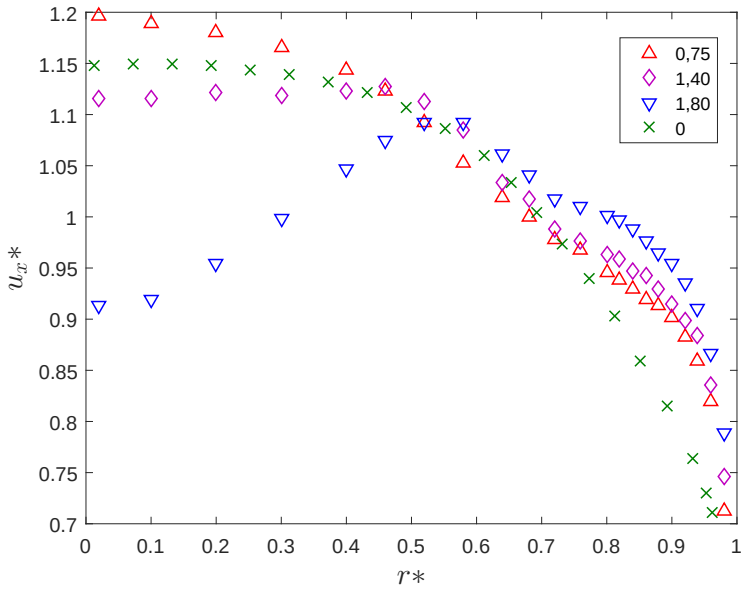


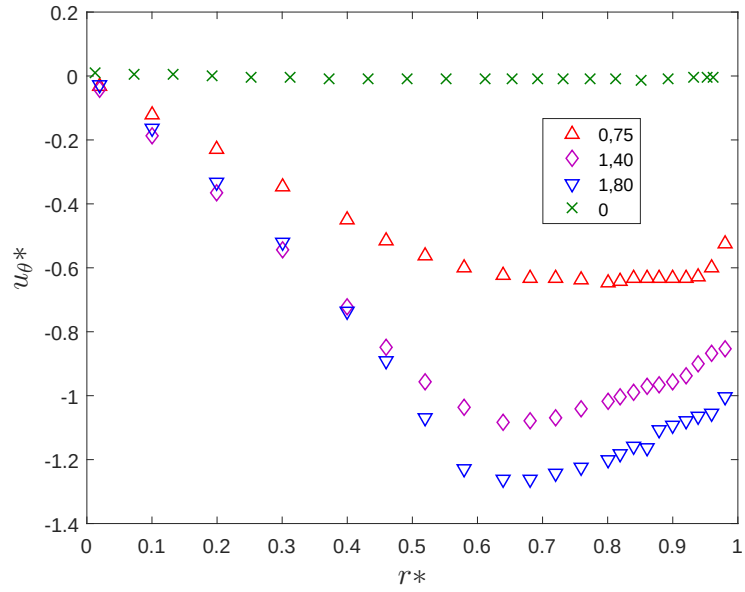
Figura 4.20: Perfiles de velocidad para $Ro = 180$ a lo largo de la tubería LDV [14].

Se observa que la componente tangencial (b)u_θ se va disipando cerca de la pared a medida que se aleja de la entrada. Además el valor máximo se va desplazando hacia el centro del canal, describiendo un perfil parabólico hacia la pared y un perfil lineal hacia el centro (lo que se denomina "rotación de sólido"). La velocidad axial (a)u_x tiende a disminuir en el centro, al igual que en las cercanías de la pared. La parte radial (c)u_r tiende a aumentar a lo largo del tubo, pero permanece con una escala cercana a 10 veces menos que las otras dos componentes.

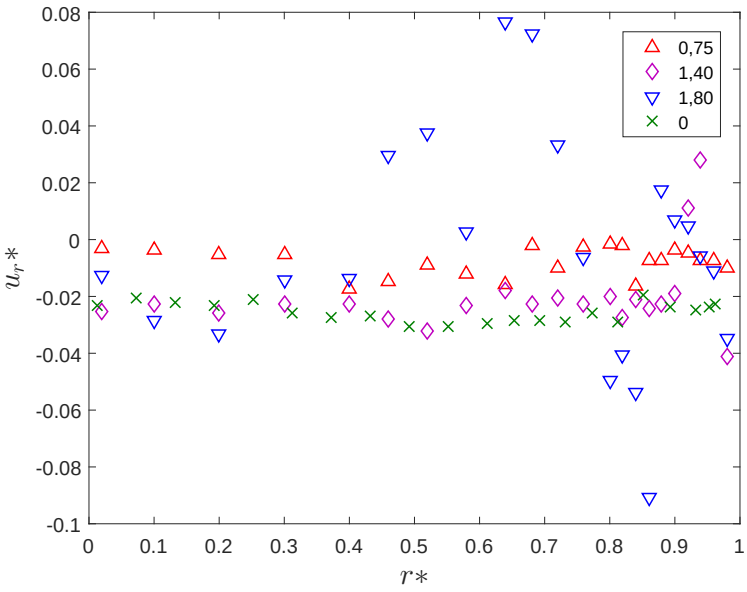
Ahora para comparar lo que sucede con el cambio de la rotación de entrada, se grafican los perfiles de velocidad en la posición $14D$ para cada valor de Ro.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.21: Perfiles de velocidad para Ro distintos, en la posición $x = 14D$ en tubería LDV [14].

Como es de esperar, la componente tangencial (b)u_θ es mayor de forma proporcional a Ro. Lo interesante ocurre en la velocidad axial (a)u_x, donde a mayor rotación se obtiene un valor considerablemente menor en el centro, probablemente por la transferencia de momentum hacia la dirección tangencial. De (c) se desprende que la componente radial u_r tiene una escala aún menor al disminuir la rotación.

4.3.2. Derivadas Direccionales

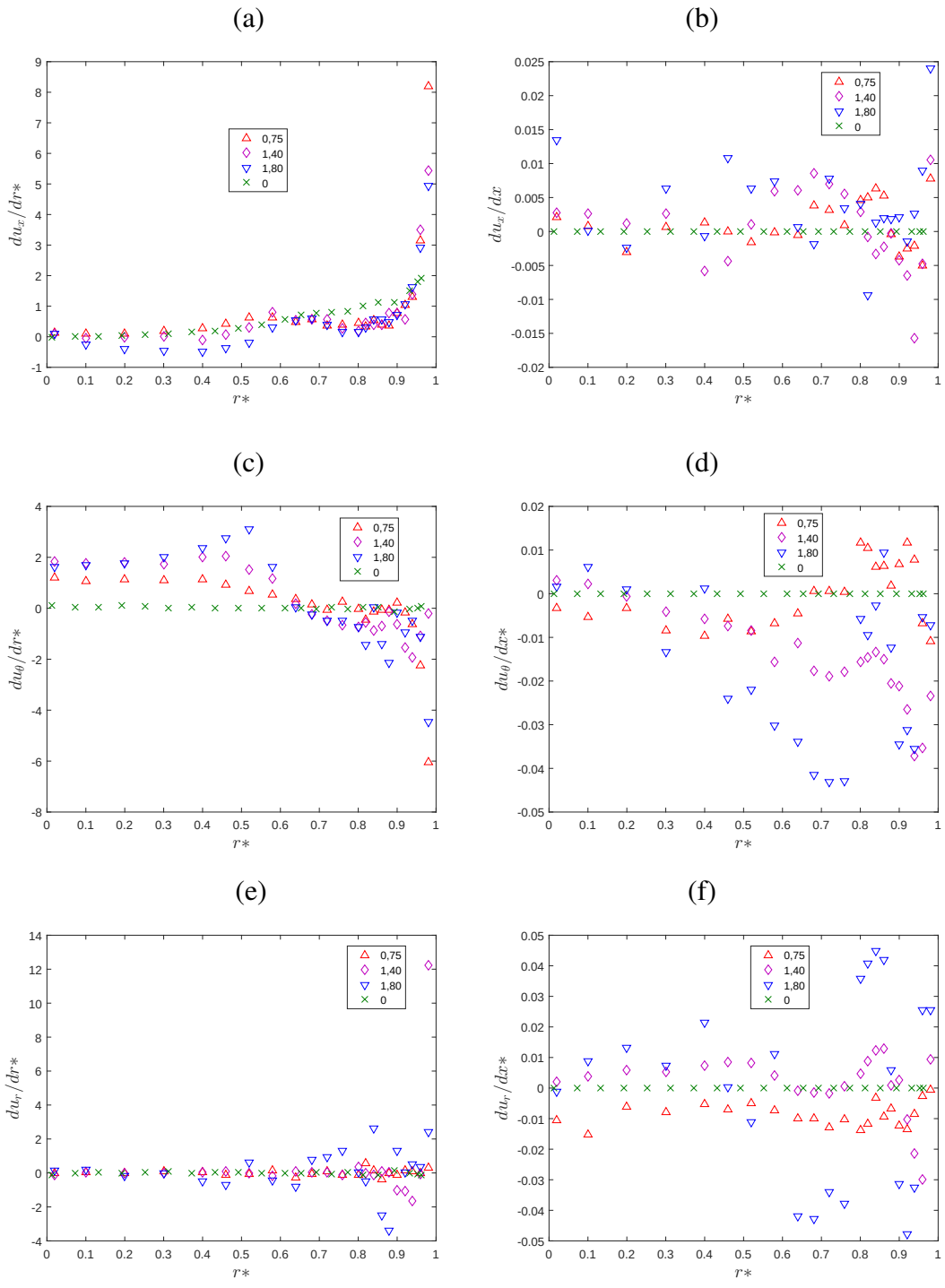


Figura 4.22: Derivadas direccionales de Datos LVD en la posición $x = 14D$ en tubería LDV [14].

Se nota que las derivadas con respecto a x son menores a las derivadas en r aproximadamente por 2 órdenes de magnitud. Esto hace que el flujo pueda ser considerado

como desarrollado en la posición $x = 14D$. Por lo mismo, la comparación realizada en la sección anterior con los datos DNS se evaluó en esta posición.

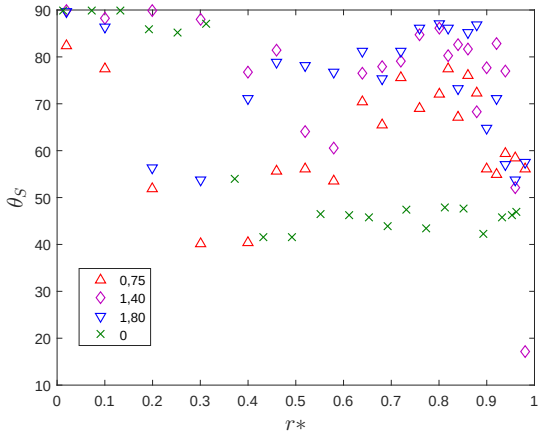
4.3.3. Tensor de Deformación

La única derivada nula es $\frac{\partial}{\partial\theta}$ en la expresión (3.16) de S.

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u_r}}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\bar{u_\theta}}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u_r}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u_x}}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\bar{u_\theta}}{r}\right) & \frac{\bar{u_r}}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u_\theta}}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u_r}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u_x}}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u_\theta}}{\partial x}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Se calcularon los ángulos propios de las direcciones principales de S con respecto a los ejes coordenados $x\theta r$, resultados que se muestran con los gráficos de contorno 6.1 6.2 y 6.3 en el Anexo B.

(a)



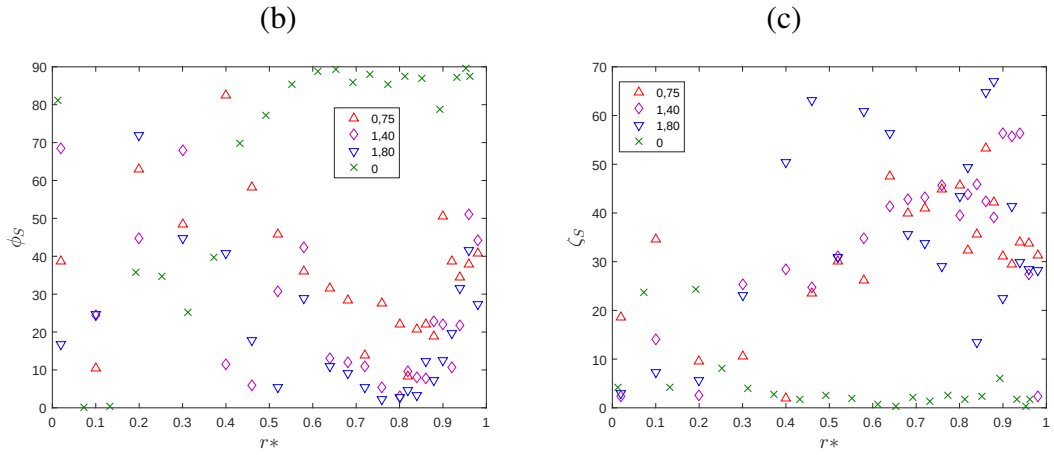


Figura 4.23: Ángulos entre D_S y $X\theta r$ para datos LDV con $x = 14D$ en tubería LDV [14].

Se observa una diferencia evidente entre los ángulos propios de S al aumentar el número Ro. El ángulo θ tiende a subir hacia la orilla y a bajar en un sector cerca del centro. Los ángulos ϕ y ζ se invierten, sugiriendo un cambio importante de la orientación del tensor de Deformación.

4.3.4. Tensor de Reynolds

Según los autores de las mediciones [14]: “Un aspecto destacable en flujos con líneas de corriente helicoidales, es que sin importar el método o mecanismo de generación del giro y si el flujo es axisimétrico, por celdas o incrustado con regiones libres de swirl, se modifican las características de la turbulencia... ”.

Se grafican las 6 componentes del tensor de Reynolds para distintos Ro, en la posición $x = 14D$.

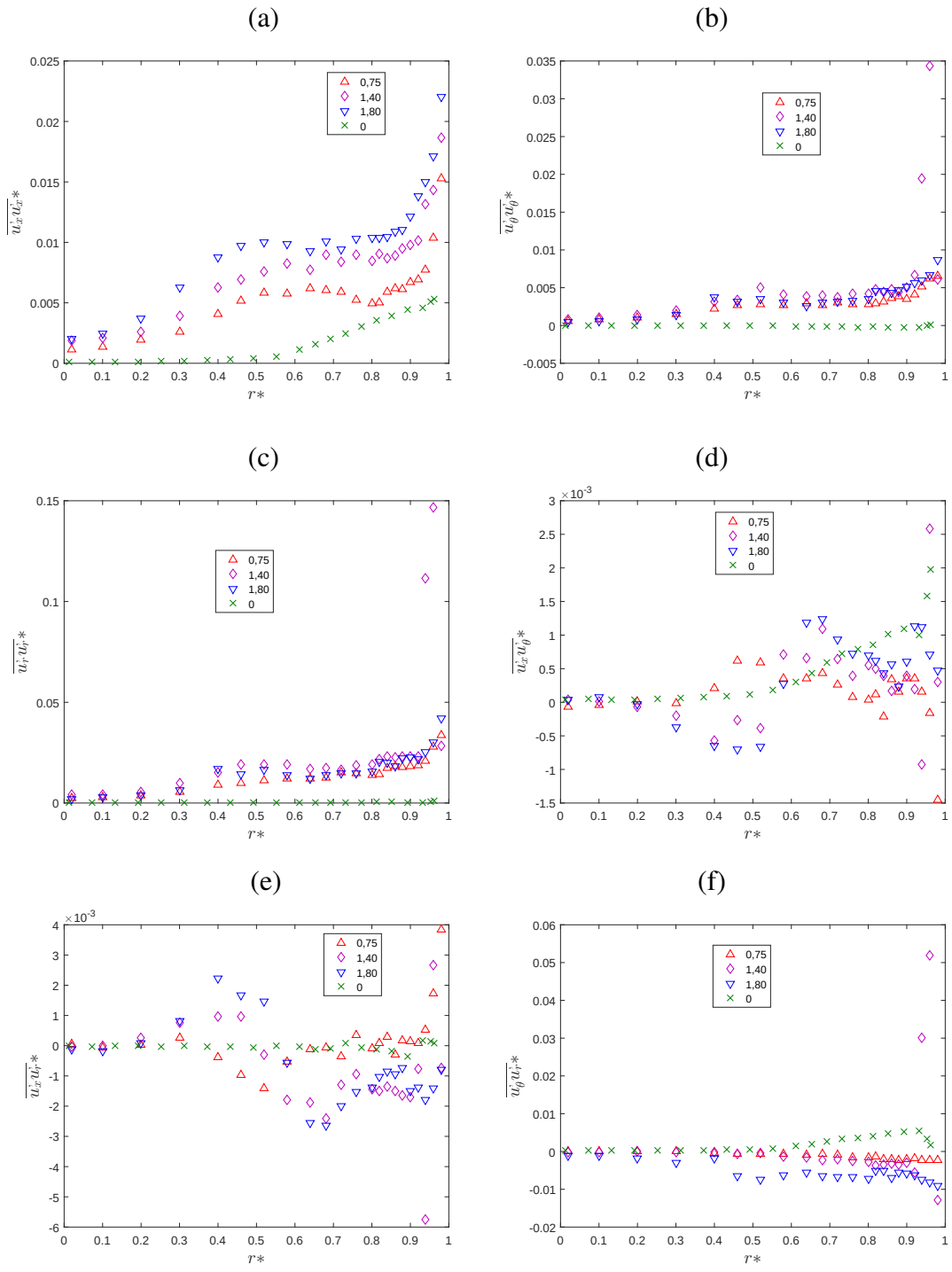


Figura 4.24: Estadísticas de turbulencia para Ro distintos, en la posición $x = 14D$ en tubería LDV [14].

Es dificil analizar las 6 componentes ya que no se ve un patrón claro en los gráficos de la figura 4.24. Parte de las componentes $\overline{u_i' u_j'}$ axiales y de corte disminuyen y otras au-

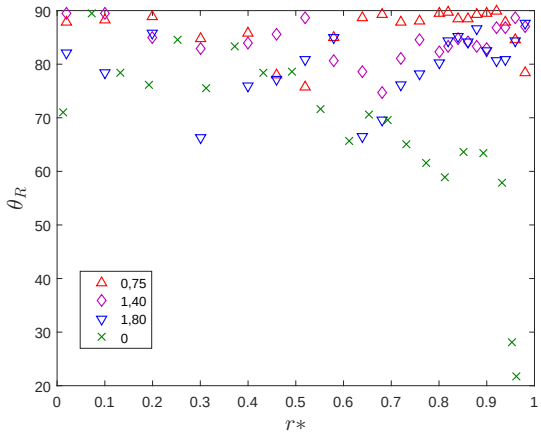
mentan en relación a la rotación y al eje r, por lo que se dejó esta tarea a la comparación de la orientación entre tensores.

Continuando con la referencia: "... el movimiento fluctuante en la presencia un giro es a menudo fuertemente anisotrópico, un aspecto que ha hecho esta clase de flujos no asociable a modelos de turbulencia basados en un concepto de viscosidad turbulenta escalar. "

En base a esto es interesante analizar un flujo con giro al ser el "caso desfavorable" para la hipótesis de Boussinesq.

Se calcularon los ángulos propios de R con respecto a $X\theta r$, que se muestran en los gráficos de contorno 6.4, 6.5 y 6.6 del Anexo B. En estos gráficos se observa una gran diferencia con respecto al caso DNS 4.17.

(a)



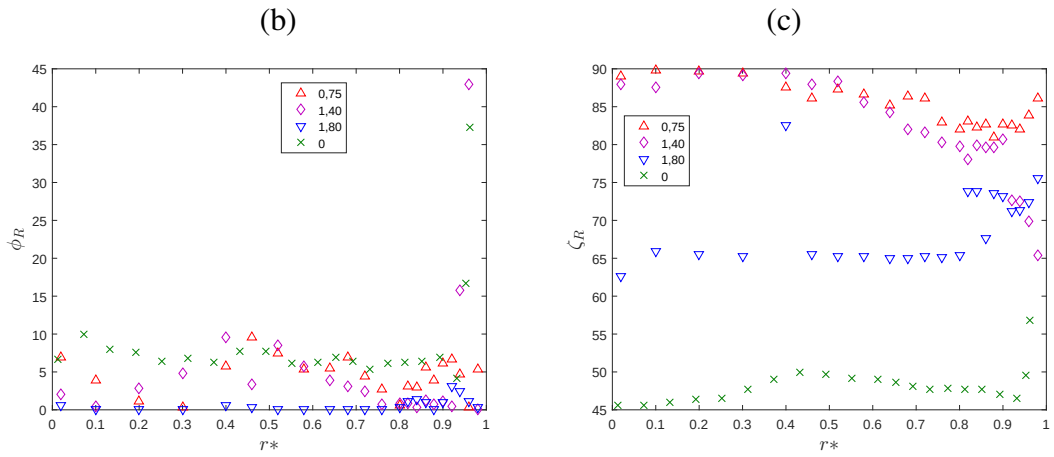


Figura 4.25: Ángulos entre D_R y $X\theta r$ para datos LDV con $x = 14D$ en tubería LDV [14].

Esto se puede explicar en la alta variación entre el número de Reynolds ($Re_{DNS} = 3 \cdot 10^3$ Y $Re_{LDV} = 2{,}8 \cdot 10^5$, son 2 órdenes de magnitud) que afecta las estadísticas de la turbulencia y por lo tanto modifica la orientación del tensor anisotrópico de Reynolds.

4.3.5. Orientación entre R y S

Al igual que en la sección anterior, la orientación entre los tensores R y S cambia con la posición (x, r) y ahora la rotación Ro. Para resumir la comparación se muestran gráficos de contorno del índice $\rho_R S$ para las distintas rotaciones.

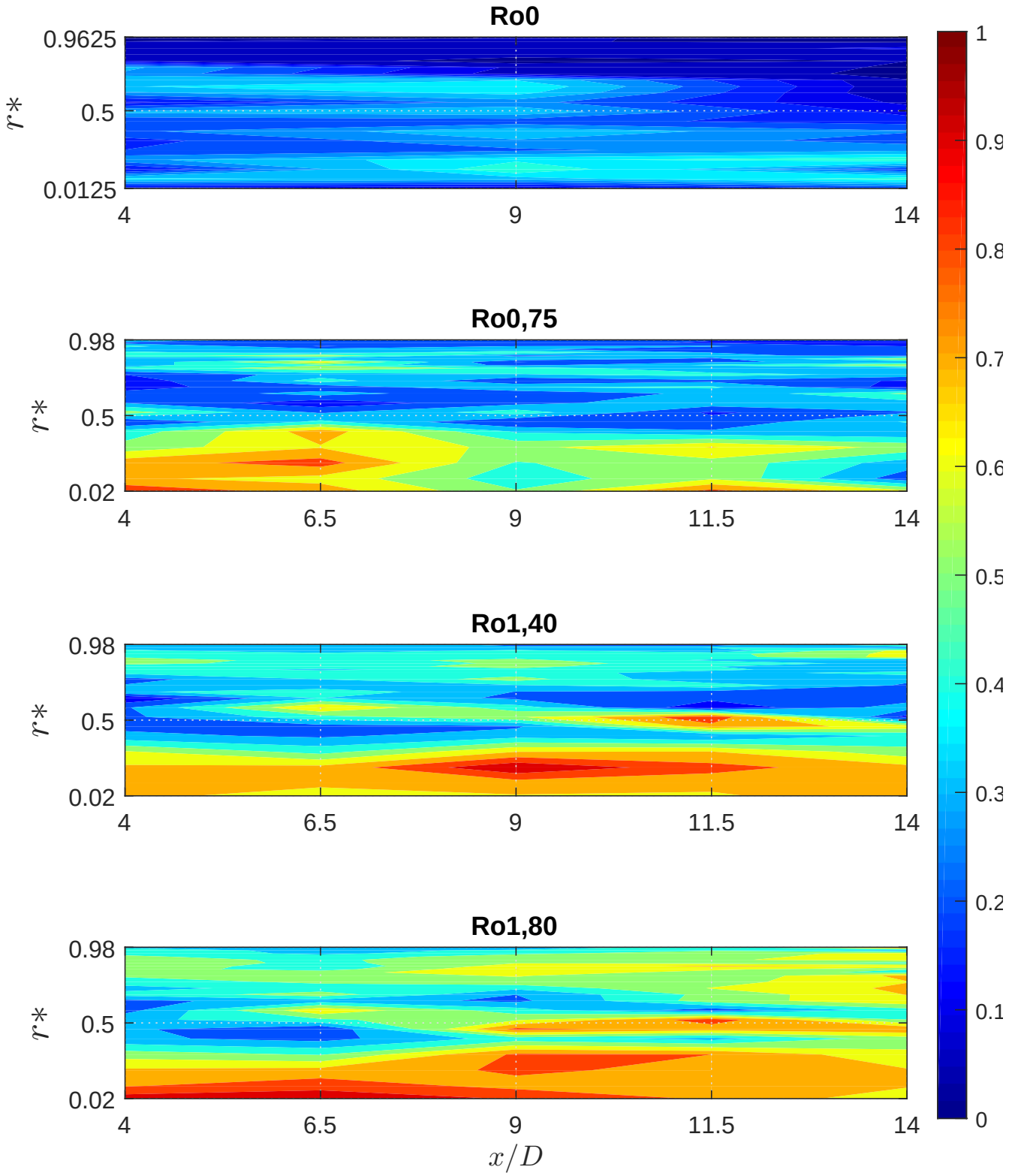


Figura 4.26: Orientación relativa entre R y S para datos LVD [14] con $Ro = 0, 0{,}75, 1{,}40, 1{,}80$ en tubería LDV [14].

Lo que se busca son las áreas con colores cálidos, que indican el acercamiento de ρ_{RS} a un valor ideal de 1. Según este índice la generación de Swirl mejora el comportamiento del modelo de Boussinesq, y de manera importante cerca del centro de la tubería.

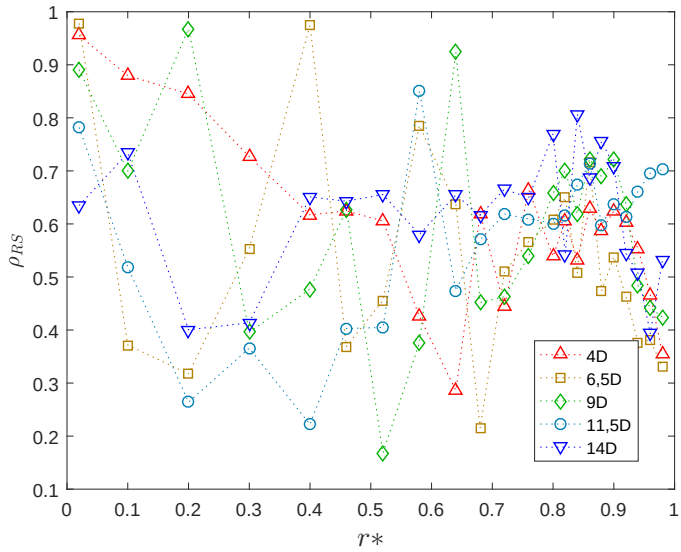
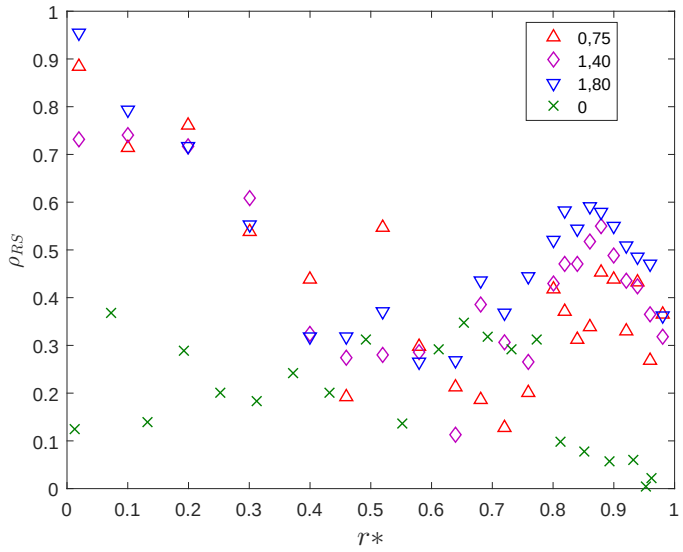


Figura 4.27: Evolución de ρ_{RS} a lo largo de la tubería LVD [14] para $Ro = 1{,}80$.

En el gráfico se observa que ρ_{RS} comienza con valores cercanos a $0{,}8$ para $x = 4D$ cerca del centro. Luego disminuye en $x = 6{,}5D$ a un valor de $0{,}4$, que sigue siendo mayor a lo obtenido sin rotación. En cambio en cerca de la orilla ocurre lo contrario, aumenta ρ_{RS} a medida que se desarrolla el flujo. De esto se puede extraer que el modelo mejora en el centro y empeora hacia la orilla de la tubería a mayor rotación. A medida que se discipa la componente tangencial el modelo ocurre el caso contrario. Se muestra a continuación la comparación entre la entrada y la salida de la tubería para distintos valores de Ro, mostrando esta comparación.

(a)



(b)

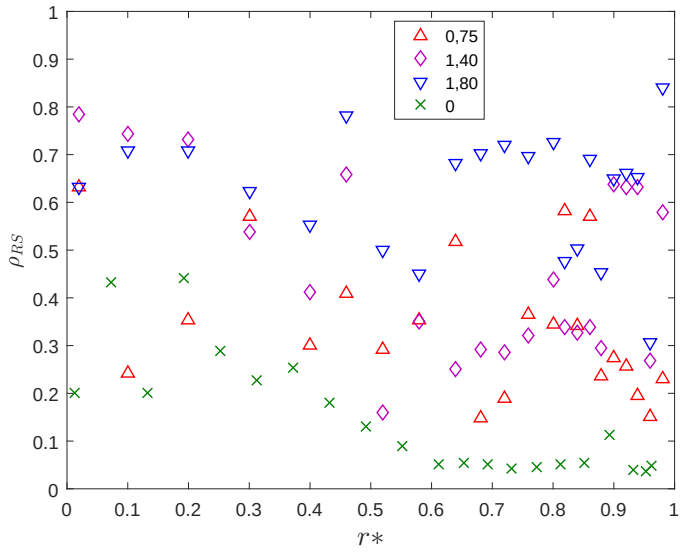


Figura 4.28: ρ_{RS} a lo largo de la tubería LVD [14] para (a)$x = 4D$ y (b)$x = 14D$.

Desde $x = 4D$ hacia $x = 14D$, el modelo mejora cerca de la orilla de la tubería llegando hasta $\rho_{RS} = 0{,}8$ para la mayor rotación. Lo contrario sucede al centro, donde el índice baja hasta $0,7$. El caso sin rotación no hay una mejora y el índice ρ_{RS} permanece bajo.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Canal DNS

Los ángulos en 4.3 demuestran que el tensor S no cambia de orientación a lo largo del canal, ya que sólo cuenta con la componente $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. En cambio para R si varía el ángulo de elevación θ_R en un rango de 0 y $23°$ como se muestra en la figura 4.6, en relación a la variación relativa entre las estadísticas de la turbulencia.

El ángulo θ se relaciona a la componente de corte $\overline{u'v'}$ del tensor de Reynolds. A medida que el esfuerzo cortante es considerable en comparación con las componentes axiales $\overline{u_i'u_i'}$ se obtiene un θ_R mayor. El resultado ideal sería que los ángulos de R fueran iguales a los de S, que es la tendencia que se obtiene al aumentar Reynolds. No se tiene la certeza de que se puede alcanzar el alineamiento entre R y S en un flujo en un canal.

En torno al índice ρ_{RS}, se tienen deficiencias en el modelo para los números de Reynolds utilizados. El mejor resultado se obtuvo con $Re = 10039$ con un valor de $0{,}6$. Se encuentró una relación directa entre ρ_{RS} y θ, debido que solo se obtiene un ángulo variable y el producto interno en el índice se relaciona al coseno de ese ángulo.

Se realizó una evaluación del factor diferencial que aparece en las RANS (2.17), comparando la orientación de los vectores $d\vec{R}$ y $d\vec{S}$ ($R \cdot \nabla$ y $S\nabla$ respectivamente) con el índice $d\rho_{RS}$ definido. En este análisis se obtuvo que el modelo mejora cerca del centro del canal, disminuyendo hacia la orilla. Se obtiene además una similitud entre el factor calculado $d\rho_{RS}$ y la derivada $\frac{\partial \rho_{RS}}{\partial y}$. Sin embargo, el análisis realizado consideraba que $\frac{\partial \nu_\tau}{\partial y} \approx 0$ a lo largo del canal, lo que resultó no ser válido mediante un factor η que sirve de estimador para ν_τ. Se deja como recomendación para un futuro estudio utilizar datos de ν_τ calculados mediante modelos de turbulencia para la validación de los mismos. Así se puede obtener una comparación exacta entre $d\vec{R}$ y $d\vec{S}$, una evaluación directa sobre las RANS.

5.2. Tubería DNS

Los resultados de la tubería DNS no difieren de forma considerable con respecto al canal. Se obtuvieron fluctuaciones de hasta $10°$ en los ángulos ϕ y ζ, debido a la aparición de más componentes de corte en R y S. En cuanto al índice ρ_{RS} también se observa

una similitud con el canal y con los resultados de Schmitt [16].

Sobre el control de la turbulencia correspondiente a los datos DNS con $Re_\tau = 157$, se observaron cambios importantes en la escala del tensor anisotrópico de Reynolds 4.4 con respecto a los datos con $Re_\tau = 180$. Esto sólo influyó sobre los ángulos ϕ y ζ en una pequeña escala al acercarse a $r* = 0$. Según esto y el índice ρ_{RS} similar entre ambos sets de datos DNS, el modelo no mejora al considerar control de turbulencia.

5.3. Tubería LDV con Swirl

Los datos demuestran una influencia del Swirl sobre la turbulencia. La presencia de una componente tangencial sobre el flujo disminuye los esfuerzos cortantes debido a las fluctuaciones.

Los resultados con un número de rotación $Ro = 0$ difieren de la tubería DNS de forma importante en los ángulos de las direcciones principales. Algo ocurre entre $r* = 0{,}5$ y la pared, probablemente por la diferencia de 2 órdenes de magnitud en el múmero de Reynolds, que el tensor de deformación tiene un ángulo de elevación perpendicular. Además el índice ρ_{RS} disminuye en el caso LDV sin rotación, lo que descarta una mejora del modelo de viscosidad turbulenta al aumentar el número de Reynolds en una tubería.

Al generar un Swirl (componente tangencial u_θ) mejora el alineamiento entre el tensor anisotrópico de Reynolds y el tensor de Deformación a lo ancho de toda la tubería. A la entrada del largo de medición $x = 4D$ se obtiene un mejor comportamiento del modelo en el centro de la tubería, y a medida que el flujo se desarrolla disminuye la componente tangencial y los valores más altos de ρ_{RS} se desplazan hacia la orilla.

5.4. Generalidades

La evaluación del modelo de Boussinesq mediante una comparación geométrica entre los tensor R y R permite tener una idea de la base de los modelos de turbulencia. Estos

modelos están dedicados a corregir sus falencias mediante la viscosidad turbulenta, por lo que sería pertinente una revisión de esta cantidad mediante el análisis realizado sobre el operador diferencial de las RANS en distintos flujos. El uso de datos reales de ν_T de simulaciones basadas en modelos de turbulencia podría permitir evaluar directamente sobre las RANS, sin la necesidad de realizar el supuesto donde $\nu_T \cdot \nabla \approx 0$.

En los casos revisados se observaron distintos factores que influyen y que no influyen sobre la validez de la hipótesis de Boussinesq:

- El aumento del número de Reynolds en cierto rango mejora el modelo en un flujo entre placas paralelas, pero no se tiene certeza de que funciona de igual manera para una tubería. Se vió que entre el número Reynolds 5300 para los datos DNS y 280000 para LDV se obtuvo un mejor comportamiento de ρ_{RS} para el menor.

- El control de la turbulencia mediante la disminución de la velocidad de corte u_τ si bien, influye en la orientación de los tensores, no modifica de gran manera el resultado de ρ_{RS}.

- La generación de Swirl produce un mejor alineamiento las direcciones principales de S y R. Entre mayor rotación se obtienen mejores resultados.

Capítulo 6

Anexos

A. Cálculo de Autovalores y Autovectores

La componente escalar de los esfuerzos principales son los autovalores de la matriz tensorial. Para calcularlos se resuelve el sistema cúbico dado por la siguiente expresión:

$$|T - \lambda \cdot I] = 0 \tag{6.1}$$

Donde T es la matriz tensorial y λ corresponde al esfuerzo principal. Como es una matriz de $3x3$, al desarrollar la expresión 6.1 se obtiene una ecuación cúbica, la cuál tiene tres soluciones λ_1 , λ_2 y λ_3 componentes de la diagonal.

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3) = 0 \tag{6.2}$$

Para encontrar la dirección de cada esfuerzo principal o autovector, se soluciona el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[T - \sigma_i \cdot I] \cdot \vec{u_i} = 0 \quad \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma'_x - \lambda_i & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma_y - \lambda'_i & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{yz} & \sigma_z - \lambda'_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = 0 \tag{6.3}$$

Con $i = 1, 2, 3$, se obtienen los autovectores respectivos. Se normalizan:

$$\vec{n_i} = \frac{\vec{u_i}}{|\vec{u_i}|} \tag{6.4}$$

De este modo los esfuerzos principales se pueden expresar como los vectores $\lambda_i \cdot \vec{n_i}$.

B. Gráficos de contorno LDV

Se construyeron los siguientes gráficos para obtener una idea general del comportamiento de los ángulos y para poder compararlos entre las distintas rotaciones de los datos LDV [14].

Se muestran con colores los valores de los distintos ángulos en función de la posición $(r*, x/D)$ indicando la escala a la derecha.

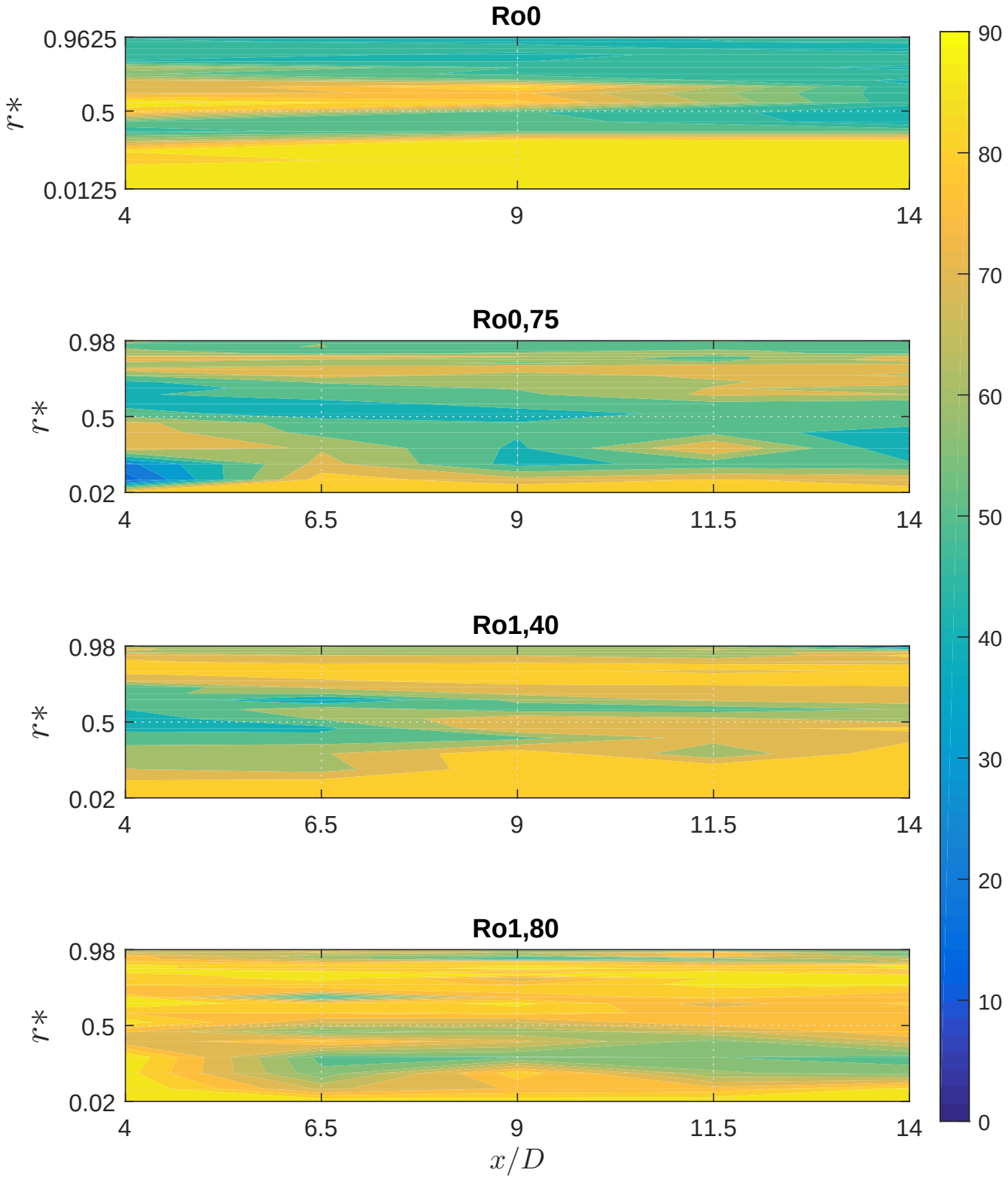


Figura 6.1: Ángulo θ_S tubería LDV [14].

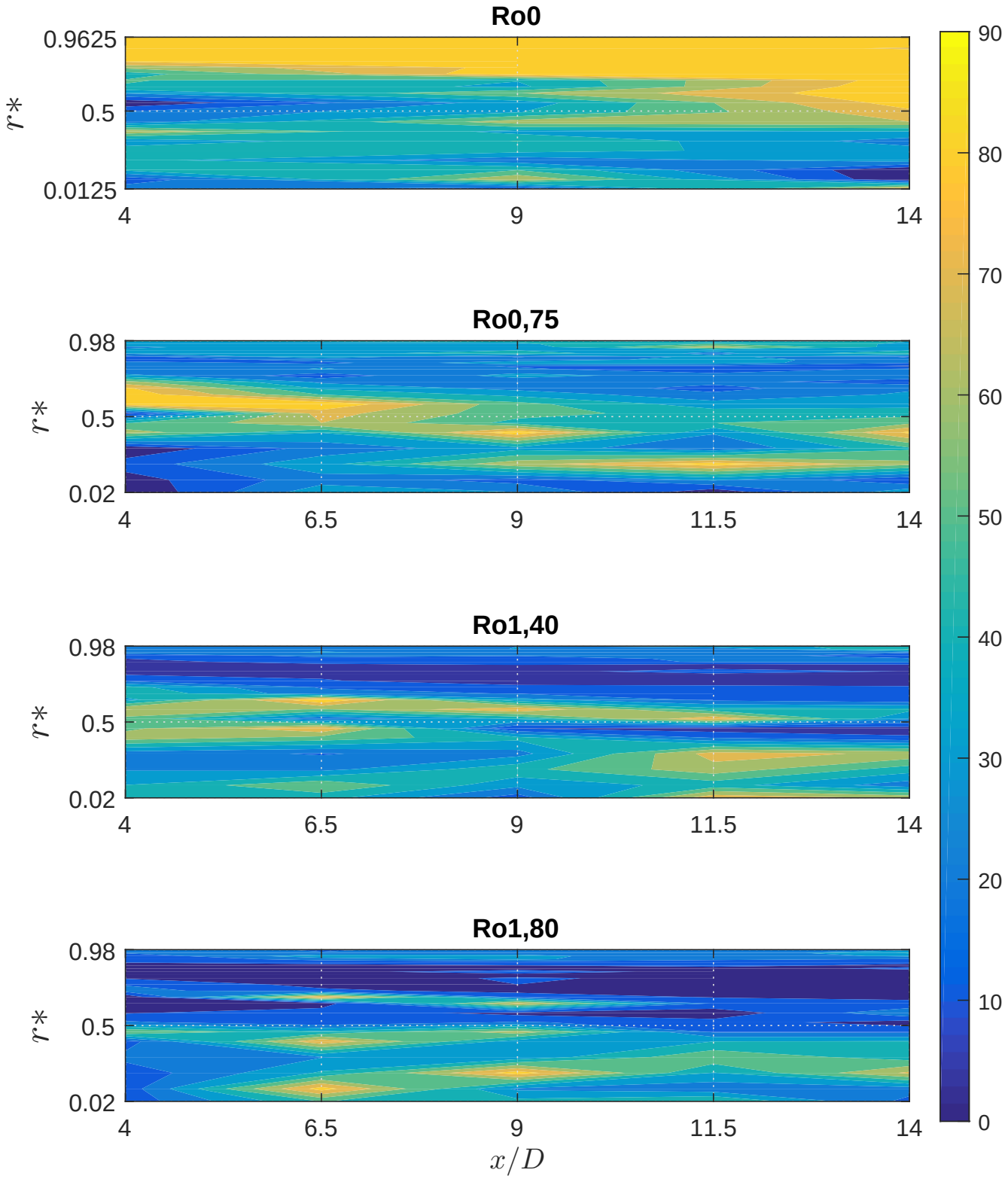


Figura 6.2: Ángulo ϕ_S tubería LDV [14].

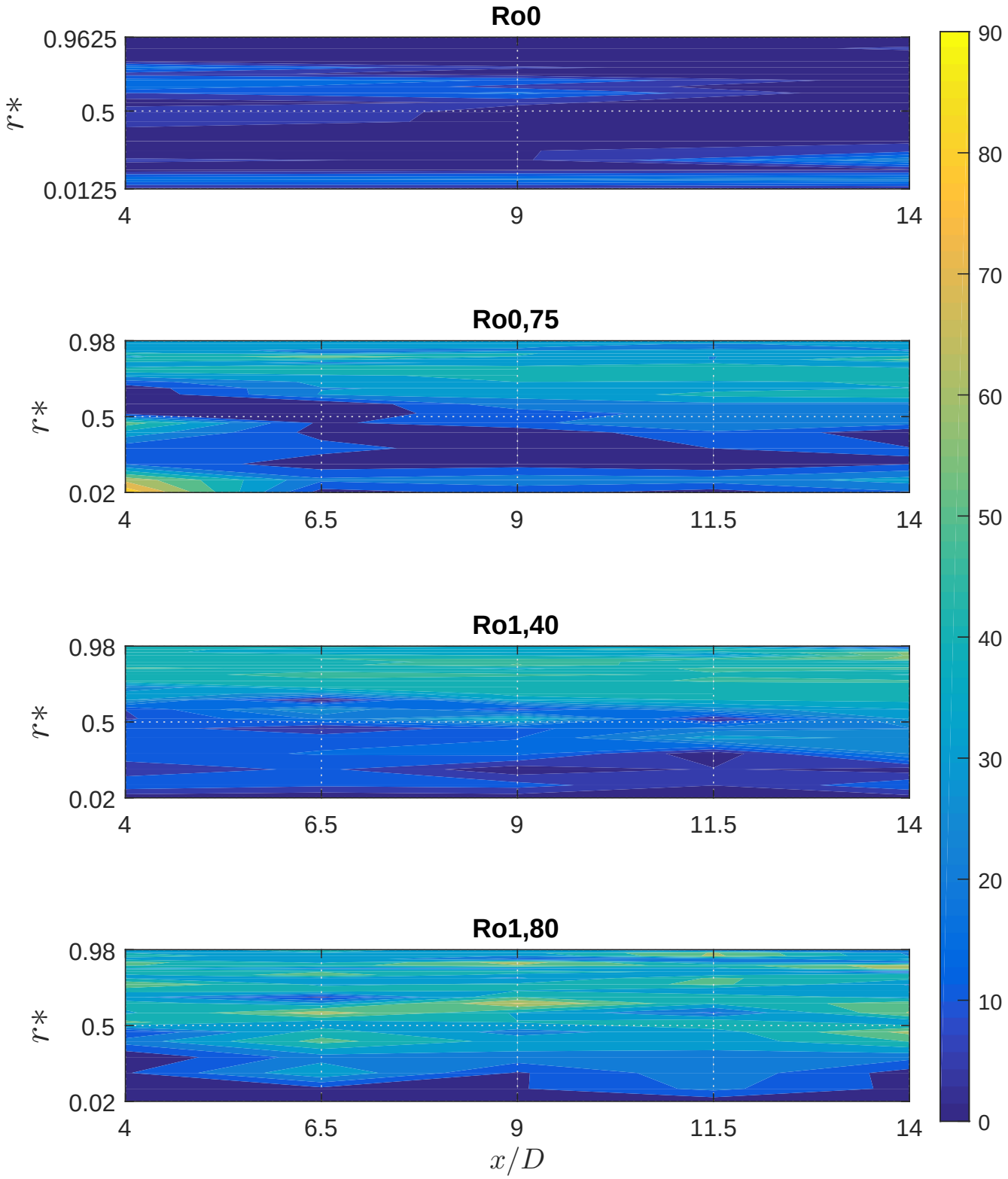


Figura 6.3: Ángulo ζ_S tubería LDV [14].

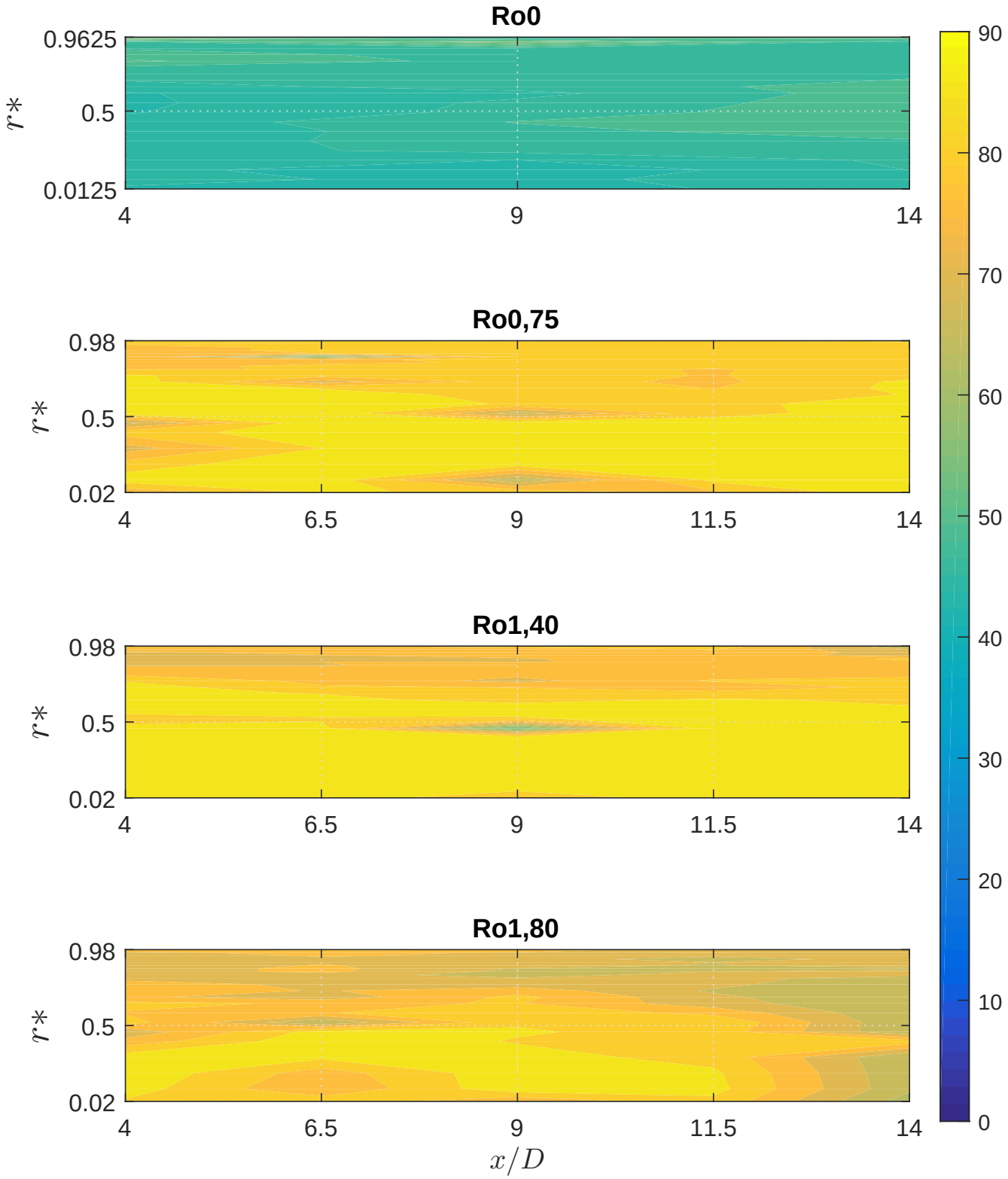


Figura 6.4: Ángulo θ_R tubería LDV [14].

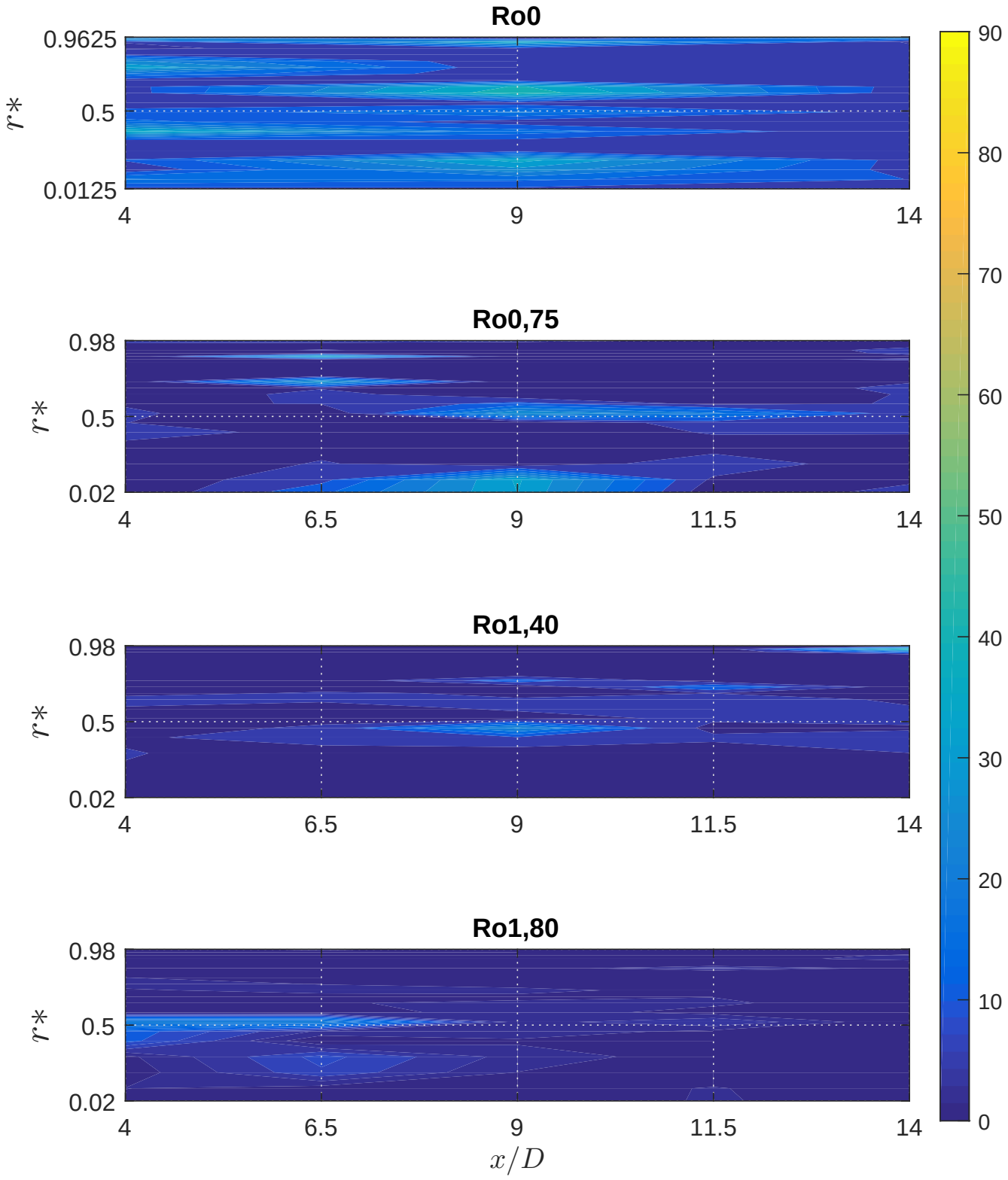


Figura 6.5: Ángulo ϕ_R tubería LDV [14].

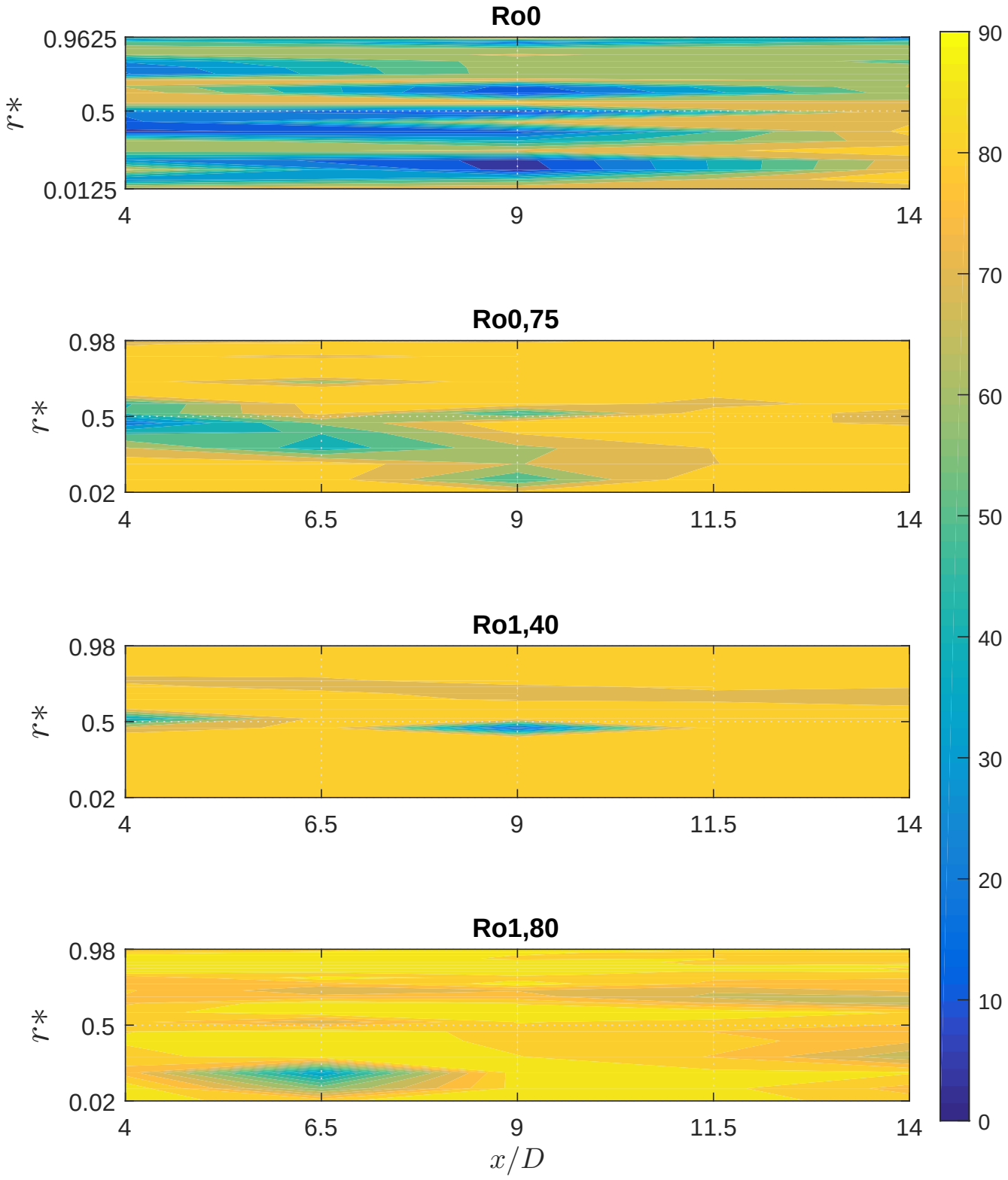


Figura 6.6: Ángulo ζ_R tubería LDV [14].

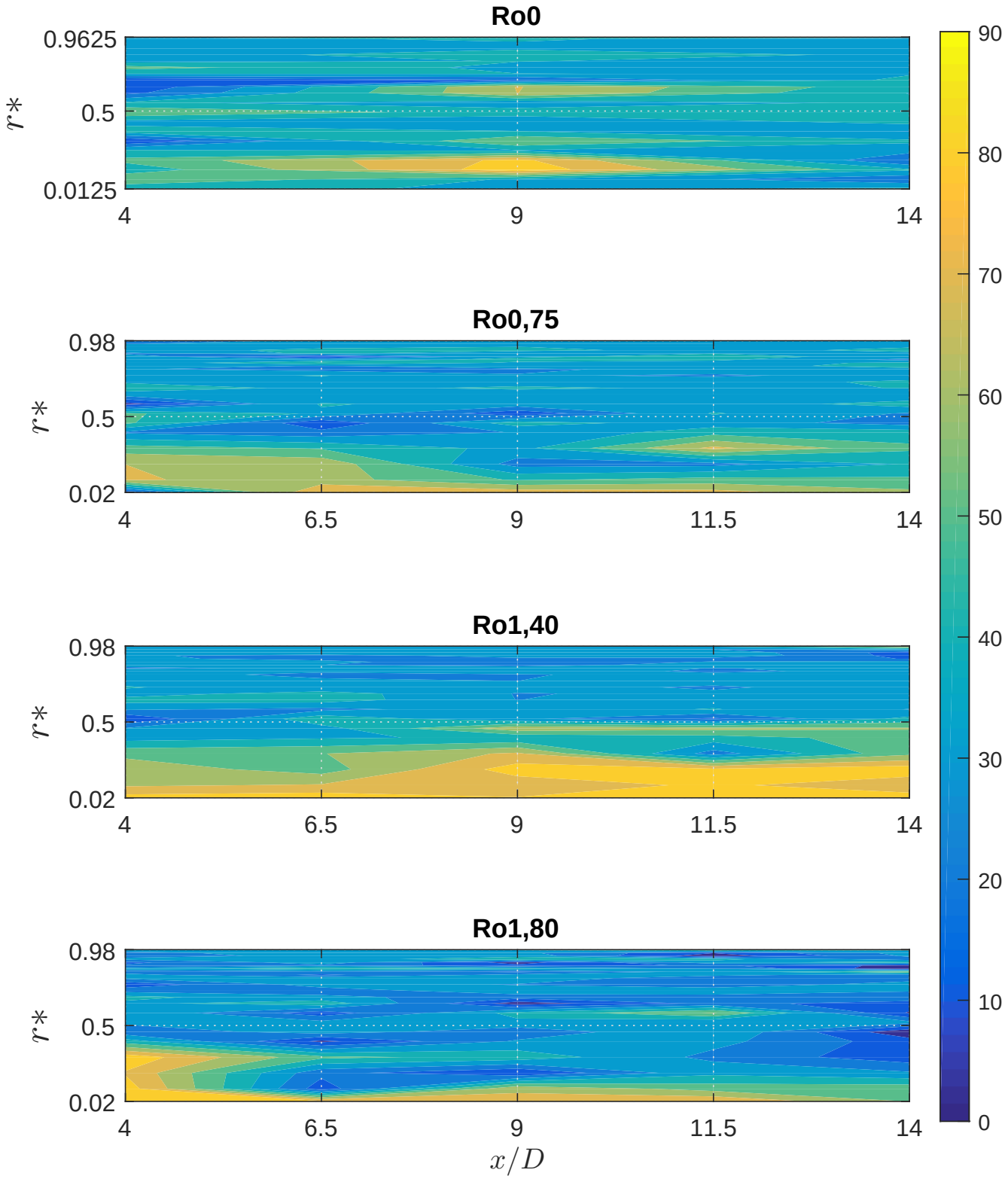


Figura 6.7: Ángulo θ tubería LDV [14].

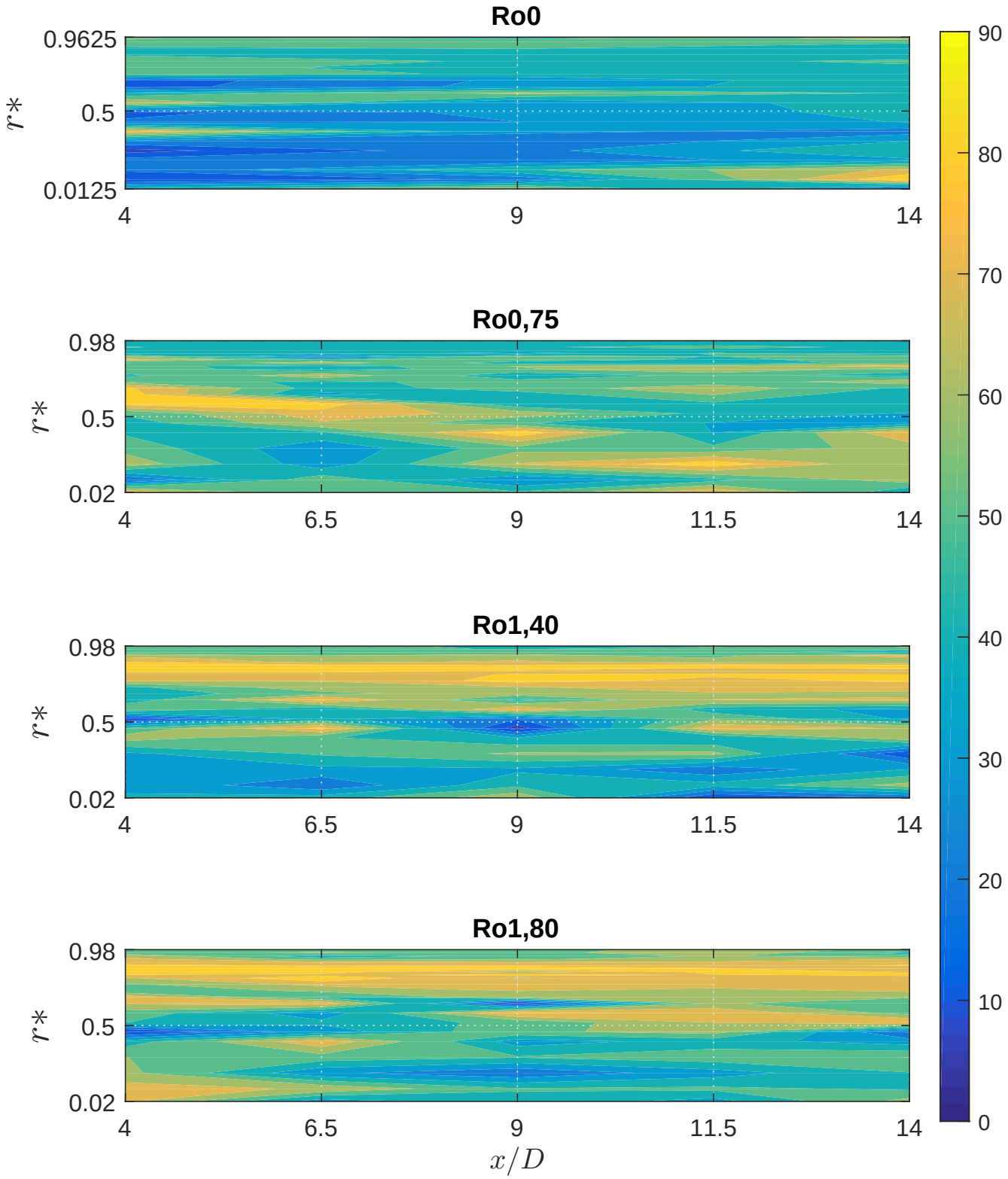


Figura 6.8: Ángulo ϕ tubería LDV [14].

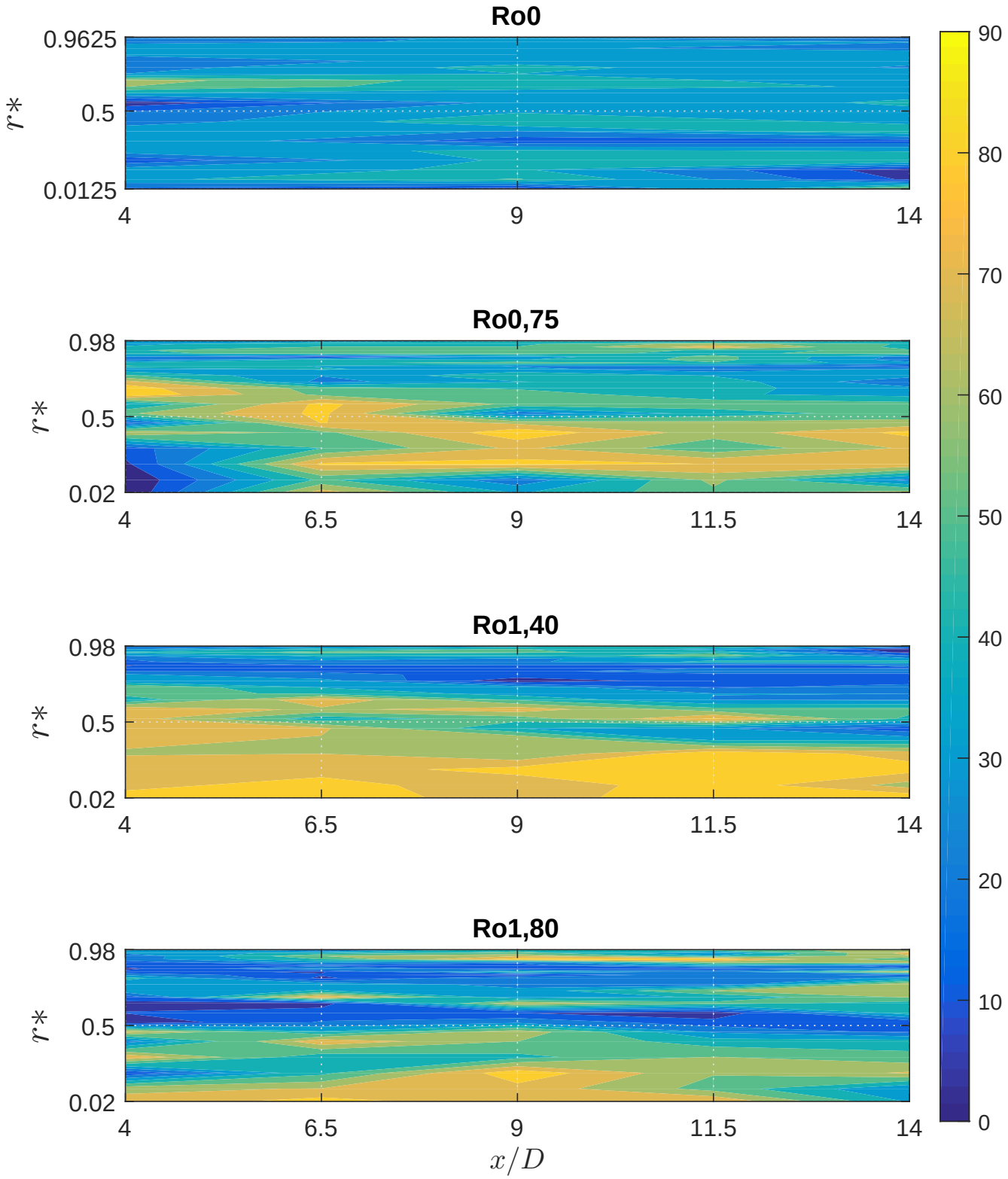


Figura 6.9: Ángulo ζ tubería LDV [14].

C. Códigos Matlab

C.1. Leer Datos

```
function [S,n]=LeerDatos(S)

if((strcmp(S.ext,'xlsx')==1)||(strcmp(S.ext,'xls')==1))
    [DATOS,VARS]=xlsread(strcat(pwd,'\',S.file),S.sheet1)
        ;
    [n,m]=size(DATOS); %n=largo , m=numero de variables
    i=1;
    for j=1:length(S.E)
        if(S.E(j)==1)
            S=setfield(S,S.varn{j,1},DATOS(:,i));
            i=i+1;
        else
            S=setfield(S,S.varn{j,1},zeros(n,1));
        end
    end
    if(S.E(1)==0) %si no se ha escrito el campo 'n'
        S.n=S.i+(S.j-1)*S.nx+(S.k-1)*S.nx*S.ny;
    end
elseif(S.Ext=='mat')
    S=open(S.filem)
end
```

C.2. Cálculos

```
clear all
close all
clc
files={'AlemanRo075.xlsx' 'AlemanRo140.xlsx' 'AlemanRo180
    .xlsx'}
addpath(strcat(fileparts(fileparts(pwd)),'\Funciones'))
```

```
6
7  nxi=[5 5 5];
8  nyi=[1 1 1];
9  nzi=[22 22 22];
10
11 for f=1:3
12     file=files{f};
13     S.file=file;%archivo
14     dummy=strsplit(S.file,'.');
15     S.name=dummy{1};
16     S.ext=dummy{2};
17     clear dummy
18
19     S.sheet1='datosFIX' ;          %hoja de datos
20     S.sheet2='resultados' ; %hoja de resultados
21     S.delta=0.000000001;
22     S.cord=2; %Coordenadas Origen 1=cartesianas , 2=
           polares
23     S.cord2=2; %Coordenadas Destino
24
25     %Numero de nodos en cada dimension
26     S.nx=nxi(f);
27     S.ny=nyi(f);
28     S.nz=nzi(f);
29
30     S.nut=1; %valores de prueba, no deberia afectar en la
           direccion
31     xyz=[0 0 1; 0 1 0; 1 0 0];
32     %Puntero de datos (datos no nulos)
33     S.E=[1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0
           1];
34     %Nombres de los datos
35     S.varn={'n';'i';'j';'k';'x';'y';'z';'u';'v';'w';
36          'uu';'vv';'ww';'uv';'uw';'vw';'dux';'duy';
```

```
37          'duz';'dvx';'dvy';'dvz';'dwx';'dwy';'dwz'}; %u=
                velocidad en x, v= velocidad tangencial, w=
                velocidadRadial
38      [S,dummy]=LeerDatos(S); %Funcion que lee los datos de
            un excel llenando
39                                          %de ceros los datos
                                               que no indica el
                                               puntero E
40      clear dummy
41
42      S.x=S.x.*2; %se cambia la adimensionalizacion de x/D
            a x/(D/2)
43      %Calculo de derivadas campo 2D
44      %Reorden en Datos Structure... de vectores a matrices
45      S=VectorMatriz(S,S.nz,S.nx);
46
47      S=DerivadaSpline2D(S,7,5,S.nz,S.nx);
48
49      for j=1:S.nx
50          for i=1:S.nz
51              S.dtrdr(i,j)=DerivadaSpline2(S,S.z(:,j),S.v
                    (:,j)./S.z(:,j),i);
52          end
53      end
54
55      S.varn{length(S.varn)+1}='dtrdr';
56
57      S=MatrizVector(S,S.nz,S.nx); %Matrices a Vectores
58
59      for n=1:S.ny*S.nx*S.nz %Calculo de angulo para
            distintos valores de y
60          [A]=TensorReynolds(S,n); %uiuj
61          S.K(n)=trace(A)/2; % traza media
62          An=A-diag(2/3*S.K(n)*[1 1 1]); %Tensor
```

```
            Anisotropico
63          S.An{n}=An;
64          S.A{n}=A;
65          [Ap,Dp]=eigen(An,1); %autovalores y autovectores
66          S.Ap{n}=Ap;
67          S.Dp{n}=Dp;
68      end
69
70      for n=1:S.ny*S.nx*S.nz
71          [a]=Boussinesq(S,n); %Tensor Boussinesq
72          ai=a-diag(2/3*S.K(n)*[1 1 1]);%Tensor Deformacion
73          [ap,dp]=eigen(ai,1); %autovalores y autovectores
74          S.a{n}=a; %asigna a structure
75          S.ai{n}=ai;
76          S.ap{n}=ap;
77          S.dp{n}=dp;
78          [S.theta(n),S.phi(n),S.zeta(n)]=AngulosMenevau(S.
                ap{n},S.Ap{n});%Formulas de Menevau
79          [S.theta1(n),S.phi1(n),S.zeta1(n)]=AngulosMenevau
                (S.Ap{n},xyz);
80          [S.theta2(n),S.phi2(n),S.zeta2(n)]=AngulosMenevau
                (S.ap{n},xyz);
81      end
82      %PuntoGradiente %solo caso Canal
83      %{
84      [S.dA,S.pdAx,S.pdAy,S.pdAz]=MatrizPuntoGradiente(S,'A
            '); %componentes en RANS (uiuj * grad)
85      [S.da,S.pdax,S.pday,S.pdaz]=MatrizPuntoGradiente(S,'a
            ');
86      %}
87
88      S.varn={'n';'i';'j';'k';'x';'y';'z';'u';'v';'w';
89          'uu';'vv';'ww';'uv';'uw';'vw';'dux';'duy';
90          'duz';'dvx';'dvy';'dvz';'dwx';'dwy';'dwz';
```

```
91          'K';'An';'A';'Ap';'Dp';'a';'ai';'ap';'dp';
92          'theta';'phi';'zeta';'theta1';'phi1';'zeta1';
93          'theta2';'phi2';'zeta2';'dtrdr'};
94      S=VectorMatriz(S,S.nz,S.nx);
95
96      %Guardar Datos
97      save(strcat(pwd,'\',S.name,'.mat'),'-struct','S'); %
            guarda en archivo .mat
98      %}
99      clear S
100 end
```

C.3. Resultados

```
1  %Codigo usado para mostrar resultados
2  %Tiene como dato de entrada el nombre del dataset
3
4  close all
5  clear all
6  clc
7  %% Variables Iniciales
8   addpath(strcat(fileparts(fileparts(pwd)),'\Funciones'))
9
10 names={'AlemanRo075' 'AlemanRo140' 'AlemanRo180'}
11 names0={'AlemanRo075' 'AlemanRo140' 'AlemanRo180' '
       AlemanRo000'}
12 name0='AlemanRo000'
13 name1='AlemanRo075'
14 name2='AlemanRo140'
15 name3='AlemanRo180'
16
17 s0='x';
18 s1='^';
19 s2='d';
20 s3='v';
```

```
21 s4='s';
22 s5='o';
23 X={'4D' '6,5D' '9D' '11,5D' '14D'};
24 X0={'4D' '9D' '14D'};
25 RO={'0,75' '1,40' '1,80'};
26 RO0={'0,75' '1,40' '1,80' '0'};
27
28 varn={'u' 'v' 'w' 'uu' 'vv' 'ww' 'uv' 'uw' 'vw' 'dux' '
      duz' 'dvx' 'dvz' 'dwx' 'dwz' 'rors' 'theta' 'phi' '
      zeta' 'theta1' 'phi1' 'zeta1' 'theta2' 'phi2' 'zeta2'
      };
29 varn2={'$u_x*$' '$u_\theta*$' '$u_r*$' '$\overline{u_x^,
      u_x^,}*$' '$\overline{u_\theta^, u_\theta^,}*$' '$\
      overline{u_r^, u_r^,}*$' '$\overline{u_x^, u_\theta
      ^,}*$' '$\overline{u_x^, u_r^,}*$' '$\overline{u_\
      theta^, u_r^,}*$' '$du_x / dx$' '$du_x / dr*$' '$du_\
      theta / dx*$' '$du_\theta / dr*$' '$du_r / dx*$' '
      $du_r / dr*$' '$\rho_{RS$' '$\theta$' '$\phi$' '$\
      zeta$' '$\theta_R$' '$\phi_R$' '$\zeta_R$' '$\theta_S$
      ' '$\phi_S$' '$\zeta_S$'};
30 varn3={'ux' 'utheta' 'ur' 'ux ux' 'utheta utheta' 'ur ur'
       'ux utheta' 'ux ur' 'utheta ur' 'dux dx' 'dux dr' '
      dutheta dx' 'dutheta dr' 'dur dx' 'dur dr' 'rhoRS' '
      theta' 'phi' 'zeta' 'theta1' 'phi1' 'zeta1' 'theta2' '
      phi2' 'zeta2'};
31
32 %% Graficos por Dataset
33 for f=1:4
34     name=names0{f};
35
36     S1=open(strcat(pwd,'\',name,'.mat')); %ee datos
          guardados mediante el codigo "Calculos.m"
37
38     S1.drors=zeros(S1.ny,1);
```

```
39
40      for i=1:S1.nz
41          for j=1:S1.nx
42              S1.rors(i,j)=Rors(S1.An{i,j},S1.ai{i,j});
43          end
44      end
45
46
47      %% Colores
48      if (f==4)
49          co = [1 0 0;
50                0 0.7 0;
51                0 0 1];
52          set(groot,'defaultAxesColorOrder',co);
53      else
54      co = [1 0 0;
55            0.7 0.5 0;
56            0 0.7 0;
57            0 0.5 0.7;
58            0 0 1];
59      set(groot,'defaultAxesColorOrder',co);
60      end
61
62      %% Graficos
63      x1=S1.z(:,1);
64
65      for i=1:length(varn)
66          y1=getfield(S1,varn{i});
67          figure('name',varn3{i})
68          if(f==4)
69              p=plot(x1,y1(:,1),s1,x1,y1(:,2),s2,x1,y1(:,3)
                    ,s3);
70          else
71              p=plot(x1,y1(:,1),s1,x1,y1(:,2),s4,x1,y1(:,3)
```

```
                    ,s2,x1,y1(:,4),s5,x1,y1(:,5),s3);
72          end
73          set(p,'LineStyle',':');
74          set(p,'LineWidth',0.5);
75          xlabel('$r*$','Interpreter','latex','fontsize'
                ,15);
76          ylabel(varn2{i},'Interpreter','latex','fontsize'
                ,15);
77          if (f==4)
78              legend(X0{1},X0{2},X0{3},'media')
79          else
80              legend(X{1},X{2},X{3},X{4},X{5},'media')
81          end
82      end
83
84      %% Guardar Graficos
85
86      h = get(0,'children');
87
88      for i=1:length(h)
89        saveas(h(i), [strcat('plots/',num2str(i),'_',get(h(
              i),'name'),'_',RO0{f})], 'fig');
90      end
91
92      close all
93      clear S1
94  end
95
96  %% Graficos por posicion X
97
98  S0=open(strcat(pwd,'\',name0,'.mat'))
99  S1=open(strcat(pwd,'\',name1,'.mat')); %lee datos
        guardados mediante el codigo "Calculos.m"
100 S2=open(strcat(pwd,'\',name2,'.mat'));
```

```
S3=open(strcat(pwd,'\',name3,'.mat'));

S0.drors=zeros(S0.nz,1);
S1.drors=zeros(S1.nz,1);
S2.drors=zeros(S2.nz,1);
S3.drors=zeros(S3.nz,1);

for i=1:S1.nz
    for j=1:S1.nx
        S1.rors(i,j)=Rors(S1.An{i,j},S1.ai{i,j});
        S2.rors(i,j)=Rors(S2.An{i,j},S2.ai{i,j});
        S3.rors(i,j)=Rors(S3.An{i,j},S2.ai{i,j});
    end
end

for i=1:S0.nz
    for j=1:S0.nx
        S0.rors(i,j)=Rors(S0.An{i,j},S0.ai{i,j});
    end
end

%% Colores
co = [1  0  0;
      0.75   0  0.75;
      0  0  1;
      0  0.5  0];
set(groot,'defaultAxesColorOrder',co);
%% Graficos

x1=S1.z(:,1);
x0=S0.z(:,1);
for k=1:5  %columna
    for i=1:length(varn)
        y1=getfield(S1,varn{i});
```

```
135         y2=getfield(S2,varn{i});
136         y3=getfield(S3,varn{i});
137         if ((k==1)||(k==3)||(k==5))
138             y0=getfield(S0,varn{i});
139             y0=y0(:,k/2+1/2);
140             y0s=spline(x0,y0,x1);
141         end
142         y1=y1(:,k);
143         y2=y2(:,k);
144         y3=y3(:,k);
145
146         figure('name',strcat(varn3{i},'_',X{k}))
147         if ((k==1)||(k==3)||(k==5))
148             p=plot(x1,y1,s1,x1,y2,s2,x1,y3,s3,x0,y0,s0);
149         else
150             p=plot(x1,y1,s1,x1,y2,s2,x1,y3,s3);
151         end
152         set(p,'LineStyle','none');
153         xlabel('$r*$','Interpreter','latex','fontsize'
              ,15);
154         ylabel(varn2{i},'Interpreter','latex','fontsize'
              ,15);
155         if ((k==1)||(k==3)||(k==5))
156             legend(RO0{1},RO0{2},RO0{3},RO0{4})
157         else
158             legend(RO{1},RO{2},RO{3})
159         end
160     end
161
162     %Guardar Graficos
163
164     h = get(0,'children');
165
166     for i=1:length(h)
```

```
167         saveas(h(i), [strcat('plots/',num2str(i),'_',get(h(
                i),'name'))], 'fig');
168     end
169
170     close all
171 end
172
173 %% Graficos Generales
174 close all
175 clear y1
176
177 x0=S0.x(1,:)/2;
178 r0=S0.z(:,1);
179 x=S1.x(1,:)/2;
180 r=S1.z(:,1);
181 %Verticales
182 %%{
183 for i=16:25 %Variables de varn
184     y{4}=getfield(S0,varn{i});
185     y{1}=getfield(S1,varn{i});
186     y{2}=getfield(S2,varn{i});
187     y{3}=getfield(S3,varn{i});
188     h1=figure('name',varn{i})
189     subplot(1,4,1);
190     contourf(r0,x0,y{4}','LineColor','none');
191     xlabel('$r*$','Interpreter','latex','fontsize',15);
192     ylabel('$x/D$','Interpreter','latex','fontsize',12);
193     title(strcat('Ro ',RO0{4}))
194     if (i>16)
195         caxis([0,90])
196         colormap(parula)
197     else
198         colormap(jet)
199         caxis([0,1])
```

```
200         end
201         grid on
202         set(gca,'ytick',[4 9 14]);
203         set(gca,'xtick',[min(r0) 0.5 max(r0)]);
204         %set(gca,'xtick',[min(r0) max(r0)]);
205         for j=1:3
206             subplot(1,4,j+1);
207             contourf(r,x,y{j}','LineColor','none');
208             xlabel('$r*$','Interpreter','latex','fontsize'
                    ,15);
209             title(strcat('Ro ',RO0{j}))
210             if (i>16)
211                 caxis([0,90])
212                 colormap(parula)
213             else
214                 colormap(jet)
215                 caxis([0,1])
216             end
217             grid on
218             set(gca,'ytick',[4 6.5 9 11.5 14]);
219             set(gca,'xtick',[min(r) 0.5 max(r)]);
220             %set(gca,'xtick',[min(r) max(r)]);
221         end
222
223
224         hp4 = get(subplot(1,4,4),'Position');
225         colorbar('Position', [hp4(1)+hp4(3)+0.025  hp4(1)
                -0.64  0.03  hp4(2)+hp4(3)*4.5]);
226
227         saveas(h1,strcat('plots/V',varn{i}),'fig');
228 end
229 %}
230 close all
231 %%{
```

```
%Horizontales
for i=16:25 %Variables de varn
    y{4}=getfield(S0,varn{i});
    y{1}=getfield(S1,varn{i});
    y{2}=getfield(S2,varn{i});
    y{3}=getfield(S3,varn{i});
    h1=figure('name',varn{i})
    subplot(4,1,1);
    contourf(x0,r0,y{4},'LineColor','none');
    ylabel('$r*$','Interpreter','latex','fontsize',15);
    title(strcat('Ro ',RO0{4}))
    if (i>16)
        caxis([0,90])
        colormap(parula)
    else
        colormap(jet)
        caxis([0,1])
    end
    grid on
    set(gca,'xtick',[4 9 14]);
    set(gca,'ytick',[min(r0) 0.5 max(r0)]);
    for j=1:3
        subplot(4,1,j+1);
        h=contourf(x,r,y{j},'LineColor','none');
        ylabel('$r*$','Interpreter','latex','fontsize'
            ,15);
        title(strcat('Ro ',RO0{j}))
        if (i>16)
            caxis([0,90])
            colormap(parula)
        else
            colormap(jet)
            caxis([0,1])
        end
```

```
265             grid on
266             set(gca,'xtick',[4 6.5 9 11.5 14]);
267             set(gca,'ytick',[min(r) 0.5 max(r)]);
268         end
269         xlabel('$x/D$','Interpreter','latex','fontsize',12);
270 
271         hp4 = get(subplot(4,1,4),'Position');
272         colorbar('Position', [hp4(1)+hp4(3)+0.03  hp4(2)
              0.03  hp4(2)+hp4(3)*0.87]);
273 
274         saveas(h1,strcat('plots/H',varn{i}),'fig');
275 end
276 %}
277 close all
```

C.4. Tensor Reynolds

```
1 function [A]=TensorReynolds(S,i)
2 
3 if(S.cord==1)%Cartesianas
4 A=[S.uu(i) S.uv(i) S.uw(i); S.uv(i) S.vv(i) S.vw(i) ; S.
     uw(i) S.vw(i) S.ww(i)]; %Tensor datos
5 end
6 
7 if(S.cord==2)%Cilindricas
8 A=[S.ww(i) S.vw(i) S.uw(i);S.vw(i) S.vv(i) S.uv(i) ; S.uw
     (i) S.uv(i) S.uu(i)]; %Tensor datos
9 end
```

C.5. Derivadas con Splines

```
1 function d=DerivadaSpline2(S,x,U,i)
2 
3 pp=spline(x,U);
4 m=length(x);
```

```
5  if(i==1)
6      d=-(ppval(pp,x(i)+S.delta)-U(i))/S.delta;%Derivada
           hacia adelante 1er orden
7  elseif(i==m)
8      d=-(-ppval(pp,x(i)-S.delta)+U(i))/S.delta;%Derivada
           hacia atras 1er orden
9  elseif((i>1)&&(i<m))
10     d=-(ppval(pp,x(i)+S.delta)-ppval(pp,x(i)-S.delta))
           /(2*S.delta);%Derivada centrada 2do orden
11 end
```

```
1  function S=DerivadaSpline2D(S,b1,b2,m1,m2)
2
3  b=b1; %Derivadas con repecto a componente 1
4  dummyx=getfield(S,S.varn{b});
5  for c=8:10
6      a=b+(c-8)*2+4+c;
7      if (S.E(a)==1)
8          dummyU=getfield(S,S.varn{c});
9            for i=1:m1
10                 for j=1:m2
11                     dummyD(i,j)=DerivadaSpline2(S,dummyx(:,j)
                           ,dummyU(:,j),i);
12                 end
13           end
14     end
15     S=setfield(S,S.varn{a},dummyD);
16     clear dummyU dummyD;
17 end
18 b=b2; %Derivadas con repecto a componente 2
19 dummyx=getfield(S,S.varn{b});
20 for c=8:10
21     a=b+(c-8)*2+4+c;
22     if (S.E(a)==1)
23         dummyU=getfield(S,S.varn{c});
```

```
24          for i=1:m1
25              for j=1:m2
26                  dummyD(i,j)=DerivadaSpline2(S,dummyx(i,:)
                        ,dummyU(i,:),j);
27              end
28          end
29      end
30      S=setfield(S,S.varn{a},dummyD);
31      clear dummyU dummyD;
32  end
```

C.6. Tensor Boussinesq

```
1   function [a]=Boussinesq(S,i)
2
3   if(S.cord==1) %Cartesianas
4           a=[2*S.dux(i) S.duy(i)+S.dvx(i) S.duz(i)+S.dwx(i)
                ;
5           S.dvx(i)+S.duy(i) 2*S.dvy(i) S.dvz(i)+S.dwy(i);
6           S.dwx(i)+S.duz(i) S.dwy(i)+S.dvz(i) 2*S.dwz(i)];
7           a=(-S.nut*a + diag(2/3*S.K(i)*[1 1 1])); %Tensor
                Boussinesq (minusculas)
8   end
9
10  if(S.cord==2) %Cilindricas x=>z y=>theta z=>r
11          a=[2*S.dwz(i) (S.z(i)*S.dtrdr(i)+1/S.z(i)*S.dwy(i
                )) (S.dwx(i)+S.duz(i));
12          (S.z(i)*S.dtrdr(i)+1/S.z(i)*S.dwy(i)) 2*(1/S.z(i)
                *S.dvy(i)+S.w(i)/S.z(i)) (1/S.z(i)*S.duy(i)+S.
                dvx(i));
13          (S.dwx(i)+S.duz(i)) (1/S.z(i)*S.duy(i)+S.dvx(i))
                2*S.dux(i)];
14          a=(-S.nut*a + diag(2/3*S.K(i)*[1 1 1])); %Tensor
                Boussinesq (minusculas)
15  end
```

C.7. Autovalores y Autovectores

```
%Prueba principales
function [Dp,Ap]=eigen(A,flag)

[Dp,Ap]=eig(A);
if flag==1
    diagA=diag(Ap);
    [B,I]=sort(diagA,'descend');
    P=zeros(3,3);
    dif=[2 3;
         1 3;
         1 2];
    signos=[1 -1 1];
    for i=1:3
        P(I(i),i)=1;
        if(sum(abs(Dp(:,i)))==0)
            Dp(:,i)=signos(i)*cross(Dp(:,dif(i,1)),Dp(:,
                dif(i,2)));
        end
    end
    Dp=Dp*P;
    Ap=diag(B);
end
%
```

C.8. Ángulos

```
function [theta,phi,zeta]=AngulosMenevau(U,u) %Angulos
    entre 2 direcciones principales U y u
U1=U(:,1);
U2=U(:,2);
U3=U(:,3);
u1=u(:,1);
u2=u(:,2);
```

```
u3=u(:,3);

%Eqs de Menevau
theta=Angulo(U1,u1);
phi=Angulo(U2,u1-dot(u1,U1)*U1);
zeta=Angulo(u3,U3-dot(U3,u1)*u1);
```

```
function ang=Angulo(V1,V2)

V1=abs(V1);
V2=abs(V2);
ang=acos(dot(V1,V2)/(norm(V1)*norm(V2)))*180/pi;
```

C.9. ρ_{RS}

```
function rors=Rors(A,a)

rors=norm((A.*a))/(norm(A)*norm(a));
```

C.10. Diferencial sobre un Tensor

```
function [dA,pdAx,pdAy,pdAz]=MatrizPuntoGradiente(S,str)
    %str es el nombre del campo de S ('a' o 'A')

A=getfield(S,str);
pdAx=0;
pdAy=0;
pdAz=0;

for i=1:S.nx
    for j=1:S.ny
        for k=1:S.nz
            d=zeros(3,3);
            n=i+(j-1)*S.nx+(k-1)*S.nx*S.ny;
            for ix=1:S.nx %vectores de X
```

```
14              x(ix)=S.x(ix+(j-1)*S.nx+(k-1)*S.nx*S.ny);
15              ax{1}(ix)=A{ix+(j-1)*S.nx+(k-1)*S.nx*S.ny
                    }(1,1);
16              ax{2}(ix)=A{ix+(j-1)*S.nx+(k-1)*S.nx*S.ny
                    }(1,2);
17              ax{3}(ix)=A{ix+(j-1)*S.nx+(k-1)*S.nx*S.ny
                    }(1,3);
18          end
19          for jy=1:S.ny %vectores de y
20              y(jy)=S.y(i+(jy-1)*S.nx+(k-1)*S.nx*S.ny);
21              ay(1,jy)=A{i+(jy-1)*S.nx+(k-1)*S.nx*S.ny
                    }(2,1);
22              ay(2,jy)=A{i+(jy-1)*S.nx+(k-1)*S.nx*S.ny
                    }(2,2);
23              ay(3,jy)=A{i+(jy-1)*S.nx+(k-1)*S.nx*S.ny
                    }(2,3);
24          end
25          for kz=1:S.nz %vectores de z
26              z(kz)=S.z(i+(j-1)*S.nx+(kz-1)*S.nx*S.ny);
27              az{1}(kz)=A{i+(j-1)*S.nx+(kz-1)*S.nx*S.ny
                    }(3,1);
28              az{2}(kz)=A{i+(j-1)*S.nx+(kz-1)*S.nx*S.ny
                    }(3,2);
29              az{3}(kz)=A{i+(j-1)*S.nx+(kz-1)*S.nx*S.ny
                    }(3,3);
30          end
31
32          for l=1:3
33              if(length(x)>1)
34                  d(l,1)=DerivadaSpline2(S,x,ax(l,:),i);
35              end
36              if(length(y)>1)
37                  d(l,2)=DerivadaSpline2(S,y,ay(l,:),j);
38              end
```

```
39                  if(length(z)>1)
40                      d(1,3)=DerivadaSpline2(S,z,az(1,:),k);
41                  end
42              end
43
44              dA{n}=d;
45              pdAx(n)=sum(dA{n}(1,:));
46              pdAy(n)=sum(dA{n}(2,:));
47              pdAz(n)=sum(dA{n}(3,:));
48          end
49      end
50  end
```

C.11. Cambio de Estructura de Datos

Vector a Matriz

```
1  function S=VectorMatriz(S,n,m)
2
3  for a=1:length(S.varn);
4      dummy1=getfield(S,S.varn{a}); %datos en formato
           vector
5      for i=1:n
6          for j=1:m
7              if(iscell(dummy1)==1)
8                  dummy2{i,j}=dummy1{i+(j-1)*n}; %formato
                       matriz para vectores de celdas
9              else
10                 dummy2(i,j)=dummy1(i+(j-1)*n); %formato
                       matriz para vectores de datos
11             end
12         end
13     end
14     S=setfield(S,S.varn{a},dummy2);
15     clear dummy1 dummy2
```

```
16 end
```

Matriz a Vector

```
1  function S=MatrizVector(S,n,m)
2
3  for a=1:length(S.varn);
4      dummy1=getfield(S,S.varn{a}); %datos en formato
           matriz
5      S.varn{a}
6      for i=1:n
7          for j=1:m
8              if(iscell(dummy1)==1)
9                  dummy2{i+(j-1)*n}=dummy1{i,j}; %formato
                       vector de celdas
10             else
11                 dummy2(i+(j-1)*n)=dummy1(i,j); %formato
                       vector de datos
12             end
13         end
14     end
15     S=setfield(S,S.varn{a},dummy2);
16     clear dummy2 dummy1
17 end
```

Bibliografía

[1] Luis Ortiz Berrocal. Elasticidad - 3Ed Spanish. 2005.

[2] Dantec Dynamics. Measurement Principles of LDA. http://www.dantecdynamics.com/measurement-principles-of-lda.

[3] R Ferrari. A statistical description of turbulence. 2005. http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/41055/12-820Spring-2005/NR/rdonlyres/Earth--Atmospheric--and-Planetary-Sciences/12-820Spring-2005/A02F7648-8DFD-4A61-AFE9-E22010324E0E/0/chapter2.pdf.

[4] Robert W Fox, Alan T McDonald, and Philip J Pritchard. Introduction to fluid mechanics, volume 7. John Wiley & Sons New York, 1985.

[5] K. Fukagata. Development of DNS Code for Turbulent Pipe Flow. THTLAB, Dept. of Mech. Eng., The Univ. of Tokyo, 2001.

[6] K. Fukagata and N. Kasagi. DNS Database of Turbulence and Heat Transfer. 2002. http://thtlab.jp/dns/dns_database.html.

[7] K. Fukagata and N. Kasagi. Highly energy-conservative finite difference method for the cylindrical coordinate system, volume 181. 2002.

[8] K. Fukagata and N. Kasagi. Drag reduction in turbulent pipe flow by feedback control applied partially to wall, volume 24. 2003.

[9] A. González. Merkmale des Umschlags laminar-turbulent in einer drallbehafteten Ringspaltströmung. Ruhr-Universität Bochum, 2013.

[10] Chad W Higgins, Marc B Parlange, and Charles Menevau. Alignment trends of Velocity gradients and Subgrid-scale fluxes in the Turbulent Atmospheric Boundary Layer. Kluwer Academic Publishers, 2003.

[11] A. Kuroda, N. Kasagi, and M. Hirata. A direct Numerical Simulation of the Turbulent Flow Between Two Parallel Walls: Turbulence Characteristics Near the Wall Without Mean Shear. IIS of the University of Tokyo, 1990.

[12] A. Kuroda, N. Kasagi, and M. Hirata. Investigation of Dynamical Effects of the Mean Shear Rate on the Wall Turbulence via Direct Numerical Simulation. 1990.

[13] Wolfram Mathworld. Cubic Spline. `http://www.mathworld.wolfram.com/CubicSpline.html`.

[14] Schmidts M. Rocklage-Marliani, G. and V.I. Vasanta Ram. Three-Dimensional Laser-Doppler Velocimeter Measurements in Swirling Turbulent Pipe Flow. Kluwer Academic Publishers, 2003.

[15] Herrmann Schlichting, Klaus Gersten, and Klaus Gersten. Boundary-layer theory , Chapter 9. Springer Science & Business Media, 2000.

[16] Francois G Schmitt. About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity. 2007. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00264386`.